

## О неподвижных точках строго положительных стохастических операторов на одномерном симплексе

Ш.Д. Нодиров, Ю.Х. Эшкабилов

**Аннотация.** Исследуется класс строго положительных стохастических операторов степени  $n$ , действующих на одномерном симплексе. Основное внимание уделяется задаче о количестве неподвижных точек таких операторов. Показано, что эта задача сводится к исследованию количества корней соответствующего полинома степени  $n$  на интервале  $(0, 1)$ . Доказано существование неподвижной точки для произвольного  $n$ .

Для квадратичного случая ( $n = 2$ ) установлена единственность неподвижной точки. Для кубического оператора ( $n = 3$ ) получены условия существования одной, двух или трех неподвижных точек. Для оператора четвертой степени ( $n = 4$ ) доказаны критерии количества неподвижных точек в зависимости от параметров оператора.

**Ключевые слова:** неподвижная точка, стохастический оператор, симплекс, биномиальный коэффициент, полином, точки экстремума.

**DOI:** 10.26907/2949-3919.2026.2.118-133

### Введение

Изучение стохастических операторов занимает центральное место в теории нелинейных динамических систем и математической биологии [1]. Особый интерес представляют стохастические операторы, сохраняющие симплекс и обладающие свойством полной симметрии коэффициентов [2–8]. Одной из фундаментальных задач, связанных с такими операторами, является исследование их неподвижных точек, которые определяют стационарные состояния системы и играют ключевую роль в анализе ее долгосрочного поведения.

В нашей работе рассматривается класс строго положительных стохастических операторов степени  $n$ , действующих на одномерном симплексе. Основное внимание уделяется задаче о количестве неподвижных точек таких операторов. Показано, что эта задача сводится к исследованию количества корней соответствующего полинома степени  $n$  на интервале  $(0, 1)$ , что устанавливает связь между теорией операторов и алгебраическими методами.

---

Благодарности. Исследование выполнено при поддержке прикладного гранта Агентства инновационного развития при Министерстве высшего образования, науки и инноваций Республики Узбекистан (номер AL-9224093956).

Особенностью этих операторов является их естественная интерпретация в задачах популяционной генетики полиплоидных организмов, где генотип потомка формируется при объединении генетического материала  $n$  родительских особей [1].

Целью работы является получение точных оценок и критериев для количества неподвижных точек в зависимости от степени оператора и значений его параметров. В работе последовательно исследуются квадратичные ( $n = 2$ ), кубические ( $n = 3$ ) и квартичные ( $n = 4$ ) операторы. Для каждого случая выводятся явные условия на коэффициенты, гарантирующие существование и единственность неподвижной точки, а также анализируются возможности возникновения множественных неподвижных точек.

Полученные результаты имеют приложения в различных областях, включая теорию меры Гиббса для моделей с континуумом значений спина, где неподвижные точки соответствующих операторов связаны с фазовыми переходами [9–11].

## 1. Предварительные сведения

В  $m$ -мерном вещественном векторном пространстве  $\mathbb{R}^m$  определим множество

$$S^{(m-1)} = \left\{ (x_1, x_2, \dots, x_m) \in \mathbb{R}^m : \sum_{i=1}^m x_i = 1, x_i \geq 0, i = \overline{1, m} \right\},$$

где  $S^{(m-1)}$  это  $(m-1)$ -мерный базисный симплекс в  $\mathbb{R}^m$ .

**Определение 1** ([2]). Произвольный непрерывный оператор  $V_n$ , определенный на симплексе  $S^{(m-1)}$ , будем называть стохастическим, если

$$(V_n x)_l = x'_l = \sum_{i_1, i_2, \dots, i_n=1}^m p_{i_1 i_2 \dots i_n, l} x_{i_1} x_{i_2} \dots x_{i_n}, \quad l = \overline{1, m}, \quad (1)$$

где

$$p_{i_1 i_2 \dots i_n, l} \geq 0, \quad i_j = \overline{1, m}, \quad j = \overline{1, n}, \quad l = \overline{1, m};$$

$$p_{i_1 i_2 \dots i_n, l} = p_{i_{\pi(1)} i_{\pi(2)} \dots i_{\pi(n)}, l}, \quad l = \overline{1, m},$$

для любой перестановки  $\pi$  и

$$\sum_{l=1}^m p_{i_1 i_2 \dots i_n, l} = 1, \quad i_j = \overline{1, m}, \quad j = \overline{1, n}.$$

Мы будем изучать количество неподвижных точек стохастического оператора (1) на одномерном симплексе, в случае, когда все коэффициенты оператора  $V_n : S^1 \rightarrow S^1$  строго положительные, т. е.

$$V_n(\mathbf{x}) = \left( \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} p_{k(1,2),1} x_1^{n-k} x_2^k, \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} p_{k(1,2),2} x_1^{n-k} x_2^k \right), \quad \mathbf{x} = (x_1, x_2) \in S^1, \quad (2)$$

где  $\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!k!}$  – биномиальный коэффициент,  $p_{k(1,2),i} > 0$ ,  $\sum_{i=1}^2 p_{k(1,2),i} = 1$ ,  
 $k(1,2) = \underbrace{111\dots 1}_{n-k} \underbrace{222\dots 2}_k$ ,  $k = \overline{0, n}$ .

Поскольку все его координатные функции представлены в виде многочленов со строго положительными коэффициентами, он отображает симплекс  $S^1$  в множество векторов со строго положительными компонентами. Поэтому для определенности будем называть оператор (2) строго положительным стохастическим оператором. Отметим, что операторы такого вида возникают в задаче о нахождении неподвижных точек интегрального оператора Гаммерштейна с вырожденным ядром [11]. Количество таких точек, в свою очередь, соответствует количеству мер Гиббса для моделей с континуумом значений спина.

Множество неподвижных точек оператора (2) в одномерном симплексе обозначим через  $\text{Fix}(V_n)$ , т. е.

$$\text{Fix}(V_n) = \{ \mathbf{x} \in S^1 : V_n(\mathbf{x}) = \mathbf{x} \}.$$

Ясно, что  $|\text{Fix}(V_n)|$  означает количество неподвижных точек оператора  $V_n$  в  $S^1$ . Здесь  $|A|$  – мощность множества  $A$ .

В данной работе исследуется класс строго положительных стохастических операторов  $V_n$ , действующих на одномерном симплексе. Данные операторы имеют важные приложения в популяционной генетике, где они описывают эволюцию частот аллелей в последовательных поколениях [1, 13, 14].

Биологическая интерпретация математической модели оператора  $V_n$  в  $S^1$  может быть сформулирована так:

- $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$  – вектор частот аллелей  $A_1$  и  $A_2$  в текущем поколении;
- $n$  – количество родительских особей, участвующих в формировании генотипа потомка;
- $k$  – число родителей, несущих аллель  $A_1$ ;
- $p_{k(1,2),1}$  – вероятность наследования аллеля  $A_1$  при условии, что ровно  $k$  из  $n$  родителей являются его носителями;
- $\binom{n}{k}$  – биномиальный коэффициент, учитывающий число способов выбора  $k$  родителей-носителей аллеля  $A_1$  из  $n$  возможных.

Данная модель особенно хорошо описывает наследование признаков у полиплоидных организмов [13]. В случае тетраплоидных видов ( $n = 4$ ) каждая хромосома представляется четырьмя гомологичными копиями, и генотип потомка формируется при объединении генетического материала четырех родительских хромосом [15]. Для диплоидных организмов ( $n = 2$ ) модель сводится к классической схеме наследования по Менделю [3, 13].

Основной задачей работы является исследование множества неподвижных точек  $\text{Fix}(V_n)$ . С биологической точки зрения, неподвижные точки соответствуют стабильным генетическим состояниям популяции, а их количество  $|\text{Fix}(V_n)|$  определяет возможное число устойчивых генетических конфигураций.

План настоящего исследования — провести детальный анализ неподвижных точек оператора  $V_n$  для малых степеней  $n$ . Работа структурирована следующим образом: в разделах последовательно исследуются случаи  $n = 2$ ,  $n = 3$  и  $n = 4$ . В каждом из этих разделов выводятся точные необходимые и достаточные условия на параметры оператора, определяющие количество его неподвижных точек.

Введем обозначение

$$\mu_k = \sum_{s=0}^{n-k} (-1)^s \binom{n-k}{s} p_{(k+s)(1,2),1}, \quad k = \overline{0, n},$$

и определим полином степени  $n$  следующим образом:

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n-2} \binom{n}{n-k} \mu_k x^{n-k} + n(\mu_{n-1} - 1)x + \mu_n.$$

**Лемма 2.** *Количество неподвижных точек стохастического оператора (2) в  $S^1$  совпадает с количеством корней полинома  $P_n(x)$  в  $(0, 1)$ .*

*Доказательство.* Ясно, что задача нахождения неподвижных точек оператора (2) в  $S^1$  требует найти корни полинома

$$\sum_{k=0}^n \frac{n!}{(n-k)! k!} p_{k(1,2),1} x^{n-k} (1-x)^k - x = Q_n(x) - x$$

в отрезке  $(0, 1)$ . Поскольку

$$(1-x)^k = \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} (-1)^j x^j,$$

то подставляя это выражение в исходную сумму, получаем

$$Q_n(x) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} p_{k(1,2),1} x^{n-k} \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} (-1)^j x^j.$$

Перемножая  $x^{n-k}$  и  $x^j$ , имеем  $x^{n-k+j}$ , откуда

$$Q_n(x) = \sum_{k=0}^n \sum_{j=0}^k \binom{n}{k} \binom{k}{j} (-1)^j p_{k(1,2),1} x^{n-k+j}.$$

Пусть

$$m = n - k + j \quad \Longleftrightarrow \quad j = m - n + k.$$

Тогда коэффициент при  $x^m$  равен

$$\sum_{k=n-m}^n \binom{n}{k} \binom{k}{m-n+k} (-1)^{m-n+k} p_{k(1,2),1}.$$

Применяя равенство

$$\binom{n}{k} \binom{k}{m-n+k} = \binom{n}{m} \binom{m}{n-k},$$

получаем более симметричную форму:

$$\binom{n}{m} \sum_{s=0}^m (-1)^s \binom{m}{s} p_{(n-m+s)(1,2),1}.$$

Заменяя  $m = n - k$ , получаем

$$Q_n(x) - x = \sum_{k=0}^n \binom{n}{n-k} \left( \sum_{s=0}^{n-k} (-1)^s \binom{n-k}{s} p_{(k+s)(1,2),1} \right) x^{n-k} - x = P_n(x).$$

Отметим, что если  $\mathbf{x}_0 = (x_0, 1 - x_0)$  является неподвижной точкой оператора (2), то  $x_0 \in (0, 1)$  является корнем полинома  $P_n(x)$  и наоборот.  $\square$

**Лемма 3.** Полином  $P_n(x)$  имеет по крайней мере один корень в интервале  $(0, 1)$ .

*Доказательство.* По определению многочлена  $P_n(x)$  имеем  $P_n(0) = p_{n(1,2),1} > 0$  и  $P_n(1) = p_{0(1,2),1} - 1 = -p_{0(1,2),2} < 0$ . Следовательно, найдется точка  $x_0$  из интервала  $(0, 1)$ , в которой функция  $y = P_n(x)$  равна нулю.  $\square$

Из лемм 2 и 3 получаем следующее

**Следствие 4.** Оператор (2) имеет неподвижную точку в  $S^1$ .

## 2. Строго положительный квадратичный стохастический оператор, случай $n = 2$

В случае  $n = 2$  оператор (2) задается квадратичной формой, поэтому его называют квадратичным стохастическим оператором. Отметим, что рассматриваемый класс операторов является хорошо изученным, что подтверждается исследованиями [3]. В основном изучение сосредоточено на таких свойствах, как неподвижные точки, динамика системы, поведение траекторий и инвариантные множества. Для более глубокого анализа квадратичные стохастические операторы принято разделять на несколько классов, например, таких как: Вольтерровский, квази-Вольтерровский, сепарабельный и т. д. Следует отметить, что такие операторы также встречаются при исследовании меры Гиббса на дереве Кэли для моделей с континуумом множеством значений спина [9].

**Теорема 5.** *Строго положительный квадратичный стохастический оператор  $V_2$  имеет единственную неподвижную точку в  $S^1$ .*

*Доказательство.* Следствие 4 гарантирует существование неподвижных точек оператора  $V_2$  в  $S^1$ . Мы докажем единственность неподвижных точек оператора  $V_2$  в  $S^1$ .

Отметим, что задача нахождения неподвижных точек оператора  $V_2$  в  $S^1$  требует найти корни полинома

$$P_2(x) = (p_{11,1} - 2p_{12,1} + p_{22,1})x^2 + (2p_{12,1} - 2p_{22,1} - 1)x + p_{22,1}$$

в  $(0, 1)$ . Мы проанализируем поведение графика функции  $y = P_2(x)$ . Рассмотрим несколько случаев.

1) Пусть  $p_{11,1} - 2p_{12,1} + p_{22,1} > 0$ . Тогда из соотношений

$$p_2(0) = p_{22,1} > 0, \quad p_2(1) = -p_{11,2} < 0 \quad \text{и} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} P_2(x) = +\infty$$

имеем, что график функции  $y = P_2(x)$  пересекает ось  $Ox$  в единственной точке  $x_0 \in (0, 1)$ .

2) Пусть  $p_{11,1} - 2p_{12,1} + p_{22,1} < 0$ . Тогда из соотношений

$$P_2(0) = p_{22,1} > 0, \quad P_2(1) = -p_{11,2} < 0 \quad \text{и} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} P_2(x) = -\infty$$

имеем, что парабола пересекает ось абсцисс в единственной точке  $x_0 \in (0, 1)$ .

3) Пусть  $p_{11,1} - 2p_{12,1} + p_{22,1} = 0$ . Тогда корень полинома имеет следующий вид:

$$x = -\frac{p_{22,1}}{2p_{12,1} - 2p_{22,1} - 1} = \frac{p_{22,1}}{p_{11,2} + p_{22,1}} \in (0, 1).$$

Во всех случаях полином  $P_2(x)$  имеет единственный корень в  $(0, 1)$ . Это указывает на существование единственной неподвижной точки оператора  $V_2$  в  $S^1$ .

Теорема 5 доказана. □

После упрощений дискриминант полинома  $P_2(x)$  принимает вид:

$$D = (2p_{12,1} - 1)^2 + 4p_{22,1}p_{11,2}.$$

Отметим, что точка  $\mathbf{x}_0 = (x_0, 1-x_0) \in S^1$  является неподвижной точкой оператора  $V_2$ . Здесь  $x_0$  – корень полинома  $P_2(x)$  в  $(0, 1)$ . Таким образом, верна следующая

**Теорема 6.** *Для множества неподвижных точек строго положительного квадратичного стохастического оператора  $V_2$  выполняются следующие утверждения:*

(а) если  $p_{11,1} - 2p_{12,1} - p_{22,1} > 0$ , то

$$\text{Fix}(V_2) = \left\{ \left( \frac{2p_{12,1} - 2p_{22,1} - 1 - \sqrt{D}}{2(p_{11,1} - 2p_{12,1} - p_{22,1})}, \frac{2p_{11,1} - 6p_{12,1} + 1 + \sqrt{D}}{2(p_{11,1} - 2p_{12,1} - p_{22,1})} \right) \right\};$$

(b) если  $p_{11,1} - 2p_{12,1} - p_{22,1} < 0$ , то

$$\text{Fix}(V_2) = \left\{ \left( \frac{2p_{12,1} - 2p_{22,1} - 1 + \sqrt{D}}{2(p_{11,1} - 2p_{12,1} - p_{22,1})}, \frac{2p_{11,1} - 6p_{12,1} + 1 - \sqrt{D}}{2(p_{11,1} - 2p_{12,1} - p_{22,1})} \right) \right\};$$

(c) если  $p_{11,1} - 2p_{12,1} - p_{22,1} = 0$ , то

$$\text{Fix}(V_2) = \left\{ \left( \frac{p_{22,1}}{p_{11,2} + p_{22,1}}, \frac{p_{11,2}}{p_{11,2} + p_{22,1}} \right) \right\}.$$

### 3. Строго положительный кубический стохастический оператор, случай $n = 3$

В случае  $n = 3$  рассматриваемый оператор (2) представляет собой строго положительный кубический стохастический оператор  $V_3$ . В последнее время данный класс операторов привлекает пристальное внимание исследователей, что подтверждается растущим числом публикаций по данной тематике (см. [4–8, 16, 17]). В работах [4, 5] исследуются условия на матрицу, при которых соответствующий оператор сохраняет симплекс, и изучается его динамика. Подобные операторы также возникают при отыскании неподвижных точек интегрального оператора Гаммерштейна с вырожденным ядром, появляющегося в исследовании меры Гиббса [10].

Определим полином третьей степени  $P_3$ , соответствующий строго положительному стохастическому оператору  $V_3$ :

$$P_3(x) = a_0x^3 + a_1x^2 + a_2x + a_3,$$

где

$$a_0 = p_{111,1} - p_{222,1} + 3(p_{122,1} - p_{112,1}), \quad a_1 = 3p_{222,1} + 3p_{112,1} - 6p_{122,1},$$

$$a_2 = 3p_{122,1} - 3p_{222,1} - 1, \quad a_3 = p_{222,1}.$$

**Теорема 7.** Если  $a_0 \geq 0$ , то строго положительный кубический стохастический оператор  $V_3$  имеет единственную неподвижную точку в  $S^1$ .

*Доказательство.* Согласно лемме 2, достаточно показать, что в случае  $a_0 \geq 0$  многочлен  $P_3(x)$  имеет единственный корень на интервале  $(0, 1)$ .

Пусть  $a_0 > 0$ . Тогда для полинома  $P_3(x)$  справедливы следующие соотношения:

$$P_3(-\infty) < 0, \quad P_3(0) = p_{222,1}, \quad P_3(1) = -p_{111,2}, \quad P_3(+\infty) > 0.$$

Отсюда следует, что полином  $P_3(x)$  имеет три вещественных корня  $x_1$ ,  $x_2$  и  $x_3$  такие, что

$$x_1 \in (-\infty, 0), \quad x_2 \in (0, 1), \quad x_3 \in (1, +\infty).$$

В случае  $a_0 = 0$  исходный полином  $P_3(x)$  понижает свою степень до второй, что позволяет исследовать его корни методами, применимыми к квадратному полиному  $P_2(x)$ . Известно, что полином  $P_2(x)$  имеет единственный корень на интервале  $(0, 1)$ , откуда следует, что при  $a_0 = 0$  исходный полином  $P_3(x)$  также обладает единственным корнем на интервале  $(0, 1)$ . Для ясности проверим дискриминант:

$$D_1 = a_2^2 - 4a_1a_3.$$

Далее из  $a_0 = 0$  следует, что  $p_{111,1} - p_{222,1} = 3(p_{112,1} - p_{122,1})$ . Тогда

$$\begin{aligned} D_1 &= (3p_{122,1} - 3p_{222,1} - 1)^2 - 4p_{222,1}(3p_{222,1} + 3p_{112,1} - 6p_{122,1}) = (3p_{122,1} - 3p_{222,1} - 1)^2 - \\ &\quad - 4p_{222,1}(3(p_{222,1} - p_{122,1}) + 3(p_{112,1} - p_{122,1})) \\ &= (3p_{122,1} - 3p_{222,1} - 1)^2 - 4p_{222,1}(3p_{222,1} - 3p_{122,1} + p_{111,1} - p_{222,1}) \\ &= (3p_{122,1} - 3p_{222,1} - 1)^2 - 4p_{222,1}(2p_{222,1} - 3p_{122,1} + p_{111,1}) \\ &= 9p_{122,1}^2 + 9p_{222,1}^2 + 1 - 18p_{122,1}p_{222,1} - 6p_{122,1} + 6p_{222,1} - 8p_{222,1}^2 + 12p_{122,1}p_{222,1} - 4p_{111,1}p_{222,1} \\ &= 9p_{122,1}^2 - 6p_{122,1}p_{222,1} + p_{222,1}^2 + 1 - 6p_{122,1} + 6p_{222,1} - 4p_{111,1}p_{222,1} \\ &= (3p_{122,1} - p_{222,1})^2 + 1 - 2(3p_{122,1} - p_{222,1}) + 4p_{222,1} - 4p_{111,1}p_{222,1} \\ &= (3p_{122,1} - p_{222,1} - 1)^2 + 4p_{222,1} - 4p_{111,1}p_{222,1} \\ &= (3p_{122,1} - p_{222,1} - 1)^2 + 4p_{222,1}(1 - p_{222,1}) = (3p_{122,1} - p_{222,1} - 1)^2 + 4p_{222,1}p_{111,2}. \end{aligned}$$

Таким образом,  $D_1 > 0$ .

Как обычно, из условий  $P_3(0) = p_{222,1} > 0$  и  $P_3(1) = -p_{111,2} < 0$  следует, что при  $a_0 = 0$  полином  $P_3(x)$  имеет ровно один корень на интервале  $(0, 1)$  независимо от знака  $a_1$ .  $\square$

Для анализа положительных корней полинома  $P_3(x)$  целесообразно использовать правило знаков Декарта (см. [12, с. 38–40]). Составим таблицу всех возможных комбинаций знаков коэффициентов  $P_3(x)$ :

Таблица 1

| $P_3(x)$ | $a_0$ | $a_1$ | $a_2$ | $a_3$ | Число перемен знака коэффициентов |
|----------|-------|-------|-------|-------|-----------------------------------|
| 1.       | —     | —     | —     | +     | 1                                 |
| 2.       | —     | +     | +     | +     | 1                                 |
| 3.       | —     | —     | +     | +     | 1                                 |
| 4.       | —     | +     | —     | +     | 3                                 |

Согласно правилу Декарта в первых трех случаях уравнение  $P_3(x) = 0$  имеет единственное положительное решение на  $(0, 1)$ .

**Следствие 8.** Если выполняются соотношения

$$a_0 < 0, \quad a_1 > 0, \quad a_2 < 0, \tag{3}$$



то строго положительный кубический стохастический оператор  $V_3$  может иметь до трех неподвижных точек в  $S^1$ , т. е.  $1 \leq |\text{Fix}(V_3)| \leq 3$ .

Определим число

$$\Delta := a_1^2 - 3a_0a_2.$$

В случае  $\Delta > 0$  введем следующие обозначения:

$$\alpha = \frac{-a_1 + \sqrt{\Delta}}{3a_0}, \quad \beta = \frac{-a_1 - \sqrt{\Delta}}{3a_0}.$$

Очевидно, что числа  $\alpha$  и  $\beta$  являются точками экстремума функции  $y = P_3(x)$ . При выполнении условий (3) выполняются неравенства  $0 < \alpha < \beta$ , причем функция  $y = P_3(x)$  монотонно убывает на интервалах  $(-\infty, \alpha]$  и  $(\beta, +\infty)$  и монотонно возрастает на интервале  $(\alpha, \beta]$ .

Кроме того, на отрезке  $[0, 1]$  справедливы следующие соотношения:

- $\min_{x \in [0, \beta]} P_3(x) = P_3(\alpha)$ ,
- $\max_{x \in [\alpha, 1]} P_3(x) = P_3(\beta)$ ,
- $P_3(0) = p_{222,1} > 0$ ,
- $P_3(1) = -p_{111,2} < 0$ .

Таким образом, анализ поведения функции  $P_3(x)$  показывает, что верна следующая

**Теорема 9.** Пусть выполнены условия (3),  $\Delta > 0$  и  $\beta < 1$ . Тогда количество неподвижных точек  $|\text{Fix}(V_3)|$  строго положительного кубического стохастического оператора  $V_3$  в  $S^1$  равно:

$$|\text{Fix}(V_3)| = \begin{cases} 1, & \text{если } P_3(\alpha)P_3(\beta) > 0; \\ 2, & \text{если } P_3(\alpha)P_3(\beta) = 0; \\ 3, & \text{если } P_3(\alpha)P_3(\beta) < 0. \end{cases}$$

#### 4. Строго положительный квартический стохастический оператор, случай $n = 4$

Поскольку в литературе полином четвертой степени часто называют квартикой, возникающий при  $n = 4$  оператор, состоящий из таких полиномов от двух переменных, естественно назвать квартическим оператором.

Определим полином четвертой степени

$$P_4(x) = b_0x^4 + b_1x^3 + b_2x^2 + b_3x + b_4,$$

где

$$b_0 = p_{1111,1} - 4p_{1112,1} + 6p_{1122,1} - 4p_{1222,1} + p_{2222,1}, \quad b_1 = 4p_{1112,1} - 12p_{1122,1} + 12p_{1222,1} - 4p_{2222,1},$$

$$b_2 = 6p_{1122,1} - 12p_{1222,1} + 6p_{2222,1}, \quad b_3 = 4p_{1222,1} - 4p_{2222,1} - 1, \quad b_4 = p_{2222,1}.$$

Заметим, что при  $b_0 = 0$  полином  $P_4(x)$  понижает степень до третьей, и все результаты, изложенные в предыдущем разделе, полностью применимы к данному случаю.

Введем следующие обозначения, предполагая  $b_0 \neq 0$ :

$$p = \frac{8b_0b_2 - 3b_1^2}{16b_0^2}, \quad q = \frac{b_1^3 - 4b_0b_1b_2 + 8b_0^2b_3}{32b_0^3},$$

$$Q = \left(\frac{p}{3}\right)^3 + \left(\frac{q}{2}\right)^2.$$

**Теорема 10.** Если  $Q \geq 0$ , то строго положительный квартический стохастический оператор  $V_4$  имеет единственную неподвижную точку в  $S^1$ .

*Доказательство.* Согласно [лемме 2](#) достаточно исследовать количество корней полинома  $P_4(x)$  на интервале  $(0, 1)$ . Для исследования количества корней полинома  $P_4(x)$  на интервале  $(0, 1)$  проанализируем его поведение. Сначала найдем стационарные точки, приравняв производную к нулю:

$$P'_4(x) = 0. \quad (4)$$

Количество вещественных решений уравнения (4) зависит от параметра  $Q$ .

(а) Рассмотрим случай  $Q > 0$ .

В этом случае уравнение (4) имеет единственную вещественную стационарную точку  $x_0 \in \mathbb{R}$ , которая является точкой экстремума. Проанализируем значения функции на концах интервала:  $P_4(0) = p_{2222,1} > 0$ ,  $P_4(1) = -p_{1111,2} < 0$ . Так как функция  $y = P_4(x)$  непрерывна, ее значения на концах интервала имеют противоположные знаки и график функции пересекает  $(0, 1)$  ровно один раз.

(б) В случае  $Q = 0$  уравнение (4) имеет либо один и двукратный, либо трехкратный корень. В обоих случаях функция  $y = P_4(x)$  имеет единственную стационарную точку  $x_0 \in \mathbb{R}$ , которая является точкой экстремума. Аналогично предыдущему случаю полином  $P_4(x)$  имеет ровно один корень на интервале  $(0, 1)$ . [Теорема 10](#) доказана.  $\square$

В случае  $Q < 0$  определим

$$\theta_l = 2\sqrt{-\frac{p}{3}} \cos\left(\frac{\alpha + 2\pi(l-2)}{3}\right), \quad l = \overline{1, 2, 3},$$

$$\cos \alpha = -\frac{q}{2} \left(-\frac{3}{p}\right)^{\frac{3}{2}}, \quad \alpha \in [0, \pi].$$

Обозначим

$$\gamma_1 = \theta_3 - \frac{\mu_1}{4\mu_0}, \quad \gamma_2 = \theta_1 - \frac{\mu_1}{4\mu_0}, \quad \gamma_3 = \theta_2 - \frac{\mu_1}{4\mu_0}.$$

В случае  $Q < 0$  уравнение (4) имеет три различных вещественных корни  $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ , которые являются стационарными точками функции  $P_4(x)$ . Как следует из анализа угла  $\theta_l$ , эти корни удовлетворяют строгому неравенству

$$\gamma_1 < \gamma_2 < \gamma_3.$$

Пусть  $b_0 > 0$  (соответственно,  $b_0 < 0$ ). Тогда график функции  $y = P_4(x)$  является монотонно возрастающим на множестве  $[\gamma_1, \gamma_2] \cup [\gamma_3, +\infty)$  и монотонно убывающим на множестве  $(-\infty, \gamma_1] \cup [\gamma_2, \gamma_3]$  (соответственно, монотонно возрастающим на  $(-\infty, \gamma_1] \cup [\gamma_2, \gamma_3]$  и монотонно убывающим на  $[\gamma_1, \gamma_2] \cup [\gamma_3, +\infty)$ ).

Кроме того, выполняются следующие соотношения для значений функции в точках 0 и 1:

$$P_4(0) = p_{2222,1} > 0 \quad \text{и} \quad P_4(1) = -p_{1111,2} < 0.$$

Используя проведенный анализ, исследуем все возможные случаи поведения графика функции  $y = P_4(x)$  и сформулируем следующий результат:

**Теорема 11.** Пусть выполнены условия  $Q < 0$ ,  $\gamma_1 > 0$  и  $\gamma_3 < 1$ . Тогда количество неподвижных точек  $|\text{Fix}(V_4)|$  строго положительного квадратического стохастического оператора  $V_4$  в  $S^1$  равно:

$$|\text{Fix}(V_4)| = \begin{cases} 1, & \text{если } b_0 \prod_{i=1}^3 P_4(\gamma_i) < 0; \\ 2, & \text{если } \prod_{i=1}^3 P_4(\gamma_i) = 0; \\ 3, & \text{если } b_0 \prod_{i=1}^3 P_4(\gamma_i) > 0. \end{cases}$$

## Список литературы

- [1] Ю.И. Любич, *Математические структуры в популяционной генетике*, Наук. Думка, Киев, 1983.
- [2] Ф.А. Шахиди, *О бистохастических операторах, определенных в конечномерном симплексе*, Сиб. матем. журн. **50** (2), 463–468 (2009).  
URL: <https://www.mathnet.ru/rus/smj1973>
- [3] R. Ganikhodzhaev, F. Mukhamedov, U. Rozikov, *Quadratic stochastic operators and processes: results and open problems*, Infin. Dimens. Anal. Quantum Probab. Relat. Top. **14** (2), 279–335 (2011).  
DOI: <https://doi.org/10.1142/S0219025711004365>

- 
- [4] J.N. Jumayev, *Criterion for the preservation of the one-dimensional simplex by a cubic operator*, Uzbek Math. J. **68** (4), 85–95 (2024).  
DOI: <https://doi.org/10.29229/uzmj.2024-4-9>
- [5] Ж.Н. Жумаев, *Достаточное условие кубического оператора для сохранения симплекса*, Журн. СФУ. Сер. Матем. и физ. **18** (5), 663–673 (2025).  
URL: <https://www.mathnet.ru/rus/jsfu1278>
- [6] U.U. Jamilov, A.Yu. Khamraev, M. Ladra, *On a Volterra cubic stochastic operator*, Bull. Math. Biol. **80** (2), 319–334 (2018).  
DOI: <https://doi.org/10.1007/s11538-017-0376-0>
- [7] A.Yu. Khamraev, J.N. Jumayev, *Dynamics of a cubic stochastic operator with one discontinuity point*, Uzbek Math. J. **69** (1), 79–86 (2025).  
DOI: <https://doi.org/10.29229/uzmj.2025-1-8>
- [8] A.Yu. Khamraev, N.P. Makhmatkobilov, *On the dynamics of a quasi-strictly non-Volterra cubic stochastic operator*, JCAM **15** (1), 1–9 (2025).  
DOI: <https://doi.org/10.62476/jcam.151.1>
- [9] Yu.Kh. Eshkabilov, Sh.D. Nodirov, F.H. Haydarov, *Positive fixed points of quadratic operators and Gibbs measures*, Positivity **20** (4), 929–943 (2016).  
DOI: <https://doi.org/10.1007/s11117-015-0394-9>
- [10] Ю.Х. Эшкабилов, Ш.Д. Нодиров, *Положительные неподвижные точки кубических операторов на  $\mathbb{R}^2$  и меры Гиббса*, Журн. СФУ. Сер. Матем. и физ. **12** (6), 663–673 (2019).  
DOI: <https://doi.org/10.17516/1997-1397-2019-12-6-663-673>
- [11] Ю.Х. Эшкабилов, Ш.Д. Нодиров, *Положительные неподвижные точки интегральных операторов типа Гаммерштейна с вырожденным ядром*, Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки **166** (3), 437–449 (2024).  
DOI: <https://doi.org/10.26907/2541-7746.2024.3.437-449>
- [12] В.В. Прасолов, *Многочлены*, МЦНМО, М., 2003.  
URL: <https://math.ru/lib/391>
- [13] R. Bürger, *The mathematical theory of selection, recombination, and mutation*, John Wiley & Sons, Ltd., Chichester, 2000.
- [14] W.J. Ewens, *Mathematical population genetics. I. Theoretical introduction*, Springer-Verlag, New York, 2004.  
DOI: <https://doi.org/10.1007/978-0-387-21822-9>
- [15] S.P. Otto, J. Whitton, *Polyploid incidence and evolution*, Annu. Rev. Genet. **34**, 401–437 (2000).  
DOI: <https://doi.org/10.1146/annurev.genet.34.1.401>

- [16] B.S. Baratov, U.U. Jamilov, *On separable cubic stochastic operators*, Qual. Theory Dyn. Syst. **23** (2), paper no. 93 (2024).  
DOI: <https://doi.org/10.1007/s12346-023-00950-5>
- [17] B.S. Baratov, *The dynamics of a separable cubic operator*, Uzbek Math. J. **68** (2), 27–41 (2024).  
DOI: <https://doi.org/10.29229/uzmj.2024-2-4>

**Шохрух Дилмуродович Нодиров**

Каршинский государственный университет,  
ул. Кучабаг, д. 17, г. Карши, 180119, Узбекистан,  
Казанский (Приволжский) федеральный университет,  
Научно-образовательный математический центр ПФО,  
ул. Кремлевская, д. 35, г. Казань, 420008, Россия,  
*e-mail*: shoh0809@mail.ru

**Юсуп Халбаевич Эшкабилов**

Каршинский государственный университет,  
ул. Кучабаг, д. 17, г. Карши, 180119, Узбекистан,  
*e-mail*: yusup62@mail.ru

## On fixed points of strictly positive stochastic operators on a one-dimensional simplex

Sh.D. Nodirov, Yu.Kh. Eshkabilov

**Abstract.** A class of strictly positive stochastic operators of degree  $n$  acting on a one-dimensional simplex is investigated. The main focus is on the problem of the number of fixed points of such operators. It is shown that this problem reduces to studying the number of roots of the corresponding degree  $n$  polynomial on the interval  $(0, 1)$ . The existence of at least one fixed point is proved for arbitrary  $n$ .

For the quadratic case ( $n = 2$ ), the uniqueness of the fixed point is established. For a cubic operator ( $n = 3$ ), conditions for the existence of one, two, or three fixed points are obtained. For a quartic operator ( $n = 4$ ), criteria determining the number of fixed points are proved in terms of the operator's parameters.

**Keywords:** fixed point, simplex, stochastic operator, binomial coefficient, polynomial, extreme points.

**DOI:** 10.26907/2949-3919.2026.2.118-133

## References

- [1] Y.I. Lyubich, *Mathematical structures in population genetics*, Springer-Verlag, Berlin, 1992.
- [2] F.A. Shahidi, *Doubly stochastic operators on a finite-dimensional simplex*, Siberian Math. J. **50** (2), 368–372 (2009).  
DOI: <https://doi.org/10.1007/s11202-009-0042-3>
- [3] R. Ganikhodzhaev, F. Mukhamedov, U. Rozikov, *Quadratic stochastic operators and processes: results and open problems*, Infin. Dimens. Anal. Quantum Probab. Relat. Top. **14** (2), 279–335 (2011).  
DOI: <https://doi.org/10.1142/S0219025711004365>
- [4] J.N. Jumayev, *Criterion for the preservation of the one-dimensional simplex by a cubic operator*, Uzbek Math. J. **68** (4), 85–95 (2024).  
DOI: <https://doi.org/10.29229/uzmj.2024-4-9>

---

Acknowledgements. This research was supported by an applied grant from the Agency for Innovative Development under the Ministry of Higher Education, Science and Innovations of the Republic of Uzbekistan (Grant No. AL-9224093956).

- [5] J.N. Jumayev, *A sufficient condition for a cubic operator to preserve a simplex*, J. Sib. Fed. Univ. Math. Phys. **18** (5), 663–673 (2025).  
URL: <https://www.mathnet.ru/rus/jsfu1278>
- [6] U.U. Jamilov, A.Yu. Khamraev, M. Ladra, *On a Volterra cubic stochastic operator*, Bull. Math. Biol. **80** (2), 319–334 (2018).  
DOI: <https://doi.org/10.1007/s11538-017-0376-0>
- [7] A.Yu. Khamraev, J.N. Jumayev, *Dynamics of a cubic stochastic operator with one discontinuity point*, Uzbek Math. J. **69** (1), 79–86 (2025).  
DOI: <https://doi.org/10.29229/uzmj.2025-1-8>
- [8] A.Yu. Khamraev, N.P. Makhmatkobilov, *On the dynamics of a quasi-strictly non-Volterra cubic stochastic operator*, JCAM **15** (1), 1–9 (2025).  
DOI: <https://doi.org/10.62476/jcam.151.1>
- [9] Yu.Kh. Eshkabilov, Sh.D. Nodirov, F.H. Haydarov, *Positive fixed points of quadratic operators and Gibbs measures*, Positivity **20** (4), 929–943 (2016).  
DOI: <https://doi.org/10.1007/s11117-015-0394-9>
- [10] Yu.Kh. Eshkabilov, Sh.D. Nodirov, *Positive fixed points of cubic operators on  $\mathbb{R}^2$  and Gibbs measures*, J. Sib. Fed. Univ. Math. Phys. **12** (6), 663–673 (2019).  
DOI: <https://doi.org/10.17516/1997-1397-2019-12-6-663-673>
- [11] Yu.Kh. Eshkabilov, Sh.D. Nodirov, *Positive fixed points of Hammerstein integral operators with degenerate kernel*, Uchenye Zapiski Kazanskogo Universiteta. Seriya Fiziko-Matematicheskie Nauki **166** (3), 437–449 (2024). [in Russian].  
DOI: <https://doi.org/10.26907/2541-7746.2024.3.437-449>
- [12] V.V. Prasolov, *Polynomials*, Springer-Verlag, Berlin, 2004.  
DOI: <https://doi.org/10.1007/978-3-642-03980-5>
- [13] R. Bürger, *The mathematical theory of selection, recombination, and mutation*, John Wiley & Sons, Ltd., Chichester, 2000.
- [14] W.J. Ewens, *Mathematical population genetics. I. Theoretical introduction*, Springer-Verlag, New York, 2004.  
DOI: <https://doi.org/10.1007/978-0-387-21822-9>
- [15] S.P. Otto, J. Whitton, *Polyploid incidence and evolution*, Annu. Rev. Genet. **34**, 401–437 (2000).  
DOI: <https://doi.org/10.1146/annurev.genet.34.1.401>
- [16] B.S. Baratov, U.U. Jamilov, *On separable cubic stochastic operators*, Qual. Theory Dyn. Syst. **23** (2), paper no. 93 (2024).  
DOI: <https://doi.org/10.1007/s12346-023-00950-5>

- [17] B.S. Baratov, *The dynamics of a separable cubic operator*, Uzbek Math. J. **68** (2), 27–41 (2024).

DOI: <https://doi.org/10.29229/uzmj.2024-2-4>

**Shohruh Dilmurodovich Nodirov**

Karshi State University,  
17 Kuchabag str., Karshi 180119, Uzbekistan,  
Kazan Federal University,  
Volga Region Mathematical Center,  
18 Kremlyovskaya str., Kazan 420008, Russia,  
*e-mail*: shoh0809@mail.ru

**Yusup Khalbayevich Eshkabilov**

Karshi State University,  
17 Kuchabag str., Karshi 180119, Uzbekistan,  
*e-mail*: yusup62@mail.ru