Том 1, Выпуск 4
Стр. 67–80 (2023)

УДК 510.54, 510.57
MSC 03D45, 03D25

Степени селекторных функций и относительная вычислимая категоричность

И.Ш. Калимуллин

Аннотация. Изучаются тьюринговые степени селекторных функций, образующие классы степеней, в которых жесткая вычислимая структура оказывается относительно вычислимо категоричной. Доказывается, что для некоторых структур класс таких степеней может представляться в виде объединения нескольких верхних конусов в.п. степеней. Кроме того, будет установлено, что существуют не-в.п. верхние конусы степеней, реализующиеся классами степеней, в которых вычислимая структура относительно вычислимо категорична.

Ключевые слова: вычислимо перечислимые (в.п.) множества, n-в.п. множества, тьюринговые степени, вычислимые алгебраические структуры, относительнная вычислимая категоричность, селекторные функции.

1. Введение и основные результаты работы

Начнем с определения основного понятия, изучаемого в настоящей работе.

Определение 1. Пусть $\{C_i\}_{i\in\omega}$ – вычислимая последовательность разностей вычислимо перечислимых (в.п.) множеств, $C_i = A_i \setminus B_i$. *Селекторной* функцией для $\{C_i\}_{i\in\omega}$ называется любая функция f такая, что $f(i) \in C_i$ для всех $i \in \omega$.

Нас прежде всего будет интересовать тьюринговые степени $\mathbf{x}$, для которых будет существовать $\mathbf{x}$-вычислимые селекторные функции заданной последовательности. В качестве мотивирующего примера рассмотрим для данной жесткой вычислимой структуры $\mathcal{A}$ (на универсуме ω) последовательность $\{C_i = A_i \setminus B_i\}_{i\in\omega}$, где A_i и B_i являются следующими в.п. множествами экзистенциальных формул языка структуры $\mathcal{A}$ с одной свободной переменной:

$$A_i = \{\Phi \mid \mathcal{A} \models \Phi(i)\},$$
$$B_i = \{\Phi \mid \mathcal{A} \models (\exists x \neq i)\Phi(x)\}.$$

Предположим, что каждая разность $C_i = A_i \setminus B_i$, $i \in \omega$, представляет собой непустое множество. Тогда существование $\mathbf{x}$-вычислимой селекторной функции для $\{C_i\}_{i\in\omega}$ влечет

Благодарности. Работа поддержана Фондом развития теоретической физики и математики “БАЗИС”.

Поступила: 31.10.2023. Принята: 28.11.2023. Опубликована: 26.12.2023.

относительную $\mathbf{x}$-вычислимую категоричность структуры $\mathcal{A}$, т. е. для каждой изоморфной копии $\mathcal{B} \cong \mathcal{A}$ будет существовать $(\deg(\mathcal{B}) \cup \mathbf{x})$-вычислимый изоморфизм из $\mathcal{B}$ на $\mathcal{A}$. Более того, в силу хорошо известного результата К. Эша, Дж. Найт, М. Манасса, Т. Слэймана [1] и Д. Хислома [2] верно и обратное: если жесткая вычислимая структура $\mathcal{A}$ является относительно $\mathbf{x}$-вычислимо категоричной, то для некоторого конечного константного обогащения $(\mathcal{A}, \vec{a})$ указанная выше последовательность множеств экзистенциальных формул будет иметь $\mathbf{x}$-вычислимую селекторную функцию.

Нетрудно проверить, что на самом деле на степени таких селекторных функций не влияет выбор конкретного набора констант $\vec{a}$. Кроме того, в силу возможной конъюнкции экзистенциальных формул степени таких селекторных функций совпадают со степенями слабых селекторных функций, определенных ниже.

Определение 2. Пусть $\{D_n\}_{n\in\omega}$ – стандартная (каноническая) нумерация конечных подмножеств ω, определенная равенством $n = \sum_{x\in D_n} 2^x$. *Слабой селекторной* функцией для вычислимой последовательности разностей в.п. множеств $\{C_i = A_i \setminus B_i\}_{i\in\omega}$ называется любая селекторная функция для последовательности $\{\widehat{C}_i = \widehat{A}_i \setminus \widehat{B}_i\}_{i\in\omega}$, где

$$\widehat{A}_i = \{n \mid D_n \subseteq A_i\} \ \text{ и } \ \widehat{B}_i = \{n \mid D_n \subseteq B_i\}.$$

Следующая теорема показывает, что степени слабых селекторных функций вычислимых последовательностей разностей в.п. множеств полностью описывают классы степеней, в которых жесткая вычислимая структура оказывается относительно вычислимо категорична.

Теорема 3.

1) *Для каждой жесткой вычислимой структуры $\mathcal{A}$ существует вычислимая последовательность разностей в.п. множеств $\{C_i\}_{i\in\omega}$ такая, что для каждой степени $\mathbf{x}$ структура $\mathcal{A}$ относительно $\mathbf{x}$-вычислимо категорична тогда и только тогда, когда имеется $\mathbf{x}$-вычислимая слабая селекторная функция для $\{C_i\}_{i\in\omega}$.*
2) *Для каждой вычислимой последовательности разностей в.п. множеств $\{C_i\}_{i\in\omega}$ существует жесткая вычислимая структура $\mathcal{A}$ такая, что для каждой степени $\mathbf{x}$ структура $\mathcal{A}$ относительно $\mathbf{x}$-вычислимо категорична тогда и только тогда, когда имеется $\mathbf{x}$-вычислимая слабая селекторная функция для $\{C_i\}_{i\in\omega}$.*

Ясно, что если для каждой вычислимой последовательности непустых разностей в.п. множеств существует $\mathbf{0}'$-вычислимая селекторная функция, в то же время легко построить примеры вычислимой последовательности непустых разностей в.п. множеств, не имеющих даже вычислимых слабых селекторных функций. Возникает вопрос, какие еще тьюринговые оракулы, могут существенно влиять на вычислимость селекторных функций. Следующий результат говорит о том, что 1-генеричные оракулы не обладают этим свойством.

Теорема 4. *Если степень* $\mathbf{x}$ 1*-генерична и имеется* $\mathbf{x}$*-вычислимая (слабая) селекторная функция для некоторой вычислимой последовательности разностей в.п. множеств, то существует вычислимая (слабая) селекторная функция для этой последовательности.*

Следствие 5. *Если жесткая вычислимая структура* $\mathcal{A}$ *относительно* $\mathbf{x}$*-вычислимо категорична для некоторой* 1*-генеричной степени* $\mathbf{x}$*, то* $\mathcal{A}$ *относительно вычислимо категорична.*

В сравнении с теоремой 4 более содержательные примеры вычислимых последовательностей разностей в.п. множеств $\{C_i\}_{i\in\omega}$ с нетривиальными селекторными функциями могут получиться, если мы определим для пары содержащихся друг в друге в.п. множеств $U \subseteq V$ последовательность

$$C_i = \begin{cases} \{0\}, & \text{если } i \notin V; \\ \{0,1\}, & \text{если } i \in V \setminus U; \\ \{1\}, & \text{если } i \in U. \end{cases}$$

То же самое может быть определено через разности $C_i = A_i \setminus B_i$, где

$$A_i = \{0\} \cup \{1 \mid i \in V\},$$
$$B_i = \{0 \mid i \in U\}.$$

Тогда легко видеть, что существование $\mathbf{x}$-вычислимой селекторной функции для $\{C_i\}_{i\in\omega}$ эквивалентно существованию $\mathbf{x}$-вычислимого множества X такого, что $U \subseteq X \subseteq V$. Ясно также, что

$$\{0,1\} \subseteq A_i \implies 1 \in C_i = A_i \setminus B_i,$$

поэтому существование $\mathbf{x}$-вычислимой селекторной функции для $\{C_i\}_{i\in\omega}$, в свою очередь, эквивалентно существованию $\mathbf{x}$-вычислимой слабой селекторной функции для $\{C_i\}_{i\in\omega}$.

В частном случае $U = V$ мы можем немедленно построить вычислимую последовательность разностей в.п. множеств с единственной селекторной функцией, имеющей ту же степень, что и в.п. множество $U = V$. Данный факт может быть существенно усилен, как показывает следующая

Теорема 6. *Для каждой конечной последовательности в.п. степеней* $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_k$ *существует пара в.п. множеств* $U \subseteq V$ *такая, что выполнено* $U \subseteq X \subseteq V$ *для некоторого* $\mathbf{x}$*-вычислимого множества* X *тогда и только тогда, когда*

$$\mathbf{a}_1 \leq \mathbf{x} \text{ или } \mathbf{a}_2 \leq \mathbf{x} \text{ или } \ldots \text{ или } \mathbf{a}_k \leq \mathbf{x}.$$

По теореме 3 мы далее можем закодировать степени множеств X, $U \subseteq X \subseteq V$, в степени, в которых жесткая вычислимая структура относительно вычислимо категорична.

Следствие 7. *Для каждой конечной последовательности в.п. степеней* $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_k$ *существует жесткая вычислимая структура* $\mathcal{A}$ *такая, что* $\mathcal{A}$ *относительно* $\mathbf{x}$*-вычислимо категорична тогда и только тогда, когда*

$$\mathbf{a}_1 \leq \mathbf{x} \text{ или } \mathbf{a}_2 \leq \mathbf{x} \text{ или } \ldots \text{ или } \mathbf{a}_k \leq \mathbf{x}.$$

Теорема 6 дает возможность строить еще более нетривиальные и неравномерные примеры вычислимых последовательностей разностей в.п. множеств, например, можно применить теорему 6 для $\mathbf{a}_1 > \mathbf{a}_2$: тогда условие

$$\mathbf{a}_1 \leq \mathbf{x} \text{ или } \mathbf{a}_2 \leq \mathbf{x}$$

будет эквивалентно $\mathbf{a}_2 \leq \mathbf{x}$, но не равномерным образом. Однако таким способом мы можем получить лишь в.п. степени в качестве минимальных степеней селекторных функций. Следующая теорема позволяет находить в качестве наименьших степеней селекторных функций 2-CEA не-в.п. степени.

Теорема 8. *Пусть* $\mathbf{e}$ *– в.п. степень, а* $\mathbf{e}$*-в.п. множество* $F \in \mathbf{f}$ *таково, что для некоторой* Δ^0_2*-аппроксимации* $F(x) = \lim_s F_s(x)$, $F_s(x) \in \{0,1\}$, *выполнено условие*

$$F_s(x) \neq F_{s+1}(x) \implies F_s(y) = F_t(y) = F(y)$$

для всех $x < y < s < t$. *Тогда существует пара в.п. множеств* $U \subseteq V$ *такая, что выполнено* $U \subseteq X \subseteq V$ *для некоторого* $\mathbf{x}$*-вычислимого множества* X *тогда и только тогда, когда* $\mathbf{e} \cup \mathbf{f} \leq \mathbf{x}$.

Степени $\mathbf{e} \cup \mathbf{f}$, удовлетворяющие условиям теоремы 8, образуют довольно широкий класс 2-CEA степеней. В самом деле, К.Г. Джокуш и Р.А. Шор [3] построили Δ^0_2 2-CEA степень, лежащую вне любого заданного равномерного Δ^0_2 класса. Заметим, что конструкция построения соответствующего множества $F \in \mathbf{f}$ подразумевает использование только одного свидетеля на каждое требование, причем эти требования удовлетворяются методом приоритета с конечными нарушениями. Если свидетель x попадает в F или покидает его на шаге s, то другие ранее назначенные свидетели $y > x$ меньшего приоритета инициализируются на этом шаге так, что будет выполнено $F_s(y) = F_t(y)$ для всех $t > s$. Значит, условие

$$x < y < s < t \; \& \; F_s(x) \neq F_{s+1}(x) \implies F_s(y) = F_t(y) = F(y)$$

из теоремы 8 выполнено. Справедливо

Следствие 9. *Для каждого равномерного* Δ^0_2 *класса степеней* $\mathcal{C}$ *(например,* $\mathcal{C}$ = *классу в.п. степеней,* $\mathcal{C}$ = *классу 2-в.п. степеней, и т. д.) существуют 2-CEA степень* $\mathbf{f} \notin \mathcal{C}$ *и жесткая вычислимая структура* $\mathcal{A}$ *такие, что* $\mathcal{A}$ *относительно* $\mathbf{x}$*-вычислимо категорична тогда и только тогда, когда* $\mathbf{f} \leq \mathbf{x}$.

Если $\mathcal{C}$ есть класс всех в.п. степеней, то рассуждение выше приводит к не-в.п. 2-в.п. степени $\mathbf{f}$. Если же $\mathcal{C}$ есть класс всех 2-в.п. степеней, то по результату М.М. Арсланова, Дж.Л. ЛаФорта и Т.А. Слэймана [4] мы таким способом не можем получить даже ω-в.п. степень $\mathbf{f} \notin \mathcal{C}$. Однако доказательство теоремы 8 позволяет повторно проводить те же рассуждения, двигаясь по n-CEA иерархии. А именно, доказательство теоремы 8 может быть модифицировано для $\mathbf{e} = \mathbf{g}_i$ и $\mathbf{f} = \mathbf{g}_{i+1}$, если

$$\mathbf{g}_1 < \mathbf{g}_2 < \mathbf{g}_3 < \cdots$$

и

$$\mathbf{g}_1 - \text{в.п. степень}, \mathbf{g}_2 - \mathbf{g}_1\text{-в.п. степень}, \mathbf{g}_3 - \mathbf{g}_2\text{-в.п. степень}, \ldots .$$

Нам достаточно только проверить, что каждая степень $\mathbf{g}_i$ содержит подходящее множество $G_i \in \mathbf{g}_i$, обладающее Δ^0_2-аппроксимацией, удовлетворяющей условию из теоремы 8. Следующая теорема может быть доказана именно таким способом. Однако в конце работы будет дано ее прямое доказательство, основывающееся на построении С.Б. Купера ([5], 12.3.7), в котором подходящая аппроксимация нужна лишь для финальной степени $\mathbf{f} = \mathbf{g}_n$.

Теорема 10. *Для каждого $n > 1$ существует n-в.п. степень $\mathbf{f}$, не являющаяся $(n-1)$-в.п., для которой имеется пара в.п. множеств $U \subseteq V$ такая, что выполнено $U \subseteq X \subseteq V$ для некоторого $\mathbf{x}$-вычислимого множества X тогда и только тогда, когда $\mathbf{f} \leq \mathbf{x}$.*

Следствие 11. *Для каждого $n > 1$ существует n-в.п. степень $\mathbf{f}$, не являющаяся $(n-1)$-в.п., для которой имеется жесткая вычислимая структура $\mathcal{A}$ такая, что $\mathcal{A}$ относительно $\mathbf{x}$-вычислимо категорична тогда и только тогда, когда $\mathbf{f} \leq \mathbf{x}$.*

Оставшаяся часть работы посвящена доказательству приведенных выше теорем. В качестве источника терминологии и обозначений мы используем монографию [6].

2. Доказательство теоремы 3

Доказательство п. 1). В силу результатов К. Эша, Дж. Найт, М. Манасса, Т. Слэймана [1] и Д. Хислома [2] жесткая вычислимая структура $\mathcal{A}$ относительно $\mathbf{x}$-вычислимо категорична тогда и только тогда, когда для некоторого конечного набора $\vec{a}$ из $\mathcal{A}$ существует $\mathbf{x}$-вычислимое перечисление экзистенциальных формул над $(\mathcal{A}, \vec{a})$, определяющих по отдельности каждый элемент из $\mathcal{A}$.

Если это условие не верно ни для какого $\mathbf{x}$, то просто зададим последовательность $C_i = \emptyset$, не имеющую селекторных функций.

В противном случае, если для некоторого $\vec{a}$ каждый элемент из $\mathcal{A}$ определяется некоторой экзистенциальной формулой над $(\mathcal{A}, \vec{a})$, то проблема перечисления таких формул не зависит от выбора набора $\vec{a}$ (поскольку все такие наборы экзистенциально определимы между собой). Поэтому для некоторого фиксированного $\vec{a}$ можем задать последовательность множеств экзистенциальных формул $\{C_i = A_i \setminus B_i\}_{i\in\omega}$, где

$$A_i = \{\Phi \mid (\mathcal{A}, \vec{a}) \models \Phi(i)\},$$
$$B_i = \{\Phi \mid (\mathcal{A}, \vec{a}) \models (\exists x \neq i)\Phi(x)\}.$$

$\square$

Доказательство п. 2). Пусть задана вычислимая последовательность разностей в.п. множеств $\{C_i\}_{i\in\omega}$, $C_i = A_i \setminus B_i \neq \emptyset$. Без ограничений общности для удобства можно считать, что $B_i \neq \emptyset$, $B_i \subseteq A_i$, и $A_i \cap A_j = \emptyset$ при $i \neq j$. Если это не выполнено, то мы можем рассмотреть модифицированную последовательность $\{\widetilde{C}_i\}_{i\in\omega}$, $\widetilde{C}_i = \widetilde{A}_i \setminus \widetilde{B}_i$, с такими же степенями селекторных функций:

$$\widetilde{A}_i = \{\langle i, 0\rangle\} \cup \{\langle i, x+1\rangle \mid x \in A_i\},$$
$$\widetilde{B}_i = \{\langle i, 0\rangle\} \cup \{\langle i, x+1\rangle \mid x \in A_i \cap B_i\}.$$

Пусть a и b – инъективные вычислимые функции такие, что $\mathrm{rng}\ a = \cup_{i\in\omega} A_i$ и $\mathrm{rng}\ b = \cup_{i\in\omega} B_i$. Кроме того, пусть h – вычислимая функция такая, что $h(i) \in B_i$ для всех $i \in \omega$.

Зададим вычислимую структуру $\mathcal{A}$ на универсуме ω в языке бесконечного набора унарных функций $e_0, e_1, e_2, \dots$ следующим образом:

$$e_k(n) = \begin{cases} 4i, & \text{если } n = 4j+2 \text{ и } a(j) = k \in A_i; \\ 4i+1, & \text{если } n = 4j+3 \text{ и } b(j) = k \in B_i; \\ n & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Несмотря на бесконечный функциональный язык, структура $\mathcal{A}$ является локально конечной, т. е. конечное число элементов $0, 1, \dots, s$ порождают конечное множество элементов $D_{c(s)}$. В силу вычислимости нашей структуры функция $c(s)$ является вычислимой.

Предположим, что существует $\mathbf{x}$-вычислимая слабая селекторная функция f для $\{C_i\}_{i\in\omega}$, т. е.

$$D_{f(i)} \subseteq A_i \text{ и } D_{f(i)} \not\subseteq B_i \text{ для каждого } i \in \omega.$$

Тогда можем указать $\mathbf{x}$-вычислимый список экзистенциальных формул, определяющих все элементы $\mathcal{A}$:

$$\Phi_{4i}(x) = \mathop{\&}_{k\in D_{f(i)}} (\exists z \neq x)[e_k(z) = x];$$
$$\Phi_{4i+1}(x) = (\exists y \neq x)\Phi_{4i}(y)\ \&\ (\exists z \neq x)[e_{h(i)}(z) = x];$$
$$\Phi_{4i+2}(x) = \Phi_{4i}(e_{a(i)}(x));$$
$$\Phi_{4i+3}(x) = \Phi_{4i+1}(e_{b(i)}(x))$$

(ясно, что у все этих формул имеется эквивалентная экзистенциальная форма). В соответствии с [1,2] структура $\mathcal{A}$ относительно $\mathbf{x}$-вычислимо категорична.

Обратно, предположим, что структура $\mathcal{A}$ относительно $\mathbf{x}$-вычислимо категорична. Тогда по [1,2] для некоторого набора $\vec{a}$ из $\mathcal{A}$ имеется $\mathbf{x}$-вычислимая последовательность $\{\Phi_i(x)\}_{i\in\omega}$ экзистенциальных формул такая, что

$$i = j \iff (\mathcal{A}, \vec{a}) \models \Phi_i(j).$$

Фиксируем такое $s_* \in \omega$, что $\vec{a} \subseteq D_{c(s_*)}$. Тогда для каждого i мы можем $\mathbf{x}$-вычислимо найти $s_i > s_*$, для которого верно $4i \in D_{c(s_i)}$ и

$$(D_{c(s_i)}, e_0, e_1, e_2, \ldots, \vec{a}) \models \Phi_{4i}(4i).$$

Теперь если $4i \notin D_{c(s_*)}$, то $\mathbf{x}$-вычислимая слабая селекторная функция f для $\{C_i\}_{i\in\omega}$ может быть определена в виде

$$D_{f(i)} = \left\{k \mid \left(\exists n \in D_{c(s_i)}\right)[n \neq 4i \ \&\ e_k(n) = 4i]\right\}.$$

Ясно, что $D_{f(i)} \subseteq A_i$. Кроме того, имеем $D_{f(i)} \nsubseteq B_i$, так как в противном случае мы бы получили $(\mathcal{A}, \vec{a}) \models \Phi_{4i}(4i+1)$. Остается подходящим образом доопределить слабую селекторную функцию f для конечного числа тех i, для которых справедливо $4i \in D_{c(s_*)}$. $\square$

3. Доказательство теоремы 4

Если степень $\mathbf{x}$ 1-генерична, то по определению существует такое множество $X \in \mathbf{x}$, что для каждого в.п. множества конечных строк $W \subseteq 2^{<\omega}$ существует строка $\sigma \subset X$, для которой справедливо

$$\sigma \in W \text{ или } (\forall \tau \supseteq \sigma)[\tau \notin W].$$

Предположим, что $f = \{e\}^X$ – $\mathbf{x}$-вычислимая селекторная функция для вычислимой последовательности разностей в.п. множеств $\{C_i = A_i \setminus B_i\}_{i\in\omega}$. Пусть

$$W = \{\sigma \in 2^{<\omega} \mid (\exists i)[\{e\}^\sigma(i) \downarrow \in B_i]\}.$$

Так как $f(i) = \{e\}^X(i) \in A_i \setminus B_i$ для $\sigma \in W$, то мы не можем иметь $\sigma \subset X$. Поскольку W – в.п. множество, существует такая строка $\sigma \subset X$, что для всех $\tau \supseteq \sigma$ имеет место $\tau \notin W$.

Тогда можем найти вычислимую селекторную функцию для $\{C_i = A_i \setminus B_i\}_{i\in\omega}$, полагая $g(i) = \{e\}^{\sigma_i}(i)$, где $\sigma_i \supseteq \sigma$ – первая найденная строка, для которой верно $\{e\}^{\sigma_i}(i) \downarrow \in A_i$.

Утверждение теоремы 4 для слабых селекторных функций также следует из вышеизложенного, так как слабые селекторные функции для $\{C_i = A_i \setminus B_i\}_{i\in\omega}$ суть селекторные функции для модифицированной последовательности $\{\widehat{C}_i = \widehat{A}_i \setminus \widehat{B}_i\}_{i\in\omega}$ при

$$\widehat{A}_i = \{n \mid D_n \subseteq A_i\} \text{ и } \widehat{B}_i = \{n \mid D_n \subseteq B_i\}.$$

4. Доказательство теоремы 6

Без ограничений общности можем считать, что ни одна из данных в.п. степеней $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_k$ не равна нулю. Для $1 \le i \le k$ пусть A_i – в.п. множество, имеющее степень $\mathbf{a}_i$.

Для доказательства воспользуемся следующим приемом, похожим на построение дефицитного множества Деккера: если $A = \operatorname{rng} a$ и $V = \operatorname{rng} v$ – бесконечные в.п. множества, где a и v – инъективные вычислимые функции, то рассмотрим следующее в.п. подмножество V :

$$A^V = \{v(s) \mid (\exists t > s)[a(t) < v(s)]\} \subseteq V.$$

Нетрудно заметить, что для всех $X \subseteq \omega$ имеет место

$$A^V \subseteq^* X \implies V \subseteq^* X \text{ или } A \le_T X,$$

так как каждый элемент $v(s) \in V \setminus (A^V \cup X) =^* V \setminus X$ позволяет получить корректное вычисление $A(x)$ для всех $x < v(s)$:

$$x \in A \iff x \in \{a(0), a(1), \ldots, a(s)\}.$$

В частности, если A не вычислимо, то в.п. множество A^V бесконечно. Также имеем $A^V \le_T A$, так как $A \restriction x \subseteq \{a(0), a(1), \ldots, a(n)\}$ влечет

$$x \in A^V \iff (\exists t \le n)(\exists s < t)[x = v(s) > a(t)].$$

Поскольку каждое в.п. множество $A_i \in \mathbf{a}_i$ не вычислимо, можем теперь рассмотреть цепь бесконечных в.п. множеств

$$U = V_k \subseteq V_{k-1} \subseteq \cdots \subseteq V_2 \subseteq V_1 = V,$$

где $V_1 = A_1$ и $V_{i+1} = A_{i+1}^{V_i}$ для $i < k$.

В силу вышеизложенного $V_i \le_T A_i$ для каждого i. Кроме того, если $U \subseteq X \subseteq V$, то имеем $A_i \le_T X$, где $i \le k$ – наименьший индекс, для которого имеет место $V_i \subseteq^* X$.

5. Доказательство теоремы 8

Для в.п. множества $E \in \mathbf{e}$ фиксируем индекс $e \in \omega$ такой, что $F = W_e^E = \operatorname{dom}\{e\}^E$. Переопределим Δ_2^0-аппроксимацию $F(x) = \lim_s F_s(x)$ для $s = 0, 1$, полагая $F_0(x) = 1$ и $F_1(x) = 0$ для каждого x.

Отметим, что свойство

$$x < y < s < t \mathbin{\&} F_s(x) \neq F_{s+1}(x) \implies F_s(y) = F_t(y) = F(y)$$

для модифицированной таким образом аппроксимации по прежнему будет выполнено (просто потому, что не существует набора значений $x < y < s \leq 1$). Тогда для множества

$$\widetilde{F} = \{\langle y, t\rangle \mid F_t(y) = F(y) = 1 \mathbin{\&} F_{t+1}(y) = 0\}$$

будем иметь $F \equiv_T \widetilde{F}$, поскольку $y \in F \iff \langle y, 0\rangle \in \widetilde{F}$. Кроме того, имеем $\widetilde{U} \subseteq \widetilde{F} \subseteq \widetilde{V}$ для в.п. множеств

$$\widetilde{U} = \{\langle y, t\rangle \mid (\exists x)(\exists s)[x < y < s \mathbin{\&} F_s(x) \neq F_{s+1}(x) \mathbin{\&} F_s(y) = F_t(y) = 1] \mathbin{\&} F_{t+1}(y) = 0\},$$
$$\widetilde{V} = \{\langle y, t\rangle \mid (\exists s > t)[F_s(y) = F_t(y) = 1] \mathbin{\&} F_{t+1}(y) = 0\}.$$

Предположим теперь, что $\widetilde{U} \subseteq Z \subseteq \widetilde{V}$. Докажем $F \leq_T E \oplus Z$, рассматривая отдельно два случая.

Случай 1. Существует бесконечно много элементов $\langle y, t\rangle \in \widetilde{F} \setminus Z$. Отметим, что для каждого y лишь для конечного числа t имеет место $F_t(y) = 1$ и $F_{t+1}(y) = 0$. Следовательно, следующее $(E \oplus Z)$-в.п. подмножество F бесконечно:

$$Y = \{y \mid (\exists t)[\langle y, t\rangle \in \widetilde{F} \setminus Z]\} \subseteq F.$$

Теперь если $y \in Y$, то для всех $s \geq y + 1$ и $x < y$ имеем

$$F_{y+1}(x) = F_s(x) = F(x),$$

поскольку в противном случае $F_s(x) \neq F_{s+1}(x)$ влечет $1 = F_t(y) = F(y) = F_s(y)$ и, следовательно, $\langle y, t\rangle \in \widetilde{U} \subseteq Z$.

Таким образом, каждый новый y из бесконечного $(E \oplus Z)$-в.п. множества Y позволяет корректно найти значения $F(x)$ для каждого $x < y$. Отсюда следует $F \leq_T E \oplus Z$.

Случай 2. Существует только конечное число элементов $\langle y, t\rangle \in \widetilde{F} \setminus Z$. Тогда мы сделаем лишь конечное число ошибок, вычисляя $F(x) = \widetilde{F}(\langle y, 0\rangle)$ по следующей $(E \oplus Z)$-вычислимой рекурсивной процедуре, предполагающей истинность включения $\widetilde{F} \subseteq Z \subseteq \widetilde{V}$.

Процедура вычисления $\widetilde{F}(\langle y, t\rangle)$.

1) Если $\langle y, t\rangle \notin Z$, то выдаем ответ $\widetilde{F}(\langle y, t\rangle) = 0$.
2) Если $\langle y, t\rangle \in Z$, то $\langle y, t\rangle \in \widetilde{V}$, так что $F_s(y) = 1$ для некоторого $s > t$.
3) В силу $F = W_e^E = \lim_s F_s$ существует такое $w \geq s$, что выполнено либо $y \in W_{e,w}^E$, либо $F_w(y) = 1$, $F_{w+1}(y) = 0$.
4) Если $y \in W_{e,w}^E$, то выдаем ответ $\widetilde{F}(\langle y, t\rangle) = 1$.
5) Если же $F_w(y) = 1$ и $F_{w+1}(y) = 0$, то рекурсивно вызываем эту же процедуру для

$\langle y, w\rangle$, поскольку заведомо

$$\widetilde{F}(\langle y, t\rangle) = \widetilde{F}(\langle y, w\rangle).$$

Так как для каждого y существует лишь конечное число различных w, для которых имеет место $F_w(y) = 1$ и $F_{w+1}(y) = 0$, то цепочка рекурсивных вызовов не может быть бесконечной.

Конец процедуры.

Таким образом, в обоих случаях мы доказали $F \leq_T E \oplus Z$.

Рассмотрим теперь интервал в.п. множеств $U \subseteq V$, где $U = E \oplus \widetilde{U}$ и $V = E \oplus \widetilde{V}$. Тогда будем иметь $U \subseteq E \oplus \widetilde{F} \subseteq V$ для $(\mathbf{e} \cup \mathbf{f})$-вычислимого множества $E \oplus \widetilde{F}$, а также

$$U \subseteq X \subseteq V \implies \mathbf{e} \cup \mathbf{f} \leq \deg(X),$$

так как каждое множество X, $U \subseteq X \subseteq V$, должно иметь вид $X = E \oplus Z$, где $\widetilde{U} \subseteq Z \subseteq \widetilde{V}$.

6. Доказательство теоремы 10

С.Б. Купер доказал (см. [5], 12.3.6 и 12.3.7), что для любого $n > 1$ существует n-в.п. множество F такое, что $F \not\equiv_T V_e$ для каждого $(n-1)$-в.п. множества V_e. Построение такого F может быть представлено через Δ^0_2-аппроксимацию $F(x) = \lim_s F_s(x)$, $F_s(x) \in \{0, 1\}$, такую, что

$$F_0(y) = 0 \ \& \ \mathrm{card}\{s \mid F_s(x) \neq F_{s+1}(x)\} \leq n$$

для всех x. Более того, поскольку каждое требование в ходе построения задействует не более одного активного свидетеля, условие

$$x < y < s < t \ \& \ F_s(x) \neq F_{s+1}(x) \implies F_s(y) = F_t(y) = F(y)$$

на данную Δ^0_2-аппроксимацию будет выполнено. Это условие по-прежнему будет действовать, если мы переопределим Δ^0_2-аппроксимацию для $s = 0, 1$, полагая $F_0(x) = 1$ и $F_1(x) = 0$ для каждого x. Это переопределение также приводит к соотношению

$$1 \leq \mathrm{card}\{s \mid F_s(x) \neq F_{s+1}(x)\} \leq n + 1.$$

Тогда для последовательности F-вычислимых множеств

$$\widetilde{F}^i = \{\langle y, t\rangle \mid F_t(y) = F(y) \ \& \ F_{t+1}(y) \neq F_t(y) \ \& \ c_t(y) = i\},$$

где

$$c_t(x) = \mathrm{card}\{s \leq t \mid F_s(x) \neq F_{s+1}(x)\} \geq 1,$$

будем иметь

$$\emptyset = \widetilde{F}^{n+1} = \widetilde{F}^{n+2} = \widetilde{F}^{n+3} = \cdots$$

(равенство $\widetilde{F}^{n+1} = \emptyset$ следует из $F_{t+1}(y) = F(y)$ при $c_t(y) = n+1$, остальные равенства – из $c_t(y) \le n+1$). Кроме того, имеет место

$$F = \{y : \langle y, 0\rangle \in \widetilde{F}^1\} \le_T \widetilde{F}^1.$$

При этом для любого i множество $\widetilde{F}^i$ является $\widetilde{F}^{i+1}$-в.п., поскольку $\langle y,t\rangle \in \widetilde{F}^i$ выполнено тогда и только тогда, когда $F_{t+1}(y) \ne F_t(y)$, $c_t(y) = i$, и

$$(\exists s > t)[F_{s+1}(y) \ne F_s(y) \;\&\; c_s(y) = i+1 \;\&\; \langle y, s\rangle \notin \widetilde{F}^{i+1}].$$

Аналогично доказательству теоремы 8 мы также имеем $U \subseteq \widetilde{F} \subseteq V$ для F-вычислимого множества

$$\widetilde{F} = \bigcup_{i=1}^{n} \widetilde{F}^i = \{\langle y,t\rangle \mid F_t(y) = F(y) \;\&\; F_{t+1}(y) \ne F_t(y)\}$$

и в.п. множеств

$$U = \{\langle y,t\rangle \mid (\exists x)(\exists s)[x<y<s \;\&\; F_s(x) \ne F_{s+1}(x) \;\&\; F_s(y) = F_t(y)] \;\&\; F_{t+1}(y) \ne F_t(y)\},$$
$$V = \{\langle y,t\rangle \mid (\exists s > t)[F_s(y) = F_t(y)] \;\&\; F_{t+1}(y) \ne F_t(y)\}.$$

Предположим теперь, что $U \subseteq X \subseteq V$. В силу $\widetilde{F}^1 \equiv_T F$ и $\widetilde{F}^{n+1} = \emptyset$ для доказательства $F \le_T X$ достаточно установить, что

$$\widetilde{F}^{i+1} \le_T X \implies \widetilde{F}^i \le_T X$$

для каждого i.

Пусть $\widetilde{F}^{i+1} \le_T X$. Так как множество $\widetilde{F}^i$ является $\widetilde{F}^{i+1}$-в.п., следовательно, множество

$$Y^i = \{y \mid (\exists t)[\langle y,t\rangle \in \widetilde{F}^i \setminus X]\}$$

будет X-в.п. Если Y^i бесконечно, то мы получим $\widetilde{F}^i \le_T F \le_T X$, так как каждый элемент $y \in Y^i$ позволяет корректно вычислить

$$F(x) = F_{y+1}(x)$$

для всех $x < y$. В самом деле, из $\langle y,t\rangle \in \widetilde{F}^i$ и $F_s(x) \ne F_{s+1}(x)$, $s \ge y+1$, имеем $F_t(y) = F(y) = F_s(y)$, отсюда $\langle y,t\rangle \in U \subseteq X$.

Рассмотрим теперь случай, когда множество Y^i конечно. Для того, чтобы для этого случая доказать $\widetilde{F}^i \le_T X$, достаточно лишь понять, как вычислять $\widetilde{F}^i(\langle y,t\rangle)$ для элементов $\langle y,t\rangle \in X$ при $c_t(y) = i$. Но если $\langle y,t\rangle \in X$, то $\langle y,t\rangle \in V$, значит, для некоторого

$s = w + 1 > t$ мы должны иметь

$$F_{t+1}(y) \neq F_t(y) = F_{w+1}(y) \neq F_w(y).$$

Для наименьшего такого $s = w+1 > t$ мы к тому же будем иметь $c_w(y) = c_t(y)+1 = i+1$, значит,

$$\langle y, t\rangle \in \widetilde{F}^i \iff F_t(y) = F(y) \iff F_w(y) \neq F(y) \iff \langle y, w\rangle \notin \widetilde{F}^{i+1}.$$

Следовательно, $\widetilde{F}^{i+1} \leq_T X$ влечет $\widetilde{F}^i \leq_T X$.

Таким образом, из $U \subseteq X \subseteq V$ следует $F \leq_T X$, причем в то же время имеем $U \subseteq \widetilde{F} \subseteq V$ для F-вычислимого множества $\widetilde{F}$.

Автор хотел бы поблагодарить М.М. Ямалеева за плодотворные беседы, в частности, позволившие получить теорему 8 в наиболее сильной формулировке.

Список литературы

[1] C. Ash, J. Knight, M. Manasse, T. Slaman, *Generic copies of countable structures*, Ann. Pure Appl. Log. **42** (3), 195–205 (1989).
DOI: https://doi.org/10.1016/0168-0072(89)90015-8

[2] J. Chisholm, *Effective model theory vs. recursive model theory*, J. Symb. Log. **55** (3), 1168–1191 (1990).
DOI: https://doi.org/10.2307/2274481

[3] C.G. Jockusch, R.A. Shore, *Pseudo-jump operators,* II*: transfinite iterations, hierarchies and minimal covers*, J. Symb. Log. **49** (4), 1205–1236 (1984).
DOI: https://doi.org/10.2307/2274273

[4] M.M. Arslanov, G. LaForte, T.A. Slaman, *Relative enumerability in the difference hierarchy*, J. Symb. Log. **63** (2), 411–420 (1998).
DOI: https://doi.org/10.2307/2586839

[5] S.B. Cooper, *Computability theory*, Chapman and Hall/CRC, New York, 2004.
DOI: https://doi.org/10.1201/9781315275789

[6] Р.И. Соар, *Вычислимо перечислимые множества и степени*, Изд-во Казан. матем. о-ва, Казань, 2000.

Калимуллин Искандер Шагитович
Казанский (Приволжский) федеральный университет,
Научно-образовательный математический центр ПФО,
ул. Кремлевская, д. 18, г. Казань, 420008, Россия,
e-mail: ikalimul@gmail.com

Volume 1, Issue 4
pp. 67–80 (2023)

UDC 510.54, 510.57
MSC 03D45, 03D25

Degrees of selector functions and relative computable categoricity

I.Sh. Kalimullin

Abstract. We study the classes of Turing degrees of selector functions in which a rigid computable structure is relatively computably categorical. It is proved that for some structures such classes of degrees can be represented as the unions of upper cones of c.e. degrees. In addition we show that there are non-c.e. upper cones realized as the degrees in which some computable structure is relatively computably categorical.

Keywords: computably enumerable (c.e.) sets, n-c.e. sets, Turing degrees, computable alebrai structures, relative computable categoricity, selector functions.

References

[1] C. Ash, J. Knight, M. Manasse, T. Slaman, *Generic copies of countable structures*, Ann. Pure Appl. Log. **42** (3), 195–205 (1989).
DOI: https://doi.org/10.1016/0168-0072(89)90015-8

[2] J. Chisholm, *Effective model theory vs. recursive model theory*, J. Symb. Log. **55** (3), 1168–1191 (1990).
DOI: https://doi.org/10.2307/2274481

[3] C.G. Jockusch, R.A. Shore, *Pseudo-jump operators,* II*: transfinite iterations, hierarchies and minimal covers*, J. Symb. Log. **49** (4), 1205–1236 (1984).
DOI: https://doi.org/10.2307/2274273

[4] M.M. Arslanov, G. LaForte, T.A. Slaman, *Relative enumerability in the difference hierarchy*, J. Symb. Log. **63** (2), 411–420 (1998).
DOI: https://doi.org/10.2307/2586839

[5] S.B. Cooper, *Computability theory*, Chapman and Hall/CRC, New York, 2004.
DOI: https://doi.org/10.1201/9781315275789

Acknowledgements. The work was supported by the Theoretical Physics and Mathematics Advancement Foundation "BASIS".

Received: 31 October 2023. Accepted: 28 November 2023. Published: 26 December 2023.

[6] R. Soare, *Recursively enumerable sets and degrees. A study of computable functions and computably generated sets*, Perspectives in Mathematical Logic. Springer-Verlag, Berlin, 1987.

Kalimullin Iskander Shagitovich
Kazan Federal University,
Volga Region Mathematical Center,
18 Kremlyovskaya str., Kazan 420008, Russia,
e-mail: ikalimul@gmail.com