Том 1, Выпуск 4
Стр. 49–66 (2023)

УДК 512.643.4
MSC 15A24

Локализация матричного спектра и уравнения типа Ляпунова

Г.В. Демиденко, Ван Цзуншунь

Аннотация. Изучаются задачи о матричном спектре, лежащем внутри или вне областей, ограниченных эллипсом или параболой. С каждой из этих задач тесно связаны вопросы разрешимости специальных уравнений типа Ляпунова. Доказаны теоремы об однозначной разрешимости таких уравнений. Получены условия на возмущения матричных элементов, гарантирующие принадлежность спектров указанным областям.

Ключевые слова: матричные уравнения типа Ляпунова, теорема Крейна, локализация матричного спектра, задачи о возмущении спектра.

1. Введение

В работе рассматриваются матричные уравнения вида

$$\sum_{j,k=0}^{N} a_{jk}(A^*)^j H A^k = C, \tag{1}$$

где A – матрица размера $n \times n$, правая часть C – матрица размера $n \times n$, a_{jk} – числовые коэффициенты, и изучается связь разрешимости таких уравнений и принадлежности спектра матрицы A множествам, лежащим внутри или вне областей, ограниченных эллипсом или параболой. Получены условия на возмущения матричных элементов, гарантирующие принадлежность спектра матрицы $A + B$ указанным областям.

Отметим, что многие задачи теории управления, задачи описания ε-спектра или псевдоспектра приводят к необходимости изучения принадлежности матричного спектра различным областям, ограниченным некоторыми контурами в комплексной плоскости, а также к решению задачи о дихотомии матричного спектра относительно некоторых кривых. Поэтому установление различных критериев и разработка алгоритмов для определения расположения матричного спектра в комплексной плоскости представляют большой интерес.

Благодарности. Работа выполнена в рамках государственного задания Института математики им. С.Л. Соболева СО РАН № FWNF-2022-0008.

Поступила: 16.10.2023. Принята: 28.11.2023. Опубликована: 26.12.2023.

Наиболее известными критериями локализации матричного спектра являются критерии Ляпунова (см., например, [1, 2]). Эти критерии дают необходимые и достаточные условия принадлежности матричного спектра левой полуплоскости

$$\mathcal{C}_- = \{\lambda \in \mathbb{C} : \ \mathrm{Re}\,\lambda < 0\}$$

и единичному кругу

$$\mathcal{C}_i = \{\lambda \in \mathbb{C} : \ |\lambda| < 1\}.$$

Приведем формулировки этих критериев.

Теорема 1. *Спектр матрицы A принадлежит левой полуплоскости $\mathcal{C}_-$ тогда и только тогда, когда уравнение*

$$HA + A^*H = -C \tag{2}$$

при $C = C^* > 0$ имеет положительно определенное решение $H = H^* > 0$.

В литературе уравнение (2) называется *уравнением Ляпунова*.

Напомним, что к рассмотрению уравнения (2) приводит изучение устойчивости решений систем дифференциальных уравнений

$$\frac{dy}{dt} = Ay + f(y).$$

Еще одним интересным примером является *дискретное уравнение Ляпунова*

$$H - A^*HA = C, \tag{3}$$

где A, C – квадратные матрицы размера $n \times n$, H – неизвестная матрица.

Теорема 2. *Спектр матрицы A принадлежит единичному кругу $\mathcal{C}_i$ тогда и только тогда, когда при $C = C^* > 0$ уравнение (3) имеет положительно определенное решение $H = H^* > 0$.*

К рассмотрению уравнения (3) приводят задачи теории устойчивости решений разностных уравнений вида

$$y_{j+1} = Ay_j + \varphi_j(y), \qquad j = 0, 1, \dots .$$

Уравнения (2) и (3), очевидно, входят в класс уравнений вида (1). Множество примеров уравнений такого вида приведено в монографии [3] при решении задачи о принадлежности матричного спектра различным областям, границы которых заданы алгебраическими уравнениями. Отметим, что изучение таких задач опирается на теорему М.Г. Крейна о разрешимости класса *обобщенных уравнений Ляпунова* следующего вида:

$$\sum_{j,k=0}^{N} a_{jk} B^j H A^k = Y, \tag{4}$$

где A, B, Y – известные матрицы размеров $n \times n$, $m \times m$, $m \times n$ соответственно, N определяет порядок уравнения (4), a_{jk} – постоянные коэффициенты, а H – неизвестная матрица размера $m \times n$. Приведем формулировку этой теоремы [1].

Введем следующие обозначения:

$$P(\lambda, \mu) = \sum_{j,k=0}^{N} a_{jk} \lambda^j \mu^k,$$

где a_{jk} – коэффициенты в матричном уравнении (4); $\sigma(A) = \{\mu_1, \ldots, \mu_n\}$ – спектр матрицы A; $\sigma(B) = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_m\}$ – спектр матрицы B; γ_A – контур в комплексной плоскости, охватывающий $\sigma(A)$; γ_B – контур, охватывающий $\sigma(B)$.

Теорема 3 (М.Г. Крейн [1]). *Пусть для матричного уравнения* (4) *выполнено условие*

$$P(\lambda_s, \mu_r) \neq 0,$$

где

$$\lambda_s \in \sigma(B), \quad s = 1, \ldots, m, \qquad \mu_r \in \sigma(A), \quad r = 1, \ldots, n.$$

Тогда для любой матрицы Y существует единственное решение уравнения (4), *причем*

$$H = \frac{1}{(2\pi i)^2} \int\limits_{\gamma_A} \int\limits_{\gamma_B} \frac{1}{P(\lambda, \mu)} (\lambda I - B)^{-1} Y (\mu I - A)^{-1} d\lambda\, d\mu.$$

Различные условия принадлежности матричного спектра ограниченным областям, которые формулируются в терминах разрешимости матричных уравнений вида (4), можно найти в работах [1–5].

В настоящей работе мы будем рассматривать два матричных уравнения из класса уравнений (1), возникающих при изучении локализации матричного спектра в комплексной плоскости относительно эллипса и параболы. Для этих уравнений известны критерии разрешимости (см. [3, 5]). Наша цель – рассмотрение этих уравнений при наличии возмущений матричных элементов, получение условий на возмущения элементов, при которых локализация матричного спектра не меняется, исследование разрешимости этих уравнений при внесении возмущений матричных элементов.

2. Задача о локализации матричного спектра относительно эллипса

В этом разделе мы будем рассматривать некоторые спектральные задачи, связанные с локализацией матричного спектра относительно эллипса в комплексной плоскости

$$\left\{\lambda \in \mathbb{C}: \frac{(\operatorname{Re}\lambda)^2}{a^2} + \frac{(\operatorname{Im}\lambda)^2}{b^2} = 1\right\}, \quad a > b.$$

Из работ [3, 5, 6] вытекает следующая

Теорема 4. *Спектр матрицы A принадлежит области*

$$\mathcal{E}_i = \left\{\lambda : \frac{(\operatorname{Re}\lambda)^2}{a^2} + \frac{(\operatorname{Im}\lambda)^2}{b^2} < 1\right\}, \quad a > b,$$

тогда и только тогда, когда существует эрмитово положительно определенное решение $H = H^* > 0$ матричного уравнения

$$H - \left(\frac{1}{2a^2} + \frac{1}{2b^2}\right) A^*HA - \left(\frac{1}{4a^2} - \frac{1}{4b^2}\right)(HA^2 + (A^*)^2H) = C, \tag{5}$$

где $C = C^* > 0$.

Изучение некоторых задач, связанных с уравнением (5), проводилось в работах [6, 7]. Уравнение (5) имеет вид (4), при этом

$$N = 2, \quad n = m, \quad B = A^*, \quad Y = C,$$
$$a_{00} = 1, \quad a_{01} = a_{10} = a_{12} = a_{21} = a_{22} = 0,$$
$$a_{11} = -\left(\frac{1}{2a^2} + \frac{1}{2b^2}\right), \quad a_{02} = a_{20} = -\left(\frac{1}{4a^2} - \frac{1}{4b^2}\right).$$

Рассмотрим задачу о принадлежности матричного спектра множеству, лежащему вне замыкания области, ограниченной эллипсом, т. е. о принадлежности множеству

$$\mathcal{E}_e = \left\{\lambda : \frac{(\operatorname{Re}\lambda)^2}{a^2} + \frac{(\operatorname{Im}\lambda)^2}{b^2} > 1\right\}, \quad a > b.$$

По аналогии с задачей о принадлежности матричного спектра области $\mathcal{E}_i$ рассмотрим матричное уравнение вида (5) с измененной правой частью

$$H - \left(\frac{1}{2a^2} + \frac{1}{2b^2}\right) A^*HA - \left(\frac{1}{4a^2} - \frac{1}{4b^2}\right)(HA^2 + (A^*)^2H) = -C. \tag{6}$$

Приведем аналог теоремы 4.

Теорема 5. *Пусть $C = C^* > 0$. Спектр матрицы A принадлежит области $\mathcal{E}_e$ тогда и только тогда, когда существует эрмитово положительно определенное решение $H = H^* > 0$ уравнения (6).*

Доказательство. Предположим, что все собственные значения λ_s матрицы A принадлежат области $\mathcal{E}_e$. Тогда все собственные $\mu_r = \bar{\lambda}_r$ матрицы A^* также принадлежат области $\mathcal{E}_e$. Для доказательства однозначной разрешимости уравнения (6) при любой матрице C достаточно проверить, что условие теоремы Крейна

$$P(\lambda_s, \mu_r) \neq 0$$

выполнено.

Для уравнения (6), очевидно, имеем

$$\begin{aligned} P(\lambda_s, \mu_r) &= 1 - \left(\frac{1}{2a^2} + \frac{1}{2b^2}\right) \lambda_s \mu_r - \left(\frac{1}{4a^2} - \frac{1}{4b^2}\right) (\mu_r^2 + \lambda_s^2) \\ &= 1 - \left(\frac{1}{2a^2} + \frac{1}{2b^2}\right) \overline{\mu}_s \mu_r - \left(\frac{1}{4a^2} - \frac{1}{4b^2}\right) (\mu_r^2 + \overline{\mu}_s^2). \end{aligned}$$

Обозначим

$$\mu_k = \alpha_k + i\beta_k.$$

Учитывая, что

$$\frac{\alpha_k^2}{a^2} + \frac{\beta_k^2}{b^2} > 1,$$

нетрудно показать, что условие теоремы Крейна выполнено, и для любой матрицы C уравнение (6) имеет единственное решение, при этом

$$\begin{aligned} H = \frac{1}{(2\pi i)^2} \int\limits_{\gamma_A} \int\limits_{\gamma_{A^*}} & \frac{1}{1 - \left(\frac{1}{2a^2} + \frac{1}{2b^2}\right) \lambda\mu - \left(\frac{1}{4a^2} - \frac{1}{4b^2}\right) (\mu^2 + \lambda^2)} \\ & \circ (\lambda I - A^*)^{-1} C (\mu I - A)^{-1} d\lambda \, d\mu, \end{aligned}$$

где контуры γ_A, ${\gamma_A}^*$ охватывают спектры матриц A и A^* соответственно. При этом если $C = C^* > 0$, то $H = H^* > 0$.

Докажем теорему в обратную сторону. Предположим, что существует собственное значение μ_k матрицы A такое, что

$$\frac{(\operatorname{Re} \mu_k)^2}{a^2} + \frac{(\operatorname{Im} \mu_k)^2}{b^2} \leq 1.$$

Возьмем собственный вектор v_k, соответствующий μ_k, и рассмотрим скалярное произведение $\langle Cv_k, v_k \rangle$. По условию теоремы $\langle Cv_k, v_k \rangle > 0$.

Распишем это скалярное произведение, учитывая, что H – решение матричного уравнения (6). Имеем

$$-\langle Cv_k, v_k\rangle = \langle Hv_k, v_k\rangle - \left(\frac{1}{2a^2} + \frac{1}{2b^2}\right)\langle HA\, v_k, A\, v_k\rangle \\ - \left(\frac{1}{4a^2} - \frac{1}{4b^2}\right)\left(\langle HA^2\, v_k, v_k\rangle + \langle H\, v_k, A^2 v_k\rangle\right).$$

Тогда, учитывая, что $Av_k = \mu_k v_k$, получаем

$$-\langle Cv_k, v_k\rangle = \langle Hv_k, v_k\rangle - \left(\frac{1}{2a^2} + \frac{1}{2b^2}\right)\overline{\mu}_k\mu_k\langle Hv_k, v_k\rangle - \left(\frac{1}{4a^2} - \frac{1}{4b^2}\right)(\mu_k^2 + \overline{\mu}_k^2)\langle Hv_k, v_k\rangle.$$

Поскольку

$$\overline{\mu}_k\mu_k = (\operatorname{Re}\mu_k)^2 + (\operatorname{Im}\mu_k)^2,$$
$$\mu_k^2 + \overline{\mu}_k^2 = 2(\operatorname{Re}\mu_k)^2 - 2(\operatorname{Im}\mu_k)^2,$$

получаем

$$\langle Cv_k, v_k\rangle = -\left(1 - \frac{(\operatorname{Re}\mu_k)^2}{a^2} - \frac{(\operatorname{Im}\mu_k)^2}{b^2}\right)\langle Hv_k, v_k\rangle.$$

Отсюда, так как $\langle Hv_k, v_k\rangle > 0$, то в силу нашего предположения

$$\langle Cv_k, v_k\rangle \le 0.$$

Но по условию $C > 0$ – противоречие. Следовательно, спектр матрицы A принадлежит области $\mathcal{E}_e$. □

Приведем теперь две теоремы о возмущении матричного спектра.

Теорема 6. *Пусть спектр матрицы A принадлежит области $\mathcal{E}_i$ и $H = H^* > 0$ – решение уравнения (5) при $C = I$. Если матрица B такая, что*

$$\left(\frac{1}{2a^2} + \frac{1}{2b^2}\right)(B^*HA + A^*HB + B^*HB) \\ + \left(\frac{1}{4a^2} - \frac{1}{4b^2}\right)\left(H(AB + BA + B^2) + (AB + BA + B^2)^*H\right) < I, \quad (7)$$

то спектр возмущенной матрицы $A + B$ также принадлежит области $\mathcal{E}_i$.

Доказательство. Пусть λ_j – собственное значение матрицы $A+B$ и v_j – соответствующий собственный вектор, т. е. $(A+B)v_j = \lambda_j v_j$. Рассмотрим скалярное произведение

$$J_j = \left\langle \left[H - \left(\frac{1}{2a^2} + \frac{1}{2b^2} \right) (A+B)^* H (A+B) \right] v_j, v_j \right\rangle \\ - \left\langle \left(\frac{1}{4a^2} - \frac{1}{4b^2} \right) (H(A+B)^2 + ((A+B)^*)^2 H) v_j, v_j \right\rangle .$$

Перепишем его в следующем виде:

$$J_j = \left\langle \left[H - \left(\frac{1}{2a^2} + \frac{1}{2b^2} \right) A^* H A - \left(\frac{1}{4a^2} - \frac{1}{4b^2} \right) (HA^2 + (A^*)^2 H) \right] v_j, v_j \right\rangle \\ - \left\langle \left[\left(\frac{1}{2a^2} + \frac{1}{2b^2} \right) (B^* H A + A^* H B + B^* H B) \right] v_j, v_j \right\rangle \\ - \left\langle \left[\left(\frac{1}{4a^2} - \frac{1}{4b^2} \right) \Big(H(AB + BA + B^2) + (AB + BA + B^2)^* H \Big) \right] v_j, v_j \right\rangle .$$

Поскольку H – решение уравнения (5) при $C = I$, получаем

$$J_j = \left\langle \left[I - \left(\frac{1}{2a^2} + \frac{1}{2b^2} \right) (B^* H A + A^* H B + B^* H B) \right] v_j, v_j \right\rangle \\ - \left\langle \left[\left(\frac{1}{4a^2} - \frac{1}{4b^2} \right) \Big(H(AB + BA + B^2) + (AB + BA + B^2)^* H \Big) \right] v_j, v_j \right\rangle .$$

В силу условия (7) $J_j > 0$. С другой стороны,

$$J_j = \langle H v_j, v_j \rangle - \left(\frac{1}{2a^2} + \frac{1}{2b^2} \right) \langle H (A+B)\, v_j, (A+B)\, v_j \rangle \\ - \left(\frac{1}{4a^2} - \frac{1}{4b^2} \right) \left(\left\langle H (A+B)^2\, v_j, v_j \right\rangle + \left\langle H\, v_j, (A+B)^2 v_j \right\rangle \right) .$$

Тогда, учитывая, что $(A+B)v_j = \lambda_j v_j$, имеем

$$J_j = \langle H v_j, v_j \rangle - \left(\frac{1}{2a^2} + \frac{1}{2b^2} \right) \overline{\lambda}_j \lambda_j \langle H v_j, v_j \rangle - \left(\frac{1}{4a^2} - \frac{1}{4b^2} \right) (\lambda_j^2 + \overline{\lambda}_j^2) \langle H v_j, v_j \rangle$$

или

$$J_j = \left(1 - \frac{(\operatorname{Re} \lambda_j)^2}{a^2} - \frac{(\operatorname{Im} \lambda_j)^2}{b^2} \right) \langle H v_j, v_j \rangle.$$

Поскольку $H > 0$, $J_j > 0$, то

$$1 - \frac{(\operatorname{Re} \lambda_j)^2}{a^2} - \frac{(\operatorname{Im} \lambda_j)^2}{b^2} > 0.$$

Следовательно, в силу произвольности собственного значения λ_j получаем, что спектр матрицы $A + B$ принадлежит области $\mathcal{E}_i$. $\square$

Следствие 7. *Пусть спектр матрицы A принадлежит области $\mathcal{E}_i$ и $H = H^* > 0$ – решение уравнения (5) при $C = I$. Если матрица B такая, что*

$$\|B\| < \sqrt{\|A\|^2 + \frac{b^2}{\|H\|}} - \|A\|, \tag{8}$$

то спектр возмущенной матрицы $A + B$ также принадлежит области $\mathcal{E}_i$.

Доказательство. Для произвольного вектора $v \in C^n$, $\|v\| = 1$, рассмотрим скалярное произведение

$$J(v) = \left\langle \left[\left(\frac{1}{2a^2} + \frac{1}{2b^2} \right) (B^*HA + A^*HB + B^*HB) \right] v, v \right\rangle + \left\langle \left[\left(\frac{1}{4a^2} - \frac{1}{4b^2} \right) \big(H(AB + BA + B^2) + (AB + BA + B^2)^* H \big) \right] v, v \right\rangle .$$

Очевидно, при $a \geq b$ имеем

$$J(v) \leq \frac{\|H\|}{b^2} \left(2\|B\|\|A\| + \|B\|^2 \right) \|v\|^2.$$

Отсюда

$$J(v) \leq \frac{\|H\|}{b^2} \left(2\|B\|\|A\| + \|B\|^2 - \frac{b^2}{\|H\|} \right) \|v\|^2 + \|v\|^2.$$

Поскольку функция

$$\varphi(t) = t^2 + 2\|A\|t - \frac{b^2}{\|H\|}$$

является строго отрицательной при

$$-\sqrt{\|A\|^2 + \frac{b^2}{\|H\|}} - \|A\| < t < \sqrt{\|A\|^2 + \frac{b^2}{\|H\|}} - \|A\|,$$

при выполнении условия (8) для любого ненулевого вектора v получаем

$$J(v) < \|v\|^2 = \langle Iv, v \rangle.$$

Следовательно,

$$\left(\frac{1}{2a^2} + \frac{1}{2b^2} \right) (B^*HA + A^*HB + B^*HB) + \left(\frac{1}{4a^2} - \frac{1}{4b^2} \right) \big(H(AB + BA + B^2) + (AB + BA + B^2)^* H \big) < I,$$

поэтому в силу теоремы 6 спектр матрицы $A + B$ принадлежит области $\mathcal{E}_i$. $\square$

Из сказанного выше вытекает

Следствие 8. *Пусть спектр матрицы A принадлежит области $\mathcal{E}_i$ и $H = H^* > 0$ – решение уравнения (5) при $C = I$. Если матрица B такая, что выполнено условие (8), то матричное уравнение*

$$H - \left(\frac{1}{2a^2} + \frac{1}{2b^2}\right)(A+B)^* H (A+B) - \left(\frac{1}{4a^2} - \frac{1}{4b^2}\right)\left(H(A+B)^2 + (A^*+B^*)^2 H\right) = C$$

однозначно разрешимо при любой правой части C.

Теорема 9. *Пусть спектр матрицы A принадлежит области $\mathcal{E}_e$ и $H = H^* > 0$ – решение уравнения (6) при $C = I$. Если матрица B такая, что*

$$\begin{aligned} -I < \left(\frac{1}{2a^2} + \frac{1}{2b^2}\right)&(B^*HA + A^*HB + B^*HB) \\ &+ \left(\frac{1}{4a^2} - \frac{1}{4b^2}\right)\big(H(AB+BA+B^2) + (AB+BA+B^2)^* H\big), \end{aligned} \tag{9}$$

то спектр возмущенной матрицы $A+B$ также принадлежит области $\mathcal{E}_e$.

Доказательство. Проведем рассуждения по схеме доказательства теоремы 6.

Пусть λ_j – собственное значение матрицы $A+B$ и v_j – соответствующий собственный вектор. Рассмотрим скалярное произведение

$$\begin{aligned} J_j = \left\langle \left[H - \left(\frac{1}{2a^2} + \frac{1}{2b^2}\right)(A+B)^* H (A+B) \right] v_j, v_j \right\rangle& \\ - \left\langle \left(\frac{1}{4a^2} - \frac{1}{4b^2}\right)\left(H(A+B)^2 + ((A+B)^*)^2 H\right) v_j, v_j \right\rangle&. \end{aligned}$$

Поскольку H – решение уравнения (6) при $C = I$, то по аналогии с предыдущим его можно переписать в следующем виде:

$$\begin{aligned} J_j = \left\langle \left[-I - \left(\frac{1}{2a^2} + \frac{1}{2b^2}\right)(B^*HA + A^*HB + B^*HB) \right] v_j, v_j \right\rangle& \\ - \left\langle \left[\left(\frac{1}{4a^2} - \frac{1}{4b^2}\right)\big(H(AB+BA+B^2) + (AB+BA+B^2)^* H\big) \right] v_j, v_j \right\rangle&. \end{aligned}$$

В силу условия (9) $J_j < 0$. С другой стороны,

$$\begin{aligned} J_j = \langle Hv_j, v_j\rangle - \left(\frac{1}{2a^2} + \frac{1}{2b^2}\right)\langle H(A+B)\, v_j, (A+B)\, v_j\rangle& \\ - \left(\frac{1}{4a^2} - \frac{1}{4b^2}\right)\big(\big\langle H(A+B)^2\, v_j, v_j\big\rangle + \big\langle H\, v_j, (A+B)^2 v_j\big\rangle\big)& \end{aligned}$$

имеет вид

$$J_j = \left(1 - \frac{(\operatorname{Re}\lambda_j)^2}{a^2} - \frac{(\operatorname{Im}\lambda_j)^2}{b^2}\right)\langle Hv_j, v_j\rangle.$$

Так как $H > 0$, $J_j < 0$, то

$$1 - \frac{(\operatorname{Re}\lambda_j)^2}{a^2} - \frac{(\operatorname{Im}\lambda_j)^2}{b^2} < 0.$$

Следовательно, в силу произвольности собственного значения λ_j спектр матрицы $A + B$ принадлежит области $\mathcal{E}_e$. $\square$

Следствие 10. *Пусть спектр матрицы A принадлежит области $\mathcal{E}_e$ и $H = H^* > 0$ – решение уравнения (6) при $C = I$. Если матрица B такая, что*

$$\|B\| < 2a^2(a^2 - b^2)^{-1}\left(\sqrt{\|A\|^2 + \left(\frac{a^2 - b^2}{2a^2}\right)\frac{b^2}{\|H\|}} - \|A\|\right), \tag{10}$$

то спектр возмущенной матрицы $A + B$ также принадлежит области $\mathcal{E}_e$.

Доказательство. Для произвольного вектора $v \in C^n$, $\|v\| = 1$, рассмотрим скалярное произведение

$$J(v) = -\left\langle \left[\left(\frac{1}{2a^2} + \frac{1}{2b^2}\right)(B^*HA + A^*HB + B^*HB)\right]v, v\right\rangle$$
$$- \left\langle \left[\left(\frac{1}{4a^2} - \frac{1}{4b^2}\right)\big(H(AB + BA + B^2) + (AB + BA + B^2)^*H\big)\right]v, v\right\rangle.$$

Очевидно, при $a \geq b$ имеем

$$J(v) \leq \frac{\|H\|}{b^2}\left(2\|B\|\|A\| + \left(\frac{a^2 - b^2}{2a^2}\right)\|B\|^2\right)\|v\|^2.$$

Отсюда

$$J(v) \leq \frac{\|H\|}{b^2}\left(2\|B\|\|A\| + \left(\frac{a^2 - b^2}{2a^2}\right)\|B\|^2 - \frac{b^2}{\|H\|}\right)\|v\|^2 + \|v\|^2.$$

Поскольку функция

$$\varphi(t) = \left(\frac{a^2 - b^2}{2a^2}\right)t^2 + 2\|A\|t - \frac{b^2}{\|H\|}$$

при

$$0 \leq t < 2a^2(a^2 - b^2)^{-1}\left(\sqrt{\|A\|^2 + \left(\frac{a^2 - b^2}{2a^2}\right)\frac{b^2}{\|H\|}} - \|A\|\right)$$

является строго отрицательной, то при выполнении условия (10) для любого ненулевого вектора v получаем

$$J(v) < \|v\|^2 = \langle Iv, v\rangle.$$

Следовательно,

$$-\left(\frac{1}{2a^2}+\frac{1}{2b^2}\right)(B^*HA+A^*HB+B^*HB)$$
$$-\left(\frac{1}{4a^2}-\frac{1}{4b^2}\right)\big(H(AB+BA+B^2)+(AB+BA+B^2)^*H\big)<I,$$

поэтому в силу теоремы спектр матрицы $A+B$ принадлежит области $\mathcal{E}_e$. □

Из сказанного выше вытекает

Следствие 11. *Пусть спектр матрицы A принадлежит области $\mathcal{E}_e$ и $H=H^*>0$ – решение уравнения (6) при $C=I$. Если матрица B такая, что выполнено условие (10), то матричное уравнение*

$$H-\left(\frac{1}{2a^2}+\frac{1}{2b^2}\right)(A+B)^*H(A+B)-\left(\frac{1}{4a^2}-\frac{1}{4b^2}\right)(H(A+B)^2+(A^*+B^*)^2H)=C$$

однозначно разрешимо при любой правой части C.

3. Задача о локализации матричного спектра относительно параболы

В этом разделе мы будем рассматривать некоторые спектральные задачи, связанные с локализацией матричного спектра относительно параболы в комплексной плоскости

$$\left\{\lambda\in\mathbb{C}:\ (\operatorname{Im}\lambda)^2=2p\operatorname{Re}\lambda\right\},\quad p>0.$$

Из работ [3, 5] вытекает следующая

Теорема 12. *Спектр матрицы A принадлежит области*

$$\mathcal{P}_i=\left\{\lambda:\ (\operatorname{Im}\lambda)^2<2p\operatorname{Re}\lambda\right\},\quad p>0,$$

тогда и только тогда, когда при $C=C^*>0$ матричное уравнение

$$HA+A^*H-\frac{1}{2p}A^*HA+\frac{1}{4p}(HA^2+(A^*)^2H)=C \tag{11}$$

имеет эрмитово положительно определенное решение $H=H^*>0$.

Отметим, что уравнение (11) имеет вид (4), при этом

$$N = 2, \quad n = m, \quad B = A^*, \quad Y = C,$$
$$a_{00} = a_{12} = a_{21} = a_{22} = 0, \quad a_{01} = a_{10} = 1,$$
$$a_{11} = -\frac{1}{2p}, \quad a_{02} = a_{20} = \frac{1}{4p}.$$

Рассмотрим задачу о принадлежности матричного спектра множеству, лежащему вне области, ограниченной параболой $\{\lambda : \ (\mathrm{Im}\,\lambda)^2 = 2p\mathrm{Re}\,\lambda\}$, $p > 0$, т.е. о принадлежности множеству

$$\mathcal{P}_e = \left\{\lambda : \ (\mathrm{Im}\,\lambda)^2 > 2p\mathrm{Re}\,\lambda\right\}.$$

По аналогии с задачей о принадлежности матричного спектра области $\mathcal{P}_i$ рассмотрим матричное уравнение вида (11) с измененной правой частью

$$HA + A^*H - \frac{1}{2p}A^*HA + \frac{1}{4p}(HA^2 + (A^*)^2H) = -C. \tag{12}$$

В [5,8] доказана следующая

Теорема 13. *Пусть $C = C^* > 0$ и предположим, что существует эрмитово положительно определенное решение $H = H^* > 0$ уравнения (12). Тогда спектр матрицы A принадлежит области $\mathcal{P}_e$.*

Отметим, что можно проверить выполнимость условия из теоремы 3

$$P(\lambda_s, \mu_r) \neq 0,$$

если спектр матрицы A лежит вне замыкания области $\mathcal{P}_i$, и показать разрешимость уравнения (12) для любой матрицы C. При этом если $C = C^* > 0$, то $H = H^* > 0$, т. е. можно сформулировать критерий принадлежности матричного спектра области, лежащей вне замыкания $\mathcal{P}_i$.

По аналогии с предыдущим разделом мы приведем две теоремы о возмущении матричного спектра.

Теорема 14. *Пусть спектр матрицы A принадлежит области $\mathcal{P}_i$ и $H = H^* > 0$ – решение уравнения (11) при $C = I$. Если матрица B такая, что*

$$HB + B^*H - \frac{1}{2p}(A^*HB + B^*HA + B^*HB) + \frac{1}{4p}(H(AB + BA + B^2) + (AB + BA + B^2)^*H) > -I, \tag{13}$$

то спектр возмущенной матрицы $A + B$ также принадлежит области $\mathcal{P}_i$.

Доказательство. Пусть λ_j – собственное значение матрицы $A+B$ и v_j – соответствующий собственный вектор, т. е.

$$(A+B)v_j = \lambda_j v_j.$$

Рассмотрим скалярное произведение

$$J_j = \langle H(A+B)v_j, v_j\rangle + \langle (A+B)^* H v_j, v_j\rangle - \left\langle \frac{1}{2p}(A+B)^* H(A+B)v_j, v_j \right\rangle + \left\langle \left(\frac{1}{4p}(H(A+B)^2 + ((A+B)^*)^2 H)\right) v_j, v_j \right\rangle.$$

Поскольку H – решение уравнения (11), получаем

$$J_j = \langle (I + HB + B^* H)v_j, v_j\rangle - \left\langle \left(\frac{1}{2p}(A^* HB + B^* HA + B^* HB)\right) v_j, v_j \right\rangle + \left\langle \left(\frac{1}{4p}(H(AB + BA + B^2) + (AB + BA + B^2)^* H)\right) v_j, v_j \right\rangle.$$

В силу условия (13) $J_j > 0$. С другой стороны,

$$J_j = \langle H(A+B)v_j, v_j\rangle + \langle Hv_j, (A+B)v_j\rangle - \left\langle \frac{1}{2p} H(A+B)v_j, (A+B)v_j \right\rangle + \frac{1}{4p}(\langle H(A+B)^2 v_j, v_j\rangle + \langle Hv_j, (A+B)^2 v_j\rangle).$$

Тогда, учитывая, что $(A+B)v_j = \lambda_j v_j$, получаем

$$J_j = (\lambda_j + \bar{\lambda}_j)\langle Hv_j, v_j\rangle - \frac{1}{2p}\lambda_j \overline{\lambda}_j \langle Hv_j, v_j\rangle + \frac{1}{4p}(\lambda_j^2 + \overline{\lambda}_j^2)\langle Hv_j, v_j\rangle$$

или

$$J_j = \left(2\mathrm{Re}\,\lambda_j - \frac{1}{p}(\mathrm{Im}\,\lambda_j)^2\right)\langle Hv_j, v_j\rangle.$$

Так как $H > 0$, $J_j > 0$, то

$$2\mathrm{Re}\,\lambda_j - \frac{1}{p}(\mathrm{Im}\,\lambda_j)^2 > 0.$$

Следовательно, в силу произвольности собственного значения λ_j получаем, что спектр матрицы $A+B$ принадлежит области $\mathcal{P}_i$. □

Следствие 15. *Пусть спектр матрицы A принадлежит области $\mathcal{P}_i$ и $H = H^* > 0$ – решение уравнения (11) при $C = I$. Если матрица B такая, что выполнено условие (13),* *то матричное уравнение*

$$H(A+B)+(A+B)^*H-\frac{1}{2p}(A+B)^*H(A+B)\\ +\frac{1}{4p}(H(A+B)^2+(A^*+B^*)^2H)=C \quad (14)$$

однозначно разрешимо при любой правой части C.

Теорема 16. *Пусть спектр матрицы A принадлежит области $\mathcal{P}_e$ и $H=H^*>0$ – решение уравнения (12) при $C=I$. Если матрица B такая, что*

$$HB+B^*H-\frac{1}{2p}(A^*HB+B^*HA+B^*HB)\\ +\frac{1}{4p}(H(AB+BA+B^2)+(AB+BA+B^2)^*H)<I, \quad (15)$$

то спектр возмущенной матрицы $A+B$ также принадлежит области $\mathcal{P}_e$.

Доказательство. Пусть λ_j – собственное значение матрицы $A+B$ и v_j – соответствующий собственный вектор. Рассмотрим скалярное произведение

$$J_j=\langle H(A+B)v_j,v_j\rangle+\langle (A+B)^*Hv_j,v_j\rangle-\left\langle\frac{1}{2p}(A+B)^*H(A+B)v_j,v_j\right\rangle\\ +\left\langle\left(\frac{1}{4p}(H(A+B)^2+((A+B)^*)^2H)\right)v_j,v_j\right\rangle.$$

Поскольку H – решение уравнения (12) при $C=I$, получаем

$$J_j=\langle(-I+HB+B^*H)v_j,v_j\rangle-\left\langle\left(\frac{1}{2p}(A^*HB+B^*HA+B^*HB)\right)v_j,v_j\right\rangle\\ +\left\langle\left(\frac{1}{4p}(H(AB+BA+B^2)+(AB+BA+B^2)^*H)\right)v_j,v_j\right\rangle.$$

В силу условия (15) $J_j<0$. С другой стороны,

$$J_j=\langle H(A+B)v_j,v_j\rangle+\langle Hv_j,(A+B)v_j\rangle-\frac{1}{2p}\langle H(A+B)v_j,(A+B)v_j\rangle\\ +\frac{1}{4p}(\langle H(A+B)^2v_j,v_j\rangle+\langle Hv_j,(A+B)^2v_j\rangle).$$

Тогда, учитывая, что $(A+B)v_j=\lambda_jv_j$, имеем

$$J_j=(\lambda_j+\bar{\lambda}_j)\langle Hv_j,v_j\rangle-\frac{1}{2p}\lambda_j\overline{\lambda}_j\langle Hv_j,v_j\rangle+\frac{1}{4p}(\lambda_j^2+\overline{\lambda}_j^2)\langle Hv_j,v_j\rangle$$

или

$$J_j = \left(2\mathrm{Re}\,\lambda_j - \frac{1}{p}(\mathrm{Im}\,\lambda_j)^2\right)\langle Hv_j, v_j\rangle.$$

Так как $H > 0$, $J_j < 0$, то

$$2\mathrm{Re}\,\lambda_j - \frac{1}{p}(\mathrm{Im}\,\lambda_j)^2 < 0.$$

Следовательно, в силу произвольности собственного значения λ_j получаем, что спектр матрицы $A + B$ принадлежит области $\mathcal{P}_e$. □

Следствие 17. *Пусть спектр матрицы A принадлежит области $\mathcal{P}_e$ и $H = H^* > 0$ – решение уравнения* (12) *при $C = I$. Если матрица B такая, что выполнено условие* (15), *то матричное уравнение* (14) *однозначно разрешимо при любой правой части C.*

Некоторые результаты о локализации матричного спектра см. также в [9–12].

Список литературы

[1] Ю.Л. Далецкий, М.Г. Крейн, *Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве*, Наука, М., 1970.

[2] С.К. Годунов, *Современные аспекты линейной алгебры*, Научн. кн., Новосибирск, 1997.

[3] А.Г. Мазко, *Локализация спектра и устойчивость динамических систем*, Тр. Ин-та матем. НАН Украины, Т. 28, Ин-т матем. НАН Украины, Киев, 1999.

[4] А.Я. Булгаков, Г.В. Демиденко, *Новый критерий принадлежности матричного спектра замкнутому единичному кругу и приложения в теории устойчивости*, Сиб. журн. индустр. матем. **3** (1), 47–56 (2000).
URL: https://www.mathnet.ru/rus/sjim84

[5] Г.В. Демиденко, *Матричные уравнения. Учебное пособие*, НГУ, Новосибирск, 2009.

[6] G. Demidenko, *On a functional approach to spectral problems of linear algebra*, Selcuk J. Appl. Math. **2** (2), 39–52 (2001).

[7] A. Bulgak, G. Demidenko, I. Matveeva, *On location of the matrix spectrum inside an ellipse*, Selcuk J. Appl. Math. **4** (1), 25–41 (2003).

[8] Г.В. Демиденко, В.С. Прохоров, *О расположении матричного спектра относительно параболы*, Матем. тр. **26** (1), 26–40 (2023).
DOI: https://doi.org/10.33048/mattrudy.2023.26.102

[9] M. Sadkane, A. Touhami, *On modifications to the spectral dichotomy algorithm*, Numer. Funct. Anal. Optim. **34** (7), 791–817 (2013).
DOI: https://doi.org/10.1080/01630563.2012.721152

[10] Э.А. Бибердорф, М.А. Блинова, Н.И. Попова, *Модификации метода дихотомии матричного спектра и их применение к задачам устойчивости*, Сиб. журн. вычисл. матем. **21** (2), 139–154 (2018).
DOI: http://doi.org/10.15372/SJNM20180202

[11] E.A. Biberdorf, *Development of the matrix spectrum dichotomy method*, in: Continuum Mechanics, Applied Mathematics and Scientific Computing: Godunov's Legacy – A Liber Amicorum to Professor Godunov (eds.: G.V. Demidenko, E. Romenski, E. Toro, M. Dumbser), Springer Nature, Cham, Switzerland, 37–43 (2020).
DOI: https://doi.org/10.1007/978-3-030-38870-6_6

[12] S. Traore, M. Dosso, *Spectral dichotomy methods of a matrix with respect to the general equation of the parabola*, European J. Pure Appl. Math. **15** (2), 681–725 (2022).
DOI: https://doi.org/10.29020/nybg.ejpam.v15i2.4348

Геннадий Владимирович Демиденко
Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН,
пр. Акад. Коптюга, д. 4, г. Новосибирск, 630090, Россия,
Новосибирский Государственный Университет,
ул. Пирогова, д. 1, г. Новосибирск, 630090, Россия,
e-mail: demidenk@math.nsc.ru

Ван Цзуншунь
Новосибирский Государственный Университет,
ул. Пирогова, д. 1, г. Новосибирск, 630090, Россия,
e-mail: hl7rbu@163.com

Volume 1, Issue 4 UDC 512.643.4
pp. 49–66 (2023) MSC 15A24

Localization of the matrix spectrum and Lyapunov type equations

G.V. Demidenko, Z. Wang

Abstract. The problems on the location of the matrix spectrum inside or outside domains bounded by ellipses or parabolas are studied. Special Lyapunov-type equations are connected with these problems. Theorems about the unique solvability of such equations are proved. Conditions for perturbations of matrix entries are obtained, which guarantee that the spectra of the perturbed matrices belong to the specified domains as well.

Keywords: Lyapunov-type matrix equations, Krein's theorem, localization of the matrix spectrum, problems on spectral perturbations.

References

[1] Ju.L. Daleckii, M.G. Krein, *Stability of solutions of differential equations in Banach space*, AMS, Providence, 1974.

[2] S.K. Godunov, *Modern aspects of linear algebra*, Nauchn. kn., Novosibirsk, 1997 [in Russian].

[3] A.G. Mazko, *Localization of the spectrum and stability of dynamical systems*, Trudy Instituta matematiki NAN Ukrainy, V. 28, Institute of Mathematics of the NAS of Ukraine, Kiev, 1999 [in Russian].

[4] A.Ya. Bulgakov, G.V. Demidenko, *A new criterion for a matrix spectrum to belong to the closed unit disk and applications to stability theory*, Sib. Zh. Ind. Mat. **3** (1), 47–56 (2000) [in Russian].
URL: https://www.mathnet.ru/rus/sjim84

[5] G.V. Demidenko, *Matrix equations. Textbook*, NSU, Novosibirsk, 2009 [in Russian].

[6] G. Demidenko, *On a functional approach to spectral problems of linear algebra*, Selcuk J. Appl. Math. **2** (2), 39–52 (2001).

[7] A. Bulgak, G. Demidenko, I. Matveeva, *On location of the matrix spectrum inside an ellipse*, Selcuk J. Appl. Math. **4** (1), 25–41 (2003).

Acknowledgements. The study was carried out within the framework of the state contract of the Sobolev Institute of Mathematics (project no. FWNF-2022-0008).

Received: 16 October 2023. Accepted: 28 November 2023. Published: 26 December 2023.

[8] G.V. Demidenko, V.S. Prokhorov, *On location of the matrix spectrum with respect to a parabola*, Sib. Adv. Math. **33** (3), 190–199 (2023).
DOI: https://doi.org/10.1134/S1055134423030033

[9] M. Sadkane, A. Touhami, *On modifications to the spectral dichotomy algorithm*, Numer. Funct. Anal. Optim. **34** (7), 791–817 (2013).
DOI: https://doi.org/10.1080/01630563.2012.721152

[10] E.A. Biberdorf, M.A. Blinova, N.I. Popova, *Modifications of the dichotomy method of a matrix spectrum and their application to stability tasks*, Num. Anal. Appl. **11** (2), 108–120 (2018).
DOI: https://doi.org/10.1134/S1995423918020027

[11] E.A. Biberdorf, *Development of the matrix spectrum dichotomy method*, in: Continuum Mechanics, Applied Mathematics and Scientific Computing: Godunov's Legacy – A Liber Amicorum to Professor Godunov (eds.: G.V. Demidenko, E. Romenski, E. Toro, M. Dumbser), Springer Nature, Cham, Switzerland, 37–43 (2020).
DOI: https://doi.org/10.1007/978-3-030-38870-6_6

[12] S. Traore, M. Dosso, *Spectral dichotomy methods of a matrix with respect to the general equation of the parabola*, European J. Pure Appl. Math. **15** (2), 681–725 (2022).
DOI: https://doi.org/10.29020/nybg.ejpam.v15i2.4348

Gennadii Vladimirovich Demidenko
Sobolev Institute of Mathematics,
4 Acad. Koptyug Ave., Novosibirsk 630090, Russia,
Novosibirsk State University,
1 Pirogov str., Novosibirsk 630090, Russia,
e-mail: demidenk@math.nsc.ru

Wang Zongshun
Novosibirsk State University,
1 Pirogov str., Novosibirsk 630090, Russia,
e-mail: hl7rbu@163.com