*МАТЕМАТИКА И ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ КОМПЬЮТЕРНЫЕ НАУКИ, 105–117*

Том 1, Выпуск 4
Стр. 105–117 (2023)

УДК 517.53, 517.574
MSC 30D15, 31A05

# Субгармонические дополнения к теоремам Бёрлинга–Мальявена. II. О радиусе полноты

Б.Н. Хабибуллин, Е.Г. Кудашева

**Аннотация.** Теорема Бёрлинга–Мальявена о мультипликаторе, рассматривавшаяся в субгармоническом обрамлении в первой части нашей работы, уже в изначальном классическом варианте в рамках целых функций экспоненциального типа позволила в 1960-е гг. полностью решить задачу о радиусе полноты экспоненциальной системы в форме замечательного критерия исключительно в геометрических терминах для показателей этой экспоненциальной системы без каких-либо дополнительных ограничений на взаимное расположение этих показателей. Точные формулировки теоремы Бёрлинга–Мальявена о радиусе полноты во введении мы несколько адаптируем как задачу о возможном минимальном росте вдоль вещественной оси $\mathbb{R}$ субгармонических функций с заданными ограничениями на распределения их масс Рисса. В этой, во многом обзорной части работы, мы обсуждаем теорему Бёрлинга–Мальявена о радиусе полноты вместе с ее несколько более общими субгармоническими проявлениями. Так, наши результаты 2014–16 гг. позволяют получать значительно более тонкие результаты в отношении самой теоремы Бёрлинга–Мальявена о радиусе полноты с дефектом-избытком не более 1 или 2 для показателей в классических жестких банаховых пространствах непрерывных функций на отрезке фиксированной длины или функций с интегрируемым в $p$-й степени модулем на таких отрезках.

**Ключевые слова:** целая функция экспоненциального типа, субгармоническая функция конечного типа, радиус полноты, экспоненциальная система, распределение показателей, преобразование Гильберта, интеграл Пуассона.

## Введение

Мы в значительной мере используем обозначения, понятия и соглашения из [1], но в их адаптации, иногда существенной, из первой части работы [2]. Иногда, по возможности, определения основных понятий и обозначений повторяем. Приведем и некоторые дополнительные, которые в первой части [2] не использовались.

---

Благодарности. Работа выполнена в рамках государственного задания Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (код научной темы FMRS-2022-0124).

Поступила: 17.10.2022. Принята: 06.06.2023. Опубликована: 26.12.2023.

*Распределением масс* называем *положительную меру Радона* [3], [4, дополнение A], а *распределение зарядов* – это разность распределений масс.

Для распределений масс или зарядов *на* $\mathbb{C}$, как правило, не указываем, где они заданы. Для субгармонической в области из $\mathbb{C}$ функции $u \not\equiv -\infty$ действие на нее *оператора Лапласа* $\triangle$ в смысле теории обобщенных функций определяет ее *распределение масс Рисса*

$$\frac{1}{2\pi}\triangle u =: \mathit{\Delta}_u$$

в этой области [4]. Для обозначения распределения масс Рисса функции $u$ используем как первую форму записи $\frac{1}{2\pi}\triangle u$, так и вторую $\mathit{\Delta}_u$. По-прежнему $D_z(r) := \bigl\{w \in \mathbb{C} \bigm| |w-z| < r\bigr\}$ и $\overline{D}_z(r) := \bigl\{w \in \mathbb{C} \bigm| |w-z| \leqslant r\bigr\}$ – соответственно *открытый* и *замкнутый круги*, $\partial\overline{D}_z(r) := \overline{D}_z(r) \setminus D_z(r)$ – *окружность радиуса* $r \in \overline{\mathbb{R}}^+$ *с центром* $z \in \mathbb{C}$, а $\mathbb{D} := D_0(1)$ и $\overline{\mathbb{D}} := \overline{D}_0(1)$ – соответственно *открытый* и *замкнутый единичные круги*, $\partial\overline{\mathbb{D}} := \partial\overline{D}_0(1)$ – *единичная окружность* в $\mathbb{C}$.

Для распределения зарядов $\nu$ на $S \subset \mathbb{C}$ через $\nu^+ := \sup\{\nu, 0\}$, $\nu^- := (-\nu)^+$ и $|\nu| := \nu^+ + \nu^-$ обозначаем *верхнюю, нижнюю* и *полную вариации* распределения зарядов $\nu$ соответственно, $\operatorname{supp}\nu = \operatorname{supp}|\nu|$ – его *носитель,* но распределение зарядов $\nu$ *сосредоточено на $\nu$-измеримом подмножестве* $S_0 \subset S$, если полная вариация $|\nu|$ дополнения $S \setminus S_0$ множества $S$ равна нулю.

*Сужение* функции $f$ на $S \subset \mathbb{C}$ обозначаем как $f\lfloor_S$. Аналогично через $\nu\lfloor_S$ обозначаем и *сужение* положительной меры Бореля или распределения зарядов $\nu$ на $\nu$-измеримое $S \subset \mathbb{C}$. При $r \in \overline{\mathbb{R}}^+$ для таких $\nu$ через

$$\nu_z^{\mathrm{rad}}(r) := \nu\bigl(\overline{D}_z(r)\bigr), \quad \nu^{\mathrm{rad}}(r) := \nu_0^{\mathrm{rad}}(r) = \nu\bigl(r\overline{\mathbb{D}}\bigr) \tag{1}$$

обозначаем *радиальные непрерывные справа считающие функции распределения зарядов $\nu$ с центрами в точке* $z \in \mathbb{C}$ и *в нуле* соответственно.

*Верхняя плотность распределения зарядов $\nu$ при порядке* $p \in \mathbb{R}^+$ равна

$$\operatorname{type}_p[\nu] := \operatorname{type}_p\bigl[|\nu|\bigr] := \limsup_{0<r\to+\infty} \frac{|\nu|(r\overline{\mathbb{D}})}{r^p} \overset{(1)}{=} \limsup_{0<r\to+\infty} \frac{|\nu|^{\mathrm{rad}}(r)}{r^p} \in \overline{\mathbb{R}}^+,$$

при $p = 1$ упоминание о порядке опускаем. В частности, *распределение зарядов* $\nu$ имеет *конечную верхнюю плотность,* если $\operatorname{type}[\nu] := \operatorname{type}_1[\nu] < +\infty$.

Всюду далее для *распределений,* вообще говоря, повторяющихся *точек на* $\mathbb{C}$ предполагается, что в каждом круге $r\mathbb{D}$ при $r \in \mathbb{R}^+$ содержится конечное число точек из этого распределения точек, т. е. рассматриваются только *локально конечные в* $\mathbb{C}$ распределения точек. *Распределение зарядов* называем *целочисленным,* если он принимает только целые значения из $\mathbb{Z} := \mathbb{N}_0 \cup (-\mathbb{N})$ на ограниченных множествах. *Распределение точек* $Z$ можно трактовать как целочисленное распределение масс, для которого масса каждого ограниченного в $\mathbb{C}$ множества равна числу попавших в него точек из $Z$. Для этого целочисленного распределения масс сохраняем обозначение $Z$. Всюду далее $Z$ и $W$ – распределения точек на $\mathbb{C}$. Таким образом, каждое целочисленное распределение масс однозначно определяет локально конечное распределение точек, и наоборот, а равенство $Z = W$ понимается как равенство соответствующих распределений масс [1, 0.1.2]. Все вводимые в статье понятия и обозначения для распределений зарядов и масс переносятся и на распределения точек. Так, $Z\lfloor_S$ – *сужение* распределения точек $Z$ на $S \subset \mathbb{C}$. Если $\operatorname{supp} Z \subset S$, то для краткости часто пишем просто $Z \subset S$, а $Z(z) = Z(\{z\})$ – число точек, равных $z \in \mathbb{C}$ в $Z$. Каждому распределению точек сопоставляем *экспоненциальную систему*

$$\operatorname{Exp}^Z := \Bigl\{ w \underset{w\in\mathbb{C}}{\longmapsto} w^k e^{iwz} \Bigm| 0 \leqslant k < Z(z),\ k \in \mathbb{N}_0 \Bigr\}$$

*с системой показателей* $Z$ – очевидно, целых функций экспоненциального типа. Здесь функции $w \underset{w\in\mathbb{C}}{\longmapsto} w^k e^{iwz}$ при $Z(z) = 0$ просто нет, а при $Z(z) > 0$ имеется $Z(z) - 1$ функций с разными степенными множителями $w$ в числе $Z(z) - 1$. Появление в показателе мнимой единицы $i$ – скорее дань традиции, связанной с преобразованием Фурье.

Как обычно, система векторов в топологическом векторном пространстве *полна,* если замыкание линейной оболочки этой системы совпадает с исходным пространством.

Для целой функции $f \not\equiv 0$ через $\operatorname{Zero}_f$ обозначаем ее *распределение корней,* представляющее собой распределение точек, в котором каждая точка $z \in \mathbb{C}$ повторяется столько раз, какова кратность корня функции $f$ в точке $z$. При этом $\operatorname{Zero}_f = \dfrac{1}{2\pi} \triangle \ln|f|$ – целочисленное распределение масс Рисса субгармонической функции $\ln|f|$ [4, теорема 3.7.8]. Целая функция $f \not\equiv 0$ *обращается в нуль на* $Z$, пишем $f(Z) = 0$, если имеет место неравенство $Z \leqslant \operatorname{Zero}_f$ для целочисленных распределений масс $Z$ и $\operatorname{Zero}_f$.

Распределение точек $Z$ при его нумерации номерами из $N \subset \mathbb{Z}$ можно рассматривать как некоторую *последовательность* $Z = (z_n)_{n\in N}$ *комплексных чисел,* где каждое число $z_n = z \in \mathbb{C}$ встречается ровно $Z(z)$ раз, т. е. столько же раз, сколько раз точка $z \in \mathbb{C}$ повторяется в распределении точек $Z$. При этом

$$\sum_{\substack{z\in S\\ z\in Z}} f(z) := \int_S f \,\mathrm{d}\, Z = \sum_{z_n\in S} f(z_n)$$

при нумерации $Z = (z_n)_{n\in N}$ для $S \subset \mathbb{C}$, когда для расширенной числовой функции $f$ на $\operatorname{supp} Z$ интеграл и сумма справа корректно определены.

Если при некоторой нумерации $Z = (z_n)_{n\in N}$ на $\mathbb{C}$ можно подобрать число $c \in \mathbb{R}^+$ и *последовательность попарно различных целых чисел* $(m_n)_{n\in N}$, для которых конечна сумма

$$\sum_{k\in N} \Bigl| \frac{1}{z_n} - \frac{c}{m_n} \Bigr| < +\infty,$$

то *внешняя плотность Редхеффера от* $Z$ *вдоль* $\mathbb{R}$ не превышает числа $c$ [5–7], [1, 2.1.1], а сама она равна точной нижней грани таких чисел $c \in \mathbb{R}^+$. *Внешнюю плотность Редхеф-*

*фера для* $Z$ далее обозначаем как $\overline{\mathrm{Red}}(Z)$.

**Теорема Бёрлинга–Мальявена о радиусе полноты** (в версии Р. Редхеффера)**.** *Если имеет место строгое неравенство*

$$b - a > 2\pi\overline{\mathrm{Red}}(Z), \tag{2}$$

*то экспоненциальная система* $\mathrm{Exp}^Z$ *полна в банаховом пространстве* $C([a,b])$ *непрерывных комплекснозначных функций с естественной* sup*-нормой.*

*Обратно, пусть выполнено противоположное строгое неравенство*

$$b - a < 2\pi\overline{\mathrm{Red}}(Z). \tag{3}$$

*Тогда экспоненциальная система* $\mathrm{Exp}^Z$ *не является полной в банаховом пространстве* $C([a,b])$ *с той же естественной* sup*-нормой.*

**Замечание 1.** *Никакого содержательного ответа в случае равенства* в (3) или (2) дать невозможно в том смысле, что если в (3) или (2) поставить знак равенства, то возможны любые ситуации: как полнота, так и неполнота.

**Замечание 2.** Условия в терминах внешней плотности Редхеффера выглядят весьма просто, но не следует забывать, что, вообще говоря, требуют тестирования условий *мощности не ниже континуум,* поскольку таково множество всевозможных попарно различных последовательностей целых чисел, фигурирующих в определениии внешней плотности Редхеффера.

**Замечание 3.** Первоначально, конечно же, внешнюю плотность Редхеффера заменяла иная, более сложно определяемая, но и в то же время более геометрически выраженная исходная, так называемая внешняя плотность Бёрлинга–Мальявена [8], на которой мы здесь не останавливаемся по двум причинам. Во-первых, в исследовании И.Ф. Красичкова-Терновского [6] был дан анализ и методы перехода от любой известной и неизвестной к тому времени внешней плотности типа внешней плотности Бёрлинга–Мальявена к произвольной другой, хотя бы раз возникавшей ранее с сохранением точного равенства. Ранее такие переходы в той или иной форме использовали само классическое доказательство и без применения каких-либо отдельных этапов классического или иного доказательства теоремы Бёрлинга–Мальявена о радиусе полноты были недоступны. Задача таких прямых переходов от одних плотностей к другим ставилась еще в 1960 гг. Ж.-П. Каханом в [9]. В [6] решение задачи Ж.-П. Кахана было в полном объеме реализовано И.Ф. Красичковым-Терновским для *вещественных* показателей $Z \subset \mathbb{R}$, где обсуждается и доказывается совпадение около десятка различных внешних плотностей, развивающих исходную внешнюю плотность Бёрлинга–Мальявена.

**0.1. Внешняя плотность Кахана и комплексные показатели.** Адаптируем внешнюю плотность Кахана $\overline{\mathrm{Kah}}(Z)$, рассматривавшуюся в [9], [6], а также в [5], только для *вещественных* $Z \subset \mathbb{R}$ на случай произвольных *комплексных распределений точек* $Z$. При этом изложение будет исключительно описательное, поскольку точное обоснование такой адаптации потребовало от нас отвлечения на одну специальную манипуляцию, использованную при доказательстве исходной теоремы Бёрлинга–Мальявена о радиусе полноты. Эта простая манипуляция достаточно широко известна специалистам (см. [1,5,7–13]) и заключается в замене каждой невещественной точки $z \in Z \setminus \mathbb{R}$ на вещественную точку $z^*$, связанной с исходной точкой $z$ соотношением

$$\frac{1}{z^*} := \operatorname{Re} \frac{1}{\bar{z}},$$

поэтому мы эту чисто техническую процедуру здесь не эксплуатируем.

Функция $f\colon X \to \overline{\mathbb{R}}$ на $X \subset \overline{\mathbb{R}}$ *возрастающая* (соотвественно *строго возрастающая*), если для любых $x_1, x_2 \in X$ из $x_1 < x_2$ следует $f(x_1) \leqslant f(x_2)$ (соответственно $f(x_1) < f(x_2)$). Аналогично для (строгого) убывания. Для *распределения масс* $\mu$ *на* $\mathbb{C}$ рассмотрим возрастающую *функцию* ее *распределения*

$$m_\mu(x) \underset{x\in\mathbb{R}}{:=} \begin{cases} \mu\Bigl(\overline{D}_{x/2}\bigl(|x|/2\bigr)\Bigr) \overset{(1)}{:=} \mu_{x/2}\bigl(|x|/2\bigr) & \text{при } x \in \mathbb{R}^+; \\ -\mu\Bigl(D_{x/2}\bigl(|x|/2\bigr)\Bigr) & \text{при } x \in -\mathbb{R}^+ \setminus 0 \end{cases} \tag{4}$$

*по возрастающим кругам с центрами на* $\mathbb{R}$*, касающимся мнимой оси в нуле.*

Распределение масс $\mu$ на $\mathbb{C}$ удовлетворяет *условию Бляшке на* $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, если

$$\int_{\mathbb{C}\setminus\mathbb{D}} \left|\operatorname{Im} \frac{1}{z}\right| \,\mathrm{d}\,\mu(z) < +\infty. \tag{5}$$

Следуя аналогии с [9], [6, предложение 3.4], функция распределения масс $\mu$ имеет на $\mathbb{C}$ *конечную плотность Кахана,* если она удовлетворяет *условию Бляшке* (5) *вне* $\mathbb{R}$ и найдется *возрастающая липшицева функция* $k\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$L_k := \sup_{\substack{x_1, x_2 \in \mathbb{R} \\ x_1 \neq x_2}} \frac{k(x_2) - k(x_1)}{x_2 - x_1} < +\infty, \tag{6}$$

для которой *конечен логарифмический интеграл* $J\bigl[|m_\mu - k|\bigr] < +\infty$ с функцией распределения (4). При этом точную нижнюю грань постоянных $L_k$ из (6), для которых такая конструкция возможна, будем называть *внешней плотностью Кахана* $\overline{\operatorname{Kah}}(\mu)$ распределения масс $\mu$. Так, если $\mu = Z$ – целочисленное распределение масс, т. е. распределение точек, то $\overline{\operatorname{Kah}}(Z)$ – *внешняя плотность Кахана* распределения точек $Z$.

**Теорема Бёрлинга–Мальявена о радиусе полноты** (в форме Ж.-П. Кахана)**.** *Для любого комплексного распределения точек* $Z \subset \mathbb{C}$ *верно равенство* $\overline{\operatorname{Red}}(Z) = \overline{\operatorname{Kah}}(Z)$ *и внешняя плотность Кахана несет в себе в точности ту же информацию, что и теорема Бёрлинга–Мальявена о радиусе полноты в интерпретации Р. Редхеффера, а замечания*

*1 и 2 при этом остаются в силе.*

**Замечание 4.** Так или иначе, доказанные классические теоремы Бёрлинга–Мальявена о радиусе полноты для заданного распределения точек-показателей $Z$ эквивалентны, посредством преобразования Фурье–Лапласа, невозможности построения такой целой функции $f \neq 0$ экспоненциального типа $\operatorname{type}_f < b-a$ с $Z \leqslant \operatorname{Zero}_f$, ограниченной на вещественной оси $\mathbb{R}$ *единицей* в случае (2), или, наоборот, существованию такой функции $f$ в случае (3). Поэтому далее мы обсуждаем развития теоремы Бёрлинга–Мальявена о радиусе полноты именно в такой значительно более общей форме.

**Основная задача.** *Пусть $Z \subset \mathbb{C}$ – произвольное распределение комплексных точек, число $c \in \mathbb{R}^+ \setminus 0$. Найти необходимые и одновременно достаточные условия, при которых существует целая функция $f \neq 0$ заданного экспоненциального типа $\operatorname{type}_f \leqslant c$ с условием $Z \leqslant \operatorname{Zero}_f$, ограниченная на вещественной оси.*

Основной результат следующей заключительной части работы со значительной обзорной упорядочивающей предшествующие наши результаты частью – эта теорема 9 вместе со следствиями о полноте экспоненциальных систем с избытком или дефектом показателей от 1 до 2 из следствия 10.

**Замечание 5.** Ясно, что решение основной задачи позволит полностью слить в единое целое, вообще говоря, разделенные случаи (2) и (3), поскольку будет учитывать для типов $\operatorname{type}_f$ не только строгие неравенства (2) и (3), но и точные, когда вместо строгих неравенств можно будет ставить точные равенства $= b-a$. При переходе к радиусу полноты, правда, по техническим причинам этот учет будет возможен лишь с точностью до *одного* или *двух* показателя – *избытка* или *дефекта* – из $Z$.

**Замечание 6.** Все дальнейшие основные результаты – это симбиоз наших двух коллективных работ 2014–16 гг. [14] и [15]. Они писались несколько разрозненно, а здесь мы объединяем их в единое целое, местами не вдаваясь в детали. Эти детали вполне восстановимы при одновременном рассмотрении обеих работ.

## 1. Основной результат в терминах пуассоновско-гильбертовых и интегрально-логарифмических плотностей распределения точек

**1.1. ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ПУАССОНА И ГИЛЬБЕРТА.** Для полунепрерывной сверху функции $v\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ с конечным (суммируемым) логарифмическим интегралом $J[v]$ можно корректно определить полунепрерывный сверху всюду на $\mathbb{C}$ *интеграл Пуассона* $\operatorname{Poi}_v$ от такой функции $v$ по правилу

$$\operatorname{Poi}_v\colon z \underset{z\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}}{\longmapsto} \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|\operatorname{Im} z|}{|\operatorname{Im} z|^2 + (x-\operatorname{Re} z)^2}\,\mathrm{d}\,x, \quad \operatorname{Poi}_v(x) := x \in \mathbb{R}. \tag{7}$$

Если для непрерывно дифференцируемой функции $v$ на $\mathbb{R}\setminus 0$ с возможной единственной логарифмической особенностью в нуле сходится интеграл

$$J_1\bigl[|v|\bigr] := \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\bigl|v(t)\bigr|}{1+|t|}\,\mathrm{d}\,t,$$

то значение *преобразования Гильберта* $\mathrm{Hil}_v$ функции $v$ в точке $\mathbb{R}\setminus 0$ определяется однозначно по правилу

$$(\mathrm{Hil}\,v)(x) := \frac{1}{\pi}\,\fint_{-\infty}^{\infty} \frac{v(t)}{t-x}\,\mathrm{d}\,t := \frac{1}{\pi}\lim_{0<\varepsilon\to 0}\int_{\{t\in\mathbb{R}\colon\, |x-t|>\varepsilon\}} \frac{v(t)}{t-x}\,\mathrm{d}\,t,\ x\in\mathbb{R}\setminus 0,$$

где в промежуточном равенстве перечеркнутый интеграл обозначает *главное значение интеграла в смысле Коши от функции $v$.*

**1.2. ПУАССОНОВСКО-ГИЛЬБЕРТОВСКАЯ ПЛОТНОСТЬ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ТОЧЕК $Z\subset\mathbb{C}$.** Через $R\mathcal{P}_0^\infty$, следуя нашей работе [14, определение 1], обозначаем класс всех бесконечно дифференцируемых функций $v\colon \mathbb{R}\setminus 0\to\mathbb{R}^+$, *финитных, т. е. обращающихся в нуль вне достаточно длинных отрезков $[-R_v,R_v]$ с $R_v>0$, зависящим от функции $v$, полунормированных вблизи нуля* условием

$$\limsup_{0\neq x\to 0}\frac{v(x)}{-\ln|x|}\leqslant 1, \tag{8}$$

для которых *преобразование Гильберта возрастает как на положительной полуоси $\mathbb{R}^+\setminus 0$, так и на отрицательной полуоси $-\mathbb{R}^+\setminus 0$.*

**Замечание 7.** Пусть $Z\subset\mathbb{C}$ – по-прежнему произвольное распределение точек на $\mathbb{C}$, и если числа $0$ в количестве $Z(0)$ лежат на $Z$, то можем считать, что они заменены или сдвинуты на какие-нибудь $Z(0)$ произвольных фиксированных точек, отличных от нуля. Это никак не повлияет на определяемые ниже внешние гильбертовы плотности распределений точек $Z$. Поэтому далее можем, не умаляя общности, считать, что $0\notin Z$.

*Точную нижнюю грань чисел $c\in\mathbb{R}^+$*, для которых

$$\sup_{v\in R\mathcal{P}_0^\infty}\left(\sum_{z\in Z}\mathrm{Poi}_v(z)-c\int_{-\infty}^{+\infty}v(t)\,\mathrm{d}\,t\right)<+\infty, \tag{9}$$

называем *пуассоновско-гильбертовой плотностью распределения точек $Z\subset\mathbb{C}$.*

**Замечание 8.** Особенно просто все выглядит для вещественых $Z\subset\mathbb{R}\setminus 0$. Соотношение (9) в этом случае запишется в виде

$$\sup_{v\in R\mathcal{P}_0^\infty}\left(\sum_{z\in Z}v(z)-c\int_{-\infty}^{+\infty}v(t)\,\mathrm{d}\,t\right)<+\infty$$

ввиду (7) без всяких интегралов Пуассона.

**1.3. Интегрально-логарифмическая плотность распределения точек $Z\subset\mathbb{C}$.** Для класса всех бесконечно дифференцируемых функций $v\colon\mathbb{R}\setminus 0\to\mathbb{R}^+$, финитных в отмеченном выше смысле $v\equiv 0$ вне $[-R_v,R_v]$ и полунормированных вблизи нуля условием (8), подкласс таких функций, удовлетворяющих интегрально-логарифмическому неравенству

$$v(x)\leqslant\frac{1}{\pi^2}\int_{-\infty}^{+\infty}v(x+t)\frac{1}{t}\ln\Bigl|\frac{t+r}{t-r}\Bigr|\,\mathrm{d}\,t\quad\text{для всех } x\in\mathbb{R}\setminus 0 \text{ при каждом } r\in(0,|x|),$$

обозначим как $\operatorname{Int}\ln_0$.

*Точную нижнюю грань чисел* $c\in\mathbb{R}^+$, для которых

$$\sup_{v\in\operatorname{Int}\ln_0}\Biggl(\sum_{z\in Z}\operatorname{Poi}_v(z)-c\int_{-\infty}^{+\infty}v(t)\,\mathrm{d}\,t\Biggr)<+\infty$$

называем *интегрально-логарифмической плотностью распределения точек $Z$.*

**Теорема 9** ([14, 15])**.** *Пусть $c\in\mathbb{R}^+\setminus 0$, а $Z$ – распределение комплексных точек с оговоренным при необходимости сдвигом конечного числа всех нулевых точек из $Z$, как в замечании 7. Тогда эквивалентны три утверждения:*

- a) *существует целая функция $f\neq 0$, для которой $Z\leqslant\operatorname{Zero}_f$, удовлетворяющая неравенству $|f(z)|\leqslant\exp\bigl(c|\operatorname{Im}z|\bigr)$ при всех $z\in\mathbb{C}$, т. е. экспоненциального типа $\operatorname{type}_f\leqslant c$, ограниченная единицей на вещественной оси;*
- b) *пуассоновско-гильбертовская плотность $Z$ не больше числа $c$;*
- c) *интегрально-логарифмическая плотность $Z$ не больше числа $c$.*

Ясно, что пуассоновско-гильбертовская плотность распределения точек $Z\subset\mathbb{C}$ и ее интегрально-логарифмическая плотность всегда совпадают.

**Следствие 10** ([14, теорема 2])**.** *Пусть $b>a$ – произвольные вещественные числа, $Z\subset\mathbb{C}$ – распределение комплексных точек. Тогда*

1) *если пуассоновско-гильбертовская или интегрально-логарифмическая плотность распределения точек $Z$ строго больше, чем $b-a$, то система $\operatorname{Exp}^Z$ полна в любом из пространств $C([a,b])$ или $L^p(a,b)$ интегрируемых функций по модулю на $(a,b)$ при возведении в степень $p\geqslant 1$;*
2) *если пуассоновско-гильбертовская или интегрально-логарифмическая плотность распределения точек $Z$ не превышает $b-a$, то после удаления уже одного показателя $z'\in Z$ из $Z$ оставшаяся без этого показателя система $\operatorname{Exp}^{Z\setminus z'}$ не полна в любом из пространств $C([a,b])$ или $L^p(a,b)$ при $p\geqslant 2$;*
3) *если пуассоновско-гильбертовская или интегрально-логарифмическая плотность $Z$ не превышает $b-a$, то после удаления двух различных показателей $z',z''\in Z$*

*из $Z$ оставшаяся без этих двух показателей система* $\operatorname{Exp}^{Z\setminus\{z',z''\}}$ *не полна в любом из пространств* $L^p(a,b)$ *при* $1 \leqslant p < 2$.

Очевидно, эти результаты гораздо тоньше, вплоть до одного или двух показателей, «чувствуют» полноту системы $\operatorname{Exp}^{\Lambda}$, а случай замены строгих неравенств (2) и (3) на нестрогие для них в рамках новых плотностей уже не помеха. Наконец, отметим, что даже из несколько более слабых лишь подготовительных форм результатов, приведенных здесь, в свое время, в начале 1990-х гг., нами были получены в [7] приц磁ипиально новые доказательства теорем Бёрлинга–Мальявена о радиусе полноты с различными вариациями, а полное описание одного из этих новых доказательств вошло как глава в книгу П. Кусиса [13] 1996 г.

## Список литературы

[1] Б.Н. Хабибуллин, *Полнота систем экспонент и множества единственности*, изд. 4-е доп., Редакционно-издательский центр БашГУ, Уфа, 2012.
URL: https://www.researchgate.net/publication/271841461

[2] Б.Н. Хабибуллин, Е.Г. Кудашева, *Субгармонические дополнения к теоремам Бёрлинга–Мальявена.* I. *О мультипликаторе*, Матем. теор. комп. науки **1** (3), 59–76 (2023).

[3] Л.К. Эванс, К.Ф. Гариепи, *Теория меры и тонкие свойства функции*, Научн. кн. (ИДМИ), Новосибирск, 2002.

[4] Th. Ransford, *Potential Theory in the Complex Plane*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1995.
DOI: https://doi.org/10.1017/CBO9780511623776

[5] R.M. Redheffer, *Completeness of sets of complex exponentials*, Adv. Math. **24** (1), 1–62 (1977).
DOI: https://doi.org/10.1016/S0001-8708(77)80002-9

[6] И.Ф. Красичков-Терновский, *Интерпретация теоремы Бёрлинга–Мальявена о радиусе полноты*, Матем. сб. **180** (3), 397–423 (1989).
URL: https://www.mathnet.ru/rus/sm1618

[7] Б.Н. Хабибуллин, *Неконструктивные доказательства теоремы Бёрлинга–Мальявена о радиусе полноты и теоремы неединственности для целых функций*, Изв. РАН. Сер. матем. **58** (4), 125–148 (1994).
URL: https://www.mathnet.ru/rus/im773

[8] A. Beurling, P. Malliavin, *On the closure of characters and the zeros of entire functions*, Acta Math. **118**, 79–93 (1967).
DOI: https://doi.org/10.1007/BF02392477

[9] J.-P. Kahane, *Travaux de Beurling et Malliavin*, Séminaire Bourbaki (année 1961/62, exposés 223–240, Talk no. 225), (7), 27–39 (1962).
URL: http://www.numdam.org/item/SB_1961-1962__7__27_0/

[10] P. Koosis, *The logarithmic integral.* I, Cambridge Stud. Adv. Math. **12**, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1988.

[11] V. Havin, B. Jöricke, *The Uncertainty Principle in Harmonic Analysis*, Springer-Verlag, Berlin, 1994.

[12] P. Koosis, *The logarithmic integral.* II, Cambridge Stud. Adv. Math. **21**, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1992.

[13] P. Koosis, *Leçons sur le théorème de Beurling et Malliavin*, Les Publications CRM, Univ. Montréal, Montréal, QC, 1996.

[14] Б.Н. Хабибуллин, Г.Р. Талипова, Ф.Б. Хабибуллин, *Подпоследовательности нулей для пространств Бернштейна и полнота систем экспонент в пространствах функций на интервале*, Алгебра и анализ **26** (2), 185–215 (2014).
URL: https://www.mathnet.ru/rus/aa1381

[15] Т.Ю. Байгускаров, Г.Р. Талипова, Б.Н. Хабибуллин, *Подпоследовательности нулей для классов целых функций экспоненциального типа, выделяемых ограничениями на их рост*, Алгебра и анализ **28** (2), 1–33 (2016).
URL: https://www.mathnet.ru/rus/aa1483

**Булат Нурмиевич Хабибуллин**
Институт математики с вычислительным центром УФИЦ РАН,
ул. Чернышевского, д. 112, г. Уфа, 450008, Россия,
*e-mail:* khabib-bulat@mail.ru

**Елена Геннадьевна Кудашева**
Башкирский государственный педагогический университет им. М. Акмуллы,
ул. Октябрьской революции, д. 3А, г. Уфа, 450008, Россия,
*e-mail:* lena_kudasheva@mail.ru

Volume 1, Issue 4
pp. 105–117 (2023)

UDC 517.53, 517.574
MSC 30D15, 31A05

# Subharmonic additions to the Beurling–Malliavin Theorems. II. On the completeness radius

B.N. Khabibullin, E.G. Kudasheva

**Abstract.** The Beurling–Malliavin Theorem on the multiplier, considered in a subharmonic framework in the first part of our work, already in its original classical version within the framework of entire functions of exponential type, allowed in the 1960s to completely solve the problem of the radius of completeness of exponential system in the form of a remarkable criterion and exclusively in geometric terms for the exponents of this exponential system without any additional restrictions on the relative position of these exponents. The exact formulations of the Beurling–Malliavin Theorem on the radius of completeness in the introduction are somewhat adapted as a problem of the possible minimum growth along the real axis $\mathbb{R}$ of subharmonic functions with given constraints on their Riesz distributions of masses. In this largely overview part of the paper, we discuss the Beurling–Malliavin Theorem on the radius of completeness, along with its somewhat more general subharmonic manifestations. Thus, our results from 2014-16 allow us to obtain significantly more subtle results with respect to the Beurling – Malliavin Theorem itself on the radius of completeness with a defect excess of no more than 1 or 2 for exponents in classical rigid Banach spaces of continuous functions on a segment of fixed length or functions with integrable module in the p-th degree on such segments.

**Keywords:** entire function of exponential type, subharmonic function of finite type, radius of completeness, exponential system, distribution of exponents, Hilbert transform, Poisson integral.

## References

[1] B.N. Khabibullin, *Completeness of exponential systems and uniqueness sets*, 4th ed., Bashkir State Univ. Press, Ufa, 2012 [in Russian].
DOI: https://doi.org/10.13140/2.1.4572.7525

[2] B.N. Khabibullin, E.G. Kudasheva *Subharmonic additions to Beurling–Malliavin Theorems.* I. *On the multiplier*, MTCS **1** (3), 59–76 (2023).

---

Acknowledgements. The work was carried out within the framework of the state task of the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation (the code of the scientific topic FMRS-2022-0124).

Received: 17 October 2022. Accepted: 06 June 2023. Published: 26 December 2023.

[3] L.C. Evans, R.F. Gariepy, *Measure Theory and Fine Properties of Functions*, Revised Edition, CRC Press, 2015.

[4] Th. Ransford, *Potential Theory in the Complex Plane*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1995.
DOI: https://doi.org/10.1017/CBO9780511623776

[5] R.M. Redheffer, *Completeness of sets of complex exponentials*, Adv. Math. **24** (1), 1–62 (1977).
DOI: https://doi.org/10.1016/S0001-8708(77)80002-9

[6] I.F. Krasichkov-Ternovskii, *An interpretation of the Beurling–Malliavin theorem on the radius of completeness*, Math. USSR-Sb. **66** (2), 405–429 (1990).
DOI: https://doi.org/10.1070/SM1990v066n02ABEH001178

[7] B.N. Khabibullin, *Nonconstructive proofs of the Beurling–Malliavin theorem on the radius of completeness, and nonuniqueness theorems for entire functions*, Russian Acad. Sci. Izv. Math. **45** (1), 125–149 (1995).
DOI: https://doi.org/10.1070/IM1995v045n01ABEH001622

[8] A. Beurling, P. Malliavin, *On the closure of characters and the zeros of entire functions*, Acta Math. **118**, 79–93 (1967).
DOI: https://doi.org/10.1007/BF02392477

[9] J.-P. Kahane, *Travaux de Beurling et Malliavin*, Séminaire Bourbaki (année 1961/62, exposés 223–240, Talk no. 225), (7), 27–39 (1962).
URL: http://www.numdam.org/item/SB_1961-1962__7__27_0/

[10] P. Koosis, *The logarithmic integral.* I, Cambridge Stud. Adv. Math. **12**, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1988.

[11] V. Havin, B. Jöricke, *The Uncertainty Principle in Harmonic Analysis*, Springer-Verlag, Berlin, 1994.

[12] P. Koosis, *The logarithmic integral.* II, Cambridge Stud. Adv. Math. **21**, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1992.

[13] P. Koosis, *Leçons sur le théorème de Beurling et Malliavin*, Les Publications CRM, Univ. Montréal, Montréal, QC, 1996.

[14] B.N. Khabibullin, G.R. Talipova, F.B. Khabibullin, *Zero subsequences for Bernsteins spaces and the completeness of exponential systems in spaces of functions on an interval*, St. Petersburg Math. J. **26** (2), 319–340 (2015).
DOI: https://doi.org/10.1090/S1061-0022-2015-01340-X

[15] T. Yu. Baǐguskarov, G.R. Talipova, B.N. Khabibullin, *Subsequences of zeros for classes of entire functions of exponential type distinguished by growth restrictions*, St. Petersburg Math. J. **28** (2), 127–151 (2017).
DOI: https://doi.org/10.1090/spmj/1442

**Bulat Nurmievich Khabibullin**
Institute of Mathematics with Computing Centre
Subdivision of the Ufa Federal Research Centre of Russian Academy of Science,
112 Chernyshevsky str., Ufa 450008, Russia,
*e-mail:* khabib-bulat@mail.ru

**Elena Gennadievna Kudasheva**
Akmulla Bashkir State Pedagogical University,
3A Oktyabr'skoy Revolyutsii str., Ufa, 450008, Russia,
*e-mail:* lena_kudasheva@mail.ru