

Некоторые рассуждения об истоках и современных приложениях геометрии Лобачевского

Д.А. Таюрский

По материалам доклада, представленного на Расширенном заседании Ученого Совета КФУ, посвященном 200-летию открытия Н.И. Лобачевским неевклидовой геометрии, 26 февраля 2026 г.

DOI: 10.26907/2949-3919.2026.1.7-15

Нам не дано знать, какой божественный синтез физических взаимодействий, химических реакций, биохимических превращений в мозге человека порождает новую гениальную идею, приводит к новым научным открытиям. Я думаю, что, если бы мы это знали, нам бы не требовалась помощь искусственного интеллекта. И пока мы этого не знаем, видимо, эта эпоха будет продолжаться. 23 февраля 1826 года на заседании Физико-математического общества Николай Иванович Лобачевский впервые представил научному сообществу свои идеи о неевклидовой геометрии. Это был не просто революционный шаг, это был переворот в науке, хотя осознание его важности пришло не сразу. Но и сегодня мы остаемся в догадках, как Лобачевский пришел к такому феноменальному открытию, к такой гениальной идее.

Будучи ярким оппонентом господствующей в то время идеалистической философии И. Канта, Н.И. Лобачевский всегда говорил, что «*первые понятия о природе вещей, которые, будучи раз приобретены, сохраняются навсегда. . .*»¹ (1824) и «*первыми данными без сомнения всегда будут те понятия, которые мы приобретаем в природе посредством наших чувств*» (1829). Это связано непосредственно с работой Николая Ивановича Лобачевского.

За весь период своей работы Н.И. Лобачевский заведовал только одной кафедрой. Эта кафедра называлась «Кафедрой теоретической и опытной физики». Возглавлял он ее в течение почти 15 лет, в период с 1819 по 1833 гг. Он никогда не заведовал кафедрой математики.

Свою преподавательскую деятельность Н.И. Лобачевский начал в 1811 году после утверждения в должности адъюнкта физико-математических наук. В 1816 году ему было присвоено звание экстраординарного профессора, а в 1822 году – звание ординарного профессора. В 1826 году, 23 февраля, он впервые обнародовал свои идеи о неевклидовой геометрии, а на следующий год он стал ректором Казанского университета и на протяжении 19 лет нес эту непростую ношу. Число читаемых им курсов было огромным.

¹Здесь и далее, если не оговорено иное, цитирование первоисточников приводится по монографии [1].

К ним относились курсы арифметики, алгебры и тригонометрии, плоской и сферической геометрии, дифференциального и интегрального исчисления по Монжу и Лагранжу, математической физики, курсы по ряду разделов механики, геодезии, топографии, теоретической и физической астрономии, математической электростатики. Курс лекций по физике Н.И. Лобачевский начал читать в 1819/20 учебном году. Его лекции всегда были на переднем крае науки того времени: передовые открытия, такие, как открытия по волновой оптике и электродинамике французскими физиками практически сразу же были внесены в программу этого курса. В лекциях 1823/24 учебного года обсуждались работы известных физиков того времени О.Ж. Френеля, С.Д. Пуассона, Э.Ф. Хладни, хотя волновая оптика Френеля получила признание Парижской академии наук только в 1823 году. Это говорит как раз о том, что он всегда был на передовом крае науки. Все это является примером того, как следует использовать передовые открытия науки в учебном процессе.

В журнале “Обозрение преподавания чистой математики на 1822–1823 год” Н.И. Лобачевский писал: *«Мы познаем в природе одни только тела; следовательно, понятия о линиях и поверхностях суть понятия произведенные, а не приобретенные, и по сему не должны быть принимаемы за основание математической науки»*.

Курс физики Н.И. Лобачевским был поделен на три разряда: первый и второй разряды – разделы физики; третий разряд – специально разработанный Н.И. Лобачевским курс математической физики. В Российской империи это был первый курс математической физики.

В этом курсе впервые использован серьезный математический аппарат для описания физических явлений (до этого вся математическая трактовка давалась лишь в объеме элементарных физических построений и алгебраических вычислений).

Повышению уровня преподавания курса математической физики способствовали исследования по математической теории электростатики и электродинамики (в первой половине XIX века этими исследованиями занимались только в Казанском университете).

Н.И. Лобачевский в курсе математической физики делил все физические явления на три группы в зависимости от того, какими силами они объясняются.

- 1) Первая группа – явления, которые описываются силами, *«действующими в прикосновении»* – теплота внутри тела, отражение и преломление света с позиций корпускулярной теории, капиллярные явления, так называемые уравнения параболического типа.
- 2) Вторая группа – явления, которые описываются силами, действующими на заметных расстояниях – электростатические, магнитные, электродинамические; соответствующие уравнения – уравнения эллиптического типа.
- 3) Третья группа – явления, которые объясняются силами упругости в телах – колебания в несжимаемой жидкости, явления, связанные с волновой теорией света, звуковые явления; соответствующие уравнения – уравнения гиперболического типа.

Н.И. Лобачевский впервые в истории российской математики написал учебник по математической физике.

В связи с этим я думаю, что в свете подготовки следующего цикла премии и медали им. Н.И. Лобачевского мы могли бы немного расширить область по присуждению этой премии и давать ее не только за заслуги в области геометрии и математики, но также подумать и о том, чтобы включить сюда и его заслуги в области математической физики, для которой Н.И. Лобачевский сделал не меньше, чем сделал для других разделов математики.

Большое внимание Н.И. Лобачевский уделял методике преподавания, написанию учебников, воспитанию. Через два года мы будем отмечать опять же 200 лет со дня его актовой лекции, посвященной воспитанию студентов.

В это время Н.И. Лобачевским были написаны:

- наставления учителям математики в гимназиях и уездных училищах (изложены наиболее эффективные методы преподавания математики);
- оригинальные конспекты по физике и математике;
- учебник по алгебре;
- учебник по геометрии (был утерян и найден в конце 19 века и издан);
- инструкция по преподаванию физики в гимназии.

Еще раз хочу обратить внимание наших профессоров. Н.И. Лобачевский работал с гимназическим курсом. Он, современными словами, шел в школу и начинал готовить студентов со школьной скамьи, с гимназической скамьи.

В 1819 году Н.И. Лобачевский принял руководство физическим кабинетом, на тот момент весь инвентарь которого составляли лишь несколько приборов.

Пополнение коллекции демонстрационных приборов физического кабинета происходило по трем направлениям:

- закупка инструментов и приборов за границей;
- заказ приборов и инструментов у мастеров и заводов в России;
- покупка у частных лиц.

По инициативе Н.И. Лобачевского в 1838/39 и 1839/40 учебных годах при физическом кабинете университета было организовано чтение публичных лекций по физике, которые сопровождались демонстрационными опытами. Насколько это созвучно тому, что мы делаем сегодня, проводим Дни науки, традиции которых были заложены еще Н.И. Лобачевским.

Что касается физического кабинета, здесь нужно сказать несколько слов особо. В 1821 году во время командировки в Петербург Николай Иванович осмотрел мастерские по изготовлению физических приборов и составил для попечителя округа подробную записку со списком необходимого оборудования для функционирования физического

кабинета в Казанском университете. Н.И. Лобачевский писал М.Л. Магницкому: *«Что касается до составления физического кабинета, то я сужу о здешних художниках, что в них не найдется большей половины тех инструментов, из которых желательно мне было бы составить физический кабинет в Казани по образцу новейших кабинетов»*. Пришлось делать заказы у разных мастеров в Петербурге.

А 30 ноября 1821 года он подал обширную докладную записку попечителю округа, в которой обосновал необходимость иметь в университете **хороший физический кабинет**. Кроме приборов, заказанных в Петербурге у известного мастера Роспини (на 5000 рублей), Н.И. Лобачевский предложил общий список приборов, необходимых для физического кабинета, стоимостью в 15000 рублей. Он подчеркивал, что это самые необходимые приборы, т. е., по его мнению, в больших кабинетах надобно стараться не о числе, а совершенстве машин. Он заботился о том, чтобы студенты проходили хорошую экспериментальную подготовку.

21 апреля 1822 года физический кабинет получил, по предложению Н.И. Лобачевского, новое, более обширное и удобное помещение. Однако отпущенных министерством средств для оборудования физического кабинета оказалось недостаточно.

Став в 1827 году ректором Казанского университета, Н.И. Лобачевский развил энергичную деятельность по оборудованию учебно-вспомогательных учреждений всего университета, в том числе и физического кабинета. Он неоднократно ставил вопрос о создании при университете мастерской, где можно было бы не только ремонтировать старые, но еще делать и новые приборы.

Министерство пошло на отпуск десяти тысяч рублей (из сбереженных университетом с 1820 года) на покупку станков и разного оборудования для мастерской. На должность механика был приглашен из Мюнхена Ф. Ней. В том же году в Петербурге и Мюнхене университет приобрел станки и инструменты у известного механика Эртеля. С 1830 года механическая мастерская начала изготовление приборов – барометр, инклинометр, теодолит и др.

В механической мастерской Казанского университета производились приборы не только для своего университета, но выполнялись заказы Московского и Харьковского университетов, а также ряда других учебных заведений России. В ней также делались приборы для физических кабинетов гимназий Казанского учебного округа и метеорологических пунктов.

По свидетельству профессора Э.А. Кнорра, который возглавил физический кабинет после Н.И. Лобачевского, физический кабинет Казанского университета *«мог поспорить с самыми лучшими европейскими собраниями, уступая только кабинетам французской коллегии в Париже и Венского университета»*. Эта характеристика являлась общепризнанной.

В “Журнале Министерства народного просвещения”, являвшемся официальным правительственным органом, в 1849 году отмечалось: *«... ни один из отечественных университетов не может похвалиться такими богатыми и роскошными учебными пособиями*

и учеными, какие представляет нам университет Казанский. . . Многие из коллекций кабинетов Казанского университета приведены в такое состояние, что в настоящее время по богатству и роскоши своей могут с честью выдержать соперничество с лучшими заграничными собраниями этого рода».

Н.И. Лобачевский, будучи ректором Казанского университета, строит специальное здание для химического кабинета, который затем использовался как здание химического института имени Бутлерова, он сейчас находится во дворе главного здания университета.

В такой атмосфере шло формирование мышления Н.И. Лобачевского, и то, что он стал говорить о неевклидовой геометрии – геометрии, где нет пятого постулата Евклида о параллельных прямых, это возможно следствие того, что он был глубоко погружен в естественно-научные проблемы: он преподавал физику, он занимался физическими экспериментами.

Я здесь не стал упоминать то, что он сделал для астрономии – это тема особого доклада. Н.И. Лобачевский формирует впервые представление человечества о том, что геометрия с отрицательной кривизной есть одна из возможных неевклидовых геометрий. Случилось так, что он, возможно, пошел по самому сложному пути, поскольку более простая геометрия – сферическая геометрия, которая также является неевклидовой, позднее развивалась в работах Б. Римана, А. Пуанкаре, и венцом творения стала общая теория относительности А. Эйнштейна, которая использовала все идеи Н.И. Лобачевского, заложенные в неевклидовой геометрии – геометрии на искривленной поверхности. История состоит из совпадений: Н.И. Лобачевский свое первое представление сделал в 1826 году; в этом же году рождается великий немецкий математик Бернхард Риман, который сделал много для того, чтобы сферическая геометрия – геометрия Римана – вошла в обиход науки.

Гиперболическая геометрия, открытая в XIX веке как чисто математическая абстракция, сегодня переживает настоящий ренессанс, становясь незаменимым инструментом в самых разных областях современной науки. Геометрия Лобачевского прошла долгий путь от интеллектуального вызова математиков до одного из самых мощных и универсальных инструментов современной науки. Ее способность естественным образом описывать иерархии, сложные сети и экспоненциальный рост информации делает ее востребованной в самых разных областях – от фундаментальной физики до передовых разработок в области искусственного интеллекта. Ее междисциплинарная роль продолжает стремительно расти, открывая новые горизонты для понимания как устройства нашего мира, так и принципов работы нашего собственного разума. В этой связи я хотел бы остановиться на трех моментах, которые мне показались наиболее интересными, хотя общепризнанные приложения геометрии Лобачевского, которые имеются, это, прежде всего, гравитация, теория относительности, синхронизация времени хорошо известны. Я думаю, что они и с математической точки зрения будут освещены в других докладах. Эти три момента касаются иерархических структур, машинного обучения с использованием геодезических потоков (так называемых “geodesic learning”) и некоторых вопросов геномики и биоинформатики.

На протяжении десятилетий математики, специалисты в области компьютерных наук, а в последнее время специалисты по машинному обучению ищут эффективные способы представления иерархических структур и анализа их свойств. Это, кстати, важно для очень многих отраслей, которые затрагивает искусственный интеллект, и, пожалуй, это самая “горячая” область применения гиперболической геометрии сегодня. Многие реальные данные обладают скрытой иерархической или древовидной структурой (например, тексты, социальные сети, графы знаний), которую невозможно адекватно представить в “плоском” евклидовом пространстве без искажений [2]. Попытка встроить древовидную структуру в плоское евклидово пространство неизбежно приводит к искажениям и неэффективности. Это все равно, что пытаться сплющить апельсиновую корку; все равно она растянется, и где-нибудь порвется.

Удивительная геометрия с отрицательной кривизной (это та геометрия, которую изобрел Н.И. Лобачевский) делает ее идеально подходящей для изображения иерархий. Основная идея заключается в том, что гиперболическое пространство расширяется экспоненциально. Длина окружности и площадь гиперболического круга растут экспоненциально с увеличением его гиперболического радиуса ρ . Это резко контрастирует с полиномиальным (т. е., степенным) ростом ($2\pi R$ и πR^2) в евклидовом пространстве. Именно такое экспоненциальное расширение нам и необходимо, чтобы естественным образом встроить древовидные структуры. Если мы сопоставим глубину d узла дерева с гиперболическим радиусом $\rho(d)$, то количество доступного “пространства” (периметра или площади) на этом радиусе будет расти экспоненциально, отражая экспоненциальный рост числа узлов на этой глубине.

Таким образом, гиперболическое пространство, благодаря своей отрицательной кривизне, экспоненциально расширяется от центра к границе. Это делает его идеальным для вложения (embedding) иерархических данных: корень иерархии помещается в центр, а дочерние элементы – на периферию, при этом “объем” пространства растет так же быстро, как и число элементов на каждом уровне. Это позволяет создавать очень компактные и эффективные модели [2].

Гиперболические представления уже доказали свое превосходство над евклидовыми аналогами в целом ряде задач:

- обработка естественного языка (NLP): моделирование семантических иерархий (например, “животное” $\rightarrow$ “млекопитающее” $\rightarrow$ “собака” $\rightarrow$ “такса”) и анализ текстовых связей;
- компьютерное зрение (CV): классификация изображений, распознавание объектов и даже генерация изображений с учетом иерархии визуальных концепций;
- рекомендательные системы: построение точных рекомендаций товаров или контента на основе иерархии предпочтений пользователей;
- анализ графов и социальных сетей: выявление скрытых сообществ и структуры связей.

Следующее применение, о котором хотелось бы сказать несколько слов – машинное обучение с помощью геодезических потоков (geodesic learning). Многие физические, биологические и инженерные системы со временем эволюционируют в соответствии с геометрическими законами. Например, хорошо известно, что согласно законам Кеплера планеты движутся по эллиптическим орбитам, которые формируются гравитационными силами; жидкости закручиваются по линиям тока, определяемым кривизной и завихрением. Основная задача современного машинного обучения – точно и эффективно моделировать эту динамику, особенно в тех случаях, когда лежащая в ее основе структура нелинейна (например, для турбулентных потоков), многомерна или доступна лишь косвенно.

Большинство существующих подходов к глубокому обучению в области динамики аппроксимируют траектории только в плоских евклидовых пространствах и часто игнорируют базовую евклидову геометрию данных. Это приводит к тому, что модели могут быть выразительными, но им не хватает интерпретируемости, физической согласованности или способности к обобщению.

В биологии и нейронауках в последние десять лет наблюдается взрывной интерес к использованию гиперболической геометрии. Исследования последних лет показали, что структура связей в мозге (коннектомы) и нейронные репрезентации информации имеют глубинную гиперболическую природу. Группа ученых обнаружила, что гиперболические карты обеспечивают почти идеальную навигацию по коннектомам различных видов животных, в отличие от евклидовых [3]. Это означает, что гиперболическая геометрия является естественным и эффективным “языком” для описания организации мозга. Исследователи из Института Солка экспериментально доказали, что нейроны гиппокампа – области мозга, отвечающей за пространственную навигацию и память, – представляют пространство в соответствии с гиперболической геометрией [4]. Время, проведенное в определенной среде, приводит к тому, что ее нейронное представление не линейно, а экспоненциально расширяется, словно в форме песочных часов. Это открытие имеет огромное значение для понимания процессов обучения, памяти и даже нейродегенеративных расстройств, таких как болезнь Альцгеймера. Обзорная статья в журнале *Current Opinion in Neurobiology* аргументирует, что гиперболическая геометрия является универсальным свойством биологических сетей, включая белковые взаимодействия и регуляцию генов. Такие сети являются максимально отзывчивыми на внешние воздействия и устойчивыми к удалению или добавлению узлов, что делает их оптимальными с эволюционной точки зрения [5].

Одной из важнейших задач современной биологии является понимание того, как генотип организма влияет на его фенотип, например, на риск заболевания. Сложность этой проблемы проистекает из сложности этих взаимоотношений, когда тысячи генов могут влиять на интересующий фенотип посредством нелинейных взаимодействий [6].

За последние пятнадцать лет исследования генома показали, что ряд признаков, включая те, которые связаны с метаболическими и психическими расстройствами, потенциально связаны с тысячами генов, причем каждый ген объясняет лишь малую долю

ожидаемой наследуемости. В то же время корреляции между генами широко распространены. Эти наблюдения повышают вероятность того, что генетические вариации и их экспрессия могут быть описаны с помощью низкоразмерной геометрии. Идентификация этой геометрии намного облегчила бы поиск соответствующих комбинаций генов и того, как они влияют на данный признак.

Традиционные подходы к нахождению пространств малой размерности, такие, как анализ главных компонент (РСА) при секвенировании генома предполагают, что пространство является “плоским” (т. е. имеет нулевую кривизну), и оценивают расстояния между точками в соответствии с евклидовой метрикой. Однако в последнее время гиперболические пространства привлекают большое внимание как для анализа биологических данных, так и в компьютерных науках. Причина такого интереса заключается в том, что гиперболическая метрика аппроксимирует экспоненциальное разложение возможных состояний системы, описываемое иерархическим древовидным процессом. Иерархические представления, такие как филогенетические деревья и кластерные клады, уже давно используются для характеристики различий между клетками, белками, активностью метаболических сетей внутри клеток и функциональных сетей внутри мозга. Все это говорит о том, что гиперболическую метрику следует рассматривать как одну из возможностей при поиске низкоразмерной геометрии в биологических данных.

Я призываю наших программистов, биологов, биоинформатиков, математиков, подумать над этими проблемами и быть как Н.И. Лобачевский на острие современной науки. Сегодня в мире наблюдается взрывной интерес к этой области, к геометризации вычислений. В завершение, хотелось бы привести слова замечательного русского математика-геометра Вениамина Федоровича Кагана (1869–1953), который фактически был первым исследователем творческого наследия Н.И. Лобачевского. Ровно сто лет назад при праздновании столетия со дня открытия гиперболической геометрии, Каган написал: *«История науки не знает открытия, которое по исключительной неожиданности обнаруженных фактов сколько-нибудь бы приближалось к тому, столетие которого мы празднуем»* [7].

Очень часто в популярной литературе Н.И. Лобачевского называют Коперником девятнадцатого века. В.Ф. Каган отрицает это. Да, Николай Коперник внес вклад в науку, он установил, что планеты вращаются вокруг Солнца. Но еще ранее данное предположение уже выдвигал древнегреческий астроном, математик и философ Аристарх Самосский. В.Ф. Каган говорит об этом очень образно: *«Легче остановить Солнце, легче сдвинуть Землю, чем изменить сумму углов треугольника...»*, а ведь это именно то, что лежит в основании неевклидовой геометрии.

Н.И. Лобачевский сделал свое первое представление неевклидовой геометрии 23 февраля 1826 года. Ровно через тридцать лет после этого события, 24 февраля 1856 года, он уходит из жизни.

Список литературы

- [1] А.В. Аганов, М.Х. Салахов, Н.С. Альтшулер, *История физики и астрономии в Казанском университете за 200 лет*, Изд-во Казан. ун-та, Казань, 2007.
- [2] P. Fang, M. Harandi, T. Le, D. Phung, *Hyperbolic geometry in computer vision: A survey*, arXiv:2304.10764.
DOI: <https://doi.org/10.48550/arXiv.2304.10764>
- [3] A. Allard, M.Á. Serrano, *Navigable maps of structural brain networks across species*, PLoS Comput. Biol. **16** (2), art. e1007584.
DOI: <http://doi.org/10.1371/journal.pcbi.1007584>
- [4] H. Zhang, P.D. Rich, A.K. Lee, T.O. Sharpee, *Hippocampal spatial representations exhibit a hyperbolic geometry that expands with experience*, Nat. Neurosci. **26**, 131–139 (2023).
DOI: <https://doi.org/10.1038/s41593-022-01212-4>
- [5] T.O. Sharpee, *An argument for hyperbolic geometry in neural circuits*, Curr. Opin. Neurobiol. **58**, 101–104 (2019).
DOI: <https://doi.org/10.1016/j.conb.2019.07.008>
- [6] Y. Zhou, T.O. Sharpee, *Hyperbolic geometry of gene expression*, iScience **24** (3), art. 102225 (2021).
DOI: <https://doi.org/10.1016/j.isci.2021.102225>
- [7] В.Ф. Каган, *Основания геометрии. Учение об обосновании геометрии в ходе его исторического развития. Ч. 1. Геометрия Лобачевского и ее предыстория*, Гостехиздат, М.–Л., 1949.

Дмитрий Альбертович Таюрский

Казанский (Приволжский) федеральный университет,
ул. Кремлевская, д. 18, г. Казань, 420008, Россия,
e-mail: Dmitry.Tayurskii@kpfu.ru