

Об одном классе взаимных расположений двух M -кривых степени 4

Н.Д. Пучкова

Аннотация. Рассматривается задача вещественной изотопической классификации взаимных расположений в вещественной проективной плоскости двух M -кривых степени 4. На изучаемые расположения наложены условие максимальной (овал одной из этих кривых имеет 16 попарно различных общих точек с овалом другой из них) и условие комбинаторного характера, выделяющее специальный тип таких расположений. Получена полная изотопическая классификация указанных расположений. Доказательства алгебраической нереализуемости топологических моделей расположений изучаемого класса кривыми степени 8 проводятся методом Оревкова, основанным на применении теории кос и зацеплений.

Ключевые слова: плоские вещественные алгебраические кривые, распадающиеся кривые, квазиположительные косы, метод Оревкова, неравенство Мурасуги.

DOI: 10.26907/2949-3919.2026.2.134-146

Введение

В 1900 году на Международном конгрессе математиков в Париже Давид Гильберт представил список проблем, которые, по его мнению, в первую очередь ждут решения в XX веке. В первой части 16-й проблемы Д. Гильберт поставил задачу вещественной изотопической классификации неособых плоских вещественных алгебраических кривых. На данный момент завершена классификация неособых кривых до седьмой степени включительно.

Каковы возможные расположения вещественной распадающейся кривой данной степени на вещественной проективной плоскости? Этот вопрос интенсивно изучался в последние десятилетия. Топологическая классификация распадающихся кривых степени 6 при некоторых условиях максимальной и общего положения была найдена Г.М. Полотовским в 1977 г. [1], аналогичная задача о кривых степени 7 почти завершена, ей занималась большая группа авторов (А.Б. Корчагин, С.Ю. Оревков, Г.М. Полотовский, Е.И. Шустин и др., библиографические ссылки см. в [2]).

Благодарности. Исследование осуществлено в рамках Программы фундаментальных исследований НИУ ВШЭ.

Данная статья посвящена изучению взаимных расположений в вещественной проективной плоскости $\mathbb{R}P^2$ двух M -кривых степени 4, находящихся в общем положении, и является продолжением исследований [3, 4]. Далее в работе вводится определенный тип таких расположений, рассмотрением которого ограничиваемся ввиду большого числа всех подлежащих исследованию возможностей. Для расположений этого типа удалось получить полную классификацию, которая приведена в конце статьи.

Автор благодарит Г.М. Полотовского за предложенную задачу и помощь в работе и С.Ю. Оревкова за ценные замечания.

1. Постановка задачи

Через C_k будем обозначать вещественную проективную алгебраическую кривую степени k , т. е. однородный многочлен степени k с вещественными коэффициентами от трех переменных, рассматриваемый с точностью до ненулевого постоянного множителя, а через $\mathbb{R}C_k$ – множество вещественных точек кривой C_k , т. е. множество точек вещественной проективной плоскости, в которых многочлен C_k обращается в нуль.

Пусть многочлен C_8 распадается в произведение двух многочленов степени 4: $C_8 = C_4 \cdot \widetilde{C}_4$, т. е. $\mathbb{R}C_8 = \mathbb{R}C_4 \cup \mathbb{R}\widetilde{C}_4$. Данная работа посвящена топологической классификации троек

$$(\mathbb{R}P^2, \mathbb{R}C_8, \mathbb{R}C_4)$$

при следующих условиях:

- 1) кривые C_4 и $\widetilde{C}_4$ являются M -кривыми, т. е. каждая из них состоит в $\mathbb{R}P^2$ из четырех попарно не пересекающихся овалов (двусторонне вложенных в проективную плоскость топологических окружностей), лежащих вне друг друга;
- 2) общие вещественные точки кривых C_4 и $\widetilde{C}_4$ попарно различны и их число максимально, т. е. $\#(\mathbb{R}C_4 \cap \mathbb{R}\widetilde{C}_4) = 16$;
- 3) все эти 16 точек лежат на одном овале кривой C_4 и на одном овале кривой $\widetilde{C}_4$.

Назовем *топологической моделью* распадающейся кривой рассматриваемого вида (для краткости ниже – просто “модель”) набор восьми топологических окружностей, которые вложены в $\mathbb{R}P^2$ двусторонне и которые ведут себя с точки зрения числа и расположения общих точек так, как две кривые степени 4 при условиях 1)–3) выше. Наша задача – выяснить, какие модели могут быть реализованы как объединение двух M -кривых степени 4, а какие – нет.

Определение 1. Пусть овал O целиком лежит в аффинной плоскости¹. Рассмотрим незамкнутую дугу без самопересечений, тоже целиком лежащую в аффинной плоскости и пересекающую овал O в восьми попарно различных точках. Эту дугу будем называть *обрезающей дугой*. При достаточно малом ε граница ε -окрестности этой дуги представляет

¹Для овала M -кривой степени 4 этого всегда можно добиться, выбрав в качестве бесконечно удаленной прямой аффинной плоскости слегка сдвинутую двойную касательную к этой кривой.

собой другой овал, который пересекает исходный овал O в 16 попарно различных точках. Этот второй овал будем называть *змеей*, а такое взаимное расположение двух овалов будем называть пересечением ветвей типа “*змея, обвивающаяся вокруг овала*”.

Определение 2. Пусть в вещественной проективной плоскости $\mathbb{R}P^2$ имеем пересечение двух овалов типа “змея, обвивающаяся вокруг овала” такое, что один (а, значит, и второй) конец образующей дуги лежит в диске, ограниченном овалом O . Отвечающую такой дуге змею назовем “*змеей с концом внутри овала*”.

В данной работе будем исследовать некоторое подмножество расположений двух кривых степени 4, содержащих “змею с концом внутри овала”, придерживаясь следующей схемы:

- 1) перечисление моделей, удовлетворяющих наложенным условиям;
- 2) доказательства нереализуемости некоторых моделей из списка п. 1) алгебраическими кривыми степени 8;
- 3) реализация остальных моделей алгебраическими кривыми степени 8.

Мы будем доказывать запреты с помощью теоремы Безу и с помощью метода Оревова, основанного на теории кос и зацеплений.

2. Перечисление моделей

2.1. КОДИРОВКА РАСПОЛОЖЕНИЙ ПЕРЕСЕКАЮЩИХСЯ ОВАЛОВ И СПИСОК КОДОВ. Пусть имеется модель кривой степени 8, распадающейся в произведение двух M -кривых степени 4, со змеей с концом внутри овала. В дальнейшем кривую, один из овалов которой есть змея, будем называть *кривой номер 1*, а кривую, вокруг овала которой обвивается змея, будем называть *кривой номер 2*. Овалы, на которых нет точек пересечения (в нашем случае таких овалов шесть: три овала кривой номер 1 и три овала кривой номер 2), называются *свободными*. Напомним, что в силу условия 1) овалы, принадлежащие кривой с одним номером, лежат вне друг друга.

Занумеруем на овале кривой номер 2 подряд восемь точек – точек пересечения овала с образующей дугой. Тогда расположение образующей дуги относительно пересекаемого ею овала можно кодировать подстановкой порядка 8, запись которой в виде цикла получается выписыванием номеров точек на овале, проходимых при движении по образующей дуге от одного ее конца до второго.

Чтобы получить однозначную кодировку расположения образующей дуги, ориентируем образующую дугу и овал кривой номер 2. В кодировке следом за подстановкой в квадратных скобках будем записывать четыре знака: первый отвечает сегменту образующей дуги, соединяющему первый и второй элементы подстановки, второй знак – третий и четвертый элементы, третий – пятый и шестой, четвертый – седьмой и восьмой. Если ориентация образующей дуги на рассматриваемом сегменте совпадает с ориентацией

овала, то будем ставить знак “+”, иначе – знак “–”. Например, коду $(12345876)[++-+]$ отвечает расположение на [рис. 1](#).

Если двум разным кодам соответствуют гомеоморфные расположения кривых, то оставим тот, в котором подстановка и набор знаков, записываемых за ней, меньше в смысле лексикографического порядка. Знак “+” будем считать меньше в смысле лексикографического порядка, чем знак “–”.

С помощью устранения точек пересечения (эти устранения независимы в силу теоремы Брюзотти – см., например, [5]) докажем, что расположения, отвечающие некоторым подстановкам, не могут быть реализованы кривой степени 8. Например, кривая на [рис. 2](#), получаемая устранением точек пересечения на [рис. 1](#), имеет два гнезда² веса 2 с разными внешними овалами, окруженные еще одним овалом; известно, что такое расположение овалов не может быть реализовано кривой степени 8 (в силу противоречия теореме Безу при пересечении с прямой), поэтому нереализуемо и расположение [рис. 1](#).

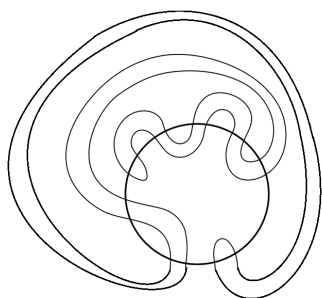


Рис. 1

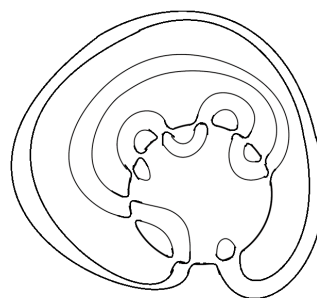


Рис. 2

Применением описанного приема доказывается следующая

Теорема 3. *Полный список кодов, отвечающих попарно различным образующим дугам для не противоречащих теореме Безу моделей расположений двух кривых степени 4 типа “змея с концом внутри овала”, состоит из следующих кодов:*

- | | | |
|----------------------------|----------------------------|---------------------------|
| 1. $(12345678)[+++]$, | 2. $(12345678)[+++-]$, | 3. $(12345678)[++-+]$, |
| 4. $(12345687)[+++-]$, | 5. $(12345876)[+++-]$, | 6. $(12345876)[++--]$, |
| 7. $(12346785)[+++-]$, | 8. $(12347658)[+++-]$, | 9. $(12347658)[++--]$, |
| 10. $(12348756)[++-+]$, | 11. $(12348765)[++--]$, | 12. $(12365478)[++-+]$, |
| 13. $(12365478)[+- -+]$, | 14. $(12365487)[++--]$, | 15. $(12367854)[+++-]$, |
| 16. $(12367854)[+- + -]$, | 17. $(12456783)[+++-]$, | 18. $(12458763)[++--]$, |
| 19. $(12763458)[+- ++]$, | 20. $(12763458)[+- + -]$, | 21. $(12765438)[+- -+]$, |
| 22. $(12765438)[+- --]$, | 23. $(12876534)[+- -+]$. | |

2.2. О РАСПОЛОЖЕНИЯХ СВОБОДНЫХ ОВАЛОВ. Для каждого из расположений, коды которых перечислены в [теореме 3](#), дополнение плоскости $\mathbb{R}P^2$ к объединению пересекающихся овалов состоит из восемнадцати компонент связности. В этих компонентах

²Гнездом веса s называется набор из s овалов, последовательно окружающих друг друга.

связности должны располагаться шесть овалов – по три для каждой из пересекающихся кривых. Количество допустимых попарно различных распределений овалов между этими областями зависит от топологии объединения пересекающихся овалов. *Имеются семь расположений, для которых условия распределений этих шести овалов между компонентами связности дополнения к пересекающимся овалам одинаковы – это расположения под номерами 2, 3, 5, 6, 9, 13 и 16 из [теоремы 3](#). Именно эти семь расположений изучаются в дальнейшем.*

Покажем, как запрещаются по теореме Безу модели, рассмотрев конкретный пример – змею, отвечающую коду $(12345678)[+++-]$, см. [рис. 3](#).

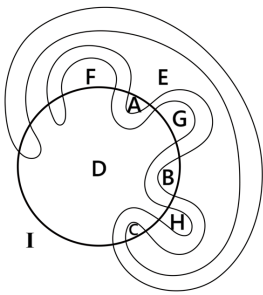


Рис. 3

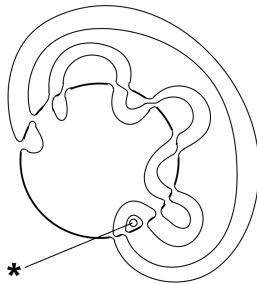


Рис. 4

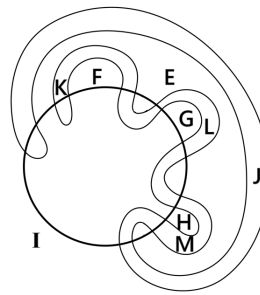


Рис. 5

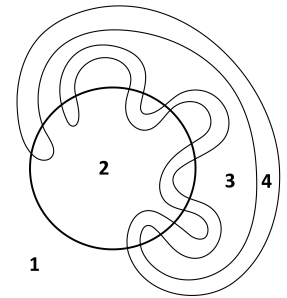


Рис. 6

Найдем сначала все возможные области для размещения овалов кривой номер 1. Напомним, что эти овалы должны располагаться вне друг друга и вне змеи.

Дополнение к пересекающимся овалам вне змеи состоит из девяти областей. Обозначим эти области буквами латинского алфавита, см. [рис. 3](#). В области С свободный овал лежать не может: устраняя точки пересечения так, как показано на [рис. 4](#) (* – добавленный свободный овал), получим расположение с гнездом веса 4 и еще одним овалом, чего не может быть у кривой степени 8. Совершенно аналогично доказывается невозможность расположения свободного овала кривой номер 1 в областях А, В, F–H.

Аналогично для кривой с номером 2 снова имеем девять областей для свободных овалов, которые обозначены на [рис. 5](#) буквами латинского алфавита. Также с помощью теоремы Брюзотти убеждаемся, что свободные овалы не могут лежать в областях F–H и K–M.

Подведем итог: допустимо распределение свободных овалов только между четырьмя областями, пронумерованными на [рис. 6](#), причем в области 2 могут располагаться только овалы кривой номер 1, в области 4 – только овалы кривой номер 2, а в областях 1 и 3 – как овалы кривой номер 1, так и овалы кривой номер 2 (но вне друг друга). Можно перечислить все возможные распределения шести свободных овалов между этими областями, удовлетворяющие следствиям из теоремы Безу (что и делалось в предыдущих работах – см. таблицы 1 в [\[3, 4\]](#)), но в этом нет необходимости: во-первых, имеются еще другие ограничения, вытекающие из теоремы Безу, а во-вторых, все не противоречащие теореме Безу распределения свободных овалов будут перебираться ниже с помощью компьютера.

3. Запреты с помощью теории кос и зацеплений

Будем доказывать нереализуемость изучаемых моделей алгебраическими кривыми степени 8 с помощью метода, который предложил С.Ю. Оревков в 1999 году в [6]. Подробнее о методе и его применениях см., например, [2–4, 7]. Ограничимся описанием примера его применения к той же змее, отвечающей подстановке $(12345678)[+++-]$.

Изобразим исследуемое расположение так, как показано на рис. 7. Здесь “змея” – овал, нарисованный тонкой линией, а нумерация областей такая же, как на рис. 6.

Выберем в проективной плоскости точку P , не лежащую на кривой, так, чтобы каждая прямая пучка прямых с центром в этой точке пересекала объединение кривых номер 1 и 2 не менее, чем в $8 - 2 = 6$ точках, и нашлась бы прямая l_M (“максимальная”), пересекающая эту кривую в восьми точках, см. рис. 7. Такой пучок будем называть *максимальным*.

Преобразим рис. 7 так, чтобы прямая l_M стала бесконечно удаленной. Получим рис. 8.

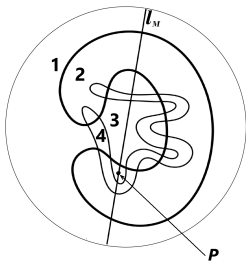


Рис. 7

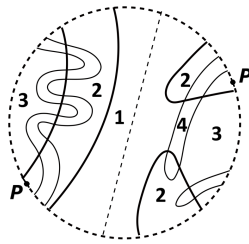


Рис. 8

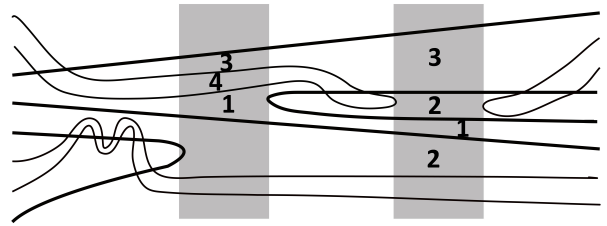


Рис. 9

Изобразим рис. 8 в виде “развертки” (у С.Ю. Оревкова – термин “послойное расположение”), изображенной на рис. 9 (теперь точка P – “бесконечно удаленная на вертикальной оси OY ”).

В силу теоремы Безу шесть свободных овалов модели могут располагаться только в закрашенных на рис. 9 вертикальных полосах, причем при движении прямой пучка (вертикальной прямой на рис. 9) эти овалы пересекаются поочередно. Числа в этих полосах соответствуют номерам областей на рис. 7. В левой полосе могут быть только овалы кривой номер 2, в правой – только овалы кривой номер 1.

Следуя С.Ю. Оревкову, развертки будем кодировать с помощью так называемого X -кода, который получается последовательным выписыванием символов $\subset_k$, $\supset_k$, x_k , $k \in \{1, 2, \dots, 7\}$, при движении вертикальной прямой слева направо; эти символы кодируют расположения кривой в окрестности критических прямых пучка (тех прямых, которые касаются кривой или проходят через двойную точку кривой) в соответствии с рис. 10. Символ o_k заменяет пару символов $\subset_k \supset_k$ и отвечает расположению свободного овала в полосе над $(k - 1)$ -й линией (“в k -м слое”), считая снизу.

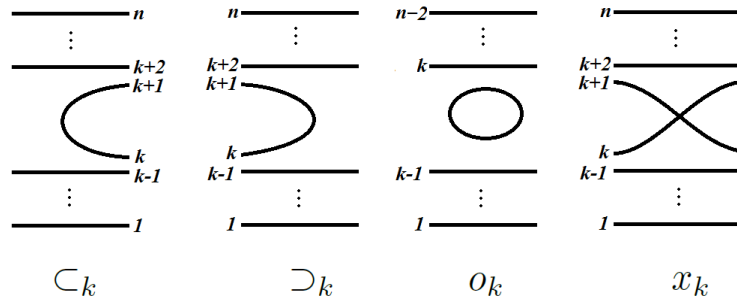


Рис. 10

В частности, развертка рис. 9 описывается X-кодом

$$x_6 x_7 x_3 x_2 x_2 x_3 x_3 x_2 x_2 x_3 x_1 x_2 \supset_3 \dots \subset_4 x_5 x_6 \supset_5 \dots \subset_5 x_6 x_5, \quad (1)$$

где вместо многоточий должны располагаться символы, показывающие расположение свободных овалов в закрашенных полосах и порядок их прохождения при движении вертикальной прямой слева направо.

В методе Орекова каждой развертке ставится в соответствие зацепление и коса из восьми нитей, замыканием которой является это зацепление. Известно, что если все косы из n нитей, отвечающие всем возможным разверткам при данном выборе центра пучка, не являются квазиположительными³, то эта модель не может быть реализована как множество вещественных точек кривой степени n . В качестве проверки на квазиположительность, следуя С.Ю. Орекову, будет использоваться следующая

Теорема 4 (неравенство Мурасуги). *Если $b = \prod \sigma_i^{k_i}$ – квазиположительная коса из m нитей, то для ее замыкания выполняется неравенство*

$$\eta = |\sigma(b)| + m - e(b) - n(b) \leq 0,$$

где $\sigma(b)$ и $n(b)$ – сигнатура и дефект замыкания косы b ; $e(b) = \sum k_i$ – алгебраическая степень косы b .

В данной работе удастся так выбрать центр пучка прямых, что для каждой модели расположения пересекающихся овалов развертка строится однозначно с точностью до эквивалентностей фрагментов, указанных в [6, с. 795]. Однако проверка выполнения неравенства Мурасуги даже для одной модели расположения пересекающихся овалов требует выполнения вычислений, которые нельзя провести вручную из-за большого числа вариантов расположений свободных овалов и необходимости вычисления для каждого из этих вариантов собственных чисел достаточно больших матриц.

³Коса в группе кос из n нитей с образующими $\sigma_1, \dots, \sigma_{n-1}$ называется квазиположительной, если ее можно записать в виде $\prod_{j=1}^k \omega_j \sigma_{i_j} \omega_j^{-1}$, где ω_j , $j \in \{1, 2, \dots, k\}$, – некоторые слова в алфавите $\{\sigma_1, \dots, \sigma_{n-1}, \sigma_1^{-1}, \dots, \sigma_{n-1}^{-1}\}$.

Для вычислений мы пользовались программой, написанной для задач такого типа И.М. Борисовым. Эта программа для заданных на входе X -кода вида (1), номеров горизонтальных полос в закрашенных вертикальных зонах, в которых могут располагаться свободные овалы, и количеств свободных овалов в каждой закрашенной зоне, перебирает все возможные распределения свободных овалов в этих зонах во всевозможных порядках. Затем, подставляя поочередно в код вида (1) вместо многоточий слова вида $o_{i_1} o_{i_2} \dots o_{i_k}$, где k – количество овалов в данной закрашенной зоне, полученные в результате описанного выше перебора, для каждого полученного X -кода (уже без многоточий) вычисляет левую часть неравенства Мурасуги. На выходе программа дает список X -кодов, для которых неравенство Мурасуги выполняется, приведенный в [таблице 1](#).

Центр P пучка всегда выбирался вне свободных овалов. Положение точки P указано после подстановки во втором столбце [таблицы 1](#), где буквой A обозначен выбор центра пучка внутри змеи и вне несвободного овала кривой номер 2, а буквой B – вне змеи и внутри несвободного овала кривой номер 2. При этом запись As обозначает, что точка P выбиралась внутри двуугольной компоненты связности дополнения к пересекающимся овалам, на границе которой лежит точка с номером s , а запись Ast – что точка P лежит в четырехугольной компоненте связности этого дополнения, на границах которой лежат точки с номерами s и t . Запись вида Bpq означает, что центр P выбирался внутри несвободного обвала кривой 2 в области, в границу которой входит часть дуги (p, q) этого овала, не содержащая других занумерованных точек.

Таблица 1

Подстановка	X -код
$(12345678)[+++-]B67$	$x_6 x_7 x_3 x_2 x_2 x_3 x_3 x_2 x_2 x_3 x_1 x_2 \supset_3 o_4 o_6 o_6 \subset_4 x_5 x_6 \supset_5 o_5 o_5 o_5 \subset_5 x_6 x_5$
$(12345678)[++-+]B45$	$x_5 x_6 \supset_5 o_5 o_5 o_5 \subset_5 x_2 x_1 x_6 x_5 x_5 x_6 x_6 x_5 x_5 x_6 \supset_7 o_2 o_2 o_4 \subset_4 x_3 x_2 x_2 x_3$
$(12345876)[+++-]B78$	$x_5 x_4 \supset_5 o_5 o_5 o_5 \subset_5 x_6 x_7 x_5 x_6 \supset_5 o_2 o_2 o_4 \subset_2 x_3 x_4 x_4 x_3 x_3 x_4 x_4 x_3 x_6 x_7$
$(12345876)[++--]A12$	$x_4 x_3 x_3 x_4 \supset_3 o_3 o_3 o_3 \subset_7 x_5 x_6 x_6 x_5 x_5 x_6 x_6 x_5 \supset_4 o_4 o_4 o_6 \subset_4 x_5 x_6 x_1 x_1$
$(12347658)[++--]B45$	$x_4 x_3 x_3 x_4 x_2 x_1 x_3 x_2 x_6 x_7 \supset_3 o_4 o_6 o_6 \subset_4 x_5 x_6 \supset_5 o_5 o_5 o_5 \subset_5 x_4 x_5 x_5 x_4$
$(12365478)[+---+]B23$	$x_3 x_2 x_4 x_3 x_3 x_2 \supset_3 o_3 o_3 o_3 \subset_3 x_2 x_3 x_3 x_2 x_6 x_7 \supset_1 o_4 o_4 o_6 \subset_4 x_5 x_4 x_6 x_5$
$(12367854)[+-+-]A12$	$x_7 x_6 x_3 x_4 x_2 x_3 x_3 x_4 \supset_3 o_3 o_3 o_3 \subset_5 x_6 x_7 \supset_6 o_6 o_6 o_6 \subset_6 x_5 x_6 x_4 x_5 x_1 x_1$

4. Построения кривых

Как и в работах [3, 4], построения производились путем возмущения квадрата коники в расположениях коники и M -кривой степени 4, пересекающихся в восьми точках на одном овале кривой степени 4. Полная классификация таких расположений получена в [1], она состоит из пятнадцати типов, фрагмент классификации приведен на [рис. 11](#). На [рис. 12](#) в качестве примера показано построение расположений D, E, F [рис. 13](#) из исходного расположения номер 6 на [рис. 11](#).

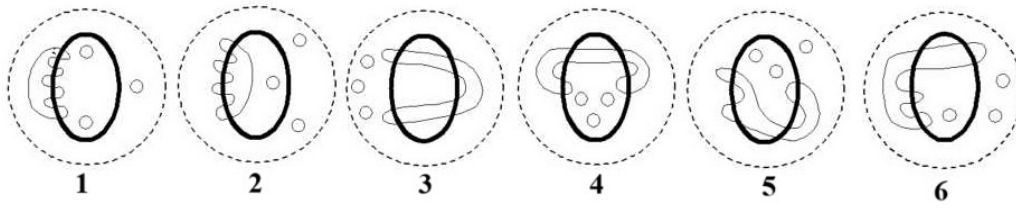


Рис. 11

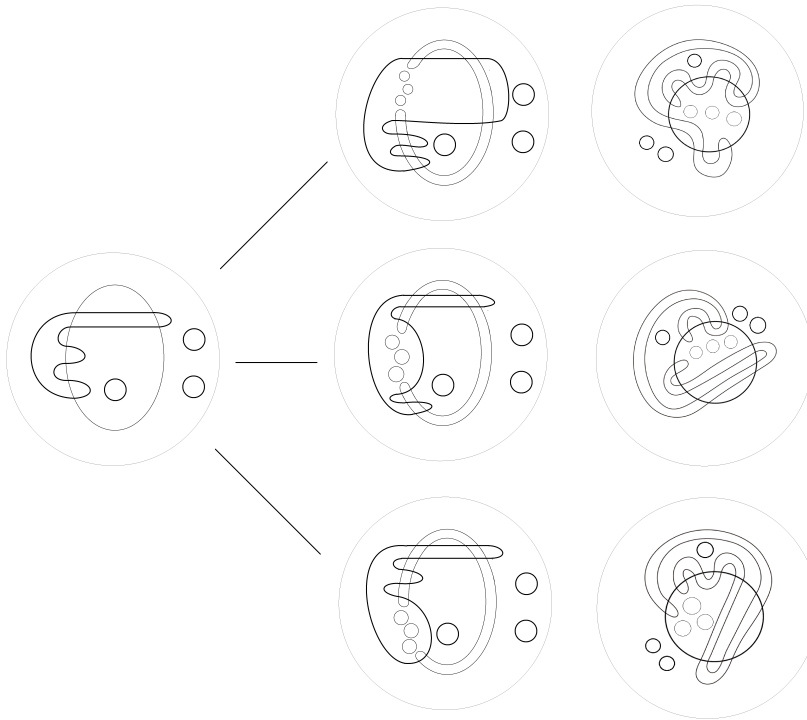


Рис. 12

5. Основной результат

Из изложенных выше запретов и построений непосредственно вытекает следующая

Теорема 5. *Для двух M -кривых степени 4 алгебраически реализуемы те и только те семь расположений типа “змея с концом внутри овала”, принадлежащих выделенному подклассу, которые указаны на [рис. 13](#).*

Расположения А и Г [рис. 13](#) реализуются путем возмущения квадрата коники из расположения номер 1 на [рис. 11](#), расположения В и С – из расположений номер 4 и 5 соответственно.

Заметим, что в данном случае, как и в случае, рассмотренном в статье [\[4\]](#), реализуются те и только те расположения, которые можно получить из расположений коники и кривой степени 4 с помощью возмущения квадрата коники.

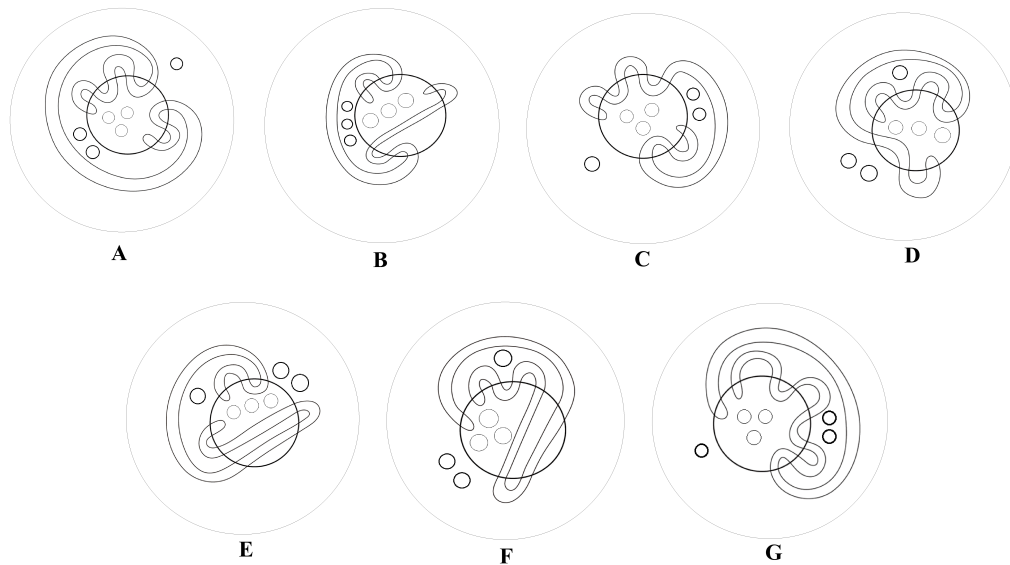


Рис. 13

Список литературы

- [1] Г.М. Полотовский, *Полная классификация M -распадающихся кривых 6-го порядка в вещественной проективной плоскости*, Деп. в ВИНТИ. № 1349–78, М., 1978.
- [2] И.М. Борисов, Г.М. Полотовский, *О топологии плоских вещественных распадающихся кривых степени 8*, Итоги науки и техн. Сер. Современ. мат. и ее прил. Темат. обз. **176**, 3–18 (2020).
DOI: <https://doi.org/10.36535/0233-6723-2020-176-3-18>
- [3] Н.Д. Пучкова, *О взаимных расположениях двух M -кривых степени 4*, Итоги науки и техн. Современ. мат. и ее прил. Темат. обз. **222**, 69–82 (2023).
DOI: <https://doi.org/10.36535/0233-6723-2023-222-69-82>
- [4] Н.Д. Пучкова, *О расположениях двух M -кривых степени 4, овал одной из которых обвивается вокруг овала другой*, Чебышевский сб. **24** (3), 56–70 (2023).
DOI: <https://doi.org/10.22405/2226-8383-2023-24-3-56-70>
- [5] Д.А. Гудков, *Топология вещественных проективных алгебраических многообразий*, УМН **29** (4), 3–79 (1974).
URL: <https://www.mathnet.ru/rus/rm7210>
- [6] S.Yu. Orevkov, *Link theory and oval arrangements of real algebraic curves*, Topology **38** (4), 779–810 (1999).
DOI: [https://doi.org/10.1016/S0040-9383\(98\)00021-4](https://doi.org/10.1016/S0040-9383(98)00021-4)
- [7] В.А. Горская, Г.М. Полотовский, *О расположениях кубики и пары коник в вещественной проективной плоскости*, Журнал СВМО **22** (1), 24–37 (2020).
DOI: <https://doi.org/10.15507/2079-6900.22.202001.24-37>

Наталья Дмитриевна Пучкова

Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики» в г. Нижний Новгород,

ул. Большая Печерская д. 25/12, г. Нижний Новгород, 603155, Россия,

e-mail: nataha1910@mail.ru

On a class of dispositions of two M -curves of degree 4

N.D. Puchkova

Abstract. We consider the isotopic classification problem of arrangements in the real projective plane of two M -curves of degree 4. We study the arrangements that satisfy the maximality condition (an oval of the first curve has 16 pairwise different common points with an oval of the second one) and some combinatorial condition distinguishing a special type. We have obtained a complete classification of algebraic curves of the class under consideration. The proofs of algebraic non-realizability for the arrangements of the studied class of curves of degree 8 use Orevkov's method based on braids and links theory.

Keywords: plane real algebraic curves, decomposable curves, quasi-positive braids, Orevkov's method, Murasugi inequality.

DOI: 10.26907/2949-3919.2026.2.134-146

References

- [1] G.M. Polotovskiy, *Complete classification of M -decompositional curves of degree 6 in the real projective plane*, Dep. in VINITI, no. 1349-78, 1978.
- [2] I.M. Borisov, G.M. Polotovskiy, *On the topology of plane real decomposable curves of degree 8*, J. Math. Sci. **275** (5), 525–540 (2023).
DOI: <https://doi.org/10.1007/s10958-023-06694-6>
- [3] N.D. Puchkova, *On mutual arrangements of two M -curves of degree 4*, Itogi Nauki i Tekhniki. Sovrem. Mat. Pril. Temat. Obz. **222**, 69–82 (2023) [in Russian].
DOI: <https://doi.org/10.36535/0233-6723-2023-222-69-82>
- [4] N.D. Puchkova, *On arrangements of two M -curves of degree 4 with an oval of the first curve coiling around an oval of the second one*, Chebyshevskii Sb. **24** (3), 56–70 (2023).
DOI: <https://doi.org/10.22405/2226-8383-2023-24-3-56-70>
- [5] D.A. Gudkov, *The topology of real projective algebraic varieties*, Russian Math. Surveys **29** (4), 1–79 (1974).
DOI: <https://doi.org/10.1070/RM1974v029n04ABEH001288>

Acknowledgements. This article is an output of a research project implemented as part of the Basic Research Program at the National Research University Higher School of Economics (HSE University).

- [6] S.Yu. Orevkov, *Link theory and oval arrangements of real algebraic curves*, Topology **38** (4), 779–810 (1999).
DOI: [https://doi.org/10.1016/S0040-9383\(98\)00021-4](https://doi.org/10.1016/S0040-9383(98)00021-4)
- [7] V.A. Gorskaya, G.M. Polotovskiy, *On the disposition of cubic and pair of conics in a real projective plane*, Zhurnal SVMO **22** (1), 24–37 (2020) [in Russian].
DOI: <https://doi.org/10.15507/2079-6900.22.202001.24-37>

Natalya Dmitrievna Puchkova

National Research University «Higher School of Economics» (Nizhny Novgorod),
25/12 B. Pecherskaya str., Nizhny Novgorod 603155, Russia,
e-mail: nataha1910@mail.ru