

Многообразие $\mathbf{SP}(M_3)$. II. Дуальность

А.Е. Изъюрова, М.В. Швидефски

*Посвящается Казанскому университету,
Родине неевклидовой геометрии,
одному из центров российской науки*

Аннотация. Диамантом называется пятиэлементная решетка M_3 , которая является наименьшей недистрибутивной модулярной решеткой. Мы устанавливаем дуальную эквивалентность категории, объектами которой являются биалгебраические решетки, принадлежащие многообразию, порожденному M_3 , а морфизмами – полные гомоморфизмы решеток, и категории, объектами которой являются так называемые M_3 -пространства, упорядоченные пространства с отношением эквивалентности, а морфизмами – так называемые M_3 -морфизмы. Аналогичный результат был установлен ранее В. Дзёбяком и вторым автором для пентагона N_5 , наименьшей немодулярной решетки с пятью элементами. Так называемые N_5 -пространства и M_3 -пространства имеют различную структуру. Однако, N_5 -морфизмы и M_3 -морфизмы соответственно возникают благодаря использованию классического понятия – понятия минимального покрытия элемента решетки.

Ключевые слова: решетка, многообразие, диамант, дуальность.

DOI: 10.26907/2949-3919.2026.1.67-91

Введение

Как следует из аннотации, мы устанавливаем дуальную эквивалентность двух категорий: категории $\mathbb{B}_3$, объектами которой являются биалгебраические решетки, принадлежащие многообразию, порожденному M_3 (которое совпадает с классом $\mathbf{SP}(M_3)$), а морфизмами – полные гомоморфизмы решеток, и категории $\mathbb{M}_3$, объектами которой являются упорядоченные пространства с отношением эквивалентности (так называемые

Благодарности. Работа поддержана Российским научным фондом, проект № 24-21-00075, <https://rscf.ru/project/24-21-00075/>.

© 2026 А.Е. Изъюрова, М.В. Швидефски

Поступила: 26.06.2025. Принята: 24.03.2026. Опубликовано: 05.06.2026.

M_3 -пространства), а морфизмами – так называемые M_3 -морфизмы, сохраняющие структуру M_3 -пространств, см. [определение 6](#) ниже (напомним, что решетка L называется *биалгебраической*, если сама решетка L и двойственная ей решетка L^∂ являются алгебраическими).

Дуальная эквивалентность, речь о которой идет выше, установлена посредством двух функторов: функтора $F: \mathbb{M}_3 \rightarrow \mathbb{B}_3$, который каждому M_3 -пространству сопоставляет решетку его идеалов, и функтора $G: \mathbb{B}_3 \rightarrow \mathbb{M}_3$, который каждой биалгебраической решетке L из многообразия $\mathbf{SP}(M_3)$ сопоставляет M_3 -пространство, построенное на множестве $\text{CJ}(L)$ всех вполне $\vee$ -неразложимых элементов решетки L , структура которого отражает свойства минимальных покрытий в решетке L . Представленная здесь дуальная эквивалентность расширяет дуальную эквивалентность Биркгофа для категории биалгебраических дистрибутивных решеток с полными гомоморфизмами и категории частично упорядоченных множеств с монотонными отображениями в качестве морфизмов.

Первый результат о дуальности для конечно порожденного недистрибутивного многообразия решеток был установлен в работах [\[1, 2\]](#); в них было доказано, что категория биалгебраических решеток, принадлежащих многообразию $\mathbf{SP}(N_5)$, порожденному пентагоном N_5 , дуально эквивалентна категории N_5 -пространств, упорядоченных пространств с дополнительной структурой. Основываясь на идеях работ [\[1, 2\]](#), похожие дуальности были установлены в [\[3, 4\]](#) для многообразия решеток $\mathbf{SP}(L_6)$ и в [\[5, 6\]](#) для многообразий, порожденных малыми решетками подпорядков.

Понятие M_3 -пространства базируется на идеях из [\[1, 2\]](#). В наших доказательствах мы используем также и методы из [\[1, 2\]](#). Наша терминология по теории решеток соответствует монографии Р. Фриза, Я. Ежека и Дж.Б. Нейшна [\[7\]](#).

1. Основные понятия

Для решетки L пусть $J(L)$ обозначает множество всех $\vee$ -неразложимых элементов решетки L , а $\text{CJ}(L)$ – множество всех вполне $\vee$ -неразложимых элементов в L . Пусть также $\text{CJ}_P(L)$ обозначает множество всех вполне $\vee$ -неразложимых элементов в L , которые являются $\vee$ -простыми, а $\text{CJ}_{NP}(L)$ – множество всех вполне $\vee$ -неразложимых элементов в L , которые не $\vee$ -просты. Ясно, что $\text{CJ}_P(L) \cup \text{CJ}_{NP}(L) = \text{CJ}(L) \subseteq J(L)$.

Процитируем здесь несколько утверждений, которыми мы будем пользоваться в дальнейшем.

Предложение 1 ([\[3, следствие 2\]](#)). Пусть L является J -решеткой для некоторого множества $J \subseteq J(L)$. Следующие условия равносильны.

- 1) L является 2-дистрибутивной решеткой.
- 2) Если $a \leq b_0 \vee \dots \vee b_m$ является минимальным покрытием для элементов $a, b_0, \dots, b_m \in J$, то $m = 1$.

Предложение 2 ([\[4, следствие 5\]](#)). Пусть L является 2-дистрибутивной J -решеткой для некоторого множества $J \subseteq J(L)$. Следующие условия равносильны.

- 1) Тожество (C_1) выполнено на L .
- 2) Каждый элемент $a \in J$ имеет не более одного минимального покрытия.

Предложение 3 ([9, предложение 5]). Пусть L является 2-дистрибутивной J -решеткой для некоторого множества $J \subseteq J(L)$. Следующие условия равносильны.

- 1) Если $a \leq b \vee c$ является минимальным покрытием для элементов $a, b, c \in J$, то $b \leq a \vee c$.
- 2) Решетка L модулярна.

Предложение 4 ([9, предложение 9]). Квазимногообразие $\mathbf{SP}(M_3)$ $[(0, 1)-]$ решеток является многообразием. Более того, $L \in \mathbf{SP}(M_3)$ тогда и только тогда, когда L является 2-дистрибутивной модулярной решеткой, удовлетворяющей тождеству (C_1) .

Предложение 5 ([9, предложение 6]). Пусть L является J -решеткой для некоторого множества $J \subseteq J(L)$ и пусть L является 2-дистрибутивной модулярной решеткой, удовлетворяющей тождеству (C_1) . Если $\{b, c\} \in \mathfrak{M}(a)$ для некоторых $a, b, c \in J$, то $\{a, c\} = \mathfrak{M}(b)$.

2. Категория $\mathbb{M}_3$

2.1. ОПРЕДЕЛЕНИЕ M_3 -ПРОСТРАНСТВА И M_3 -МОРФИЗМА. Как и в [7], для подмножеств A, B решетки L мы пишем $A \ll B$, если для каждого $a \in A$ существует $b \in B$, такой что $a \leq b$. В этом случае мы говорим, что множество A *утончает* множество B .

Определение 6. Рассмотрим систему $\mathbb{S} = \langle S, \leq, R \rangle$, где S – множество, $\leq$ и R – два бинарных отношения на S . Назовем $\mathbb{S}$ *M_3 -пространством*, если

- (s1) $\leq$ является частичным порядком на S ;
- (s2) $R \subseteq S^2$ является отношением эквивалентности на S , причем для $a, b, c, d, e, f \in S$ выполнены следующие условия:
 - 1) $[a]_R$ является антицепью; более того, множество $[a]_R$ либо одноэлементно, либо содержит три элемента;
 - 2) если $[a]_R = \{a, b, c\}$ и $a, b \leq d$, то $c \leq d$;
 - 3) если $[a]_R = \{a, b, c\}$, $[d]_R = \{d\}$ и $d \leq a$, то $d \ll \{b, c\}$;
 - 4) если $[a]_R = \{a, b, c\}$, $[d]_R = \{d, e, f\}$ и $d \leq a$, то либо $d \ll \{b, c\}$, либо $\{e, f\} \ll \{b, c\}$.

Полагаем $X(S) = \{s \in S \mid [s]_R \text{ одноэлементно}\}$ и $Y(S) = S \setminus X(S)$.

Пусть $\mathbb{S} = \langle S, \leq, R \rangle$ и $\mathbb{S}' = \langle S', \leq, R \rangle$ являются M_3 -пространствами. Тогда $\varphi: \mathbb{S} \rightarrow \mathbb{S}'$ называется *M_3 -морфизмом*, если выполнены следующие условия:

- (m1) φ отображает S в $S' \cup \{\{a, b\} \mid a, b \in X(S')\}$;
- (m2) если $u, v \in S$ таковы, что $\varphi(u), \varphi(v) \in S'$ и $u \leq v$, то $\varphi(u) \leq \varphi(v)$;
- (m3) $\varphi(x) \in X(S')$ для всех $x \in X(S)$;
- (m4) для всех $a \in Y(S)$ с условием $[a]_R = \{a, b, c\}$ выполнено следующее:

- 1) если $\varphi(a) \in X(S')$, то выполнено одно из следующих условий:
 - $\varphi(b) = \{\varphi(a), \varphi(c)\} \subseteq X(S')$;
 - $\varphi(c) = \{\varphi(a), \varphi(b)\} \subseteq X(S')$;
 - $\varphi(a) \leq \varphi(b) = \varphi(c) \in X(S')$;
 - $\varphi(b) \leq \varphi(a) = \varphi(c)$ и $\varphi(b), \varphi(c) \in X(S')$;
 - $\varphi(c) \leq \varphi(a) = \varphi(b)$ и $\varphi(b), \varphi(c) \in X(S')$;
- 2) если $\varphi(a) \in Y(S')$, то $[\varphi(a)]_R = \{\varphi(a), \varphi(b), \varphi(c)\} \subseteq Y(S')$;
- 3) если $\varphi(a) \notin S'$, то $\varphi(a) = \{\varphi(b), \varphi(c)\} \subseteq X(S')$ является антицепью: более того, $\varphi(a) \ll \varphi(u)$ для каждого $u \in S$ с условием $a \leq u$.

Пусть $\mathbb{S}_0, \mathbb{S}_1, \mathbb{S}_2$ являются M_3 -пространствами и пусть $\varphi_0: \mathbb{S}_0 \rightarrow \mathbb{S}_1$, $\varphi_1: \mathbb{S}_1 \rightarrow \mathbb{S}_2$ являются M_3 -морфизмами. Определим композицию $\varphi_0 \circ \varphi_1: \mathbb{S}_0 \rightarrow \mathbb{S}_2$ M_3 -морфизмов φ_0 и φ_1 следующим образом. Пусть $a \in \mathbb{S}_0$.

(c1) Если $\varphi_0(a) \in S_1$, то $\varphi_0 \circ \varphi_1(a) = \varphi_1\varphi_0(a)$.

(c2) Если $\varphi_0(a) \notin S_1$, то $[a]_R = \{a, b, c\}$ в $\mathbb{S}_0$ и

$$\varphi_0 \circ \varphi_1(a) = \begin{cases} \varphi_1\varphi_0(b), & \text{если } \varphi_1\varphi_0(c) \leq \varphi_1\varphi_0(b); \\ \varphi_1\varphi_0(c), & \text{если } \varphi_1\varphi_0(b) \leq \varphi_1\varphi_0(c); \\ \{\varphi_1\varphi_0(b), \varphi_1\varphi_0(c)\}, & \text{если } \{\varphi_1\varphi_0(b), \varphi_1\varphi_0(c)\} \text{ является антицепью.} \end{cases}$$

2.2. КОМПОЗИЦИЯ M_3 -МОРФИЗМОВ.

Лемма 7. Пусть $\mathbb{S}_0, \mathbb{S}_1, \mathbb{S}_2$ – M_3 -пространства и пусть $\varphi_0: \mathbb{S}_0 \rightarrow \mathbb{S}_1$, $\varphi_1: \mathbb{S}_1 \rightarrow \mathbb{S}_2$ являются M_3 -морфизмами. Тогда $\varphi_0 \circ \varphi_1$ также является M_3 -морфизмом.

Доказательство. Для краткости полагаем $\varphi = \varphi_0 \circ \varphi_1$. Нам требуется установить, что условия (m1)–(m4) [определения 6](#) выполнены для φ . Действительно, условия (m1) и (m3), очевидно, выполняются для φ .

Утверждение 1. Условие (m2) выполняется для φ .

Доказательство утверждения. Пусть $u, v \in \mathbb{S}_0$ таковы, что $u \leq v$ и $\varphi(u), \varphi(v) \in S_2$. Согласно (c1)–(c2), возможны следующие случаи.

Случай 1: $\varphi_0(u), \varphi_0(v) \in S_1$. В этом случае $\varphi_0(u) \leq \varphi_0(v)$ в силу (m2), примененного к φ_0 , и $\varphi(u) = \varphi_1\varphi_0(u) \leq \varphi_1\varphi_0(v) = \varphi(v)$ в силу (m2), примененного к φ_1 .

Случай 2: $\varphi_0(u) \in S_1$, $\varphi_0(v) \notin S_1$. В силу условий (m4-с) и (c2) это означает, что $\varphi_0(v) = \{\varphi_0(a), \varphi_0(b)\} \subseteq X(S_1)$ является антицепью, где $[v]_R = \{v, a, b\}$ в $\mathbb{S}_0$, и

$$\varphi(v) = \max\{\varphi_1\varphi_0(a), \varphi_1\varphi_0(b)\} = \max\{\varphi(a), \varphi(b)\}.$$

Применяя (s2-с) и (s2-d) к неравенству $u \leq v$, мы получаем, что либо $u \ll \{a, b\}$, либо $[u]_R = \{u, c, d\}$ в $\mathbb{S}_0$ и $\{c, d\} \ll \{a, b\}$. В первом случае мы применяем (m2)–(m3) к φ_0 и φ_1

и получаем, что $\varphi_0(u) \ll \{\varphi_0(a), \varphi_0(b)\}$ и

$$\varphi(u) = \varphi_1\varphi_0(u) \ll \{\varphi_1\varphi_0(a), \varphi_1\varphi_0(b)\} = \{\varphi(a), \varphi(b)\}.$$

Следовательно, $\varphi(u) \leq \max\{\varphi(a), \varphi(b)\} = \varphi(v)$, что и требовалось.

Рассмотрим теперь случай, когда $\{c, d\} \ll \{a, b\}$. Имеется две возможности: $\varphi_0(u) \in X(S_1)$ и $\varphi_0(u) \in Y(S_1)$. Рассмотрим их по отдельности.

Случай 2.1: $\varphi_0(u) \in X(S_1)$. Покажем, что в этом случае $\varphi_0(u) \ll \{\varphi_0(a), \varphi_0(b)\}$. Действительно, применяя (m4-b) к φ_0 , мы получаем одну из следующих возможностей.

- $\varphi_0(c) = \{\varphi_0(u), \varphi_0(d)\} \subseteq X(S_1)$. В этом случае, применяя (m4-c) к φ_0 и используя тот факт, что $c \ll \{a, b\}$, имеем:

$$\varphi_0(u) \ll \varphi_0(c) \ll \{\varphi_0(a), \varphi_0(b)\},$$

что и требовалось.

- $\varphi_0(d) = \{\varphi_0(u), \varphi_0(c)\} \subseteq X(S_1)$. Этот случай симметричен предыдущему.
- $\varphi_0(u) \leq \varphi_0(c) = \varphi_0(d) \in X(S_1)$. В этом случае, применяя (m2)–(m3) к φ_0 и используя тот факт, что $\{c, d\} \ll \{a, b\}$, мы получаем:

$$\varphi_0(u) \leq \varphi_0(c) \ll \{\varphi_0(a), \varphi_0(b)\}$$

что и требовалось.

- $\varphi_0(c) \leq \varphi_0(u) = \varphi_0(d) \in X(S_1)$. В этом случае мы применяем (m2)–(m3) к φ_0 и получаем, что $\varphi_0(u) = \varphi_0(d) \ll \{\varphi_0(a), \varphi_0(b)\}$, что и требовалось.
- $\varphi_0(d) \leq \varphi_0(u) = \varphi_0(c) \in X(S_1)$. Этот случай симметричен предыдущему.

Следовательно, мы получаем, что $\varphi_0(u) \ll \{\varphi_0(a), \varphi_0(b)\}$ в любом случае. Как и выше, применяя (m2)–(m3) к φ_1 , мы делаем вывод, что

$$\varphi(u) = \varphi_1\varphi_0(u) \leq \max\{\varphi_1\varphi_0(a), \varphi_1\varphi_0(b)\} = \varphi(v).$$

Случай 2.2: $\varphi_0(u) \in Y(S_1)$. В этом случае в силу (m4-b), примененного к φ_0 получаем, что $[\varphi_0(u)]_R = \{\varphi_0(u), \varphi_0(c), \varphi_0(d)\} \subseteq Y(S_1)$, а $\{\varphi_0(c), \varphi_0(d)\} \ll \{\varphi_0(a), \varphi_0(b)\}$ в силу (m2), примененного к φ_0 , и того факта, что $\{c, d\} \ll \{a, b\}$. Так как $\varphi(u) \in S_2$ согласно нашему предположению, возможны следующие случаи.

Случай 2.2.1: $\varphi(u) = \varphi_1\varphi_0(u) \in X(S_2)$. В этом случае мы применяем (m4-a) к φ_1 и получаем следующие возможности.

- $\varphi(c) = \{\varphi_1\varphi_0(u), \varphi_1\varphi_0(d)\} = \{\varphi(u), \varphi(d)\} \subseteq X(S_2)$. В этом случае, применяя (m4-c) к φ_1 и используя свойство $\varphi_0(c) \ll \{\varphi_0(a), \varphi_0(b)\}$, мы получаем:

$$\varphi(c) = \varphi_1\varphi_0(c) \ll \{\varphi_1\varphi_0(a), \varphi_1\varphi_0(b)\} = \{\varphi(a), \varphi(b)\} \ll \max\{\varphi(a), \varphi(b)\} = \varphi(v).$$

В частности, $\varphi(u) \leq \varphi(v)$, поэтому (m2) выполняется для φ .

- $\varphi(d) = \{\varphi_1\varphi_0(u), \varphi_1\varphi_0(c)\} = \{\varphi(u), \varphi(c)\} \subseteq X(S_2)$. Этот случай симметричен предыдущему.
- $\varphi(u) = \varphi_1\varphi_0(u) \leq \varphi_1\varphi_0(c) = \varphi_1\varphi_0(d) \in X(S_2)$. В этом случае мы применяем (m2)–(m3) к φ_1 и получаем:

$$\varphi(u) = \varphi_1\varphi_0(u) \leq \varphi_1\varphi_0(c) \leq \max\{\varphi_1\varphi_0(a), \varphi_1\varphi_0(b)\} = \varphi(v).$$

Таким образом, (m2) выполняется для φ .

- $\varphi(c) = \varphi_1\varphi_0(c) \leq \varphi_1\varphi_0(u) = \varphi_1\varphi_0(d) \in X(S_2)$. В этом случае мы применяем (m2)–(m3) к φ_1 и получаем:

$$\varphi(u) = \varphi_1\varphi_0(u) = \varphi_1\varphi_0(d) \leq \max\{\varphi_1\varphi_0(a), \varphi_1\varphi_0(b)\} = \varphi(v),$$

т. е. (m2) выполнено для φ .

- $\varphi(d) = \varphi_1\varphi_0(d) \leq \varphi_1\varphi_0(u) = \varphi_1\varphi_0(c) \in X(S_2)$. Этот случай симметричен предыдущему.

Таким образом, в каждом из возможных случаев мы получили требуемое неравенство $\varphi(u) \leq \varphi(v)$.

Случай 2.2.2: $\varphi(u) = \varphi_1\varphi_0(u) \in Y(S_2)$. Применяя в этом случае (m2)–(m3) и (m4-b) к φ_1 , мы получаем, что $[\varphi(u)]_R = \{\varphi(u), \varphi(c), \varphi(d)\} \subseteq Y(S_2)$ и $\{\varphi(c), \varphi(d)\} \ll \{\varphi(a), \varphi(b)\}$. В силу (s2-b) имеем $\varphi(u) \ll \{\varphi(a), \varphi(b)\}$. Следовательно,

$$\varphi(u) \leq \max\{\varphi(a), \varphi(b)\} = \varphi(v),$$

что и требовалось.

Случай 3: $\varphi_0(u) \notin S_1$. Мы применяем в этом случае (m4-c) к φ_0 и получаем, что $\varphi_0(u) \ll \varphi_0(v)$. Поэтому $\varphi(u) = \max \varphi_1\varphi_0(u) \leq \varphi_1\varphi_0(v) = \varphi(v)$ в силу (m2)–(m3), примененных к φ_1 . $\square$

Утверждение 2. Условие (m4-a) выполнено для φ .

Доказательство утверждения. Пусть $[a]_R = \{a, b, c\}$ и пусть $\varphi(a) \in X(S_2)$. В силу условия (m4), примененного к φ_0 , возможны следующие три случая.

Случай 1: $\varphi_0(a) \in X(S_1)$. В силу свойства (m4-a) M_3 -морфизма φ_0 возможен один из следующих подслучаев.

- $\varphi_0(b) = \{\varphi_0(a), \varphi_0(c)\} \subseteq X(S_1)$. В этом случае мы применяем (m3) к φ_1 и получаем, что $\{\varphi(a), \varphi(c)\} = \{\varphi_1\varphi_0(a), \varphi_1\varphi_0(c)\} \subseteq X(S_2)$. Далее, в силу (c2) имеем

$$\varphi(b) = \varphi_1\varphi_0(b) = \{\varphi_1\varphi_0(a), \varphi_1\varphi_0(c)\} = \{\varphi(a), \varphi(c)\} \subseteq X(S_2)$$

(и поэтому первое заключение в (m4-a) выполнено для φ), либо

$$\varphi(b) = \varphi_1\varphi_0(b) = \max\{\varphi_1\varphi_0(a), \varphi_1\varphi_0(c)\} = \max\{\varphi(a), \varphi(c)\} \in X(S_2)$$

(и поэтому одно из трех последних заключений в (m4-a) выполнено для φ).

- $\varphi_0(c) = \{\varphi_0(a), \varphi_0(b)\} \subseteq X(S_1)$. Этот случай симметричен предыдущему.
- $\varphi_0(a) \leq \varphi_0(b) = \varphi_0(c) \in X(S_1)$. В этом случае мы применяем (m2)–(m3) к φ_1 и получаем, что

$$\varphi(a) = \varphi_1\varphi_0(a) \leq \varphi_1\varphi_0(b) = \varphi_1\varphi_0(c) = \varphi(b) = \varphi(c) \in X(S_1),$$

т. е. третье заключение в (m4-a) выполнено для φ .

- $\varphi_0(b) \leq \varphi_0(a) = \varphi_0(c)$ и $\varphi_0(b), \varphi_0(c) \in X(S_1)$. Этот случай симметричен третьему случаю.
- $\varphi_0(c) \leq \varphi_0(a) = \varphi_0(b)$ и $\varphi_0(b), \varphi_0(c) \in X(S_1)$. Этот случай также симметричен третьему случаю.

Следовательно, одно из пяти заключений в (m4-a) выполнено для φ в каждом из возможных случаев.

Случай 2: $\varphi_0(a) \in Y(S_1)$ и $[\varphi_0(a)]_R = \{\varphi_0(a), \varphi_0(b), \varphi_0(c)\}$. В этом случае применяем (m4-a) к φ_1 и получаем, что одно из пяти возможных заключений в (m4-a) выполнено для φ .

Случай 3: $\varphi_0(a) = \{\varphi_0(b), \varphi_0(c)\} \subseteq X(S_1)$. В этом случае имеем:

$$\varphi(a) = \varphi_1\varphi_0(a) = \max\{\varphi_1\varphi_0(b), \varphi_1\varphi_0(c)\} = \max\{\varphi(b), \varphi(c)\}$$

в силу (m2)–(m3) и (c2), примененных к φ_1 . Следовательно, одно из последних двух заключений в (m4-a) выполнено для φ . $\square$

Утверждение 3. Условие (m4-b) выполнено для φ .

Доказательство утверждения. Пусть $\varphi(a) \in Y(S_2)$ для некоторого $a \in S_0$, такого что $[a]_R = \{a, b, c\}$. В силу (m3)–(m4) и (c2), примененных к φ_0 , это означает, что $\varphi_0(a) \in Y(S_1)$ и $[\varphi_0(a)]_R = \{\varphi_0(a), \varphi_0(b), \varphi_0(c)\}$. Далее, применяем (m4-b) к φ_1 и заключаем, что

$$[\varphi(a)]_R = [\varphi_1\varphi_0(a)]_R = \{\varphi_1\varphi_0(a), \varphi_1\varphi_0(b), \varphi_1\varphi_0(c)\} = \{\varphi(a), \varphi(b), \varphi(c)\},$$

что и требовалось. $\square$

Утверждение 4. Условие (m4-c) выполняется для φ .

Доказательство утверждения. Предположим, что элемент $a \in S_0$ таков, что $\varphi(a) \notin S_2$. В силу (m3) и (c2), примененных к φ_0 и φ_1 , это означает, что $a \in Y(S_0)$. Пусть $[a]_R = \{a, b, c\}$ в S_0 . В силу (m3)–(m4) и (c2) возможны следующие два случая.

Случай 1: $\varphi_0(a) \in Y(S_1)$ и $[\varphi_0(a)]_R = \{\varphi_0(a), \varphi_0(b), \varphi_0(c)\} \subseteq Y(S_1)$. В этом случае множество

$$\varphi(a) = \varphi_1\varphi_0(a) = \{\varphi_1\varphi_0(b), \varphi_1\varphi_0(c)\} = \{\varphi(b), \varphi(c)\} \subseteq X(S_2)$$

является антицепью по нашему предположению и свойству (m4-с) M_3 -морфизма φ_1 . Предположим, что $a \leq u$ в $\mathbb{S}_0$. Возможен один из следующих двух подслучаев.

Случай 1.1: $\varphi_0(u) \in S_1$. В этом случае $\varphi_0(a) \leq \varphi_0(u)$ в силу свойства (m2) M_3 -морфизма φ_0 . Таким образом, $\varphi(a) = \varphi_1\varphi_0(a) \ll \varphi_1\varphi_0(u) = \varphi(u)$ в силу свойства (m4-с) M_3 -морфизма φ_1 .

Случай 1.2: $\varphi_0(u) \notin S_1$. В этом случае $u \in Y(S_0)$ и $\varphi_0(u) = \{\varphi_0(d), \varphi_0(e)\} \subseteq X(S_1)$ в силу свойства (m4-с) M_3 -морфизма φ_0 , где $[u]_R = \{u, d, e\}$ в $\mathbb{S}_0$. Применяя (s2-с) и (s2-d) к неравенству $a \leq u$ в $\mathbb{S}_0$, получаем, что либо $a \ll \{d, e\}$, либо $\{b, c\} \ll \{d, e\}$. В первом случае мы применяем (m2) к φ_0 и получаем, что $\varphi_0(a) \ll \{\varphi_0(d), \varphi_0(e)\}$. Поэтому

$$\varphi(a) = \varphi_1\varphi_0(a) \ll \{\varphi_1\varphi_0(d), \varphi_1\varphi_0(e)\} \ll \varphi_1\varphi_0(u) = \varphi(u)$$

по свойствам (m3) и (m4-с) M_3 -морфизма φ_1 . Во втором случае применяем (m2)–(m3) к φ_0 и получаем, что $\{\varphi_0(b), \varphi_0(c)\} \ll \{\varphi_0(d), \varphi_0(e)\}$. Поэтому

$$\varphi(a) = \varphi_1\varphi_0(a) = \{\varphi_1\varphi_0(b), \varphi_1\varphi_0(c)\} \ll \{\varphi_1\varphi_0(d), \varphi_1\varphi_0(e)\} \ll \varphi_1\varphi_0(u) = \varphi(u)$$

в силу свойств (m3) и (m4-с) M_3 -морфизма φ_1 .

Случай 2: $\varphi_0(a) \notin S_1$. В этом случае мы получаем в силу свойства (m4-с) M_3 -морфизма φ_0 , что $\varphi_0(a) = \{\varphi_0(b), \varphi_0(c)\}$. Тогда множество

$$\varphi(a) = \varphi_1\varphi_0(a) = \{\varphi_1\varphi_0(b), \varphi_1\varphi_0(c)\} = \{\varphi(b), \varphi(c)\} \subseteq X(S_2)$$

является антицепью по свойствам (с2) и (m3) M_3 -морфизма φ_1 . Предположим, что $a \leq u$ в $\mathbb{S}_0$. Мы применяем (m4-с) к φ_0 и неравенству $a \leq u$ и получаем, что $\varphi_0(a) \ll \varphi_0(u)$. Следовательно, $\varphi(a) = \varphi_1\varphi_0(a) \ll \varphi_1\varphi_0(u) = \varphi(u)$ в силу свойства (m2) M_3 -морфизма φ_1 и (с2). $\square$

Ассоциативность композиции $\circ$ M_3 -морфизмов устанавливается в точности как в [2, следствие 5.2], см. также [2, замечание 2.3]. Доказательство [леммы 7](#) завершено. $\square$

2.3. КАТЕГОРИИ $\mathbb{M}_3$ И $\mathbb{W}_3$. Через $\mathbb{M}_3$ мы обозначаем категорию, объектами которой являются M_3 -пространства, а морфизмами – M_3 -морфизмы. Через $\mathbb{W}_3$ обозначаем категорию, объектами которой являются биалгебраические решетки, принадлежащие многообразию $\mathbf{SP}(M_3)$, порожденному диамантом (см. [предложение 4](#)), а морфизмами – полные гомоморфизмы решеток.

3. Идеалы в M_3 -пространствах: контравариантный функтор из $\mathbb{M}_3$ в $\mathbb{B}_3$

3.1. ФУНКТОР F НА ОБЪЕКТАХ.

Определение 8. Пусть $\mathbb{S} = \langle S, \leq, R \rangle$ – M_3 -пространство. Подмножество $I \subseteq S$ называется идеалом M_3 -пространства $\mathbb{S}$, если I является нижним конусом относительно $\leq$, обладающим следующим свойством:

$$\text{если } [a]_R = \{a, b, c\} \text{ в } \mathbb{S} \text{ и } a, b \in I, \text{ то } c \in I.$$

Ясно, что множество $F(\mathbb{S})$ всех идеалов в $\mathbb{S}$ частично упорядочено относительно включения $\subseteq$. Более того, $\emptyset$ является наименьшим, а S – наибольшим идеалом в $\mathbb{S}$.

Лемма 9. Пусть $\mathbb{S} = \langle S, \leq, R \rangle$ – M_3 -пространство. Для произвольного нижнего конуса $Z = \downarrow Z \subseteq S$ множество

$$\overline{Z} = Z \cup \{c \in S \mid [c]_R = \{a, b, c\} \text{ и } a, b \in Z\}$$

образует наименьший идеал $\mathbb{S}$, содержащий Z .

Доказательство. Полагаем $Z' = \{c \in S \mid [c]_R = \{a, b, c\} \text{ и } a, b \in Z\}$; тогда $\overline{Z} = Z \cup Z'$. Ясно, что $\overline{Z} \subseteq W$ для каждого идеала W в $\mathbb{S}$ с условием $Z \subseteq W$. Таким образом, остается проверить, что $\overline{Z}$ является идеалом в $\mathbb{S}$.

Действительно, пусть элемент $u \in S$ таков, что $u \leq c \in \overline{Z}$. Если $c \in Z$, то $u \in Z \subseteq \overline{Z}$, поскольку Z образует нижний конус. Пусть $c \in Z'$; тогда $c \in Y(S)$, $[c]_R = \{a, b, c\}$ в $\mathbb{S}$ и $a, b \in Z$. В силу условий (s2-c) и (s2-d) [определения 6](#) либо $u \ll \{a, b\}$, либо $u \in Y(S)$, $[u]_R = \{u, d, e\}$ и $\{d, e\} \ll \{a, b\}$. Так как $a, b \in Z = \downarrow Z$, в первом случае получаем включение $u \in Z \subseteq \overline{Z}$, а во втором – включение $d, e \in Z$ и, следовательно, $u \in \overline{Z}$. Таким образом, $\overline{Z}$ является нижним конусом.

Предположим теперь, что элемент $u \in Y(S)$ таков, что $[u]_R = \{u, a, b\}$ в $\mathbb{S}$ и $a, b \in \overline{Z}$. Если $a, b \in Z$, то $u \in Z' \subseteq \overline{Z}$. Если, скажем, $a \in Z'$, то $u, b \in Z \subseteq \overline{Z}$. Следовательно, $u \in \overline{Z}$ в любом случае. Мы доказали, что $\overline{Z}$ действительно является идеалом в $\mathbb{S}$. $\square$

Из [леммы 9](#) вытекает

Лемма 10. Для произвольного семейства $\{I_k \in F(\mathbb{S}) \mid k \in K\}$ идеалов M_3 -пространства $\mathbb{S}$ имеем

- 1) $\bigwedge_{k \in K} I_k = \bigcap_{k \in K} I_k$;
- 2) $\bigvee_{k \in K} I_k = \overline{\bigcup_{k \in K} I_k} = \bigcup_{k \in K} I_k \cup \{c \in S \mid [c]_R = \{a, b, c\} \text{ и } a, b \in \bigcup_{k \in K} I_k\}$;
- 3) если семейство $\{I_k \in F(\mathbb{S}) \mid k \in K\}$ направлено вверх относительно $\subseteq$, то $\bigvee_{k \in K} I_k = \bigcup_{k \in K} I_k$.

Доказательство следующего утверждения не представляет трудностей и использует [лемму 10](#); рассуждения аналогичны представленным в доказательстве [2, утверждение 3.3].

Лемма 11. Пусть $\mathbb{S} = \langle S, \leq, R \rangle$ – M_3 -пространство, пусть $a \in S$, а I – идеал в $\mathbb{S}$. Справедливы следующие утверждения.

- 1) $\downarrow a$ является компактным элементом в $F(\mathbb{S})$.
- 2) I является вполне $\vee$ -неразложимым элементом в $F(\mathbb{S})$ тогда и только тогда, когда $I = \downarrow b$ для некоторого $b \in S$.
- 3) I является вполне $\vee$ -простым элементом в $F(\mathbb{S})$ тогда и только тогда, когда $I = \downarrow b$ для некоторого $b \in S$ с условием $[b]_R = \{b\}$.
- 4) $\downarrow a$ является $\vee$ -простым элементом в $F(\mathbb{S})$ тогда и только тогда, когда $[a]_R = \{a\}$.

Теорема 12. Если $\mathbb{S} = \langle S, \leq, R \rangle$ – M_3 -пространство, то $F(\mathbb{S})$ является биалгебраической решеткой и $F(\mathbb{S}) \in \mathbf{SP}(M_3)$.

Доказательство. Поскольку $I = \bigcup_{a \in I} \downarrow a$ для каждого $I \in F(\mathbb{S})$, мы получаем по [лемме 10](#) (i)–(ii) и [лемме 11](#) (i), что $F(\mathbb{S})$ является алгебраической решеткой. Точно так же, как и в доказательстве [2, утверждение 3.3], получаем, что решетка $F(\mathbb{S})$ непрерывна вниз. Следовательно, $F(\mathbb{S})$ – биалгебраическая решетка.

Утверждение 1. $F(\mathbb{S})$ является J -решеткой, где $J = \mathbf{CJ}(F(\mathbb{S}))$ – множество всех вполне $\vee$ -неразложимых элементов из $F(\mathbb{S})$.

Доказательство утверждения. Из [леммы 11](#) (ii) следует, что каждый элемент из $F(\mathbb{S})$ является объединением некоторого множества элементов из J . Далее, пусть $I \subseteq I_0 \vee \dots \vee I_k$ является нетривиальным покрытием для некоторого $I \in J$; в этом случае $I = \downarrow a$ по [лемме 11](#) (ii) и $a \in \overline{I_0 \cup \dots \cup I_k}$ по [лемме 10](#) (ii). Так как покрытие $\downarrow a \subseteq I_0 \vee \dots \vee I_k$ нетривиально, мы заключаем, что $a \notin I_0 \cup \dots \cup I_k$. Следовательно, $[a]_R = \{a, b, c\}$ в $\mathbb{S}$, и $b \in I_m$, $c \in I_n$ для некоторых $m, n \leq k$.

Отсюда следует, что $\downarrow a \subseteq \downarrow b \vee \downarrow c$ является единственным минимальным покрытием для $\downarrow a$ и $\{\downarrow b, \downarrow c\} \ll \{I_0, \dots, I_k\}$. $\square$

Из доказательства [утверждения 1](#) получаем следующее

Утверждение 2. Для каждого $a \in Y(S)$, такого что $[a]_R = \{a, b, c\}$, $\downarrow a \subseteq \downarrow b \vee \downarrow c$ является единственным минимальным покрытием для $\downarrow a$.

Из утверждений 1–2 и [предложения 1](#) мы получаем такое

Утверждение 3. Решетка $F(\mathbb{S})$ 2-дистрибутивна.

Следующее утверждение вытекает из утверждений 1–3 выше, [леммы 11](#) (iv) и [предложения 2](#).

Утверждение 4. Тождество (C_1) истинно на решетке $F(\mathbb{S})$.

Из утверждений 1–3 и предложения 3 мы получаем

Утверждение 5. Решетка $F(\mathbb{S})$ модулярна.

Из утверждений 3–5 выше и предложения 4 получаем, что $F(\mathbb{S}) \in \mathbf{SP}(M_3)$. $\square$

3.2. ФУНКТОР F НА МОРФИЗМАХ. Пусть $\mathbb{S} = \langle S, \leq, R \rangle$ и $\mathbb{S}' = \langle S', \leq, R \rangle$ – M_3 -пространства и пусть $\varphi: \mathbb{S} \rightarrow \mathbb{S}'$ – M_3 -морфизм. Если $Z' \subseteq S'$, то мы полагаем, как и в работе [2]:

$$\varphi^{-1}(Z') = \{z \in S \mid \varphi(z) \in Z'\} \cup \{z \in S \mid \varphi(z) \subseteq Z'\}.$$

Рассмотрим следующее отображение:

$$F(\varphi): F(\mathbb{S}') \rightarrow F(\mathbb{S}), \quad F(\varphi): Z' \mapsto \varphi^{-1}(Z').$$

Предложение 13. Если $\mathbb{S}$ и $\mathbb{S}'$ – M_3 -пространства, а $\varphi: \mathbb{S} \rightarrow \mathbb{S}'$ – M_3 -морфизм, то $F(\varphi): F(\mathbb{S}') \rightarrow F(\mathbb{S})$ является полным гомоморфизмом решеток.

Доказательство. Сначала покажем, что отображение $F(\varphi)$ определено корректно.

Утверждение 1. $F(\varphi)(I') \in F(\mathbb{S})$ для любого $I' \in F(\mathbb{S}')$.

Доказательство утверждения. Полагаем для краткости $I = F(\varphi)(I') = \varphi^{-1}(I')$. Нам нужно показать, что $I \in F(\mathbb{S})$. Покажем сначала, что I является нижним конусом в $\mathbb{S}$. Пусть $b \leq a \in I$ в $\mathbb{S}$. Возможны следующие случаи.

Случай 1: $\varphi(a) \in I'$ и $\varphi(b) \in S'$. В этом случае мы получаем в силу (m2), что $\varphi(b) \leq \varphi(a) \in I'$. Поэтому $\varphi(b) \in I'$, так как I' является нижним конусом. Следовательно, $b \in I$.

Случай 2: $\varphi(a) \in I'$ и $\varphi(b) \notin S'$. В этом случае $b \in Y(S)$ и $[b]_R = \{b, c, d\} \subseteq Y(S)$. В силу (m4-c) имеем $\varphi(c), \varphi(d) \in X(S')$ и $\varphi(b) = \{\varphi(c), \varphi(d)\} \ll \varphi(a) \in I'$. Так как I' является нижним конусом, $\varphi(b) = \{\varphi(c), \varphi(d)\} \subseteq I'$ и $b \in \varphi^{-1}(I') = I$.

Случай 3: $\varphi(a) \subseteq I'$ и $\varphi(b) \in S'$. В силу (m4-c) получаем, что $a \in Y(S)$, $[a]_R = \{a, c, d\}$ для некоторых $c, d \in S$ и $\varphi(a) = \{\varphi(c), \varphi(d)\} \subseteq X(S')$. Возможны два подслучая.

Случай 3.1: $[b]_R = \{b\}$. Поскольку $b \leq a$, мы получаем в силу (s3-c), что $b \ll \{c, d\}$. Таким образом, $\varphi(b) \ll \{\varphi(c), \varphi(d)\} \subseteq I'$. Поскольку I' является нижним конусом, $\varphi(b) \in I'$ и $b \in I$.

Случай 3.2: $[b]_R = \{b, e, f\} \subseteq Y(S)$. Так как $b \leq a$, мы получаем с использованием (s3-d), что либо $b \ll \{c, d\}$, либо $\{e, f\} \ll \{c, d\}$. В первом случае рассуждаем как в случае 3.1 выше и получаем, что $b \in I$. Предположим поэтому, что $\{e, f\} \ll \{c, d\}$. Вновь возможны два подслучая.

Случай 3.2.1: $\varphi(b) \in X(S')$. В силу (m4-a) выполняется одно из следующих условий.

- $\varphi(e) = \{\varphi(b), \varphi(f)\} \subseteq X(S')$. Поскольку $e \ll \{c, d\}$, мы имеем в силу (m4-c) равенство $\varphi(e) = \{\varphi(b), \varphi(f)\} \ll \{\varphi(c), \varphi(d)\} = \varphi(a) \subseteq I'$. Таким образом, $\varphi(b) \in I'$ и $b \in I$.
- $\varphi(f) = \{\varphi(b), \varphi(e)\} \subseteq X(S')$. Этот случай симметричен предыдущему.
- $\varphi(e) \leq \varphi(b) = \varphi(f) \ll \{\varphi(c), \varphi(d)\} = \varphi(a) \subseteq I'$. Так как I' является нижним конусом, мы получаем, что $\varphi(b) \in I'$ и $b \in I$.
- $\varphi(f) \leq \varphi(b) = \varphi(e) \ll \{\varphi(c), \varphi(d)\} = \varphi(a) \subseteq I'$. Этот случай симметричен предыдущему.
- $\varphi(b) \leq \varphi(e) = \varphi(f) \ll \{\varphi(c), \varphi(d)\} = \varphi(a) \subseteq I'$. Разбор этого случая аналогичен предыдущему.

Случай 3.2.2: $\varphi(b) \in Y(S')$. В этом случае мы применяем (m4-b) и получаем, что

$$[\varphi(b)]_R = \{\varphi(b), \varphi(e), \varphi(f)\} \subseteq Y(S').$$

Поскольку $\{\varphi(e), \varphi(f)\} \ll \{\varphi(c), \varphi(d)\} = \varphi(a) \subseteq I'$ в силу (m2), $\varphi(e), \varphi(f) \in I'$ и $\varphi(b) \in I'$, так как I' является идеалом. Следовательно, $b \in I$.

Случай 4: $\varphi(a) \subseteq I'$ и $\varphi(b) \notin S'$. Это означает, что $b \in Y(S)$ и $[b]_R = \{b, e, f\} \subseteq Y(S)$ в $\mathbb{S}$. Кроме того, $\varphi(b) = \{\varphi(e), \varphi(f)\} \subseteq X(S')$ в силу (m4-c). Более того,

$$\varphi(b) = \{\varphi(e), \varphi(f)\} \ll \varphi(a) \subseteq I'$$

в силу свойства (m4-c), примененного к неравенству $b \leq a$. Поскольку I' является нижним конусом, $\varphi(b) \subseteq I'$ и $b \in I$.

Тот факт, что второе условие из определения идеала M_3 -пространства, также выполнено, проверяется непосредственно. $\square$

Утверждение 2. $F(\varphi)$ является полным гомоморфизмом решеток.

Доказательство утверждения. Ясно, что $F(\varphi)(\emptyset) = \varphi^{-1}(\emptyset) = \emptyset$ и $F(\varphi)(S') = \varphi^{-1}(S') = S$. Остается показать, что $F(\varphi)$ сохраняет произвольные непустые объединения и пересечения. Для этого рассмотрим произвольное непустое семейство $\{I_k \mid k \in K\} \subseteq F(S')$ идеалов в S' . Имеем:

$$F(\varphi)\left(\bigcap_{k \in K} I_k\right) = \varphi^{-1}\left(\bigcap_{k \in K} I_k\right) = \bigcap_{k \in K} \varphi^{-1}(I_k) = \bigcap_{k \in K} F(\varphi)(I_k).$$

Следовательно, $F(\varphi)$ сохраняет произвольные пересечения и поэтому сохраняет порядок. Отсюда следует, что $\bigvee_{k \in K} F(\varphi)(I_k) \subseteq F(\varphi)(\bigvee_{k \in K} I_k)$. Для установления обратного включения рассмотрим произвольный элемент $a \in F(\varphi)(\bigvee_{k \in K} I_k) = \varphi^{-1}(\bigvee_{k \in K} I_k)$. Возможны три случая.

Случай 1: $a \in X(S)$. Это означает в силу (m3) и леммы 10 (ii), что $\varphi(a) \in X'$ и $\varphi(a) \in \bigcup_{k \in K} I_k$. Таким образом, $\varphi(a) \in I_j$ для некоторого $j \in K$, поэтому

$$a \in \varphi^{-1}(I_j) = F(\varphi)(I_j) \subseteq \bigvee_{k \in K} F(\varphi)(I_k).$$

Случай 2: $a \in Y(S)$ и $\varphi(a) \in S'$. В этом случае $[a]_R = \{a, b, c\} \subseteq Y(S)$ в $\mathbb{S}$. Применяя (m4-b), мы получаем, что $[\varphi(a)]_R = \{\varphi(a), \varphi(b), \varphi(c)\} \subseteq Y(S')$ и $\varphi(a) \in \bigvee_{k \in K} I_k$. Если $\varphi(a) \in \bigcup_{k \in K} I_k$, то рассуждая как в случае 1, получаем, что $a \in \bigvee_{k \in K} F(\varphi)(I_k)$. В противном случае $\varphi(b), \varphi(c) \in \bigcup_{k \in K} I_k$ по лемме 10 (ii), откуда $b, c \in \bigcup_{k \in K} \varphi^{-1}(I_k) = \bigcup_{k \in K} F(\varphi)(I_k)$. Поскольку $\bigvee_{k \in K} F(\varphi)(I_k)$ является идеалом и содержит элементы b и c , мы заключаем, что $a \in \bigvee_{k \in K} F(\varphi)(I_k)$.

Случай 3: $a \in Y(S)$ и $\varphi(a) \notin S'$. В этом случае $[a]_R = \{a, b, c\} \subseteq Y(S)$ в $\mathbb{S}$. Таким образом, мы получаем в силу (m4-c), что $\varphi(a) = \{\varphi(b), \varphi(c)\} \subseteq X(S')$ и $\{\varphi(b), \varphi(c)\} = \varphi(a) \subseteq \bigcup_{k \in K} I_k$ по лемме 10 (ii). Следовательно, $b, c \in \varphi^{-1}(\bigcup_{k \in K} I_k) = \bigcup_{k \in K} \varphi^{-1}(I_k) = \bigcup_{k \in K} F(\varphi)(I_k)$. Поскольку $\bigvee_{k \in K} F(\varphi)(I_k)$ является идеалом и содержит элементы b и c , заключаем, что $a \in \bigvee_{k \in K} F(\varphi)(I_k)$.

В любом случае имеет место включение $\bigvee_{k \in K} F(\varphi)(I_k) \subseteq F(\varphi)(\bigvee_{k \in K} I_k)$, что и доказывает требуемое равенство. $\square$

Доказательство предложения 13 завершено. $\square$

Как и в работе [2], из предложения 13 мы получаем следующее утверждение.

Следствие 14. $F: \mathbb{M}_3 \rightarrow \mathbb{B}_3$ является контравариантным функтором.

4. Контравариантный функтор из $\mathbb{B}_3$ в $\mathbb{M}_3$

4.1. ФУНКТОР G НА ОБЪЕКТАХ. Для решетки $L \in \mathbb{B}_3$ полагаем

$$G(L) = \langle G(L), \leq, R \rangle,$$

где $G(L) = \text{CJ}(L)$, $\leq$ является частичным порядком на $G(L)$, унаследованным из L , а R является таким отношением эквивалентности на $G(L)$, что для каждого $a \in G(L)$ имеем

$$\begin{aligned} [a]_R &= \{a\}, & \text{если } a \in \text{CJ}_P(L); \\ [a]_R &= \{a, b, c\}, & \text{если } a \in \text{CJ}_{NP}(L) \text{ и } a \leq b \vee c \text{ является (единственным)} \\ & & \text{минимальным покрытием для } a \text{ в } L. \end{aligned}$$

Из предложения 2 и предложения 5 следует, что отношение R определено корректно. Более того, $X(G(L)) = \text{CJ}_P(L)$ и $Y(G(L)) = \text{CJ}_{NP}(L)$.

Замечание 15. Может случиться, что $G(L) = \emptyset$ (это произойдет в случае, когда решетка L одноэлементна). Мы считаем пустое множество объектом категории $\mathbb{M}_3$, см. [определение 6](#).

Предложение 16. Если $L \in \mathbb{B}_3$, то $G(L) \in \mathbb{M}_3$.

Доказательство. Мы рассматриваем свойства (s1)–(s2) из [определения 6](#). Свойство (s1) выполняется тривиальным образом. Свойства (s2)-(a) и (s2)-(b) выполняются по определению отношения R на $G(L)$, см. выше. Если $[a]_R = \{a, b, c\}$ и $[d]_R = \{d\}$ в $G(L)$, то $a \leq b \vee c$ является минимальным покрытием, а d является $\vee$ -простым элементом. Поэтому если $d \leq a$, то $d \leq b \vee c$ и $d \ll \{b, c\}$ в силу простоты элемента d . Следовательно, свойство (s2)-(c) также выполняется.

Если $[a]_R = \{a, b, c\}$ и $[d]_R = \{d, e, f\}$ в $G(L)$, то $a \leq b \vee c$ и $d \leq e \vee f$ являются минимальными покрытиями. Поэтому если $d \leq a$, то $d \leq e \vee f$. Последнее покрытие либо тривиально, либо нетривиально. В первом случае $d \ll \{b, c\}$. В силу [8, предложение 8.5], L является J -решеткой для $J = \text{CJ}(L)$. Таким образом, $\{e, f\} \ll \{b, c\}$ во втором случае по [предложению 2](#). Следовательно, свойство (s2)-(d) выполнено. $\square$

4.2. ФУНКТОР G НА МОРФИЗМАХ. Следуя работе [2], для полных решеток L, M и полного гомоморфизма $g: M \rightarrow L$ рассмотрим отображение

$$\beta_g: L \rightarrow M, \quad \beta_g: a \mapsto \bigwedge \{b \in M \mid a \leq g(b)\}.$$

Лемма 17 ([2, лемма 4.2]). Пусть L, M – биалгебраические решетки и пусть $g: M \rightarrow L$ является полным гомоморфизмом $(0, 1)$ -решеток. Справедливы следующие утверждения.

- 1) $a \leq g\beta_g(a)$ для всех $a \in L$ и $\beta_g g(b) \leq b$ для всех $b \in M$.
- 2) $g\beta_g g(b) = g(b)$ для всех $b \in M$. В частности, $a = g\beta_g(a)$ для всех $a \in L$, если g является отображением “на”.
- 3) $\beta_g g\beta_g(a) = \beta_g(a)$ для всех $a \in L$.
- 4) $\beta_g(\bigvee_{i \in I} a_i) = \bigvee_{i \in I} \beta_g(a_i)$ для любых $a_i \in L$, $i \in I$.
- 5) Если $x \in \text{CJ}_P(L)$, то $\beta_g(x) \in \text{CJ}_P(M)$.
- 6) Для каждого $b \in L$, такого что $\beta_g(b) \in \text{CJ}(M)$, существует $y \in \text{CJ}(L)$, с условием $\beta_g(b) = \beta_g(y)$. Более того, $y \in \text{CJ}_{NP}(L)$, как только $\beta_g(b) \in \text{CJ}_{NP}(M)$.
- 7) Если g разнозначно, то для каждого $b \in \text{CJ}(M)$ существует $a \in \text{CJ}(L)$, такой что $\beta_g(a) = b$.
- 8) Если g является отображением “на”, то $\beta_g(a) \in \text{CJ}(M)$ для каждого $a \in \text{CJ}(L)$, а ограничение β_g на $\text{CJ}(L)$ является разнозначным отображением из $\text{CJ}(L)$ в $\text{CJ}(M)$.

Следующие два утверждения вытекают из [предложения 2](#) и [8, предложение 10.2].

Лемма 18. Пусть $L, M \in \mathbf{SP}(M_3)$ – полные биалгебраические решетки и пусть $g: M \rightarrow L$ – полный гомоморфизм. Если элемент $a \in \mathbf{CJ}_{NP}(L)$ таков, что $\beta_g(a) \in \mathbf{CJ}(M)$, то $\{\beta_g(b), \beta_g(c)\} \in \mathfrak{M}_M(\beta_g(b))$, где $\{b, c\} \in \mathfrak{M}_L(a)$. В частности,

$$\{\beta_g(a), \beta_g(b), \beta_g(c)\} \subseteq \mathbf{CJ}_{NP}(M).$$

Доказательство. По [предложению 2](#) и [8, предложение 10.2 (iii)]

$$\{\beta_g(b), \beta_g(c)\} \in \mathfrak{M}_M(\beta_g(b));$$

более того, это минимальное покрытие единственно по [предложению 2](#). Из [предложения 5](#) следует, что $\{\beta_g(a), \beta_g(b), \beta_g(c)\} \subseteq \mathbf{CJ}_{NP}(M)$. $\square$

Лемма 19. Пусть $L, M \in \mathbf{SP}(M_3)$ – полные биалгебраические решетки и пусть $g: M \rightarrow L$ – полный гомоморфизм. Если элемент $a \in \mathbf{CJ}(L)$ таков, что $\beta_g(a) \notin \mathbf{CJ}(M)$, то $a \in \mathbf{CJ}_{NP}(L)$, множество $\{\beta_g(b), \beta_g(c)\} \subseteq \mathbf{CJ}_P(M)$ является антицепью, а $\beta_g(a) = \beta_g(b) \vee \beta_g(c)$, где $\{b, c\} \in \mathfrak{M}_L(a)$.

Доказательство. По [предложению 5](#) имеем $\{a, c\} \in \mathfrak{M}_L(b)$ и $\{a, b\} \in \mathfrak{M}_L(c)$. Поскольку $\beta_g(a) \notin \mathbf{CJ}(M)$, используя [предложение 2](#) и [8, предложение 10.2 (iii)], заключаем, что $\beta_g(a) = \beta_g(b) \vee \beta_g(c)$; более того, $\{\beta_g(b), \beta_g(c)\} \subseteq \mathbf{CJ}(M)$. Это множество является антицепью; в противном случае мы бы имели $\beta_g(a) \in \{\beta_g(b), \beta_g(c)\} \subseteq \mathbf{CJ}(M)$, что противоречило бы нашему предположению об элементе $\beta_g(a)$. Если $\beta_g(b) \in \mathbf{CJ}_{NP}(M)$, то мы применяем [лемму 18](#) к этому элементу и получаем, что

$$\beta_g(a) \in \{\beta_g(a), \beta_g(b), \beta_g(c)\} \subseteq \mathbf{CJ}(M).$$

Но этого не может быть в силу нашего предположения об элементе $\beta_g(a)$. Таким образом, $\beta_g(b) \in \mathbf{CJ}_P(M)$. $\square$

Как и в работе [2], для решеток $L, M \in \mathbb{B}_3$ и полного гомоморфизма $g: M \rightarrow L$ определим отображение $G(g): G(L) \rightarrow G(M)$ следующим образом. Для элемента $a \in \mathbf{CJ}(L)$ полагаем

$$G(g)(a) = \begin{cases} \beta_g(a), & \text{если } \beta_g(a) \in \mathbf{CJ}(M); \\ \{\beta_g(b), \beta_g(c)\}, & \text{если } \beta_g(a) \notin \mathbf{CJ}(M) \text{ и } [a]_R = \{a, b, c\}. \end{cases}$$

Предложение 20. Пусть $L, M \in \mathbb{B}_3$ и пусть $g: M \rightarrow L$ – полный гомоморфизм. Тогда $G(g): G(L) \rightarrow G(M)$ является M_3 -морфизмом.

Доказательство. Мы используем [определение 6](#). Свойство (m1) следует непосредственно из определения $G(g)$ и [леммы 19](#). Свойство (m2) вытекает из [леммы 17](#) (iv), а свойство (m3) – из [леммы 17](#) (v). Установим, что (m4) также выполнено. Действительно, пусть элемент $a \in \mathbf{CJ}_{NP}(L) = Y(G(L))$ таков, что $[a]_R = \{a, b, c\}$ в $G(L)$. По определению

это означает, что $a \leq b \vee c$ является минимальным покрытием в L . Предложение 5 влечет, что покрытия $b \leq a \vee c$ и $c \leq a \vee b$ также минимальны в L .

Утверждение 1. (m4-a) выполняется для $G(g)$.

Доказательство утверждения. Предположим, что $G(g)(a) \in X(G(M)) = CJ_P(M)$. Для элементов $G(g)(b)$ и $G(g)(c)$ возможны три случая.

Случай 1: $G(g)(b), G(g)(c) \in G(M)$. В этом случае $G(g)(b) = \beta_g(b) \in CJ(M)$ и $G(g)(c) = \beta_g(c) \in CJ(M)$. Если $G(g)(b) \in CJ_{NP}(M)$ или $G(g)(c) \in CJ_{NP}(M)$, то мы применяем лемму 18 к b или к c соответственно и получаем, что $\{\beta_g(a), \beta_g(b), \beta_g(c)\} \subseteq CJ_{NP}(M)$, что противоречит нашему предположению об элементе a . Таким образом,

$$\{\beta_g(a), \beta_g(b), \beta_g(c)\} \subseteq CJ_P(M).$$

Поскольку $a \leq b \vee c$, $b \leq a \vee c$ и $c \leq a \vee b$ in L , мы заключаем в силу леммы 17 (iv), что

$$\beta_g(a) \leq \beta_g(b) \vee \beta_g(c), \quad \beta_g(b) \leq \beta_g(a) \vee \beta_g(c), \quad \beta_g(c) \leq \beta_g(a) \vee \beta_g(b).$$

Так как каждый элемент из множества $\{\beta_g(a), \beta_g(b), \beta_g(c)\}$ является $\vee$ -простым, имеем

$$\beta_g(a) \ll \{\beta_g(b), \beta_g(c)\}, \quad \beta_g(b) \ll \{\beta_g(a), \beta_g(c)\}, \quad \beta_g(c) \ll \{\beta_g(a), \beta_g(b)\}.$$

Это означает, что для $G(g)$ выполняется одно из трех последних заключений в (m4-a).

Случай 2: $G(g)(b) \notin G(M)$. В этом случае

$$G(g)(b) = \{\beta_g(a), \beta_g(c)\} = \{G(g)(a), G(g)(c)\} \subseteq CJ_P(M)$$

по лемме 19. Следовательно, для $G(g)$ выполнено первое заключение из (m4-a).

Случай 3: $G(g)(c) \notin G(M)$. В этом случае

$$G(g)(c) = \{\beta_g(a), \beta_g(b)\} = \{G(g)(a), G(g)(b)\} \subseteq CJ_P(M)$$

по лемме 19. Поэтому для $G(g)$ выполнено второе заключение из (m4-a). □

Свойство (m4-b) для $G(g)$ следует из леммы 18.

Утверждение 2. (m4-c) выполняется для $G(g)$.

Доказательство утверждения. Если $G(g)(a) \notin G(M)$, то из леммы 19 следует, что

$$G(g)(a) = \{\beta_g(b), \beta_g(c)\} = \{G(g)(b), G(g)(c)\} \subseteq X(G(M)).$$

Более того, $\beta_g(a) = G(g)(b) \vee G(g)(c)$. Пусть элемент $u \in G(L)$ таков, что $a \leq u$ в L . Возможны два случая.

Случай 1: $\mathbf{G}(g)(u) \in G(M)$. В этом случае $\mathbf{G}(g)(u) = \beta_g(u)$. По [лемме 17](#) (iv) имеем:

$$\mathbf{G}(g)(u) = \beta_g(u) \geq \beta_g(a) = \mathbf{G}(g)(b) \vee \mathbf{G}(g)(c).$$

Следовательно, $\mathbf{G}(g)(a) = \{\mathbf{G}(g)(b), \mathbf{G}(g)(c)\} \ll \mathbf{G}(g)(u)$, что и требовалось.

Случай 2: $\mathbf{G}(g)(u) \notin G(M)$. Это означает, что найдутся $v, w \in \mathbf{CJ}(L)$, такие что $u \leq v \vee w$ является минимальным покрытием в L . Таким образом, $[u]_R = \{u, v, w\}$ в $\mathbf{G}(L)$, $\mathbf{G}(g)(u) = \{\mathbf{G}(g)(v), \mathbf{G}(g)(w)\}$, а $\beta_g(u) = \mathbf{G}(g)(v) \vee \mathbf{G}(g)(w)$ в силу [леммы 19](#). Далее, по [лемме 17](#) (iv) получаем:

$$\mathbf{G}(g)(b), \mathbf{G}(g)(c) \leq \mathbf{G}(g)(b) \vee \mathbf{G}(g)(c) = \beta_g(a) \leq \beta_g(u) = \mathbf{G}(g)(v) \vee \mathbf{G}(g)(w).$$

Поскольку $\mathbf{G}(g)(b)$ и $\mathbf{G}(g)(c)$ являются $\vee$ -простыми элементами, мы заключаем, что

$$\mathbf{G}(g)(a) = \{\beta_g(b), \beta_g(c)\} \ll \{\beta_g(v), \beta_g(w)\} = \mathbf{G}(g)(u),$$

что и требовалось. □

Доказательство [предложения 20](#) завершено. □

Предложение 21. $\mathbf{G}: \mathbb{B}_3 \rightarrow \mathbb{M}_3$ является контравариантным функтором.

Доказательство. Из предложений [16](#) и [20](#) вытекает, что $\mathbf{G}$ определен корректно. Пусть $L_0, L_1, L_2 \in \mathbb{B}_3$ и пусть $g_0: L_0 \rightarrow L_1$, $g_1: L_1 \rightarrow L_2$ – полные гомоморфизмы решеток. Для краткости полагаем $g = g_1 g_0$; тогда из доказательства [\[2, предложение 4.6\]](#) следует, что $\beta_g = \beta_{g_0} \beta_{g_1}$. Из [предложения 20](#) получаем, что $\mathbf{G}(g_0)$ и $\mathbf{G}(g_1)$ являются M_3 -морфизмами. Нам нужно проверить, что $\mathbf{G}(g) = \mathbf{G}(g_0 \circ g_1)(z) = \mathbf{G}(g_0)\mathbf{G}(g_1)(z)$ для всех $z \in G(L_2)$. Для краткости полагаем:

$$\begin{aligned} X_0 &= \mathbf{CJ}_P(L_0), & Y_0 &= \mathbf{CJ}_{NP}(L_0); \\ X_1 &= \mathbf{CJ}_P(L_1), & Y_1 &= \mathbf{CJ}_{NP}(L_1); \\ X_2 &= \mathbf{CJ}_P(L_2), & Y_2 &= \mathbf{CJ}_{NP}(L_2). \end{aligned}$$

Возможны следующие случаи.

Случай 1: $\mathbf{G}(g_1)(z) \in G(L_1)$ и $\mathbf{G}(g_0)\mathbf{G}(g_1)(z) \in G(L_0)$. В этом случае

$$\mathbf{G}(g_0)\mathbf{G}(g_1)(z) = \mathbf{G}(g_0)\beta_{g_1}(z) = \beta_{g_0}\beta_{g_1}(z) = \beta_g(z) = \mathbf{G}(g)(z).$$

Случай 2: $\mathbf{G}(g_1)(z) \in G(L_1)$ и $\mathbf{G}(g_0)\mathbf{G}(g_1)(z) \notin G(L_0)$. В этом случае $\mathbf{G}(g_1)(z) \in Y_1$ в силу условия (m3), примененного к $\mathbf{G}(g_0)$, и $z \in Y_2$ в силу условия (m3), примененного к $\mathbf{G}(g_1)$. Таким образом, $[z]_R = \{z, a, b\}$ для некоторых $a, b \in Y_2$, а

$$[\mathbf{G}(g_1)(z)]_R = \{\mathbf{G}(g_1)(z), \mathbf{G}(g_1)(a), \mathbf{G}(g_1)(b)\} = \{\beta_{g_1}(z), \beta_{g_1}(a), \beta_{g_1}(b)\}$$

в силу условия (m4-b), примененного $G(g_1)$. Следовательно, принимая во внимание наше предположение и применяя условие (m4-c) к $G(g_0)$, мы получаем, что множество

$$G(g_0)G(g_1)(z) = \{\beta_{g_0}\beta_{g_1}(a), \beta_{g_0}\beta_{g_1}(b)\} = \{\beta_g(a), \beta_g(b)\} \subseteq X_0$$

является антицепью. В силу (m4-a) и (m4-b), примененных к $G(g_0)$, имеем $\beta_g(z) \notin S_0$. Следовательно, $\beta_g(z) = \beta_g(a) \vee \beta_g(b)$ является несократимой суммой по [лемме 19](#). Отсюда следует, что $G(g)(z) \notin S_0$, и поэтому

$$G(g_0)G(g_1)(z) = \{\beta_g(a), \beta_g(b)\} = G(g)(z).$$

Случай 3: $G(g_1)(z) \notin G(L_1)$ и $G(g_0)G(g_1)(z) \notin G(L_0)$. В этом случае $z \in Y_2$ в силу условия (m3), примененного к $G(g_1)$. Таким образом, $[z]_R = \{z, a, b\}$ для некоторых $a, b \in Y_2$, а множество $G(g_1)(z) = \{\beta_{g_1}(a), \beta_{g_1}(b)\} = \{G(g_1)(a), G(g_1)(b)\} \subseteq X_1$ является антицепью. Поэтому

$$\begin{aligned} G(g_0)G(g_1)(z) &= \{G(g_0)G(g_1)(a), G(g_0)G(g_1)(b)\} = \{\beta_{g_0}\beta_{g_1}(a), \beta_{g_0}\beta_{g_1}(b)\} \\ &= \{\beta_g(a), \beta_g(b)\}, \end{aligned}$$

а множество $\{\beta_g(a), \beta_g(b)\} \subseteq X_0$ является антицепью в силу (c2) и (m3) из [определения 6](#), примененных к $G(g_0)$. Отсюда следует, что $\beta_g(z) \notin S_0$ в силу (m4-a) и (m4-b) из [определения 6](#). Поэтому

$$G(g)(z) = \{\beta_g(a), \beta_g(b)\} = G(g_0)G(g_1)(z).$$

Случай 4: $G(g_1)(z) \notin G(L_1)$ и $G(g_0)G(g_1)(z) \in G(L_0)$. Как и в случае 3, мы имеем в этом случае, что $[z]_R = \{z, a, b\}$ для некоторых $a, b \in Y_2$ и множество

$$G(g_1)(z) = \{\beta_{g_1}(a), \beta_{g_1}(b)\} = \{G(g_1)(a), G(g_1)(b)\} \subseteq X_1$$

является антицепью, а $\beta_{g_1}(z) = \beta_{g_1}(a) \vee \beta_{g_1}(b)$ по [лемме 19](#). В силу нашего предположения и условий (m3) и (c2) из [определения 6](#) получаем, что множество

$$\{G(g_0)G(g_1)(a), G(g_0)G(g_1)(b)\} \subseteq X_0$$

является цепью и

$$\begin{aligned} G(g_0)G(g_1)(z) &= \max\{G(g_0)G(g_1)(a), G(g_0)G(g_1)(b)\} = \max\{\beta_{g_0}\beta_{g_1}(a), \beta_{g_0}\beta_{g_1}(b)\} = \\ &= \max\{\beta_g(a), \beta_g(b)\} \subseteq X_0. \end{aligned}$$

Применяя [лемму 17](#) (iv) к элементу β_{g_0} , мы получаем, что

$$\begin{aligned}\beta_g(z) &= \beta_{g_0}\beta_{g_1}(z) = \beta_{g_0}(\beta_{g_1}(a) \vee \beta_{g_1}(b)) = \beta_{g_0}\beta_{g_1}(a) \vee \beta_{g_0}\beta_{g_1}(b) = \beta_g(a) \vee \beta_g(b) \\ &= \max\{\beta_g(a), \beta_g(b)\} = \mathbf{G}(g_0)\mathbf{G}(g_1)(z) \in X_0.\end{aligned}$$

Так как $\beta_g(z) \in X_0$, мы заключаем, что $\mathbf{G}(g)(z) = \beta_g(x) = \mathbf{G}(g_0)\mathbf{G}(g_1)(z)$.

Доказательство [предложения 21](#) завершено. $\square$

5. Основной результат

Предложение 22. Функторы $\mathbf{GF}: \mathbb{M}_3 \rightarrow \mathbb{M}_3$ и $1_{\mathbb{M}_3}$ изоморфны.

Доказательство. Если $\mathbb{S} = \langle S, \leq, R \rangle$ является M_3 -пространством, мы получаем по [лемме 11](#) (ii), что элементами пространства $\mathbf{GF}(\mathbb{S})$ являются в точности все идеалы вида $\downarrow z$, где $z \in S$. Как и в [2, предложение 5.1], рассмотрим такое отображение:

$$\xi_{\mathbb{S}}: \mathbf{GF}(\mathbb{S}) \rightarrow \mathbb{S}, \quad \xi_{\mathbb{S}}: \downarrow z \mapsto z.$$

Ясно, что $\xi_{\mathbb{S}}$ определено корректно. Докажем, что ξ является естественным изоморфизмом функторов $\mathbf{GF}$ и $1_{\mathbb{M}_3}$.

Утверждение 1. $\xi_{\mathbb{S}}$ является изоморфизмом в $\mathbb{M}_3$.

Доказательство утверждения. Ясно, что $\xi_{\mathbb{S}}$ является биекцией и сохраняет порядок $\leq$. В частности, условия (m1) и (m2) [определения 6](#) выполнены. По [лемме 11](#) (iv) выполняется условие (m3). Условия (m4-a) и (m4-c) выполняются тривиальным образом. Условие (m4-b) следует из [утверждения 2](#) из доказательства [теоремы 12](#). Таким образом, $\xi_{\mathbb{S}}$ является биективным M_3 -морфизмом. $\square$

Доказательство следующего утверждения повторяет (с незначительными изменениями) доказательство утверждения 5.2 в доказательстве [2, предложение 5.1].

Утверждение 2. Для произвольных M_3 -пространств $\mathbb{S} = \langle S, \leq, R \rangle$ и $\mathbb{T} = \langle T, \leq, R \rangle$ и произвольного M_3 -морфизма $\varphi: \mathbb{S} \rightarrow \mathbb{T}$ диаграмма

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{GF}(\mathbb{S}) & \xrightarrow{\mathbf{GF}(\varphi)} & \mathbf{GF}(\mathbb{T}) \\ \xi_{\mathbb{S}} \downarrow & & \downarrow \xi_{\mathbb{T}} \\ \mathbb{S} & \xrightarrow{\varphi} & \mathbb{T} \end{array}$$

коммутативна.

Таким образом, ξ является естественным изоморфизмом. Доказательство [предложения 22](#) завершено. $\square$

Предложение 23. Функторы $\mathbf{FG}: \mathbb{B}_3 \rightarrow \mathbb{B}_3$ и $1_{\mathbb{B}_3}$ изоморфны.

Доказательство. Рассмотрим произвольную решетку $L \in \mathbb{B}_3$. Элементами решетки $\mathbf{FG}(L)$ являются в точности все идеалы M_3 -пространства $\mathbf{G}(L)$. Как и в [2, предложение 5.3], рассмотрим отображение

$$\eta_L: \mathbf{FG}(L) \rightarrow L, \quad \eta_L: I \mapsto \bigvee I.$$

Докажем, что η является естественным изоморфизмом функторов $\mathbf{FG}$ и $1_{\mathbb{B}_3}$.

Утверждение 1. Если $u \in L$, то множество $\downarrow u \cap \mathbf{CJ}(L)$ является идеалом в $\mathbf{G}(L)$.

Доказательство утверждения. Ясно, что $I = \downarrow u \cap \mathbf{CJ}(L)$ является нижним конусом. Если $[a]_R = \{a, b, c\}$ в $\mathbf{G}(L)$ и $b, c \in I$, то по определению функтора $\mathbf{G}$ в разделе 4 имеем $a \leq b \vee c \leq u$. Поэтому $a \in I$, и I является идеалом в $\mathbf{G}(L)$. $\square$

Утверждение 2. Если I является идеалом в $\mathbf{G}(L)$, то $\downarrow \eta_L(I) \cap \mathbf{CJ}(L) = I$.

Доказательство утверждения. Ясно, что $I \subseteq \downarrow \eta_L(I)$. Предположим, что $a \in \downarrow \eta_L(I)$ для некоторого $a \in \mathbf{CJ}(L)$. Если $a \leq i$ для некоторого $i \in I$, то $a \in I$, поскольку I является нижним конусом. В противном случае $a \leq \eta_L(I) = \bigvee I$ является нетривиальным покрытием. В силу [8, предложение 8.5] L является J -решеткой для $J = \mathbf{CJ}(L)$. Поскольку решетка L непрерывна вверх, нетривиальное покрытие $a \leq \bigvee I$ может быть утончено до минимального. Отсюда в силу предложений 2 (ii) и 4 следует, что $\{b, c\} \ll I$, где $[a]_R = \{a, b, c\}$ в $\mathbf{G}(L)$. Таким образом, $b, c \in I$, так как I является нижним конусом. Поэтому $a \in I$, так как I является идеалом. Следовательно, имеет место и обратное включение $\downarrow \eta_L(I) \cap \mathbf{CJ}(L) \subseteq I$. $\square$

Доказательство следующего утверждения повторяет доказательство [2, утверждение 5.5].

Утверждение 3. η_L является изоморфизмом в $\mathbb{B}_3$.

Утверждение 4. Для произвольных решеток $L, M \in \mathbb{B}_3$ и произвольного полного гомоморфизма $g: L \rightarrow M$ диаграмма

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{FG}(L) & \xrightarrow{\mathbf{FG}(g)} & \mathbf{FG}(M) \\ \eta_L \downarrow & & \downarrow \eta_M \\ L & \xrightarrow{g} & M \end{array}$$

коммутативна.

Доказательство утверждения. Нам нужно установить, что $\eta_M \mathbf{FG}(g)(I) = g\eta_L(I)$ для каждого идеала I в $\mathbf{G}(L)$. Как и в доказательстве [2, утверждение 5.6], полагаем

$$\begin{aligned} U &= \{z \in \mathbf{CJ}(M) \mid \mathbf{G}(g)(z) \in I \cap \mathbf{CJ}(L)\}; \\ V &= \{z \in \mathbf{CJ}(M) \mid \mathbf{G}(g)(z) \notin \mathbf{CJ}(L), \mathbf{G}(g)(z) \subseteq I\}. \end{aligned}$$

Поскольку

$$\begin{aligned} \eta_M \mathbf{FG}(g)(I) &= \bigvee \mathbf{FG}(g)(I) = \bigvee \mathbf{G}(g)^{-1}(I) = \bigvee (U \cup V); \\ g\eta_L(I) &= g(\bigvee I) = \bigvee g(I), \end{aligned}$$

нам нужно показать, что $\bigvee (U \cup V) = \bigvee g(I)$. Действительно, пусть $z \in U$; тогда $\beta_g(z) = \mathbf{G}(g)(z) \in I$. Поэтому $z \leq g\beta_g(z) \in g(I)$ по лемме 17 (i) и $z \leq \bigvee g(I)$. Если $z \in V$, то по определению M_3 -морфизма $z \in \mathbf{CJ}_{NP}(M)$, $[z]_R = \{z, u, v\}$ в $\mathbf{G}(M)$ для некоторых $u, v \in \mathbf{CJ}_{NP}(M)$, $\mathbf{G}(g)(z) = \{\beta_g(u), \beta_g(v)\} \subseteq I$, а $\beta_g(z) = \beta_g(u) \vee \beta_g(v)$ по лемме 19. Таким образом, $\{g\beta_g(u), g\beta_g(v)\} \subseteq g(I)$ и

$$z \leq g\beta_g(z) = g\beta_g(u) \vee g\beta_g(v) \leq \bigvee g(I)$$

по лемме 17 (i). Это доказывает неравенство $\bigvee (U \cup V) \leq \bigvee g(I)$.

Обратно, рассмотрим произвольный элемент $z \in \mathbf{CJ}(M)$, такой что $z \leq \bigvee g(I)$. Возможны два случая.

Случай 1: $z \leq g(i)$ для некоторого $i \in I$. Тогда $\beta_g(z) \leq i$. Возможны два подслучая.

Случай 1.1: $\beta_g(z) \in \mathbf{CJ}(L)$. Отсюда по определению $\mathbf{G}(g)$ получаем, что $\mathbf{G}(g)(z) = \beta_g(z) \leq i \in I$, т. е. $\mathbf{G}(g)(z) \in I$. Поэтому $z \in U$ и $z \leq \bigvee (U \cup V)$.

Случай 1.2: $\beta_g(z) \notin \mathbf{CJ}(L)$. В этом случае $z \in \mathbf{CJ}_{NP}(M)$ по лемме 17 (v), $[z]_R = \{z, u, v\}$ в $\mathbf{G}(M)$ для некоторых $u, v \in \mathbf{CJ}_{NP}(M)$ и $\beta_g(z) = \beta_g(u) \vee \beta_g(v)$ по лемме 19. Так как $\beta_g(u), \beta_g(v) \leq \beta_g(z) \leq i \in I$ и $\beta_g(u), \beta_g(v) \in \mathbf{CJ}_P(L)$ по лемме 19, мы получаем, что $\mathbf{G}(g)(u) = \beta_g(u) \in I$ и $\mathbf{G}(g)(v) = \beta_g(v) \in I$. Поэтому $u, v \leq \bigvee U$ как и в случае 1.1 выше. Таким образом, $z \leq c \vee d \leq \bigvee (U \cup V)$ по определению пространства $\mathbf{G}(L)$ из раздела 4.

Случай 2: $z \leq \bigvee g(I)$ является нетривиальным покрытием. В этом случае $z \in \mathbf{CJ}_{NP}(M)$ и $[z]_R = \{z, u, v\}$ для некоторых $u, v \in \mathbf{CJ}_{NP}(M)$ по определению пространства $\mathbf{G}(M)$ из раздела 4. Поскольку $M \in \mathbb{B}_3$, мы получаем как в доказательстве утверждения 2 выше, что $\{u, v\} \ll g(I)$. По случаю 1 получаем, что $u, v \leq \bigvee (U \cup V)$. Следовательно, $z \leq u \vee v \leq \bigvee (U \cup V)$.

Таким образом, мы показали, что $\bigvee (U \cup V) = \bigvee g(I)$. Поэтому $\mathbf{FG}(g) \circ \eta_M = \eta_L \circ g$. $\square$

Из утверждений 3–4 следует, что η является естественным изоморфизмом. $\square$

Из предложений 22 и 23 получаем такое утверждение.

Теорема 24. Категории $\mathbb{M}_3$ и $\mathbb{B}_3$ дуально эквивалентны.

В точности как в [2] мы получаем следующие утверждения.

Следствие 25. Справедливы следующие утверждения.

- 1) $\mathbb{M}_3$ -морфизмы, которые сюръективны, соответствуют по дуальности взаимно однозначным $\mathbb{B}_3$ -морфизмам и наоборот.
- 2) $\mathbb{M}_3$ -морфизмы, которые инъективны, соответствуют по дуальности сюръективным $\mathbb{B}_3$ -морфизмам и наоборот.
- 3) Раздельные объединения $\mathbb{M}_3$ -пространств (которые являются копроизведениями в $\mathbb{M}_3$) соответствуют по дуальности декартовым произведениям в $\mathbb{B}_3$ и наоборот.

Пусть $(\mathbb{M}_3)_{fin}$ и $(\mathbb{B}_3)_{fin}$ обозначают полные подкатегории в $\mathbb{M}_3$ и $\mathbb{B}_3$, объектами которых являются в точности все конечные объекты указанных категорий.

Следствие 26. Категории $(\mathbb{M}_3)_{fin}$ и $(\mathbb{B}_3)_{fin}$ дуально эквивалентны.

Замечание 27. Если ограничить функтор F на категорию $\mathbb{P}$ частично упорядоченных множеств (с тривиальным отношением эквивалентности) с сохраняющими порядок отображениями, а функтор G – на категорию $\mathbb{B}_2$ биалгебраических дистрибутивных решеток с полными решеточными гомоморфизмами, то можно получить классическую дуальную эквивалентность категорий $\mathbb{P}$ и $\mathbb{B}_2$, которая была установлена Г. Биркгофом.

Список литературы

- [1] W. Dziobiak, M.V. Schwidefsky, *Categorical dualities for some two categories of lattices: An extended abstract*, Bull. Sec. Logic **51** (3), 329–344 (2022).
DOI: <https://doi.org/10.18778/0138-0680.2022.14>
- [2] В. Дзёбяк, М.В. Швидефски, *Дуальность для биалгебраических решеток, принадлежащих многообразию $(0, 1)$ -решеток, порожденному пентагоном*, Алгебра и логика **63** (2), 167–208 (2024).
DOI: <https://doi.org/10.33048/alglog.2024.63.204>
- [3] A.O. Basheyeva, M.V. Schwidefsky, K.D. Sultankulov, *The quasivariety $\mathbf{SP}(L_6)$. I. An equational basis*, Сиб. электрон. матем. изв. **19** (2), 902–911 (2022).
DOI: <https://doi.org/10.33048/semi.2022.19.076>
- [4] А.О. Башеева, М.В. Швидефски, *Квазимногообразие $\mathbf{SP}(L_6)$. II. Результат о дуальности*, Сиб. матем. журн. **65** (3), 446–454 (2024).
DOI: <https://doi.org/10.1134/S0037446624030029>
- [5] O.A. Kadyrova, M.V. Schwidefsky, *Quasivarieties generated by small suborder lattices. I. Equational bases*, Сиб. электрон. матем. изв. **20** (1), 62–71 (2023).
DOI: <https://doi.org/10.33048/semi.2023.20.006>

- [6] O.A. Kadyrova, M.V. Schwidefsky, *Quasivarieties generated by small suborder lattices. II. Dualities* (препринт).
- [7] R. Freese, J. Ježek, and J.B. Nation, *Free lattices*, Math. Surveys Monogr. **42**, AMS, Providence, New York, 1995.
- [8] W. Dziobiak, M.V. Schwidefsky, *A categorical duality for algebraic lattices and some of its benefits for lattice theory* (препринт).
- [9] А.Е. Изъюрова, М.В. Швидефски, *Квазимногообразие $\mathbf{SP}(M_3)$: базис тождеств*, Матем. теор. комп. науки **2** (3), 53–62 (2024).

Александра Евгеньевна Изъюрова

Новосибирский национальный исследовательский государственный университет,
ул. Пирогова, д. 1, г. Новосибирск, 630090, Россия,
e-mail: a.izyurova@g.nsu.ru

Марина Владимировна Швидефски

Новосибирский национальный исследовательский государственный университет,
ул. Пирогова, д. 1, г. Новосибирск, 630090, Россия,
Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН,
пр. Акад. Коптюга, д. 4, г. Новосибирск, 630090, Россия,
e-mail: m.schwidefsky@g.nsu.ru

The quasivariety $\mathbf{SP}(M_3)$. II. Duality

A.E. Izyurova, M.V. Schwidefsky

Abstract. The diamond M_3 is a five-element lattice which is the smallest non-distributive modular lattice. We establish the dual equivalence of the category with objects being bi-algebraic lattices belonging to the variety generated by M_3 and with morphisms being complete lattice homomorphisms and the category with objects, called by us M_3 -spaces, being ordered spaces endowed with an equivalence relation and with so-called M_3 -morphisms. A similar result for the pentagon N_5 , a five-element lattice which is the smallest non-modular lattice, was established earlier by W. Dziobiak and the second author. The so-called N_5 -spaces there and M_3 -spaces here are completely different. However, morphisms between N_5 -spaces and between M_3 -spaces, respectively, are an application of an old concept – the minimal join cover refinement property for join covers of an element in a lattice.

Keywords: lattice, variety, diamond, duality.

DOI: 10.26907/2949-3919.2026.1.67-91

References

- [1] W. Dziobiak, M.V. Schwidefsky, *Categorical dualities for some two categories of lattices: An extended abstract*, Bull. Sec. Logic **51** (3), 329–344 (2022).
DOI: <https://doi.org/10.18778/0138-0680.2022.14>
- [2] W. Dziobiak, M.V. Schwidefsky, *Duality for bi-algebraic lattices belonging to the variety of $(0, 1)$ -lattices generated by the pentagon*, Algebra Logic **63** (2), 114–140 (2024).
DOI: <https://doi.org/10.33048/alglog.2024.63.204>
- [3] A.O. Basheyeva, M.V. Schwidefsky, K.D. Sultankulov, *The quasivariety $\mathbf{SP}(L_6)$. I. An equational basis*, Siberian Electronic Mathematical Reports **19** (2), 902–911 (2022).
DOI: <https://doi.org/10.33048/semi.2022.19.076>
- [4] A.O. Basheyeva, M.V. Schwidefsky, *The quasivariety $\mathbf{SP}(L_6)$. II. A duality result*, Siberian Math. J. **65** (3), 514–521 (2024).
DOI: <https://doi.org/10.1134/S0037446624030029>

Acknowledgements. The work is supported by the Russian Science Foundation (project № 24-21-00075), <https://rscf.ru/project/24-21-00075/>.

Received: 26 June 2025. Accepted: 24 March 2026. Published: 05 June 2026.

- [5] O.A. Kadyrova, M.V. Schwidefsky, *Quasivarieties generated by small suborder lattices. I. Equational bases*, Siberian Electronic Mathematical Reports **20** (1), 62–71 (2023). DOI: <https://doi.org/10.33048/semi.2023.20.006>
- [6] O.A. Kadyrova, M.V. Schwidefsky, *Quasivarieties generated by small suborder lattices. II. Dualities* (preprint).
- [7] R. Freese, J. Ježek, and J.B. Nation, *Free lattices*, Math. Surveys Monogr. **42**, AMS, Providence, New York, 1995.
- [8] W. Dziobiak, M.V. Schwidefsky, *A categorical duality for algebraic lattices and some of its benefits for lattice theory* (preprint).
- [9] A.E. Izyurova, M.V. Schwidefsky, *The quasivariety $\mathbf{SP}(M_3)$ is a variety*, Lobachevskii J. Math. (accepted).

Aleksandra Evgenyevna Izyurova

Novosibirsk State University,
1 Pirogov str., Novosibirsk 630090, Russia,
e-mail: a.izyurova@g.nsu.ru

Marina Vladimirovna Schwidefsky

Novosibirsk State University,
1 Pirogov str., Novosibirsk 630090, Russia,
Sobolev Institute of Mathematics SB RAS,
4 Acad. Koptug Ave., Novosibirsk 630090, Russia,
e-mail: m.schwidefsky@g.nsu.ru