

Полугрупповые C^* -алгебры, порожденные изометрическими представлениями свободных произведений полугрупп рациональных чисел

Р.Н. Гумеров, Е.В. Липачева

Аннотация. Рассматриваются приведенные полугрупповые C^* -алгебры, порожденные левыми регулярными изометрическими представлениями свободных произведений счетных семейств полугрупп рациональных чисел. Показывается, что эти алгебры являются ядерными и аменабельными. Получена их характеристика в качестве универсальных C^* -алгебр, задаваемых множествами порождающих элементов, удовлетворяющих полиномиальным соотношениям.

Ключевые слова: аменабельная C^* -алгебра, индуктивная последовательность, левоаменабельная полугруппа, полугрупповая C^* -алгебра, свободное произведение полугрупп, универсальная C^* -алгебра, ядерная C^* -алгебра.

DOI: 10.26907/2949-3919.2026.2.86-103

1. Введение

Статья посвящена приведенным полугрупповым C^* -алгебрам, порожденным левыми регулярными изометрическими представлениями свободных произведений счетных семейств полугрупп рациональных чисел. Основным результатом работы является описание этих алгебр в качестве универсальных C^* -алгебр, задаваемых счетными множествами порождающих элементов, которые удовлетворяют счетным наборам полиномиальных соотношений.

Приведенные полугрупповые C^* -алгебры играют важную роль как в теории C^* -алгебр, так и в ее приложениях к теории операторов в гильбертовых пространствах, а также в математической и теоретической физике. За историей исследований этого класса C^* -алгебр и обширной литературой по обсуждаемому предмету мы отсылаем читателя к работе С. Ли [1].

В этой статье мы продолжаем наше исследование приведенных полугрупповых C^* -алгебр с точки зрения теории универсальных C^* -алгебр, определяемых множествами

Благодарности. Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда и Академии наук Республики Татарстан по проекту №24-21-20112, <https://www.rscf.ru/project/24-21-20112/>.

порождающих элементов, удовлетворяющих наборам соотношений (см. [2, 3]). Систематическое изучение универсальных C^* -алгебр было проведено Б. Блакадаром в статье [4] с целью их приложений в теории шейпов C^* -алгебр. Отметим, что характеристика операторных алгебр в качестве универсальных C^* -алгебр позволяет строить морфизмы между C^* -алгебрами, а также аппроксимировать сложно устроенные C^* -алгебры индуктивными системами, состоящими из более простых C^* -алгебр и их $*$ -гомоморфизмов. Интересные приложения теории универсальных C^* -алгебр содержатся в монографии Т. Лоринга [5].

В статьях [2] и [3] в качестве универсальных C^* -алгебр были охарактеризованы приведенные полугрупповые C^* -алгебры, порожденные левыми регулярными представлениями соответственно полугрупп рациональных чисел и свободных произведений конечных семейств этих полугрупп. При этом важную роль сыграли построенные аппроксимации этих полугрупповых C^* -алгебр индуктивными последовательностями алгебр Теплица и Теплица–Кунца соответственно (см., например, [6, 7]). В свою очередь, в данной статье описание приведенных полугрупповых C^* -алгебр для свободных произведений бесконечных семейств полугрупп рациональных чисел в качестве универсальных C^* -алгебр опирается на представление этих алгебр в виде индуктивных пределов последовательностей, состоящих из копий алгебры Кунца, порожденной счетным набором изометрий со взаимно ортогональными образами [8].

Содержание статьи следующее. Она состоит из пяти разделов. Первый раздел служит введением в предмет статьи. Второй раздел содержит предварительные сведения и используемые в тексте обозначения. В третьем разделе по произвольному счетному набору $\overline{N}$ бесконечных последовательностей натуральных чисел строится полугруппа $\mathcal{Q}_{\overline{N}}$, являющаяся свободным произведением для счетного семейства полугрупп рациональных чисел, определяемых последовательностями набора $\overline{N}$. В частности, показывается, что полугруппы $\mathcal{Q}_{\overline{N}}$ не являются ни левоаменабельными, ни правоаменабельными. Последние два раздела статьи посвящены полугрупповым C^* -алгебрам для полугрупп $\mathcal{Q}_{\overline{N}}$. В четвертом разделе показывается, что приведенные полугрупповые C^* -алгебры $C_{\lambda}^*(\mathcal{Q}_{\overline{N}})$, порожденные левыми изометрическими представлениями полугрупп $\mathcal{Q}_{\overline{N}}$, являются ядерными и аменабельными. Также в этом разделе устанавливается, что левые регулярные представления полных полугрупповых C^* -алгебр $C^*(\mathcal{Q}_{\overline{N}})$ для полугрупп $\mathcal{Q}_{\overline{N}}$ являются изоморфизмами между C^* -алгебрами $C^*(\mathcal{Q}_{\overline{N}})$ и $C_{\lambda}^*(\mathcal{Q}_{\overline{N}})$. Пятый раздел посвящен описанию полугрупповых C^* -алгебр $C_{\lambda}^*(\mathcal{Q}_{\overline{N}})$ как универсальных C^* -алгебр, задаваемых счетными наборами порождающих элементов и соотношений для них.

2. Обозначения и предварительные сведения

Пусть S – дискретная полугруппа с левым сокращением и $l^2(S)$ – гильбертово пространство всех квадратично суммируемых комплекснозначных функций на S . В пространстве $l^2(S)$ рассмотрим стандартный ортонормированный базис $\{e_s \mid s \in S\}$, состоящий из функций $e_s : S \rightarrow \mathbb{C}$, таких, что $e_s(t) = \delta_{st}$, где $t \in S$ и δ_{st} – символ Кронекера.

Пусть $\mathfrak{B}(l^2(S))$ – C^* -алгебра всех ограниченных линейных операторов на гильбертовом пространстве $l^2(S)$. Для каждого элемента $s \in S$ в пространстве $\mathfrak{B}(l^2(S))$ имеется изометрический оператор $T_s : l^2(S) \rightarrow l^2(S)$, задаваемый формулой

$$T_s(e_t) = e_{st}, \quad t \in S. \quad (1)$$

В алгебре $\mathfrak{B}(l^2(S))$ рассмотрим C^* -подалгебру, порожденную множеством изометрий $\{T_s \mid s \in S\}$. Она называется *левой приведенной полугрупповой C^* -алгеброй полугруппы S* и обозначается символом $C_\lambda^*(S)$.

В этой статье мы будем иметь дело с левыми приведенными полугрупповыми C^* -алгебрами для свободных произведений бесконечных семейств полугрупп. Поэтому далее напомним построение свободного произведения полугрупп.

Пусть $\{S_\mu \mid \mu \in \Lambda\}$ – семейство непересекающихся полугрупп. Рассмотрим объединение этого семейства $\bigsqcup_{\mu \in \Lambda} S_\mu$ в качестве алфавита для множества $\prod^* \{S_\mu \mid \mu \in \Lambda\}$, состоящего из всех непустых слов $s_1 s_2 \dots s_l$, $l \in \mathbb{N}$, таких, что любые две соседние буквы s_i и s_j принадлежат различным полугруппам семейства $\{S_\mu \mid \mu \in \Lambda\}$. На множестве $\prod^* \{S_\mu \mid \mu \in \Lambda\}$ зададим операцию умножения, обозначаемую символом $*$, следующим образом:

$$s_1 s_2 \dots s_l * t_1 t_2 \dots t_m = \begin{cases} s_1 \dots s_l t_1 t_2 \dots t_m, & \text{если } s_l \in S_\mu, t_1 \in S_\nu, \mu \neq \nu; \\ s_1 \dots s_{l-1} (s_l \cdot t_1) t_2 \dots t_m, & \text{если } s_l, t_1 \in S_\mu \text{ для некоторого } \mu, \end{cases}$$

где $s_1 s_2 \dots s_l, t_1 t_2 \dots t_m \in \prod^* \{S_\mu \mid \mu \in \Lambda\}$, $l, m \in \mathbb{N}$, $\mu, \nu \in \Lambda$. Множество $\prod^* \{S_\mu \mid \mu \in \Lambda\}$, наделенное операцией умножения $*$, является неабелевой полугруппой, которая называется *свободным произведением семейства полугрупп $\{S_\mu \mid \mu \in \Lambda\}$* .

Теперь напомним определение универсальной C^* -алгебры, задаваемой множеством порождающих элементов, которые удовлетворяют полиномиальным соотношениям (см. детали, например, в [4, раздел 1] и [5, глава 3]). Аксиоматический подход к этому понятию, использующий язык теории категорий и функторов, был предложен в работе [9] и развит в статьях [10–12].

Пусть $X = \{x_i \mid i \in I\}$ – некоторое множество и $\mathcal{F}(X)$ – комплексная инволютивная алгебра некоммутативных многочленов от переменных из множества $X \sqcup X^*$, где $X^* = \{x_i^* \mid i \in I\}$. Пусть R – некоторое подмножество в $\mathcal{F}(X)$. Назовем X и R множествами *порождающих элементов* и *соотношений* соответственно. Пара (X, R) называется *$*$ -полиномиальной парой* [10].

Пусть $\mathcal{A}$ – произвольная C^* -алгебра. Функция $f : X \rightarrow \mathcal{A}$ называется *представлением* пары (X, R) , если для каждого полинома $p(x_{i_1}, \dots, x_{i_s}, x_{j_1}^*, \dots, x_{j_t}^*)$ из R в C^* -алгебре $\mathcal{A}$ справедливо равенство $p(f(x_{i_1}), \dots, f(x_{i_s}), f(x_{j_1})^*, \dots, f(x_{j_t})^*) = 0$, где $s, t \in \mathbb{N}$.

Универсальной C^* -алгеброй, определяемой множеством порождающих элементов X и множеством соотношений R , называется пара $(C^*(X, R), \iota)$, состоящая из C^* -алгебры $C^*(X, R)$ и представления $\iota : X \rightarrow C^*(X, R)$, удовлетворяющая следующему свойству

универсальности: для любой C^* -алгебры $\mathcal{A}$ и любого представления $f : X \longrightarrow \mathcal{A}$ существует единственный $*$ -гомоморфизм $\bar{f} : C^*(X, R) \longrightarrow \mathcal{A}$, такой, что диаграмма

$$\begin{array}{ccc} X & & \\ \downarrow \iota & \searrow f & \\ C^*(X, R) & \xrightarrow{\bar{f}} & \mathcal{A} \end{array}$$

коммутативна, т. е., $f = \bar{f} \circ \iota$. При этом C^* -алгебра $C^*(X, R)$ сама часто называется универсальной C^* -алгеброй, порожденной парой (X, R) .

Заметим, что универсальная C^* -алгебра, задаваемая множествами порождающих элементов и соотношений, не всегда существует. Б.Блакадар ввел понятие *допустимой пары* (X, R) [4, определение 1.2] и доказал, что для такой пары универсальная C^* -алгебра $C^*(X, R)$ всегда существует. Отметим, что для каждой C^* -алгебры $\mathcal{A}$ существует $*$ -полиномиальная пара (X, R) , такая, что $\mathcal{A} = C^*(X, R)$ [10, теорема 2].

Если универсальная C^* -алгебра $C^*(X, R)$ является унитарной с единицей 1 и $\iota(x) = 1$ для некоторого $x \in X$, то элемент x также обозначается 1. При этом мы всегда предполагаем, что все естественные соотношения для 1 содержатся в R . При этом, для краткости, эти соотношения не пишутся.

Известен целый ряд различных интересных примеров универсальных C^* -алгебр (см., например, [13, II.8.3.2] и [14, приложение, A1]). В нашем изложении будет использоваться хорошо известная в математической физике алгебра Кунца $\mathcal{O}_\infty$, которая может быть определена как универсальная C^* -алгебра следующим образом:

$$\mathcal{O}_\infty = C^* (\{u_1, u_2, \dots\}, \{u_i^* u_j = \delta_{ij} 1 \mid i, j \in \mathbb{N}\}). \quad (2)$$

Другими словами, алгебра $\mathcal{O}_\infty$ – это универсальная C^* -алгебра, порожденная счетным числом изометрий с попарно ортогональными образами (см. [13, II.8.3.3]). Эта алгебра была введена и изучена И. Кунцем [15]. Он, в частности, доказал, что алгебра $\mathcal{O}_\infty$ проста. Известно также, что эта алгебра аменабельна и ядерна (см., например, [13, IV.3.5.3]).

В работах [2, 3] приведены примеры универсальных C^* -алгебр, для которых выбор множеств порождающих элементов и соотношений обусловлен представлением этих алгебр в виде пределов индуктивных последовательностей алгебр Теплица и Теплица–Кунца.

В данной статье индуктивные последовательности также будут играть ключевую роль в описании приведенной полугрупповой C^* -алгебры для свободного произведения бесконечного семейства полугрупп. Напомним некоторые факты, связанные с индуктивными последовательностями.

Пусть $\{\mathcal{A}_k \mid k \in \mathbb{N}\}$ и $\{\varphi_k : \mathcal{A}_k \longrightarrow \mathcal{A}_{k+1} \mid k \in \mathbb{N}\}$ – счетные семейства C^* -алгебр и их $*$ -гомоморфизмов, соответственно. Тогда говорят, что задана индуктивная последовательность C^* -алгебр $\{\mathcal{A}_k, \varphi_k \mid k \in \mathbb{N}\}$. Часто такую индуктивную последовательность

записывают в виде диаграммы

$$\mathcal{A}_1 \xrightarrow{\varphi_1} \mathcal{A}_2 \xrightarrow{\varphi_2} \mathcal{A}_3 \xrightarrow{\varphi_3} \dots \quad (3)$$

Известно, что для любой индуктивной последовательности C^* -алгебр (3) существует индуктивный предел, который единствен с точностью до изоморфизма. Индуктивный предел представляет собой пару $(\mathcal{A}, \{\varphi_{k,\infty} \mid k \in \mathbb{N}\})$, состоящую из C^* -алгебры $\mathcal{A}$ и семейства $*$ -гомоморфизмов $\{\varphi_{k,\infty} : \mathcal{A}_k \rightarrow \mathcal{A} \mid k \in \mathbb{N}\}$, которые обладают важным свойством универсальности. При этом, с точностью до изоморфизма, имеет место равенство

$$\mathcal{A} = \overline{\bigcup_{k=1}^{+\infty} \varphi_{k,\infty}(\mathcal{A}_k)},$$

где замыкание берется в топологии нормы. Кроме того, часто C^* -алгебру $\mathcal{A}$ саму называют индуктивным пределом. Детальное изложение этих понятий и фактов о них содержится, например, в [16, глава 6].

3. Свободные произведения счетных семейств полугрупп рациональных чисел

В этом параграфе для произвольного счетного набора последовательностей натуральных чисел мы построим семейство полугрупп рациональных чисел и свободное произведение для полугрупп этого семейства. В дальнейшем будут изучены некоторые свойства полученного свободного произведения.

Рассмотрим произвольный счетный набор $\overline{N}$ бесконечных последовательностей натуральных чисел

$$\overline{N} := \left(N_1 = \{n_{11}, n_{21}, n_{31}, \dots\}, N_2 = \{n_{12}, n_{22}, n_{32}, \dots\}, \dots \right), \quad (4)$$

где $n_{ij} \in \mathbb{N}$ для всех $i, j \in \mathbb{N}$.

Для каждого $i \in \mathbb{N}$ определим аддитивную полугруппу рациональных чисел $\mathbb{Q}_{N_i}^+$ следующим образом:

$$\mathbb{Q}_{N_i}^+ = \left\{ \frac{m}{n_{1i} \dots n_{ki}} \mid m \in \mathbb{N}, k \in \mathbb{N} \right\},$$

где $i \in \mathbb{N}$.

Далее, для каждого $i \in \mathbb{N}$ рассмотрим полугруппу $\mathbb{Q}_{N_i}^+ \times \{i\}$ с бинарной операцией, заданной формулой

$$(u, i) + (v, i) = (u + v, i), \quad u, v \in \mathbb{Q}_{N_i}^+.$$

Построим свободное произведение счетного семейства полугрупп $\{\mathbb{Q}_{N_i}^+ \times \{i\} \mid i \in \mathbb{N}\}$

и, присоединив нейтральный элемент e , получим полугруппу

$$\mathcal{Q}_{\overline{N}} := \left(\prod^* \{ \mathbb{Q}_{N_i}^+ \times \{i\} \mid i \in \mathbb{N} \} \right) \sqcup \{e\}.$$

Легко видеть, что полугруппа $\mathcal{Q}_{\overline{N}}$ неабелева, обладает левым и правым сокращением и вкладывается в группу, которая является свободным произведением аддитивных групп рациональных чисел $\{\mathbb{Q}_{N_i} \mid i \in \mathbb{N}\}$.

Нашей целью будет показать, что полугруппа $\mathcal{Q}_{\overline{N}}$ не является ни левоаменабельной, ни правоаменабельной.

Напомним, что дискретная полугруппа S называется (лево)правоаменабельной, если на S существует конечно-аддитивная (лево)правоинвариантная вероятностная мера, определенная на сигма-алгебре всех подмножеств в S . Например, любая абелева полугруппа является левоаменабельной и правоаменабельной.

В работе [17] изучались аменабельные полугруппы, вложимые в группы. В частности, в ней показано, что если полугруппа с сокращением является (лево) правоаменабельной, то она удовлетворяет (левому) правому условию Оре. А именно, для произвольных элементов $s, t \in S$ выполняется соотношение $sS \cap tS \neq \emptyset$ ($Ss \cap St \neq \emptyset$). Здесь $sS := \{sr \mid r \in S\}$ и $Ss := \{rs \mid r \in S\}$. Например, любая абелева полугруппа с сокращением удовлетворяет и левому, и правому условию Оре.

Теорема 1. Пусть $\overline{N}$ – произвольный счетный набор бесконечных последовательностей натуральных чисел. Тогда для полугруппы $\mathcal{Q}_{\overline{N}}$ выполняются следующие свойства:

- 1) $\mathcal{Q}_{\overline{N}}$ не удовлетворяет ни левому, ни правому условию Оре;
- 2) $\mathcal{Q}_{\overline{N}}$ не является ни левоаменабельной, ни правоаменабельной.

Доказательство. 1) Пусть $a = (p, i)$ и $b = (q, j)$, где $p \in \mathbb{Q}_{N_i}^+$, $q \in \mathbb{Q}_{N_j}^+$, $i, j \in \mathbb{N}$ и $i \neq j$. Очевидно, что справедливо равенство $a * \mathcal{Q}_{\overline{N}} \cap b * \mathcal{Q}_{\overline{N}} = \emptyset$. Таким образом, полугруппа $\mathcal{Q}_{\overline{N}}$ не удовлетворяет левому условию Оре. Аналогично показывается, что полугруппа $\mathcal{Q}_{\overline{N}}$ не удовлетворяет правому условию Оре.

- 2) Следует из 1) и [17, предложение 2]. □

4. Полугрупповые C^* -алгебры для свободных произведений счетных семейств полугрупп рациональных чисел

В этом параграфе мы рассмотрим левую приведенную полугрупповую C^* -алгебру $C_\lambda^*(\mathcal{Q}_{\overline{N}})$ для полугруппы $\mathcal{Q}_{\overline{N}}$, построенной в предыдущем параграфе по счетному набору бесконечных последовательностей натуральных чисел (4). Мы покажем, что эта полугрупповая C^* -алгебра $C_\lambda^*(\mathcal{Q}_{\overline{N}})$ и полная полугрупповая C^* -алгебра $C^*(\mathcal{Q}_{\overline{N}})$ канонически изоморфны.

В работе [8] была изучена структура C^* -алгебры $C_\lambda^*(\mathcal{Q}_{\overline{N}})$. Было показано, что $C_\lambda^*(\mathcal{Q}_{\overline{N}})$ есть C^* -подалгебра в алгебре $\mathfrak{B}(l^2(\mathcal{Q}_{\overline{N}}))$ всех ограниченных операторов на гильбертовом пространстве $l^2(\mathcal{Q}_{\overline{N}})$, порожденная следующим семейством изометрий:

$$T_{1,i} := T_{(1,i)}, \quad T_{k+1,i} := T_{\left(\frac{1}{n_{1i} \dots n_{ki}}, i\right)}, \quad k, i \in \mathbb{N}. \quad (5)$$

Более того, пара $(C_\lambda^*(\mathcal{Q}_{\overline{N}}), \{\varphi_{k,\infty} \mid k \in \mathbb{N}\})$ является индуктивным пределом индуктивной последовательности алгебр Кунца

$$\mathcal{O}_\infty \xrightarrow{\varphi_1} \mathcal{O}_\infty \xrightarrow{\varphi_2} \mathcal{O}_\infty \xrightarrow{\varphi_3} \dots \quad (6)$$

Здесь связующие инъективные $*$ -гомоморфизмы φ_k и инъективные $*$ -гомоморфизмы $\varphi_{k,\infty}$ задаются значениями на порождающих элементах алгебры Кунца:

$$\begin{aligned} \varphi_k : \mathcal{O}_\infty &\longrightarrow \mathcal{O}_\infty : u_i \longmapsto u_i^{n_{ki}}, \\ \varphi_{k,\infty} : \mathcal{O}_\infty &\longrightarrow C_\lambda^*(\mathcal{Q}_{\overline{N}}) : u_i \longmapsto T_{k,i}, \end{aligned}$$

где $k, i \in \mathbb{N}$. Таким образом, мы имеем равенство

$$C_\lambda^*(\mathcal{Q}_{\overline{N}}) = \overline{\bigcup_{k=1}^{+\infty} \varphi_{k,\infty}(\mathcal{O}_\infty)},$$

где замыкание берется в топологии нормы. Подробности содержатся в работе [8].

Напомним, что C^* -алгебра A называется *ядерной*, если для любой C^* -алгебры B существует только одна C^* -норма на алгебраическом тензорном произведении $A \otimes B$.

Теорема 2. Пусть $\overline{N}$ – произвольный счетный набор бесконечных последовательностей натуральных чисел. Тогда левая приведенная полугрупповая C^* -алгебра $C_\lambda^*(\mathcal{Q}_{\overline{N}})$ ядерна.

Доказательство. Как уже упоминалось в предварительных сведениях, алгебра Кунца $\mathcal{O}_\infty$ ядерна. Так как левая приведенная полугрупповая C^* -алгебра $C_\lambda^*(\mathcal{Q}_{\overline{N}})$ является пределом индуктивной последовательности, состоящей из копий алгебры Кунца $\mathcal{O}_\infty$ и инъективных $*$ -гомоморфизмов, то она также ядерна [16, теорема 6.3.10]. $\square$

Понятие ядерной C^* -алгебры тесно связано с важнейшим понятием аменабельной банаховой алгебры, введенным Б. Джонсоном [18]. Напомним, что банахова алгебра A называется аменабельной, если все ее одномерные группы когомологий с коэффициентами в дуальных банаховых A -бимодулях тривиальны, или, другими словами, каждое непрерывное дифференцирование алгебры A со значениями в любом дуальном банаховом A -бимодуле является внутренним (подробности см., например, в [19, гл. 7]). Знаменитая теорема Конна–Хаагерупа утверждает, что C^* -алгебра является ядерной тогда и только тогда, когда она аменабельна [20, 21]. В качестве следствия этого факта и теоремы 2 мы немедленно получаем следующий результат.

Теорема 3. Пусть $\overline{N}$ – произвольный счетный набор бесконечных последовательностей натуральных чисел. Тогда левая приведенная полугрупповая C^* -алгебра $C_\lambda^*(\mathcal{Q}_{\overline{N}})$ аменабельна.

Кроме левой приведенной полугрупповой C^* -алгебры $C_\lambda^*(\mathcal{Q}_{\overline{N}})$ мы будем рассматривать также полную полугрупповую C^* -алгебру $C^*(\mathcal{Q}_{\overline{N}})$. Поэтому дадим далее определение полной полугрупповой C^* -алгебры для произвольной дискретной полугруппы с левым сокращением.

Пусть S – полугруппа с левым сокращением. Наименьшую полугруппу частичных изометрий на гильбертовом пространстве $l^2(S)$, содержащую все изометрии T_s (см. (1)) и их сопряженные операторы T_s^* , $s \in S$, обозначим через $I_l(S)$. Полугруппа $I_l(S)$ является инверсной полугруппой, т. е. для каждого элемента $a \in I_l(S)$ существует единственный элемент $b \in I_l(S)$ такой, что $aba = a$ и $bab = b$. При этом используется обозначение $b = a^{-1}$. Отметим, что S можно рассматривать как подполугруппу в $I_l(S)$, так как существует естественное вложение $S \rightarrow I_l(S) : s \mapsto T_s$. Инверсная полугруппа $I_l(S)$ называется *левой инверсной оболочкой* полугруппы S .

Полная полугрупповая C^* -алгебра полугруппы S определяется как универсальная C^* -алгебра следующего вида [1, определение 5.6.38]:

$$C^*(S) := C^* \left(\{v_a\}_{a \in I_l(S)}, \{v_a v_b = v_{ab}, v_a^* = v_{a^{-1}}, v_0 = 0, \text{ если } 0 \in I_l(S), a, b \in I_l(S)\} \right).$$

Другими словами, $C^*(S)$ является C^* -алгеброй, универсальной относительно $*$ -представлений инверсной полугруппы $I_l(S)$ частичными изометриями.

Заметим, что существует канонический сюръективный $*$ -гомоморфизм

$$C^*(S) \rightarrow C_\lambda^*(S) : v_a \mapsto T_a, \quad a \in S,$$

который называется *левым регулярным представлением* полной полугрупповой C^* -алгебры полугруппы S . Подробности содержатся в работе [1, § 5.6.6].

Следующее утверждение вытекает из теоремы 4.4 и следствия 3.8 в [22] (см. также [23]).

Теорема 4. Пусть $\overline{N}$ – произвольный счетный набор бесконечных последовательностей натуральных чисел. Тогда левое регулярное представление полной полугрупповой C^* -алгебры полугруппы $\mathcal{Q}_{\overline{N}}$

$$C^*(\mathcal{Q}_{\overline{N}}) \rightarrow C_\lambda^*(\mathcal{Q}_{\overline{N}}) : v_a \mapsto T_a, \quad a \in \mathcal{Q}_{\overline{N}},$$

является изоморфизмом C^* -алгебр.

В следующем параграфе мы получим простое и естественное описание C^* -алгебр $C^*(\mathcal{Q}_{\overline{N}})$ и $C_\lambda^*(\mathcal{Q}_{\overline{N}})$ в терминах порождающих элементов и соотношений для них.

5. Характеризация полугрупповых алгебр $C_\lambda^*(\mathcal{Q}_{\overline{N}})$ как универсальных C^* -алгебр

В этом разделе мы продолжим изучение левых приведенных полугрупповых C^* -алгебр $C_\lambda^*(\mathcal{Q}_{\overline{N}})$ и покажем, что они могут быть охарактеризованы как универсальные C^* -алгебры, определяемые счетными множествами порождающих элементов и соотношений. А именно, мы докажем, что C^* -алгебра $C_\lambda^*(\mathcal{Q}_{\overline{N}})$, построенная по счетному набору (4) бесконечных последовательностей натуральных чисел $\overline{N}$, изоморфна универсальной C^* -алгебре $C^*(X, R)$, где

$$X = \{1, x_{ki} \mid k, i \in \mathbb{N}\}, \quad (7)$$

$$R = \{x_{ki}^* x_{kj} = \delta_{ij} 1, x_{ki} = x_{k+1,i}^{n_{ki}} \mid k, i, j \in \mathbb{N}\}. \quad (8)$$

Отметим, что согласно определению 1.1 из [4], пара (X, R) является допустимой, и, следовательно, универсальная C^* -алгебра $C^*(X, R)$, порожденная (7) и (8), существует [4].

Для построения требуемого изоморфизма C^* -алгебр мы докажем две леммы, в которых построим два $*$ -гомоморфизма между C^* -алгебрами $C_\lambda^*(\mathcal{Q}_{\overline{N}})$ и $C^*(X, R)$. Затем покажем, что эти $*$ -гомоморфизмы являются взаимно обратными, т. е. определяют изоморфизм рассматриваемых C^* -алгебр.

Лемма 5. *Существует единственный унитарный $*$ -гомоморфизм C^* -алгебр*

$$\varphi : C^*(X, R) \longrightarrow C_\lambda^*(\mathcal{Q}_{\overline{N}}),$$

такой, что для любых $k, i \in \mathbb{N}$ выполняется условие:

$$\varphi(\iota(x_{ki})) = T_{k,i}. \quad (9)$$

Доказательство. Зададим функцию $g : X \longrightarrow C_\lambda^*(\mathcal{Q}_{\overline{N}})$ формулой

$$g(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x = 1; \\ T_{k,i}, & \text{если } x = x_{ki}, k, i \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Проверим, что для элементов $g(x_{ki})$ в C^* -алгебре $C_\lambda^*(\mathcal{Q}_{\overline{N}})$ выполняются соотношения:

$$1) g(x_{ki})^* g(x_{ki}) = 1; \quad 2) g(x_{ki})^* g(x_{kj}) = 0; \quad 3) g(x_{ki}) = g(x_{k+1,i})^{n_{ki}}$$

для любых $k, i, j \in \mathbb{N}$, $i \neq j$. Равенство 1) очевидно. Для доказательства 2) достаточно проверить, что равенство

$$T_{k,i}^* T_{k,j} e_s = 0 \quad (10)$$

справедливо для любого базисного вектора e_s . Зафиксируем $s \in \mathcal{Q}_{\overline{N}}$. Для произвольного

элемента $t \in \mathcal{Q}_{\overline{N}}$ вычислим скалярное произведение векторов из пространства $l^2(\mathcal{Q}_{\overline{N}})$:

$$\langle e_t, T_{k,i}^* T_{k,j} e_s \rangle = \langle T_{k,i} e_t, T_{k,j} e_s \rangle = \langle e_{(p,i)*t}, e_{(q,j)*s} \rangle,$$

где $p = q = 1$, если $k = 1$ и $p = \frac{1}{n_{1i} \dots n_{(k-1)i}}$, $q = \frac{1}{n_{1j} \dots n_{(k-1)j}}$, если $k \geq 2$ (см. (5)). Так как $i \neq j$, то, очевидно, мы имеем соотношение

$$(p, i) * t \neq (q, j) * s.$$

Следовательно, справедливо равенство

$$\langle e_{(p,i)*t}, e_{(q,j)*s} \rangle = 0.$$

Таким образом, имеем равенство

$$\langle e_t, T_{k,i}^* T_{k,j} e_s \rangle = 0$$

для любого $t \in \mathcal{Q}$, что доказывает (10), а значит, и равенство 2). Наконец, используя (1) и (5), мы получаем 3):

$$g(x_{k+1,i})^{n_{ki}} = T_{k+1,i}^{n_{ki}} = T_{\left(\frac{n_{ki}}{n_{1i} \dots n_{ki}}, i\right)} = T_{k,i} = g(x_{ki}).$$

По свойству универсальности C^* -алгебры $C^*(X, R)$ существует единственный унитарный $*$ -гомоморфизм C^* -алгебр $\varphi : C^*(X, R) \longrightarrow C_\lambda^*(\mathcal{Q}_{\overline{N}})$, такой, что диаграмма

$$\begin{array}{ccc} & X & \\ \iota \swarrow & & \searrow g \\ C^*(X, R) & \text{---} \text{---} \text{---} \varphi \text{---} \text{---} \text{---} & C_\lambda^*(\mathcal{Q}_{\overline{N}}) \end{array}$$

коммутативна, т. е. выполняется условие (9). □

Лемма 6. *Существует единственный унитарный $*$ -гомоморфизм C^* -алгебр*

$$\psi : C_\lambda^*(\mathcal{Q}_{\overline{N}}) \longrightarrow C^*(X, R),$$

такой, что для любых $k, i \in \mathbb{N}$ выполняется условие:

$$\psi(T_{k,i}) = \iota(x_{ki}) \tag{11}$$

Более того, $*$ -гомоморфизм ψ инъективен.

Доказательство. Во-первых, отметим, что для любого $k \in \mathbb{N}$ существует единственный $*$ -гомоморфизм

$$\psi_{k,\infty} : \mathcal{O}_\infty \longrightarrow C^*(X, R),$$

такой, что $\psi_{k,\infty}(u_i) = \iota(x_{ki})$ для любого $i \in \mathbb{N}$. Действительно, элементы $\iota(x_{k1}), \iota(x_{k2}), \dots$ в C^* -алгебре $C^*(X, R)$ удовлетворяют соотношениям, определяющим универсальную C^* -алгебру $\mathcal{O}_\infty$ (см. (8) и (2)). Поэтому, по свойству универсальности C^* -алгебры $\mathcal{O}_\infty$, существует требуемый $*$ -гомоморфизм $\psi_{k,\infty}$.

Во-вторых, покажем, что для каждого $k \in \mathbb{N}$ следующая диаграмма коммутативна:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{O}_\infty & \xrightarrow{\varphi_k} & \mathcal{O}_\infty \\ & \searrow \psi_{k,\infty} & \swarrow \psi_{k+1,\infty} \\ & C^*(X, R) & \end{array}$$

Для этого достаточно проверить совпадение значений $*$ -гомоморфизмов на порождающих элементах $u_1, u_2, \dots$ алгебры Кунца $\mathcal{O}_\infty$. Действительно, для любого $i \in \mathbb{N}$ имеем следующие равенства:

$$\psi_{k+1,\infty}(\varphi_k(u_i)) = \psi_{k+1,\infty}(u_i^{n_{ki}}) = \iota(x_{k+1,i})^{n_{ki}} = \iota(x_{ki}) = \psi_{k,\infty}(u_i).$$

В-третьих, по свойству универсальности индуктивного предела индуктивной последовательности алгебр Кунца (6), существует единственный унитарный $*$ -гомоморфизм $\psi : C_\lambda^*(\mathcal{Q}_{\overline{N}}) \longrightarrow C^*(X, R)$, делающий диаграмму

$$\begin{array}{ccc} & \mathcal{O}_\infty & \\ \varphi_{k,\infty} \swarrow & & \searrow \psi_{k,\infty} \\ C_\lambda^*(\mathcal{Q}_{\overline{N}}) & \overset{\psi}{\dashrightarrow} & C^*(X, R) \end{array}$$

коммутативной для любого $k \in \mathbb{N}$, т. е. справедливо равенство

$$\psi \circ \varphi_{k,\infty} = \psi_{k,\infty}. \quad (12)$$

Из равенства (12) вытекает, что $*$ -гомоморфизм ψ удовлетворяет требуемому условию (11):

$$\psi(T_{k,i}) = \psi(\varphi_{k,\infty}(u_i)) = \psi_{k,\infty}(u_i) = \iota(x_{ki})$$

для любых $k, i \in \mathbb{N}$.

Наконец, отметим, что C^* -алгебра $C_\lambda^*(\mathcal{Q}_{\overline{N}})$ является простой, так как она служит индуктивным пределом последовательности простых C^* -алгебр [8, теорема 1]. Следовательно, $*$ -гомоморфизм ψ инъективен. $\square$

Далее мы получим описание левой приведенной полугрупповой C^* -алгебры $C_\lambda^*(\mathcal{Q}_{\overline{N}})$ как универсальной C^* -алгебры, порожденной множествами порождающих (7) и соотношений (8).

Теорема 7. Пусть $\overline{N}$ – произвольный счетный набор бесконечных последовательностей натуральных чисел:

$$\overline{N} = \left(\{n_{11}, n_{21}, n_{31}, \dots\}, \{n_{12}, n_{22}, n_{32}, \dots\}, \dots \right).$$

Пусть $X = \{1, x_{ki} \mid k, i \in \mathbb{N}\}$ – множество элементов, удовлетворяющих набору соотношений

$$R = \{x_{ki}^* x_{kj} = \delta_{ij} 1, x_{ki} = x_{k+1, i}^{n_{ki}} \mid k, i, j \in \mathbb{N}\}.$$

Тогда универсальная C^* -алгебра $C^*(X, R)$ изоморфна левой приведенной полугрупповой C^* -алгебре $C_\lambda^*(\mathcal{Q}_{\overline{N}})$.

Доказательство. Рассмотрим $*$ -гомоморфизмы φ и ψ , построенные в леммах 5 и 6. Покажем, что φ и ψ – взаимно обратные изоморфизмы между C^* -алгебрами $C^*(X, R)$ и $C_\lambda^*(\mathcal{Q}_{\overline{N}})$, т. е. что выполняются равенства: $\varphi \circ \psi = \text{Id}_{C_\lambda^*(\mathcal{Q}_{\overline{N}})}$ и $\psi \circ \varphi = \text{Id}_{C^*(X, R)}$.

С этой целью покажем, что диаграмма

$$\begin{array}{ccc} & \mathcal{O}_\infty & \\ \varphi_{k, \infty} \swarrow & & \searrow \varphi_{k, \infty} \\ C_\lambda^*(\mathcal{Q}_{\overline{N}}) & \xrightarrow{\varphi \circ \psi} & C_\lambda^*(\mathcal{Q}_{\overline{N}}) \end{array} \quad (13)$$

коммутативна для каждого $k \in \mathbb{N}$, т. е. справедливо равенство

$$\varphi \circ \psi \circ \varphi_{k, \infty} = \varphi_{k, \infty}. \quad (14)$$

Проверку этого равенства достаточно провести на порождающих элементах $u_1, u_2, \dots$ алгебры Кунца. В силу (9) и (11), получаем следующие равенства:

$$\varphi \circ \psi(\varphi_{k, \infty}(u_i)) = \varphi \circ \psi(T_{k, i}) = \varphi(\iota(x_{ki})) = T_{k, i} = \varphi_{k, \infty}(u_i),$$

где $i \in \mathbb{N}$. Это доказывает равенство (14).

По свойству универсальности C^* -алгебры $C_\lambda^*(\mathcal{Q}_{\overline{N}})$, рассматриваемой как индуктивный предел индуктивной последовательности алгебр Кунца (6), существует единственный $*$ -гомоморфизм, делающий диаграмму (13) коммутативной для каждого $k \in \mathbb{N}$. Таким образом, мы получаем первое из требуемых равенств:

$$\varphi \circ \psi = \text{Id}_{C_\lambda^*(\mathcal{Q}_{\overline{N}})}.$$

Далее, рассмотрим диаграмму

$$\begin{array}{ccc}
 & X & \\
 \iota \swarrow & & \searrow \iota \\
 C^*(X, R) & \xrightarrow{\psi \circ \varphi} & C^*(X, R)
 \end{array} \tag{15}$$

Используя (9) и (11), мы получаем равенства

$$\psi \circ \varphi(\iota(x_{ki})) = \psi(T_{k,i}) = \iota(x_{ki})$$

для любых $k, i \in \mathbb{N}$. Кроме того, по леммам 5 и 6, мы также имеем равенство $\psi \circ \varphi \circ \iota(1) = \iota(1)$. Таким образом, диаграмма (15) коммутативна.

Теперь второе из требуемых равенств следует из свойства универсальности C^* -алгебры $C^*(X, R)$:

$$\psi \circ \varphi = \text{Id}_{C^*(X, R)}. \quad \square$$

Заметим, что существует другой способ доказательства теоремы 7. А именно, можно использовать хорошо известную конструкцию универсальной C^* -алгебры $C^*(X, R)$ [4, определение 1.2] и инъективность $*$ -гомоморфизма ψ из леммы 6. Для того чтобы показать, что ψ является изоморфизмом C^* -алгебр, достаточно доказать, что образ этого $*$ -гомоморфизма всюду плотен в $C^*(X, R)$ [19, следствие 4.7.84].

Из теорем 7 и 4 получаем

Следствие 8. В предположениях теоремы 7, полная полугрупповая C^* -алгебра $C^*(Q_{\overline{N}})$ с точностью до изоморфизма является универсальной C^* -алгеброй $C^*(X, R)$.

Список литературы

- [1] X. Li, *Semigroup C^* -algebras*, in: *K-theory for group C^* -algebras and semigroup C^* -algebras*, Oberwolfach Seminars **47**, Birkhäuser, Cham, 167–272 (2017).
DOI: https://doi.org/10.1007/978-3-319-59915-1_5
- [2] R. Gumerov, A. Kuklin, E. Lipacheva, *A universal property of semigroup C^* -algebras generated by cones in groups of rationals*, Ann. Funct. Anal. **15** (3), paper no. 72 (2024).
DOI: <https://doi.org/10.1007/s43034-024-00374-5>
- [3] R.N. Gumerov, A.S. Kuklin, E.V. Lipacheva *A universal property of semigroup C^* -algebras for the free products of semigroups of rationals*, Уфимск. матем. журн. **18** (1), 120–133 (2026).
DOI: <https://doi.org/article/10.13108/2026-18-1-113>
- [4] B. Blackadar, *Shape theory for C^* -algebras*, Math. Scand. **56** (2), 249–275 (1985).
DOI: <https://doi.org/10.7146/math.scand.a-12100>

- [5] T.A. Loring, *Lifting solutions to perturbing problems in C^* -algebras*, Fields Institute Monographs **8**, AMS, Providence, RI, 1997.
DOI: <https://doi.org/10.1090/fim/008>
- [6] Р.Н. Гумеров, *Предельные автоморфизмы C^* -алгебр, порожденных изометрическими представлениями полугрупп рациональных чисел*, Сиб. матем. журн. **59** (1), 95–109 (2018).
URL: <https://doi.org/10.17377/smzh.2018.59.109>
- [7] R.N. Gumerov, E.V. Lipacheva, *Automorphisms of the limits for the direct sequences of the Toeplitz–Cuntz algebras*, J. Math. Anal. Appl. **533** (2), paper no. 127991 (2024).
DOI: <https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2023.127991>
- [8] R.N. Gumerov, E.V. Lipacheva, *An approximation of semigroup C^* -algebras*, Lobachevskii J. Math. **47** (2), 526–532 (2026).
DOI: <https://doi.org/10.1134/S1995080225615164>
- [9] T.A. Loring, *C^* -algebra relations*, Math. Scand. **107** (1), 43–72 (2010).
DOI: <https://doi.org/10.7146/math.scand.a-15142>
- [10] I.S. Berdnikov, R.N. Gumerov, E.V. Lipacheva, K.A. Shishkin, *On C^* -algebra and $*$ -polynomial relations*, Lobachevskii J. Math. **44** (6), 1990–1997 (2023).
DOI: <https://doi.org/10.1134/S1995080223060112>
- [11] R.N. Gumerov, E.V. Lipacheva, K.A. Shishkin, *Categorical criterion for existence of universal C^* -algebras*, Уфимск. матем. журн. **16** (3), 118–129 (2024).
DOI: <https://doi.org/10.13108/2024-16-3-113>
- [12] К.А. Шишкин, *Функторы между $*$ -соотношениями*, Изв. вузов. Матем. (4), 84–100 (2026).
DOI: <https://doi.org/10.26907/0021-3446-2026-4-84-100>
- [13] B. Blackadar, *Operator algebras. Theory of C^* -algebras and von Neumann algebras*, Encyclopaedia of Mathematical Sciences **122**, Springer-Verlag, Berlin, 2006.
DOI: <https://doi.org/10.1007/3-540-28517-2>
- [14] M. Weber, *On C^* -algebras generated by isometries with twisted commutation relations*, J. Funct. Anal. **264** (8), 1975–2004 (2013).
DOI: <https://doi.org/10.1016/j.jfa.2013.02.001>
- [15] J. Cuntz, *Simple C^* -algebras generated by isometries*, Comm. Math. Phys. **57** (3), 173–185 (1977).
DOI: <https://doi.org/10.1007/BF01625776>
- [16] Дж. Мерфи, *C^* -алгебры и теория операторов*, Факториал, М., 1997.
- [17] Р.И. Григорчук, А.М. Степин, *Об аменабельности полугрупп с сокращением*, Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем., мех. (3), 12–16 (1998).
URL: <https://www.mathnet.ru/vmumml1777>

- [18] B.E. Johnson, *Cohomology in Banach algebras*, Mem. Amer. Math. Soc. **127**, AMS, Providence, RI, 1972.
DOI: <https://doi.org/10.1090/memo/0127>
- [19] А.Я. Хелемский, *Банаховы и полинормированные алгебры: общая теория, представления, гомологии*, Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., М., 1989.
- [20] A. Connes, *On the cohomology of operator algebras*, J. Funct. Anal. **28** (2), 248–253 (1978).
DOI: [https://doi.org/10.1016/0022-1236\(78\)90088-5](https://doi.org/10.1016/0022-1236(78)90088-5)
- [21] U. Haagerup, *All nuclear C^* -algebras are amenable*, Invent. Math. **74** (2), 305–319 (1983).
DOI: <https://doi.org/10.1007/BF01394319>
- [22] M. Laca, I. Raeburn, *Semigroup crossed products and the Toeplitz algebras of nonabelian groups*, J. Funct. Anal. **139** (2), 415–440 (1996).
DOI: <https://doi.org/10.1006/jfan.1996.0091>
- [23] A. Nica, *C^* -algebras generated by isometries and Wiener–Hopf operators*, J. Operator Theory **27** (1), 17–52 (1992).
URL: <https://www.theta.ro/jot/archive/1992-027-001/1992-027-001-002.html>

Ренат Нельсонович Гумеров

Казанский (Приволжский) федеральный университет,
Институт математики и механики им. Н.И. Лобачевского,
ул. Кремлевская, д. 18, г. Казань, 420008, Россия,
e-mail: Renat.Gumerov@kpfu.ru

Екатерина Владимировна Липачева

Казанский государственный энергетический университет,
ул. Красносельская, д. 51, г. Казань, 420066, Россия,
e-mail: elipacheva@gmail.com

Semigroup C^* -algebras generated by isometric representations for free products of rational number semigroups

R.N. Gumerov, E.V. Lipacheva

Abstract. We study the reduced semigroup C^* -algebras generated by the left regular representations of free products for countable families of rational number semigroups. It is shown that these algebras are nuclear and amenable. We give their characterization as universal C^* -algebras determined by generators subject to polynomial relations.

Keywords: amenable C^* -algebra, free product of semigroups, inductive sequence, left amenable semigroup, nuclear C^* -algebra, semigroup C^* -algebra, universal C^* -algebra.

DOI: 10.26907/2949-3919.2026.2.86-103

References

- [1] X. Li, *Semigroup C^* -algebras*, in: *K-theory for group C^* -algebras and semigroup C^* -algebras*, Oberwolfach Seminars **47**, Birkhäuser, Cham, 167–272 (2017).
DOI: https://doi.org/10.1007/978-3-319-59915-1_5
- [2] R. Gumerov, A. Kuklin, E. Lipacheva, *A universal property of semigroup C^* -algebras generated by cones in groups of rationals*, Ann. Funct. Anal. **15** (3), paper no. 72 (2024).
DOI: <https://doi.org/10.1007/s43034-024-00374-5>
- [3] R.N. Gumerov, A.S. Kuklin, E.V. Lipacheva *A universal property of semigroup C^* -algebras for the free products of semigroups of rationals*, Ufa Math. J. **18** (1), 120–133 (2026).
DOI: <https://doi.org/article/10.13108/2026-18-1-113>
- [4] B. Blackadar, *Shape theory for C^* -algebras*, Math. Scand. **56** (2), 249–275 (1985).
DOI: <https://doi.org/10.7146/math.scand.a-12100>
- [5] T.A. Loring, *Lifting solutions to perturbing problems in C^* -algebras*, Fields Institute Monographs **8**, AMS, Providence, RI, 1997.
DOI: <https://doi.org/10.1090/fim/008>

Acknowledgements. The work is supported by the grant of the Russian Science Foundation and the State institution “Tatarstan Academy of Sciences”, project no. 24-21-20112, <https://rscf.ru/en/project/24-21-20112/>.

-
- [6] R.N. Gumerov, *Limit automorphisms of the C^* -algebras generated by isometric representations for semigroups of rationals*, Siberian Math. J. **59** (1), 73–84 (2018).
DOI: <https://doi.org/10.1134/S0037446618010093>
- [7] R.N. Gumerov, E.V. Lipacheva, *Automorphisms of the limits for the direct sequences of the Toeplitz–Cuntz algebras*, J. Math. Anal. Appl. **533** (2), paper no. 127991 (2024).
DOI: <https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2023.127991>
- [8] R.N. Gumerov, E.V. Lipacheva, *An approximation of semigroup C^* -algebras*, Lobachevskii J. Math. **47** (2), 526–532 (2026).
DOI: <https://doi.org/10.1134/S1995080225615164>
- [9] T.A. Loring, *C^* -algebra relations*, Math. Scand. **107** (1), 43–72 (2010).
DOI: <https://doi.org/10.7146/math.scand.a-15142>
- [10] I.S. Berdnikov, R.N. Gumerov, E.V. Lipacheva, K.A. Shishkin, *On C^* -algebra and $*$ -polynomial relations*, Lobachevskii J. Math. **44** (6), 1990–1997 (2023).
DOI: <https://doi.org/10.1134/S1995080223060112>
- [11] R.N. Gumerov, E.V. Lipacheva, K.A. Shishkin, *Categorical criterion for existence of universal C^* -algebras*, Ufa Math. J. **16** (3), 118–129 (2024).
DOI: <https://doi.org/10.13108/2024-16-3-113>
- [12] K.A. Shishkin, *Functors between $*$ -relations*, Russian Math. (Iz. VUZ), to appear.
- [13] B. Blackadar, *Operator algebras. Theory of C^* -algebras and von Neumann algebras*, Encyclopaedia of Mathematical Sciences **122**, Springer-Verlag, Berlin, 2006.
DOI: <https://doi.org/10.1007/3-540-28517-2>
- [14] M. Weber, *On C^* -algebras generated by isometries with twisted commutation relations*, J. Funct. Anal. **264** (8), 1975–2004 (2013).
DOI: <https://doi.org/10.1016/j.jfa.2013.02.001>
- [15] J. Cuntz, *Simple C^* -algebras generated by isometries*, Comm. Math. Phys. **57** (3), 173–185 (1977).
DOI: <https://doi.org/10.1007/BF01625776>
- [16] G.J. Murphy, *C^* -algebras and operator theory*, Academic Press, Boston, MA, 1990.
- [17] R.I. Grigorchuk, A.M. Stepin, *On amenability of semigroups with cancellation*, Mosc. Univ. Math. Bull. **53** (3), 7–11 (1998).
- [18] B.E. Johnson, *Cohomology in Banach algebras*, Mem. Amer. Math. Soc. **127**, AMS, Providence, RI, 1972.
DOI: <https://doi.org/10.1090/memo/0127>
- [19] A.Ya. Helemskii, *Banach and locally convex algebras*, Oxford Science Publications, The Clarendon Press, Oxford University Press, New York, 1993.
DOI: <https://doi.org/10.1112/blms/27.6.613>

- [20] A. Connes, *On the cohomology of operator algebras*, J. Funct. Anal. **28** (2), 248–253 (1978).
DOI: [https://doi.org/10.1016/0022-1236\(78\)90088-5](https://doi.org/10.1016/0022-1236(78)90088-5)
- [21] U. Haagerup, *All nuclear C^* -algebras are amenable*, Invent. Math. **74** (2), 305–319 (1983).
DOI: <https://doi.org/10.1007/BF01394319>
- [22] M. Laca, I. Raeburn, *Semigroup crossed products and the Toeplitz algebras of nonabelian groups*, J. Funct. Anal. **139** (2), 415–440 (1996).
DOI: <https://doi.org/10.1006/jfan.1996.0091>
- [23] A. Nica, *C^* -algebras generated by isometries and Wiener–Hopf operators*, J. Operator Theory **27** (1), 17–52 (1992).
URL: <https://www.theta.ro/jot/archive/1992-027-001/1992-027-001-002.html>

Renat Nelsonovich Gumerov

Kazan Federal University,

N.I. Lobachevsky Institute of Mathematics and Mechanics,

35 Kremlyovskaya str., Kazan 420008, Russia,

e-mail: Renat.Gumerov@kpfu.ru

Ekaterina Vladimirovna Lipacheva

Kazan State Power Engineering University,

51 Krasnoselskaya str., Kazan 420066, Russia,

e-mail: elipacheva@gmail.com