

Применение полиэлементных уравнений для функций, аналитических в плоскости с разрезом, к интерполяционным задачам для целых функций класса A

Ф.Н. Гарифьянов, Э.И. Гиззатуллина

Аннотация. Исследуются линейные полиэлементные уравнения для функций, аналитических в плоскости с симметричным разрезом по мнимой оси и исчезающих на бесконечности. Решение ищется в классе функций, представимых интегралом типа Коши по данным разрезам с четной или нечетной плотностью. Проводится регуляризация этих уравнений и исследование вопроса об ее равносильности. При этом существенно используется теория эллиптических функций. Полученные результаты применимы к исследованию интерполяционных задач для целых функций экспоненциального типа из класса A .

Ключевые слова: полиэлементные уравнения, метод регуляризации, эллиптические функции, целые функции класса A .

DOI: 10.26907/2949-3919.2026.2.76-85

Введение

Цель данной работы – исследование полиэлементного уравнения для функций, аналитических в плоскости с разрезами по мнимой оси, и его приложения к интерполяционным задачам для целых функций класса A ([1], гл. V).

Пусть $\Gamma_1 = (2i, 3i)$, $\Gamma_2 = -\Gamma_1$, $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$, а D – квадрат с вершинами $\pm 1 \pm i$ (знаки не согласованы). Рассмотрим полиэлементное функциональное уравнение

$$(Vf)(z) \equiv (V_1, f)(z) + i^k (V_1, f)(iz) = g(z), \quad z \in D, \quad k = \overline{1, 4}, \quad (1)$$

где

$$\begin{aligned} (V_1, f)(z) \equiv & f(z + 1 + 3i) + f(z - 1 - 3i) + f(z - 1 + 3i) + f(z + 1 - 3i) \\ & + f(z + 1 + i) + f(z - 1 - i) + f(z - 1 + i) + f(z + 1 - i), \end{aligned} \quad (2)$$

при следующих предположениях.

- 1) Решение ищется в классе функций B , представимых интегралом типа Коши

$$f(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\Gamma} (\tau - z)^{-1} \phi(\tau) d(\tau) \quad (3)$$

с плотностью $\phi(\tau) \in H(\bar{\Gamma})$. Эта плотность нечетна, если $k = 2, 4$ и четна, если $k = 1, 3$. Другими словами, это класс четных или нечетных функций соответственно, голоморфных в плоскости с разрезом по Γ и исчезающих на бесконечности. Граничные значения решений $f^\pm(t)$ на Γ также удовлетворяют условию Гёльдера, а в точках $\pm 2i, \pm 3i$ у них возможны, самое большее, логарифмические особенности.

2) Свободный член $g(z)$ голоморфен в D , $g(iz) = i^k g(z)$ и его граничное значение $g^+(t) \in H(\partial D)$.

Поясним постановку задачи. Множество точек, в которых голоморфна функция $(Vf)(z)$, несвязно. Оно распадается на две связные компоненты, одной из которых является квадрат D , на котором и задано соотношение (1), а другая содержит бесконечно удаленную точку. Именно это обеспечивает нетривиальность уравнения (1). Более подробно по данному поводу см. введение в [2] или замечание 2 в [3].

Подчеркнем, что свободный член не обязан быть аналитически продолжимым из D через какой-либо отрезок границы ∂D , а решение и свободный член принадлежат, вообще говоря, разным классам аналитических функций. Даже в случае однородного уравнения

$$(Vf)(z) = 0, \quad z \in D$$

нельзя сделать вывод, что оно выполняется в некоторой окрестности бесконечно удаленной точки.

Решение $f(z) \in B$ является нижней функцией, ассоциированной по Борелю ([4], §1, п. 1.1) с верхней целой функцией экспоненциального типа (ц.ф.э.т.) $F(z) \in A$. Ее индикаторной диаграммой будет, вообще говоря, интервал мнимой оси $(-3i; 3i)$. Именно эта связь уравнения (1) с ц.ф.э.т. используется в дальнейшем для получения приложений.

История возникновения таких задач и некоторые подобные результаты см. в обзорной статье ([5], разд. 5). Наиболее близка к данной статья [6], где рассматривалось уравнение (1) при $k = 2$, $\Gamma = (-2i; -i) \cup (i; 2i)$ и

$$(V_1, f)(z) = f(z+1+2i) + f(z-1-2i) + f(z-1+2i) + f(z+1-2i) + f(z-1) + f(z+1). \quad (4)$$

Заметим, что оператор (4) содержит шесть слагаемых, в то время, как оператор (2), используемый в данной статье содержит восемь слагаемых. Объясняется это тем, что в статье [6] оба преобразования $\sigma(z) = z \pm 1$ переводят точки $\pm i$ в вершины D , а здесь надо рассмотреть четыре преобразования $\sigma(z) = z \pm 1 \pm i$, переводящие точки $\pm 2i$ в какие-то из вершин D .

Данная статья, кроме введения, содержит еще три раздела. В разделе 1 проведена регуляризация уравнения (1) и показано, что в зависимости от выбора k оно имеет различную картину разрешимости. При этом существенно используется принцип сжимающихся отображений в банаховом пространстве. Получены условия равносильности регуляризации. Далее в разделе 2 для определенности ограничимся рассмотрением уравнения (1)

при $k = 3$. Получены приложения к проблеме моментов для ц.ф.э.т. класса A . В разделе 3 обсуждается вопрос об обобщении полученных результатов на случай некоторых других разрезов по мнимой оси.

1. Регуляризация функционального уравнения

С учетом (3) имеем

$$(1) \Leftrightarrow (E\phi)(z) \equiv \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} G(z, \tau) \phi(\tau) d\tau = g(z), \quad z \in D, \quad (5)$$

где

$$\begin{aligned} G(z, \tau) &= G_1(z, \tau) + i^k G_1(iz, \tau), \\ G_1(z, \tau) &= (w + 1 + 3i)^{-1} + (w - 1 - 3i)^{-1} + (w + 1 - 3i)^{-1} + (w - 1 + 3i)^{-1} \\ &\quad + (w + 1 + i)^{-1} + (w - 1 - i)^{-1} + (w + 1 - i)^{-1} + (w - 1 + i)^{-1} \end{aligned}$$

и $w = \tau - z$.

Пусть $t \in \Gamma_2$, т. е. $t + 3i \pm 1 \in \partial D$. Если в равенстве (5) $z \rightarrow t + 3i \pm 1$, то по формуле Ю.В. Сохоцкого ([7], гл. 1, §4, п. 4.2) имеем

$$(E^+ \phi)(t + 3i \pm 1) = \pm 2^{-1} \phi(t) + (E\phi)(t + 3i \pm 1). \quad (6)$$

Знаки в формуле (6) согласованы. Особый интеграл в правой части (6) получен формальной заменой $z \in D$ в соотношении (5) на точки $t + 3i \pm 1 \in \partial D$ и понимается в смысле главного значения по Коши. Тогда

$$(E^+ \phi)(t + 3i + 1) - (E^+ \phi)(t + 3i - 1) = (T\phi)(t),$$

где интегральный оператор

$$(T\phi)(t) \equiv \phi(t) + \frac{1}{2i\pi} \int_{\Gamma} K(t, \tau) \phi(\tau) d\tau = g^+(t + 3i + 1) - g^+(t + 3i - 1)$$

с ядром

$$\begin{aligned} K(t, \tau) &= (u - 2 - 6i)^{-1} + (u - 2)^{-1} + (u - 2 - 2i)^{-1} + (u - 2 - 4i)^{-1} \\ &\quad - (u + 2)^{-1} - (u + 2 - 6i)^{-1} - (u + 2 - 2i)^{-1} - (u + 2 - 4i)^{-1} \\ &\quad + j^k [(v - 4i + 2)^{-1} + (v - 4i + 4)^{-1} - (v + 4i + 2)^{-1} - (v + 4i + 4)^{-1}], \end{aligned}$$

причем $u = \tau - t$, $v = \tau - it$. Это ядро ограничено и

$$|K(t, \tau)| < \gamma_k, \quad k = \overline{1, 4}, \quad (7)$$

причем $\gamma_k = \{3.54, k = 1; 2.34, k = 2; 1.16, k = 3; 2.83, k = 4\}$. Итак, проведена регуляризация полиэлементного функционального уравнения (1). Запишем полученное уравнение Фредгольма второго рода в виде

$$(T\phi)(t) = g^+(t + 3i(-1)^j + 1) - g^+(t + 3i(-1)^j - 1), \quad (8)$$

где $t \in \Gamma_j, j = 1, 2$. Подчеркнем три обстоятельства. Во-первых, оценка (7) справедлива и при $t \in \Gamma_1$. Это следует из симметрии разреза Γ и вида полиэлементного уравнения (1). Поэтому нет необходимости выписывать явное выражение ядра $K(t, \tau)$ при $t \in \Gamma_1$, хотя это легко сделать. Во-вторых, правая часть уравнения (8) четна (нечетна), если четен (нечетен) свободный член $g(z)$. В-третьих, $(T\phi)(t) = (T\phi)(-t)$. В этом легко убедиться, если заменить переменные τ и t на $-\tau$ и $-t$ соответственно, и воспользоваться равенством $K(t, \tau) = K(-t, -\tau)$.

Будем считать оператор T определенным на банаховом пространстве $C(\bar{\Gamma})$ с естественным образом определенной нормой $\|\phi\| = \max |\phi(t)|, t \in \bar{\Gamma}$. В силу оценки (7) и принципа сжимающихся отображений справедлива

Лемма 1. *Однородное уравнение*

$$T\phi = 0$$

при $k = 2, 3, 4$ имеет лишь тривиальное решение, а неоднородное уравнение (8) разрешимо и имеет единственное решение.

Рассмотрим обратный переход от интегрального уравнения (8) к полиэлементному уравнению (1), т. е. выясним вопрос о равносильности регуляризации.

Теорема 2. *При $k = 2, 3$ проведенная регуляризация является равносильной, т. е. (8) $\Rightarrow$ (1).*

Доказательство. Пусть вначале для определенности $k = 2$. Функция $(V_1 f)(z)$ четна, поскольку четно решение $f(z)$. Это, в свою очередь, следует из нечетности плотности интеграла типа Коши (3). Действительно, (8) $\Rightarrow (T\phi_1)(t) = 0$, где $\phi_1(t) = \phi(t) + \phi(-t)$, и остается применить лемму 1. Тогда $(Vf)(iz) = -(Vf)(z)$ и

$$(E\phi)(z) = g(z) + \Omega(z), \quad z \in D. \quad (9)$$

Функция $\Omega(z)$ голоморфна в D , $\Omega(iz) = -\Omega(z)$ и $\Omega^+(t-1) = \Omega^+(t+1)$, где $t \in (-i; i)$. Другими словами, функция $\Omega(z)$ голоморфна в горизонтальной полосе $|\operatorname{Im} z| < 1$ и имеет там действительный период 2. Пусть $\operatorname{Im} z = -1$. Тогда

$$\Omega^+(t+2i) = -\Omega^+(-it+2) = -\Omega^+(-it) = \Omega^+(t).$$

Итак, функция $\Omega(z)$ имеет примитивные периоды 2 и $2i$, а на ∂D у нее возможны самое большее логарифмические особенности. Значит, эллиптическая функция $\Omega(z)$ нулевого порядка ([8], ч. 2, гл. 1, §5), т. е. константа. Но из условия $c = -c$ имеем $\Omega(z) \equiv 0$.

Совершенно аналогично рассмотрим случай $k = 3$. В соответствии с (9) имеем $\Omega(z) \equiv 0$, поскольку $(Vf)(iz) = i(Vf)(z)$ и $c = ic$. $\square$

Теорема 3. При $k = 4$ полиэлементное уравнение (1) разрешимо, если только

$$(E\phi)(0) = g(0). \quad (10)$$

Доказательство. Для единственности решения $\phi(t)$ интегрального уравнения (8) имеем $\Omega(z) \equiv \text{const}$ в соотношении (9).

Условие (10) является не только условием разрешимости полиэлементного уравнения (1), но и обеспечивает равносильность регуляризации. $\square$

Замечание 4. По каждой функции $g(z)$ можно найти такую постоянную c_g , что для функции $g(z) + c_g$ условие (10) выполнено, т. е. уравнение (1) разрешимо.

Осталось рассмотреть случай $k = 1$. Здесь нельзя гарантировать даже разрешимость интегрального уравнения (8).

Теорема 5. При $k = 1$ полиэлементное уравнение (1) имеет не более чем конечное число условий разрешимости. Все они являются условиями разрешимости интегрального уравнения (8).

2. Приложение к проблеме моментов для ц.ф.э.т. класса А

Далее для определенности считаем, что $k = 3$ в соотношении (1). Перепишем его в терминах ц.ф.э.т., пользуясь нечетностью нижней функции и формулой преобразования Бореля

$$f(z) = \int_0^\infty F(x) \exp(-zx) dx, \quad \text{Re } z > 0.$$

Пусть, кроме того,

$$g(z) = -16 \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\beta_j z^{4j+1}}{(4j+1)!}, \quad (11)$$

причем радиус сходимости этого степенного ряда $R > \sqrt{2}$. Тогда уравнение (1) запишем в виде

$$-8 \int_0^\infty F(x) \exp^{-x} \cos x \cos 2x [\sin(xz) + \text{sh}(xz)] dx = g(z), \quad |z| < 1. \quad (12)$$

Ядро интеграла в левой части уравнения (7) состоит из двух слагаемых. Если хотя бы одно из этих слагаемых отсутствует, то такое уравнение решалось бы в явном виде с помощью синус-преобразования Фурье. При этом областью сходимости соответствующего несобственного интеграла была бы полоса шириной 2, вертикальная или горизонтальная, симметричная относительно оси ординат или абсцисс. Здесь же областью сходимости

является квадрат D , образованный пересечением горизонтальной и вертикальной полос. Поэтому и возникает необходимость прибегнуть к методу интегральных уравнений.

Приравняв коэффициенты Маклорена левой и правой частей равенства (12). С учетом (11) имеем

$$L[F, j] \equiv \int_0^\infty F(x) e^{-x} x^{4j+1} \cos x \cos 2x dx = \beta_j. \quad (13)$$

Теорема 6. *Лакунарная степенная проблема моментов Стильтьеса (13) для четной ц.ф.э.т. $F(z)$, ассоциированной по Борелю с нижней функцией $f(z) \in B$ с весом*

$$P(x) = e^{-x} \cos x \cos 2x$$

при сделанных предположениях разрешима и имеет единственное решение.

Положим $g_j(z) = -16[4j+1]^{-1}z^{4j+1}$. Возьмем систему интегралов типа Коши (3) $f_j(z) : (Vf_j)(z) = g_j(z)$, где $z \in D$, $j = \overline{0, \infty}$ и систему ц.ф.э.т. $\{F_j(z)\}$ из класса A , ассоциированных с ними по Борелю. Ясно, что $L[F_m; j] = \sigma_{m,j}$. По поводу приложений подобных биортогональных систем более подробно см. работу [9]. Там рассматривалось уравнение при $k=3$, $\Gamma = (-i; i)$, $(V_1f)(z) = f(z+1+i) + f(z-1+i) + f(z+1-i) + f(z-1-i)$.

Ц.ф.э.т. $F_j(z)$ ограничена по модулю на вещественной оси и вполне регулярного роста ([10], гл. 1, §4, п. 3) с индикатором $h_F(\theta) = 3|\sin \theta|$.

3. Обобщение на случай других разрезов по мнимой оси

Пусть теперь $\Gamma_1 = (ni, (n+1)i)$, $\Gamma_2 = -\Gamma_1$, $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$, $n = 3, 4, \dots$ Исследуем уравнение (1), но вместо оператора (2) возьмем

$$\begin{aligned} (V_1, f)(z) \equiv & f(z + (n+1)i + 1) + f(z - (n+1)i - 1) + f(z + (n+1)i - 1) \\ & + f(z - (n+1)i + 1) + f(z + (n-1)i + 1) + f(z - (n-1)i - 1) \\ & + f(z + (n-1)i - 1) + f(z - (n-1)i + 1). \end{aligned}$$

Преобразование $\sigma(z) = z \pm (n-1)i \pm 1$ (знаки не согласованы) переводит одну из точек $\pm ni$ в какую-то из вершин D . Решение ищется в классе функций B , представимых интегралом типа Коши (3) с четной или нечетной плотностью, аналогично тому, как это сделано в разделе 1. Еще раз отметим, что у граничных значений решение $f^\pm(t)$, $t \in \Gamma$ в точках $\pm ni$, $\pm(n+1)i$ возникают, самое большее, логарифмические особенности. Рассуждая аналогично тому, как это сделано в разделе 1, придем к интегральному уравнению Фредгольма

$$\begin{aligned} \phi(t) + \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} K(t, \tau) \phi(\tau) d\tau &= g^+(t + (-1)^j(n+1)i + 1) - g^+(t + (-1)^j(n+1)i - 1), \\ t \in \Gamma_j, \quad j &= 1, 2. \end{aligned}$$

При $t \in \Gamma_2$ имеем

$$\begin{aligned} K(t, \tau) = & (u - 2(n+1)i - 2)^{-1} + (u - 2)^{-1} + (u - 2ni - 2)^{-1} + (u - 2i - 2)^{-1} \\ & - (u + 2)^{-1} - (u - 2(n+1)i + 2)^{-1} - (u - 2i + 2)^{-1} \\ & - (u - 2ni + 2)^{-1} + i^k [(v - (n+2)i + n)^{-1} + (v - (n+2)i + n + 2)^{-1} \\ & + (v + (n-2)i + n + 2)^{-1} + (v + (n-2)i + n)^{-1} - (v + (n+2)i + n + 2)^{-1} \\ & - (v + (n+2)i + n)^{-1} - (v + (2-n)i + n)^{-1} - (v + (2-n)i + n + 2)^{-1}]. \end{aligned}$$

При $n = 3$ для модуля ядра справедлива оценка (7), но теперь

$$\gamma_k = \{3.44, k = 1; 2.65, k = 2; 0.53, k = 3; 2.35, k = 4\}.$$

Итак, при $k = 1$ опять неприменим принцип сжимающихся отображений, и не удастся найти число условий разрешимости уравнения (1), т. е. ситуация в некотором смысле аналогична указанной в замечании 2 из работы [9]. Остается сделать вывод о справедливости теорем 2, 3, 5 и для данной задачи.

Замечание 7. В статье [6] рассматривается разрез Γ при $n = 1$. Там ядро $K(t, \tau)$ содержит десять слагаемых. В разделе 1 данной статьи рассматривается разрез Γ при $n = 2$, и ядро $K(t, \tau)$ содержит двенадцать слагаемых. А вот при $n \geq 3$ ядро $K(t, \tau)$ содержит уже шестнадцать слагаемых.

Положим в уравнении (1) $k = 1$ и вместо ряда (11) возьмем ряд

$$g(z) = 16 \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\beta_j z^{4j}}{(4j)!}.$$

Обратим внимание на то, что в силу теоремы 3 и замечания 4 первый коэффициент ряда β_0 подобран так, что разрешимо уравнение (1), а радиус сходимости этого степенного ряда $R > \sqrt{2}$.

Теорема 8. Лакунарная степенная проблема моментов Стилтъяса

$$\int_0^{\infty} F(x) e^{-x} x^{4k} \cos 3x \cos x dx = \beta_k, \quad k = \overline{1, \infty}$$

для нечетной ц.ф.э.т. $F(z)$, ассоциированной по Борелю с нижней функцией $f(z) \in \beta$, разрешима и имеет единственное решение.

Список литературы

- [1] Б.Я. Левин, *Распределение корней целых функций*, ГИТТЛ, М., 1956.
- [2] Ф.Н. Гарифьянов, Е.В. Стрежнева, *Интерполяционные задачи для целых функций, индуцированные правильным шестиугольником*, Сиб. матем. журн. **59** (1), 78–85 (2018).
DOI: <https://doi.org/10.17377/smzh.2018.59.107>
- [3] E.P. Aksenteva, F.N. Garifyanov, *Sum-difference equation for analytic functions generated by pentagon and its application*, Lobachevskii J. Math. **37** (2), 101–104 (2016).
DOI: <https://doi.org/10.1134/S1995080216020037>
- [4] Л. Бибербах, *Аналитическое продолжение*, Наука, М., 1967.
- [5] Ф.Н. Гарифьянов, *Полиэлементные функциональные уравнения, связанные с ядром Карлемана, и их приложения*, Изв. вузов. Матем. (11), 21–37 (2022).
DOI: <https://doi.org/10.26907/0021-3446-2022-11-21-37>
- [6] Ф.Н. Гарифьянов, *О полиэлементных уравнениях, приводящих к проблеме моментов для целых функций класса A* , Изв. вузов. Матем. (4), 3–7 (2017).
URL: <https://www.mathnet.ru/rus/ivm9222>
- [7] Ф.Д. Гахов, *Краевые задачи*, Наука, М., 1977.
- [8] А. Гурвиц, Р. Курант, *Теория функций*, Наука, М., 1968.
- [9] Ф.Н. Гарифьянов, Е.В. Стрежнева, *О системе целых функций класса A , биортонгальной с весом лакунарной системе степеней на луче*, Сиб. матем. журн. **58** (1), 83–87 (2017).
DOI: <https://doi.org/10.17377/smzh.2017.58.108>
- [10] А.Ф. Леонтьев, *Ряды экспонент*, Наука, М., 1976.

Фархат Нургаязович Гарифьянов

Казанский государственный энергетический университет,
ул. Красносельская, д. 51, г. Казань, 420066, Россия,
e-mail: f.garifyanov@mail.ru

Эльвира Ильхамовна Гиззатуллина

Казанский государственный энергетический университет,
УПО «КОЛЛЕДЖ КИУ»,
ул. Красносельская, д. 51, г. Казань, 420066, Россия,
e-mail: hasanovae19966@mail.ru

Application of polyelement equations for functions analytic in a cut plane to interpolation problems for entire functions of class A

F.N. Garif'yanov, E.I. Gizzatullina

Abstract. Linear polyelement equations are investigated for functions analytic in a plane with a symmetric cut along the imaginary axis and vanishing at infinity. The solution is sought in the class of functions representable by a Cauchy-type integral over given cuts with an even or odd density. The regularization of these equations and the question of its equivalence are studied. In this process, the theory of elliptic functions is substantially used. The obtained results are applicable to the study of interpolation problems for entire functions of exponential type from class A.

Keywords: polyelement equations, regularization method, elliptic functions, entire functions of class A.

DOI: 10.26907/2949-3919.2026.2.76-85

References

- [1] B.Ja. Levin, *Distribution of zeros of entire functions*, AMS, Providence, RI, 1980.
- [2] F.N. Garif'yanov, E.V. Strezhneva, *Interpolation problems for entire functions induced by regular hexagons*, Siberian Math. J. **59** (1), 59–64 (2018).
DOI: <https://doi.org/10.1134/S003744661801007X>
- [3] E.P. Aksenteva, F.N. Garif'yanov, *Sum-difference equation for analytic functions generated by pentagon and its application*, Lobachevskii J. Math. **37** (2), 101–104 (2016).
DOI: <https://doi.org/10.1134/S1995080216020037>
- [4] L. Bieberbach, *Analytische fortsetzung*, Springer-Verlag, Berlin-Göttingen-Heidelberg, 1955 [in German].
- [5] F.N. Garif'yanov, *Polyelement functional equations related to the Carleman kernel and their applications*, Russian Math. (Iz. VUZ) **66** (11), 18–32 (2022).
DOI: <https://doi.org/10.3103/S1066369X22110020>
- [6] F.N. Garif'yanov, *Poly-element equations reducible to moment problem for entire functions of class A*, Russian Math. (Iz. VUZ) **61** (4), 1–4 (2017).
DOI: <https://doi.org/10.3103/S1066369X17040016>

-
- [7] F.D. Gakhov, *Boundary value problems*, Pergamon Press, Oxford; Addison-Wesley Publishing Co., Inc., Reading, Mass.-London, 1966.
- [8] A. Hurwitz, *Vorlesungen über allgemeine Funktionentheorie und elliptische Funktionen*, R. Courant, *Herausgegeben und ergänzt durch einen Abschnitt über geometrische Funktionentheorie*, Springer-Verlag, Berlin, 1964 [in German].
- [9] F.N. Garif'yanov, E.V. Strezhneva, *On a system of entire functions of class A which is biorthogonal to a lacunar power system on the ray*, Siberian Math. J. **58** (1), 63–66 (2017). DOI: <https://doi.org/10.1134/S0037446617010086>
- [10] A.F. Leontiev, *Exponential series*, Nauka, Moscow, 1976 [in Russian].

Farhat Nurgayazovich Garif'yanov

Kazan State Power Engineering University,
51 Krasnoselskaya str., Kazan 420066, Russia,
e-mail: f.garifyanov@mail.ru

Elvira Ilhamovna Gizzatullina

Kazan State Power Engineering University,
UPO «KIU College»,
51 Krasnoselskaya str., Kazan 420066, Russia,
e-mail: hasanovae19966@mail.ru