

Квантовые каналы, сохраняющие сигма-аддитивность, и измеримые по Уламу кардиналы

С.В. Дженжер

Аннотация. Исследуется взаимосвязь между свойствами квантовых состояний в гильбертовом пространстве $\ell_2(\kappa)$ и теоретико-множественной природой кардинала κ . Основное внимание уделяется вопросу существования сингулярных σ -аддитивных состояний – функционалов, индуцированные меры которых являются σ -аддитивными, но при этом обращаются в нуль на конечных множествах. Хотя известно, что существование таких состояний эквивалентно измеримости κ по Уламу, их структурные и динамические свойства остаются во многом неизученными. Мы доказываем, что любое σ -аддитивное состояние на диагональной алгебре представимо в виде интеграла Петтиса по сингулярной σ -аддитивной мере, что расширяет классическую теорию представлений на ненормальный сектор. Кроме того, мы конструируем класс квантовых каналов, использующих σ -полные ультрафильтры, которые отображают нормальные состояния в сингулярные σ -аддитивные состояния, фактически «архивируя» информацию в сингулярную часть пространства состояний.

Ключевые слова: измеримые кардиналы, квантовая динамика, сингулярные квантовые состояния, интеграл Петтиса.

DOI: 10.26907/2949-3919.2026.2.104-117

Введение

Математические основания квантовой механики опираются на представление физических состояний в виде линейных функционалов на алгебре наблюдаемых. Для гильбертова пространства $\mathcal{H}$ пространство состояний $\Sigma(\mathcal{H})$ традиционно разлагается на нормальные состояния, которые являются $*$ -слабо непрерывными и однозначно представляются операторами ядерного класса, и сингулярные состояния, которые обращаются в нуль на идеале компактных операторов [1].

Мощным инструментом анализа структуры состояний является интеграл Петтиса, позволяющий получать спектрально-подобные разложения состояний по множеству чистых векторных состояний. Как было установлено Г. Амосовым и В. Сакбаевым [2, 3], в стандартном сепарабельном случае состояние является нормальным тогда и только тогда, когда оно может быть представлено в виде интеграла Петтиса по дискретной

σ -аддитивной мере. Эта эквивалентность подкрепляет интуитивное представление о том, что σ -аддитивность является отличительным признаком нормальности.

Однако недавние исследования квантовой динамики в бесконечномерных системах показали, что в несепарабельном случае это может нарушаться. Изучение случайных сдвигов, операторных блужданий и предельной динамики на абелевых алгебрах показало, что сингулярные состояния естественным образом возникают как пределы физических процессов [4–7]. Это порождает два фундаментальных вопроса:

- 1) может ли состояние быть одновременно сингулярным и σ -аддитивным?
- 2) может ли нормальное состояние обладать представлением Петтиса по σ -аддитивной мере, которая обращается в нуль на конечных множествах?

В стандартной теории множеств ZFC, если на системе всех подмножеств некоторого множества существует вполне-аддитивная мера, которая обращается в нуль на одноточечных (или, что равносильно, на конечных) множествах, то само множество обязано быть измеримым кардиналом; см, например, [9]. Таким образом, существование ненормальных σ -аддитивных состояний неразрывно связано с существованием измеримых кардиналов.

Существование таких состояний было недавно подтверждено Д. Блехером и Н. Уивером [8], которые доказали, что сингулярные σ -аддитивные состояния существуют на $\mathcal{B}(\ell_2(\kappa))$ тогда и только тогда, когда κ является измеримым по Уламу кардиналом. Хотя их работа дает окончательную теоретико-множественную классификацию, операционная природа и внутренняя структура этих состояний все еще требуют изучения. В данной статье мы восполняем пробел между аксиоматическими результатами [8] и теорией представлений, развитой в [2, 3]. Наш вклад имеет двойное дно:

- 1) Мы демонстрируем, что соответствие между состояниями и интегралами Петтиса «выживает» при переходе к сингулярному сектору на измеримых кардиналах. В частности, мы доказываем, что любое σ -аддитивное состояние на диагональной алгебре $\mathcal{D}(\ell_2(\kappa)) \cong \ell_\infty(\kappa)$ является интегралом Петтиса по своей индуцированной σ -аддитивной мере, даже если эта мера обращается в нуль на конечных множествах.
- 2) Мы конструируем явный класс квантовых каналов, используя σ -полные ультрафильтры. Мы показываем, что эти каналы действуют как механизм «архивации информации», отображая нормальные состояния в сингулярные σ -аддитивные результаты. Это дает динамическую интерпретацию измеримых кардиналов как области, где квантовая информация может сохраняться σ -аддитивным образом, становясь при этом недоступной для конечномерных наблюдений.

Статья организована следующим образом: в [разделе 1](#) приводятся необходимые сведения о больших кардиналах; в [разделе 2](#) устанавливается представление Петтиса для сингулярных состояний; а в [разделе 3](#) вводятся и анализируются свойства архивирующих квантовых каналов.

1. Измеримые кардиналы

Пусть $\{r_i : i \in I\}$ – семейство неотрицательных действительных чисел. Напомним, что

$$\sum_{i \in I} r_i = \sup \left\{ \sum_{i \in E} r_i : E \subset I \text{ конечно} \right\}.$$

Если эта сумма конечна, то существует не более чем счетное подсемейство ненулевых r_i .

Для множества X обозначим через $\mathcal{P}(X)$ семейство всех его подмножеств.

Пусть $\kappa > \aleph_0$ – кардинал. Напомним, что мера $\mu : \mathcal{P}(\kappa) \rightarrow [0, 1]$ представляет собой конечно-аддитивное отображение. В данной работе мы всегда рассматриваем вероятностные меры; т. е. $\mu(\kappa) = 1$. Следуя [8], мы называем меру $\mu : \mathcal{P}(\kappa) \rightarrow [0, 1]$ **< κ -аддитивной**, если для любого семейства $\{A_i : i \in I\}$ попарно непересекающихся подмножеств $A_i \subset \kappa$ при $|I| < \kappa$ выполняется

$$\mu \left(\bigsqcup_{i \in I} A_i \right) = \sum_{i \in I} \mu(A_i).$$

Заметим, что стандартное определение κ -аддитивности не согласуется с σ -аддитивностью в случае, когда берется именно счетное семейство. Поэтому мы используем обозначение **< κ** .

Ультрафильтр $\mathcal{U} \subsetneq \mathcal{P}(\kappa)$ на кардинале κ называется **< κ -полным**, если для любого семейства $\{A_i : i \in I\}$ элементов $A_i \in \mathcal{U}$ при $|I| < \kappa$ их пересечение также лежит в ультрафильтре:

$$\bigcap_{i \in I} A_i \in \mathcal{U}.$$

Заметим, что если ультрафильтр является **< κ -полным** при $\kappa > \aleph_0$, то он является σ -полным, т. е. замкнут относительно счетных пересечений. Ультрафильтр называется **неглавным**, если он не имеет наименьшего элемента; иными словами, если пересечение всех его элементов пусто.

Между двузначными мерами и ультрафильтрами существует тесная связь. Так, для данного ультрафильтра $\mathcal{U} \subsetneq \mathcal{P}(\kappa)$ можно определить двузначную меру $\mu_{\mathcal{U}} : \mathcal{P}(\kappa) \rightarrow \{0, 1\}$ правилом

$$\mu_{\mathcal{U}}(A) := \begin{cases} 1, & \text{если } A \in \mathcal{U}; \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

И наоборот, по двузначной вероятностной мере μ можно построить ультрафильтр, состоящий из множеств меры 1. Легко проверить, что:

- мера $\mu_{\mathcal{U}}$ является (σ -) **< κ -аддитивной** тогда и только тогда, когда $\mathcal{U}$ является (σ -) **< κ -полным**;
- мера $\mu_{\mathcal{U}}$ обращается в нуль на конечных множествах тогда и только тогда, когда $\mathcal{U}$ **неглавный**.

Следуя [8], мы говорим, что кардинал $\kappa > \aleph_0$ является:

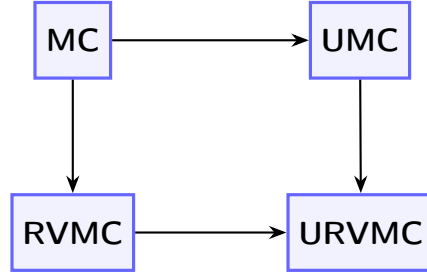


Рис. 1. Очевидные связи между свойствами измеримости кардиналов. MC – измеримый кардинал. UMC – измеримый по Уламу кардинал. RVMC – вещественно-значно измеримый кардинал. URVMC – вещественно-значно измеримый по Уламу кардинал

- **измеримым**, если существует $< \kappa$ -аддитивная двузначная мера $\mathcal{P}(\kappa) \rightarrow \{0, 1\}$, обращающаяся в нуль на конечных множествах;
- **вещественно-значно измеримым**, если существует $< \kappa$ -аддитивная вероятностная мера $\mathcal{P}(\kappa) \rightarrow [0, 1]$, обращающаяся в нуль на конечных множествах;
- **измеримым по Уламу**, если существует σ -аддитивная двузначная мера $\mathcal{P}(\kappa) \rightarrow \{0, 1\}$, обращающаяся в нуль на конечных множествах;
- **вещественно-значно измеримым по Уламу**, если существует σ -аддитивная вероятностная мера $\mathcal{P}(\kappa) \rightarrow [0, 1]$, обращающаяся в нуль на конечных множествах.

Заметим, что (уламовская) измеримость эквивалентна следующему: κ является (уламовски) измеримым, если существует неглавный (σ -) $< \kappa$ -полный ультрафильтр. Некоторые тривиальные соотношения между этими определениями приведены на рис. 1. Известно также, что вещественно-значно измеримый кардинал κ является измеримым, если $\kappa > \mathfrak{c}$, и никакой измеримый кардинал не может быть меньше $\mathfrak{c}$. Более того, любой кардинал κ измерим по Уламу тогда и только тогда, когда он не меньше некоторого измеримого кардинала (который является недостижимым, и, следовательно, $\kappa > \mathfrak{c}$). Любой кардинал κ вещественно-значно измерим по Уламу тогда и только тогда, когда он не меньше некоторого вещественно-значно измеримого кардинала (который является слабо недостижимым); в этом случае, если $\mathfrak{c} \geq \kappa$, то континуум-гипотеза ложна. Подробности см., например, в [8, 9].

2. Представимость по Петтису сингулярных сигма-аддитивных состояний

Зафиксируем произвольный (не обязательно измеримый) кардинал $\kappa > \aleph_0$. Будем рассматривать гильбертово пространство $\mathcal{H} := \ell_2(\kappa)$ функций $f: \kappa \rightarrow \mathbb{C}$ со счетным носителем и нормой

$$\|f\| := \sqrt{\sum_{i < \kappa} |f(i)|^2}.$$

Обозначим через $\{e_i\}$ его ортонормированный базис.

Пусть $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ – банахова алгебра линейных ограниченных операторов $\mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$. Мы ограничим наше внимание банаховой подалгеброй $\mathcal{D}(\mathcal{H}) \subset \mathcal{B}(\mathcal{H})$ диагональных операторов. Очевидно, что $\mathcal{D}(\mathcal{H})$ изоморфна $\ell_\infty(\kappa)$. Элементы $\mathcal{D}(\mathcal{H})$ называются **наблюдаемыми**. Заметим, что проекторы из $\mathcal{D}(\mathcal{H})$ – это в точности диагональные операторы с собственными значениями, равными 0 и 1. Для любого $I \subset \kappa$ обозначим через $\mathbf{P}_I$ проектор на подпространство, образованное базисными векторами $\{e_i\}_{i \in I}$. В частности, через $\mathbf{P}_\kappa$ мы обозначим тождественный оператор (который является проектором на все $\mathcal{H}$).

Обозначим через $\Sigma(\mathcal{H}) := S^{1+}(\mathcal{D}(\mathcal{H})^*)$ пространство **квантовых состояний**, т. е. линейных функционалов $\mathcal{D}(\mathcal{H}) \rightarrow \mathbb{C}$, лежащих на пересечении положительного конуса и единичной сферы. Мы обозначаем **действие** квантового состояния $\rho \in \Sigma(\mathcal{H})$ на наблюдаемую $\mathbf{D} \in \mathcal{D}(\mathcal{H})$ как

$$\langle \rho, \mathbf{D} \rangle.$$

В квантовой механике обычно рассматривают подпространство $\Sigma_n(\mathcal{H}) \subset \Sigma(\mathcal{H})$ **нормальных квантовых состояний**, которые являются *-слабо непрерывными квантовыми состояниями. Известно [8], что состояние $\rho \in \Sigma(\mathcal{H})$ является нормальным тогда и только тогда, когда оно **вполне аддитивно**, что означает выполнение равенства

$$\left\langle \rho, \sum_{\alpha} \mathbf{P}_{\alpha} \right\rangle = \sum_{\alpha} \langle \rho, \mathbf{P}_{\alpha} \rangle$$

для любых попарно ортогональных проекторов $\mathbf{P}_{\alpha}$. Для сепарабельных гильбертовых пространств известно, что нормальность эквивалентна тому, что супремум действия по проекторам на конечномерные подпространства равен единице [5]. В нашем случае это тоже верно.

Предложение 1. *Состояние ρ является нормальным тогда и только тогда, когда*

$$\sup_{I \subset \kappa \text{ конечно}} \langle \rho, \mathbf{P}_I \rangle = 1,$$

где супремум берется по проекторам на конечномерные подпространства.

Доказательство. Пусть ρ нормально. Тогда оно вполне аддитивно. Отсюда,

$$1 = \langle \rho, \mathbf{P}_{\kappa} \rangle = \sum_{i < \kappa} \langle \rho, \mathbf{P}_i \rangle = \sup_{I \subset \kappa \text{ конечно}} \langle \rho, \mathbf{P}_I \rangle.$$

где первое равенство в силу нормировки состояний, второе равенство в силу вполне аддитивности, а последнее равенство по определению суммы.

Обратно, пусть

$$\sup_{I \subset \kappa \text{ конечно}} \langle \rho, \mathbf{P}_I \rangle = 1.$$

По определению супремума, для любого $I \subset \kappa$ выполнено

$$\langle \rho, \mathbf{P}_I \rangle \geq \sum_{i \in I} \langle \rho, \mathbf{P}_i \rangle.$$

Тогда

$$1 = \langle \rho, \mathbf{P}_\kappa \rangle = \langle \rho, \mathbf{P}_I \rangle + \langle \rho, \mathbf{P}_{\kappa \setminus I} \rangle \geq \sum_{i \in I} \langle \rho, \mathbf{P}_i \rangle + \sum_{i \in \kappa \setminus I} \langle \rho, \mathbf{P}_i \rangle = \sum_{i \in \kappa} \langle \rho, \mathbf{P}_i \rangle = 1.$$

Таким образом, неравенства обращаются в равенство, и для любого $I \subset \kappa$ выполнено

$$\langle \rho, \mathbf{P}_I \rangle = \sum_{i \in I} \langle \rho, \mathbf{P}_i \rangle.$$

Тогда для произвольного семейства $\{I_\alpha\}$ с условием $I = \bigsqcup_\alpha I_\alpha$ имеем

$$\langle \rho, \mathbf{P}_I \rangle = \sum_{i \in I} \langle \rho, \mathbf{P}_i \rangle = \sum_\alpha \sum_{i \in I_\alpha} \langle \rho, \mathbf{P}_i \rangle = \sum_\alpha \langle \rho, \mathbf{P}_{I_\alpha} \rangle,$$

где перегруппировка слагаемых возможна в силу абсолютной сходимости рядов. Равенство первого и последнего выражений и есть вполне аддитивность. $\square$

Для $u \in S^1(\mathcal{H})$ нормальное квантовое состояние $\rho = \rho_u \in \Sigma_n(\mathcal{H})$ называется **чистым векторным состоянием**, если для всех $\mathbf{D} \in \mathcal{D}(\mathcal{H})$ выполнено

$$\langle \rho, \mathbf{D} \rangle = (u, \mathbf{D}u).$$

Нас будут больше интересовать другие квантовые состояния. Так, мы говорим, что состояние ρ лежит в подпространстве $\Sigma_s(\mathcal{H}) \subset \Sigma(\mathcal{H})$ **сингулярных квантовых состояний**, если оно обращается в нуль на всех проекторах ранга 1; или, что эквивалентно, на всех компактных операторах. Другими словами, если

$$\langle \rho, \mathbf{P}_I \rangle = 0$$

для любого конечного $I \subset \kappa$. Разложение Иосиды–Хьюитта [1] утверждает, что

$$\Sigma(\mathcal{H}) = \Sigma_n(\mathcal{H}) \oplus \Sigma_s(\mathcal{H}),$$

что означает, что любое квантовое состояние $\rho \in \Sigma(\mathcal{H})$ может быть представлено в виде выпуклой комбинации

$$\rho = p\rho_n + (1-p)\rho_s$$

для некоторых $p \in [0, 1]$, $\rho_n \in \Sigma_n(\mathcal{H})$ и $\rho_s \in \Sigma_s(\mathcal{H})$.

Отметим, что рассмотрение только диагональной алгебры наблюдаемых интересно само по себе, например, в виду [8, утверждение 2.3]. Кроме того, в силу [8, теорема 5.1]

любое чистое состояние на диагональной алгебре имеет единственное продолжение до состояния на всей алгебре $\mathcal{B}(\mathcal{H})$, которое обязательно окажется чистым. Таким образом, рассмотрение даже диагональных операторов имеет квантовую специфику.

Далее мы переходим к рассмотрению связи между мерами и квантовыми состояниями. Известно (см., например, [3]), что любое квантовое состояние может быть представлено в виде интеграла Петтиса по некоторой конечно-аддитивной неотрицательной конечной мере на единичной сфере чистых векторных состояний. Поскольку мы упростили алгебру наблюдаемых до диагональных операторов, мы можем рассмотреть частный случай таких мер, сосредоточенных на чистых векторных состояниях на базисных векторах e_i . Для состояния $\rho \in \Sigma(\mathcal{H})$ определим (конечно-аддитивную) *индуцированную меру* $\nu_\rho: \mathcal{P}(\kappa) \rightarrow [0, 1]$ как

$$\nu_\rho(I) := \langle \rho, \mathbf{P}_I \rangle.$$

Лемма 2. *Любое состояние $\rho \in \Sigma(\mathcal{H})$ может быть представлено в виде интеграла Петтиса*

$$\rho = \int_{i < \kappa} \rho_{e_i} d\nu_\rho(i).$$

Доказательство. Нам необходимо показать, что для любой наблюдаемой $\mathbf{D} \in \mathcal{D}(\mathcal{H})$ выполнено

$$\langle \rho, \mathbf{D} \rangle = \int_{i < \kappa} (e_i, \mathbf{D}e_i) d\nu_\rho(i).$$

Во-первых, предположим, что $\mathbf{D} = \mathbf{P}_I$ для некоторого $I \subset \kappa$. Тогда

$$\langle \rho, \mathbf{D} \rangle = \nu_\rho(I) = \int_{i \in I} d\nu_\rho(i) = \int_{i < \kappa} (e_i, \mathbf{D}e_i) d\nu_\rho(i).$$

Таким образом, в силу линейности лемма верна для конечных линейных комбинаций вида

$$\mathbf{D} = \sum_{k=1}^K d_k \mathbf{P}_{I_k}.$$

Теперь рассмотрим произвольную наблюдаемую $\mathbf{D} \in \mathcal{D}(\mathcal{H})$. Существует последовательность операторов $\mathbf{D}_n$ с конечным спектром, аппроксимирующая $\mathbf{D}$ по норме. В силу непрерывности ρ ,

$$\langle \rho, \mathbf{D} \rangle = \lim_{n \rightarrow \infty} \langle \rho, \mathbf{D}_n \rangle.$$

Согласно определению интеграла по конечно-аддитивным мерам (см., например, [10]),

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \langle \rho, \mathbf{D}_n \rangle = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{i < \kappa} (e_i, \mathbf{D}_n e_i) d\nu_\rho(i) = \int_{i < \kappa} \lim_{n \rightarrow \infty} (e_i, \mathbf{D}_n e_i) d\nu_\rho(i) = \int_{i < \kappa} (e_i, \mathbf{D}e_i) d\nu_\rho(i),$$

что завершает доказательство. $\square$

Таким образом, существует соответствие между квантовыми состояниями и мерами на подмножествах κ . Следующая теорема отвечает на один из наших вопросов во введении:

нормальное состояние не может быть представлено мерой, которая обращается в нуль на конечных множествах.

Теорема 3. Если состояние $\rho \in \Sigma(\mathcal{H})$ может быть представлено как интеграл Петтиса

$$\rho = \int_{i < \kappa} \rho_{e_i} dm(i),$$

и мера m обращается в нуль на конечных множествах, то ρ является сингулярным.

Следовательно, состояние $\rho \in \Sigma(\mathcal{H})$ сингулярно тогда и только тогда, когда индуцированная мера ν_ρ обращается в нуль на конечных множествах.

Доказательство. Первая часть следует из того, что для любого конечного подмножества $I \subset \kappa$

$$\langle \rho, \mathbf{P}_I \rangle = m(I) = 0.$$

Вторая часть следует из того, что для конечного $I \subset \kappa$ величина

$$\langle \rho, \mathbf{P}_I \rangle = \nu_\rho(I)$$

равна нулю либо в силу первой части, либо в силу сингулярности ρ . □

Как мы помним, нормальность состояния эквивалентна вполне аддитивности его индуцированной меры. Следуя этой же логике, мы говорим, что состояние $\rho \in \Sigma(\mathcal{H})$ является **σ -аддитивным**, если индуцированная мера ν_ρ является σ -аддитивной. Из вышесказанного ясно, что все нормальные состояния σ -аддитивны. Кроме того, если бы гильбертово пространство $\ell_2(\kappa)$ было сепарабельным, то σ -аддитивность и вполне аддитивность были бы эквивалентны. Иными словами, на гильбертовом сепарабельном пространстве σ -аддитивные и нормальные состояния суть одно и то же.

Согласно [8, утверждение 2.3.(i)], σ -аддитивное сингулярное состояние ρ существует тогда и только тогда, когда κ является вещественно-значно измеримым по Уламу кардиналом. Таким образом, согласно результату Улама [9, теорема 10.1] (см. заключительный аргумент доказательства этой теоремы), если существует σ -аддитивное сингулярное состояние ρ , то возможны два следующих варианта:

- либо κ не меньше наименьшего измеримого кардинала, который является недостижимым, и, следовательно, $\kappa > \mathfrak{c}$;
- либо $\mathfrak{c} \geq \kappa$, и κ не меньше наименьшего вещественно-значно измеримого кардинала, который является слабо недостижимым. В этом случае континуум-гипотеза ложна.

Чтобы оставить континуум-гипотезу в покое, сосредоточимся теперь на мире, в котором существует измеримый по Уламу кардинал. Пусть κ – такой кардинал. Согласно [8, утверждение 2.3.(ii)], должно существовать сингулярное σ -аддитивное чистое состояние. Пусть $\mathcal{U} \subsetneq \mathcal{P}(\kappa)$ – неглавный σ -полный ультрафильтр. Определим состояние $\rho_{\mathcal{U}} \in \Sigma(\mathcal{H})$

соотношением

$$\langle \rho_{\mathcal{U}}, \mathbf{D} \rangle := \lim_{\mathcal{U}} (e_i, \mathbf{D} e_i).$$

Тогда

$$\nu_{\rho_{\mathcal{U}}}(I) = \langle \rho_{\mathcal{U}}, \mathbf{P}_I \rangle = \lim_{\mathcal{U}} (e_i, \mathbf{P}_I e_i) = \mu_{\mathcal{U}}(I),$$

и, следовательно, индуцированная мера является σ -аддитивной и обращается в нуль на конечных множествах. Таким образом, при наличии измеримого по Уламу кардинала κ мы немедленно получаем σ -аддитивное сингулярное чистое состояние $\rho_{\mathcal{U}}$. **Чистота** здесь означает, что $\rho_{\mathcal{U}}$ является экстремальной точкой множества $\Sigma(\mathcal{H})$.

3. Квантовые каналы

Напомним, что обычно квантовый канал – это линейное сохраняющее след вполне положительное отображение. В нашем случае, поскольку мы работаем не только со следовыми операторами, мы избавляемся от свойства сохранения следа, оставляя только сохранение нормировки (которое включено в определение квантовых состояний); см., например, как это сделано в [7]. Итак, **квантовый канал** – это линейное вполне положительное отображение $\Sigma(\mathcal{H}) \rightarrow \Sigma(\mathcal{H})$.

Теперь зафиксируем измеримый по Уламу кардинал κ с неглавным σ -полным ультрафильтром $\mathcal{U}$. Пусть на κ задана структура абелевой группы. Например, это можно сделать, взяв группу $\bigoplus_{i < \kappa} \mathbb{Z}_2$ финитных (т. е., имеющих конечный прообраз единицы) функций $\kappa \rightarrow \mathbb{Z}_2$, мощность которой совпадает с κ . Обозначим через $\mathbf{U}_j \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ оператор сдвига, определенный как

$$\mathbf{U}_j e_i = e_{i+j}.$$

Определим квантовый канал $\Phi_{\mathcal{U}}$ соотношением

$$\langle \Phi_{\mathcal{U}} \rho, \mathbf{D} \rangle := \lim_{\mathcal{U}} \langle \rho, \mathbf{U}_j^* \mathbf{D} \mathbf{U}_j \rangle.$$

Теорема 4. Для любого $\rho \in \Sigma(\mathcal{H})$ состояние $\Phi_{\mathcal{U}} \rho$ является сингулярным и сохраняет σ -аддитивность.

Доказательство. Сначала пусть $\rho = \rho_{e_i}$ – чистое векторное состояние. Тогда для любой наблюдаемой $\mathbf{D} \in \mathcal{D}(\mathcal{H})$

$$\langle \rho, \mathbf{U}_j^* \mathbf{D} \mathbf{U}_j \rangle = (\mathbf{U}_j e_i, \mathbf{D} \mathbf{U}_j e_i) = (e_{i+j}, \mathbf{D} e_{i+j}).$$

Следовательно, $\Phi_{\mathcal{U}} \rho = \rho_{\mathcal{U}-i}$. В частности, это сингулярное σ -аддитивное состояние.

Теперь пусть ρ – нормальное состояние. Тогда оно является выпуклой не более чем счетной комбинацией чистых векторных состояний, которые, в свою очередь, являются выпуклыми не более чем счетными комбинациями чистых векторных состояний, сосредоточенных на базисных векторах. Поскольку $\lim_{\mathcal{U}}$ коммутирует со счетными суммами,

мы получаем, что $\Phi_{\mathcal{U}}\rho$ снова является сингулярным и σ -аддитивным.

Наконец, пусть само состояние ρ сингулярно. Чтобы показать сингулярность $\Phi_{\mathcal{U}}\rho$, достаточно доказать, что для любого конечного подмножества $I \subset \kappa$ выполнено

$$\langle \Phi_{\mathcal{U}}\rho, \mathbf{P}_I \rangle = 0.$$

Имеем

$$\langle \rho, \mathbf{U}_j^* \mathbf{P}_I \mathbf{U}_j \rangle = \langle \rho, \mathbf{P}_{I-j} \rangle = 0,$$

откуда $\langle \Phi_{\mathcal{U}}\rho, \mathbf{P}_I \rangle = \lim_{\mathcal{U}} 0 = 0$.

Ниже мы докажем σ -аддитивность $\Phi_{\mathcal{U}}\rho$ для σ -аддитивного ρ . Обозначим

$$\nu(I) := \langle \Phi_{\mathcal{U}}\rho, \mathbf{P}_I \rangle = \lim_{\mathcal{U}} \nu_{\rho}(I - j).$$

Нам нужно показать σ -аддитивность ν . Очевидно, что ν является конечно-аддитивной мерой на $\mathcal{P}(\kappa)$. Следовательно, достаточно доказать непрерывность ν сверху. Пусть $I_1 \supset I_2 \supset \dots$ таковы, что $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} I_n = \emptyset$. Нам нужно доказать, что $\lim_{n \rightarrow \infty} \nu(I_n) = 0$. Предположим от противного, что $\lim_{n \rightarrow \infty} \nu(I_n) = L > 0$. Тогда для некоторого N и достаточно больших $n > N$ имеем

$$\{j : \nu_{\rho}(I_n - j) > L/2\} \in \mathcal{U}.$$

Поскольку ультрафильтр $\mathcal{U}$ является σ -полным, имеем

$$\bigcap_{n > N} \{j : \nu_{\rho}(I_n - j) > L/2\} \in \mathcal{U}.$$

В частности, это означает, что пересечение содержит по крайней мере один элемент j_0 , общий для всех $n > N$. Таким образом, для этого j_0 и всех $n > N$ выполнено $\nu_{\rho}(I_n - j_0) > L/2$. Но $\nu_{\rho}(I_n - j_0) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ в силу σ -аддитивности ν_{ρ} . Это приводит к противоречию. $\square$

Таким образом, на измеримых по Уламу кардиналах можно сконструировать квантовые каналы, дающие сингулярные σ -аддитивные результаты. Они разрушают нормальные состояния, но сохраняют сингулярность и σ -аддитивность. Это можно представить так, будто эти квантовые каналы архивируют всю информацию где-то «далеко» на σ -полных ультрафильтрах.

4. Заключение

Мы продемонстрировали, что классификация квантовых состояний на $\ell_2(\kappa)$ неразрывно связана с аксиоматическими основаниями теории множеств. В частности, существование сингулярных σ -аддитивных состояний не является свойством одной лишь алгебры наблюдаемых, а зависит от того, является ли размерность κ измеримым по Уламу кардиналом.

Данная работа расширяет фундаментальные результаты Д. Блехера и Н. Уивера [8], предлагая конкретный аналитический и динамический базис для таких состояний. Установив их представимость через интеграл Петтиса, мы показали, что структура квантовых состояний, связанная с мерой, «выживает» при переходе к сингулярному сектору в присутствии больших кардиналов. Конструкция квантового канала $\Phi_{\mathcal{U}}$ дополнительно иллюстрирует эту связь, выступая в роли механизма трансформации, который «переносит» информацию из нормальных состояний в сингулярные σ -аддитивные результаты. Этот результат позволяет предположить, что в пространствах достаточно большой размерности квантовая информация может быть «архивирована» таким образом, что она остается согласованной с σ -аддитивностью, но становится недоступной для любых локальных или компактных проекций.

В работе [8] было показано, что чистое состояние, заданное на алгебре наблюдаемых $\mathcal{D}(\ell_2(\kappa)) \cong \ell_\infty(\kappa)$, может быть единственным образом продолжено до чистого состояния на всей алгебре наблюдаемых $\mathcal{B}(\ell_2(\kappa))$. Представляет интерес связать эти результаты с представимостью состояний по Петтису; сложность здесь заключается в том, что нельзя определить индуцированную меру на всем $\mathcal{P}(S^1(\ell_2(\kappa)))$, так как она не будет даже конечно-аддитивной. Таким образом, было бы интересно получить аналогичные результаты для полной алгебры наблюдаемых $\mathcal{B}(\ell_2(\kappa))$.

Список литературы

- [1] K. Yosida, E. Hewitt, *Finitely additive measures*, Trans. Amer. Math. Soc. **72** (1), 46–66 (1952).
DOI: <https://doi.org/10.1090/S0002-9947-1952-0045194-X>
- [2] Г.Г. Амосов, В.Ж. Сакбаев, *Об аналогах спектрального разложения квантового состояния*, Матем. заметки **93** (3), 323–332 (2013).
DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm9085>
- [3] G. Amosov, V. Sakbaev, *On dynamics of quantum states generated by averaging of random shifts*, Adv. Oper. Theory **10** (3), paper No. 51 (2025).
DOI: <https://doi.org/10.1007/s43036-025-00440-2>
- [4] И.В. Волович, В.Ж. Сакбаев, *Об универсальной краевой задаче для уравнений математической физики*, Тр. МИАН **285**, 64–88 (2014).
DOI: <https://doi.org/10.1134/S037196851402006X>
- [5] И.В. Волович, В.Ж. Сакбаев, *О квантовой динамике на C^* -алгебрах*, Тр. МИАН **301**, 33–47 (2018).
DOI: <https://doi.org/10.1134/S0371968518020036>
- [6] Ю.Н. Орлов, В.Ж. Сакбаев, *Диффузия квантовых состояний, порождаемая классическим случайным блужданием*, СМФН **71** (2), 275–286 (2025).
DOI: <https://doi.org/10.22363/2413-3639-2025-71-2-275-286>

- [7] E.A.Dzhenzher, S.V.Dzhenzher, V.Zh.Sakbaev, *Banach and counting measures, and dynamics of singular quantum states generated by averaging of operator random walks*, Lobachevskii J. Math. (2026), принята к печати.
- [8] D.P.Blecher and N. Weaver, *Quantum measurable cardinals*, J. Funct. Anal. **273** (5), 1870–1890 (2017).
DOI: <https://doi.org/10.1016/j.jfa.2017.05.006>
- [9] T.J.Jech, *Measurable cardinals*, in: Set theory. Springer Monographs in Mathematics. Springer, Berlin, Heidelberg, 125–138 (2003).
DOI: https://doi.org/10.1007/3-540-44761-X_10
- [10] N.Dunford, J.Schwartz, *Linear operators. Part 1. General theory*, Interscience Publ., New York, 1958.
URL: <https://books.google.ru/books?id=x94XzQEACAAJ>

Дженжер Святослав Вадимович

Московский физико-технический институт,

Институтский пер., д. 9, г. Долгопрудный, 141701, Россия,

e-mail: sdjenjer@yandex.ru

Quantum channels preserving sigma-additivity and Ulam measurable cardinals

S.V. Dzhenzher

Abstract. We study the interplay between the properties of quantum states on the Hilbert space $\ell_2(\kappa)$ and the set-theoretic nature of the cardinal κ . We focus on the existence of singular σ -additive states – functionals whose induced measures are σ -additive yet vanish on singletons. While the existence of such states is known to be equivalent to the Ulam measurability of κ , their structural and dynamical properties remain largely unexplored. We prove that any σ -additive state on the diagonal algebra is representable as a Pettis integral over a singular σ -additive measure, extending the classical representation theory to the non-normal sector. Furthermore, we construct a class of quantum channels using σ -complete ultrafilters that map normal states to singular σ -additive states, effectively «archiving» information into the singular part of the state space.

Keywords: measurable cardinals; quantum dynamics; singular quantum states; Pettis integrals.

DOI: 10.26907/2949-3919.2026.2.104-117

References

- [1] K. Yosida, E. Hewitt, *Finitely additive measures*, Trans. Amer. Math. Soc. **72** (1), 46–66 (1952).
DOI: <https://doi.org/10.1090/S0002-9947-1952-0045194-X>
- [2] G.G. Amosov, V.Zh. Sakbaev, *On analogs of spectral decomposition of a quantum state*, Math. Notes **93** (3), 351–359 (2013).
DOI: <https://doi.org/10.1134/S0001434613030012>
- [3] G. Amosov, V. Sakbaev, *On dynamics of quantum states generated by averaging of random shifts*, Adv. Oper. Theory **10** (3), paper No. 51 (2025).
DOI: <https://doi.org/10.1007/s43036-025-00440-2>
- [4] I.V. Volovich, V.Zh. Sakbaev, *Universal boundary value problem for equations of mathematical physics*, Proc. Steklov Inst. Math. **285** (1), 56–80 (2014).
DOI: <https://doi.org/10.1134/S0081543814040063>

-
- [5] I.V. Volovich, V.Zh. Sakbaev, *On quantum dynamics on C^* -algebras*, Proc. Steklov Inst. Math. **301** (1), 25–38 (2018).
DOI: <https://doi.org/10.1134/S008154381804003X>
- [6] I.V. Volovich, V.Zh. Sakbaev, Diffusion of quantum states generated by a classical random walk, CMFD **71** (2), 275–286 (2025) [in Russian].
DOI: <https://doi.org/10.22363/2413-3639-2025-71-2-275-286>
- [7] E.A. Dzhenzher, S.V. Dzhenzher, V.Zh. Sakbaev, *Banach and counting measures, and dynamics of singular quantum states generated by averaging of operator random walks*, Lobachevskii J. Math. (2026), to appear.
- [8] D.P. Blecher and N. Weaver, *Quantum measurable cardinals*, J. Funct. Anal. **273** (5), 1870–1890 (2017).
DOI: <https://doi.org/10.1016/j.jfa.2017.05.006>
- [9] T.J. Jech, *Measurable cardinals*, in: Set theory. Springer Monographs in Mathematics. Springer, Berlin, Heidelberg, 125–138 (2003).
DOI: https://doi.org/10.1007/3-540-44761-X_10
- [10] N. Dunford, J. Schwartz, *Linear operators. Part 1. General theory*, Interscience Publ., New York, 1958.
URL: <https://books.google.ru/books?id=x94XzQEACAAJ>

Dzhenzher Sviatoslav Vadimovich

Moscow Institute of Physics and Technology,
9 Institutskii per., Dolgoprudny 141701, Russia,
e-mail: sdjenjer@yandex.ru