

Инволюции колец $K_s(R)$

И.А. Кульгускин, Д.Т. Тапкин

Аннотация. Получено полное описание инволюций в кольцах формальных матриц $K_s(R)$ над факториальным кольцом R . Также изучена проблема эквивалентности инволюций в таких кольцах формальных матриц.

Ключевые слова: кольцо формальных матриц, инволюции, эквивалентность инволюций.

Введение

Контекст Мориты $(R, S, {}_R M_S, {}_S N_R, f, g)$ является удобным инструментом для исследования эквивалентности категорий модулей над кольцами. С каждым контекстом Мориты можно связать матричное кольцо $\begin{pmatrix} R & M \\ N & S \end{pmatrix}$, которое называется кольцом контекста Мориты или кольцом формальных матриц. В статье [1] были введены и изучены кольца $K_s(R)$ как подкласс колец формальных матриц. Это кольца матриц второго порядка над R с умножением, заданным по правилу

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + sa_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & sa_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \end{pmatrix},$$

где s – некоторый центральный элемент кольца R . Кольца $K_s(R)$ представляют собой в точности все кольца, отвечающие контекстам Мориты вида $(R, R, {}_R R_R, {}_R R_R, f, g)$.

В статье [1] была поставлена и решена проблема изоморфизма для колец $K_s(R)$, что вызвало интерес к исследованию теоретико-кольцевых свойств данных колец, в частности, и колец формальных матриц со значением в кольце в целом. В статьях [2] и [3] была обобщена теорема об изоморфизме колец $K_s(R)$. В статье [4] на кольца формальных матриц со значением в кольце была перенесена теория определителей. Группы автоморфизмов колец формальных матриц со значением в кольце исследовались в [5]. Многие результаты по кольцам формальных матриц собраны в [6].

Благодарности. Работа Д.Т. Тапкина поддержана грантом Российского научного фонда и Кабинета Министров Республики Татарстан (проект № 23-21-10086) и выполнена в рамках реализации программы развития Научно-образовательного математического центра Приволжского федерального округа (соглашение № 075-02-2023-944).

Как и исследование автоморфизмов, описание инволюций в алгебрах представляет собой одну из классических задач теории колец. Стандартными примерами инволюций является транспонирование в матричной алгебре и сопряжение в поле комплексных чисел и алгебре кватернионов. Систематическое изучение инволюций в центральных простых алгебрах впервые было предпринято А.А. Альбертом в 30-е годы прошлого века. Многие его результаты нашли отражение в монографии [7]. К настоящему времени теория инволюций в центральных простых алгебрах достаточно глубоко развита и многие ее результаты представлены в монографиях [8, 9].

В настоящей работе получено полное описание инволюций в кольцах формальных матриц $K_s(R)$ над факториальными кольцами R . Также изучена проблема эквивалентности инволюций в таких кольцах формальных матриц.

Всюду далее кольца предполагаются ассоциативными и с единицей. Через $Q(R)$ обозначается поле частных области целостности R . Для произвольного кольца R и обратимого элемента $w \in U(R)$ через $C_w : R \rightarrow R$ обозначается внутренний автоморфизм кольца R , действующий по правилу $r \mapsto wrw^{-1}$.

1. Предварительные сведения

Здесь и далее будем предполагать, что кольцо R , если не указано обратное, является факториальным и элемент $s \in R$ отличен от 0 и необратим в кольце R . Через $K_s(R)$ будем обозначать кольца Крылова формальных матриц. Через I обозначим двусторонний идеал в $K_s(R)$, порожденный матричными единицами E_{12} и E_{21} . Иными словами:

$$I = \langle E_{12}, E_{21} \rangle = \begin{pmatrix} sR & R \\ R & sR \end{pmatrix}.$$

Опишем группу внешних R -автоморфизмов данного кольца. Для этого нам потребуется несколько предварительных результатов. Начнем с того, что охарактеризуем внутренние автоморфизмы в группе всех R -автоморфизмов кольца $K_s(R)$.

Лемма 1. Пусть кольцо R факториально и $s \in R$. Если $\Phi \in \text{Inn}_R(K_s(R))$, то $\Phi(E_{11} + I) = E_{11} + I$.

Доказательство. Пусть $\Phi = C_V$, где $V = \begin{pmatrix} v_{11} & v_{12} \\ v_{21} & v_{22} \end{pmatrix}$. Так как матрица V обратима, то по [4, теорема 11.1] это эквивалентно обратимости в кольце R ее определителя $\det(V) = v_{11}v_{22} - sv_{12}v_{21}$. Нетрудно видеть, что в этом случае $V^{-1} = \frac{1}{\det(V)} \begin{pmatrix} v_{22} & -v_{12} \\ -v_{21} & v_{11} \end{pmatrix}$.

Непосредственная проверка показывает, что

$$\Phi(E_{11}) = VE_{11}V^{-1} = \frac{1}{\det(V)} \begin{pmatrix} v_{11}v_{22} & -v_{11}v_{12} \\ v_{21}v_{22} & -sv_{21}v_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + \frac{sv_{21}v_{22}}{\det(V)} & -\frac{v_{11}v_{12}}{\det(V)} \\ \frac{v_{21}v_{22}}{\det(V)} & -s\frac{v_{21}v_{12}}{\det(V)} \end{pmatrix} \in E_{11} + I.$$

Согласно [10, лемма 5.5] идеал I инвариантен относительно R -автоморфизмов кольца $K_s(R)$. Следовательно, $\Phi(E_{11} + I) = \Phi(E_{11}) + \Phi(I) \subseteq E_{11} + I$. При этом, очевидно, что $E_{11} \in \Phi(E_{11}) + \Phi(I)$. Таким образом, $E_{11} + I \subseteq \Phi(E_{11} + I) \subseteq E_{11} + I$. $\square$

Лемма 2. Пусть кольцо R факториально и $s \in R$. Если $\Phi \in \text{Aut}_R(K_s(R))$ и $\Phi(E_{11}) \in E_{11} + I$, то $\Phi \in \text{Inn}_R(K_s(R))$.

Доказательство. Положим $e = \Phi(E_{11}) \in E_{11} + I$. Так как e является идемпотентом кольца $K_s(R)$, то $e = \begin{pmatrix} a & x \\ y & 1 - a \end{pmatrix}$, где $a(1 - a) = sxy$. Согласно условию $e \in E_{11} + I$, а значит, $1 - a \in sR$.

Пусть $s \neq 0$. В силу того, что кольцо R факториально и элементы a и $1 - a$ не имеют общих необратимых множителей, существуют такие элементы $a_x, a_y, (1 - a)_x, (1 - a)_y \in R$, что

$$\begin{aligned} x &= a_x(1 - a)_x, & y &= a_y(1 - a)_y, \\ a &= a_x a_y, & (1 - a) &= s(1 - a)_x(1 - a)_y. \end{aligned}$$

Если $s = 0$, то $a = 1$. Положим $a_x = a_y = 1$, $(1 - a)_x = x$, $(1 - a)_y = y$. Тогда равенства выше сохраняются.

Зададим матрицу W следующим образом: $W = \begin{pmatrix} a_x & -(1 - a)_x \\ (1 - a)_y & a_y \end{pmatrix}$. Тогда $\det(W) = a_x a_y + s(1 - a)_x(1 - a)_y = 1$. Следовательно, матрица W обратима. Более того,

$$C_W(E_{11}) = WE_{11}W^{-1} = \begin{pmatrix} a_x a_y & a_x(1 - a)_x \\ a_y(1 - a)_y & s(1 - a)_x(1 - a)_y \end{pmatrix} = e.$$

Покажем теперь, что автоморфизм Φ обязательно является внутренним. Так как $E_{12}R = E_{11}K_s(R)E_{22}$, то

$$\begin{aligned} \Phi(E_{12})R &= \Phi(E_{12}R) = \Phi(E_{11}K_s(R)E_{22}) = \Phi(E_{11})\Phi(K_s(R))\Phi(E_{22}) = eK_s(R)(1 - e) \\ &= C_W(E_{11})C_W(K_s(R))C_W(E_{22}) = C_W(E_{11}K_s(R)E_{22}) = C_W(E_{12})R. \end{aligned}$$

Значит, для некоторого элемента $u_{12} \in U(R)$ выполняется $\Phi(E_{12}) = u_{12}C_W(E_{12})$. Аналогично найдется $u_{21} \in U(R)$ такой, что $\Phi(E_{21}) = u_{21}C_W(E_{21})$. При этом

$$sC_W(E_{11}) = s\Phi(E_{11}) = \Phi(E_{12}E_{21}) = u_{12}u_{21}C_W(E_{12})C_W(E_{21}) = su_{12}u_{21}C_W(E_{11}).$$

Таким образом, $u_{21} = u_{12}^{-1}$. Положим $H = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & u_{12}^{-1} \end{pmatrix}$. Непосредственная проверка показывает, что матрица H обратима и для любой матричной единицы E_{ij} выполняется равенство $\Phi(HE_{ij}H^{-1}) = C_W(E_{ij})$. В силу R -линейности отображения Φ получаем $\Phi = C_W \circ C_{H^{-1}} \in \text{Inn}_R(K_s(R))$. $\square$

Следствие 3. Пусть кольцо R факториально, $s \in R$ и $\Phi, \Psi \in \text{Aut}_R(K_s(R))$. Тогда эквивалентны следующие условия:

- 1) $\Phi(E_{11}) - \Psi(E_{11}) \in I$;
- 2) $\Phi = \Psi\beta$ для некоторого $\beta \in \text{Inn}_R(K_s(R))$.

Доказательство. 1) $\Rightarrow$ 2). Рассмотрим отображение $\beta = \Psi^{-1}\Phi$. Согласно [10, лемма 5.5]

$$\Psi^{-1}\Phi(E_{11} + I) = \Psi^{-1}(\Phi(E_{11}) + I) = \Psi^{-1}(\Psi(E_{11}) + I) \subseteq E_{11} + I.$$

В силу леммы 2 автоморфизм β является внутренним.

2) $\Rightarrow$ 1) непосредственно следует из [10, лемма 5.5] и леммы 1. $\square$

В силу следствия 3 автоморфизмы $\Phi, \Psi \in \text{Aut}_R(K_s(R))$ лежат в одном классе сопряженности относительно $\text{Inn}_R(K_s(R))$, если и только если $\Phi(E_{11}) - \Psi(E_{11}) \in I$. Таким образом, переходя от пары автоморфизмов Φ, Ψ к индуцированным автоморфизмам $\widehat{\Phi}, \widehat{\Psi} \in \text{Aut}_R(K_s(R)/I)$ над фактор-кольцом $K_s(R)/I$, получаем эквивалентность: Φ, Ψ лежат в одном классе сопряженности относительно $\text{Inn}_R(K_s(R)) \Leftrightarrow \widehat{\Phi} = \widehat{\Psi}$.

Разберемся, как устроена группа $\text{Aut}_R(K_s(R)/I)$. Пусть $0 \neq s \in R \setminus U(R)$ и $s = up_1^{\alpha_1} \cdots p_k^{\alpha_k}$ – разложение s на попарно неассоциированные простые множители. Неразложимость кольца R/sR равносильна отсутствию в R/sR нетривиальных идемпотентов. Предположим, что элемент $t + sR \in R/sR$ является нетривиальным идемпотентом, где $t \in R$. Тогда $t(t-1) \in sR$. Так как элементы t и $t-1$ не могут иметь общих необратимых множителей, то элементу t соответствует разбиение множества $\{1, \dots, k\} = I \sqcup J$ такое, что

$$t = \left(\prod_{i \in I} p_i^{\alpha_i} \right) t_1 = s_1 t_1, \quad 1 - t = \left(\prod_{j \in J} p_j^{\alpha_j} \right) t_2 = s_2 t_2.$$

В частности, идеалы $s_1 R$ и $s_2 R$ комаксимальны в R . Более того, s_1 и s_2 отличны от s в силу нетривиальности идемпотента $t + sR$. Обратно, если $s = s_1 \cdot s_2$, где s_1, s_2 необратимы и идеалы $s_1 R$ и $s_2 R$ попарно комаксимальны, то $R/sR \cong R/s_1 R \times R/s_2 R$ по китайской теореме об остатках.

Лемма 4. Пусть кольцо R факториально, $s \in R$ и $s \notin \{0\} \cup U(R)$. Тогда существуют необратимые элементы $s_1, \dots, s_t \in R$ такие, что

- 1) $s = s_1 s_2 \cdots s_t$;
- 2) кольцо $R/s_i R$ неразложимо для всех i ;
- 3) идеалы $s_i R$ и $s_j R$ попарно комаксимальны для всех $i \neq j$.

Доказательство. Если кольцо R/sR неразложимо, то утверждение тривиально. В противном случае, как показано выше, $R/sR \cong R/s_1R \times R/s_2R$ для $s = s_1s_2$, где идеалы s_1R и s_2R комаксимальны. Остается перейти к рассмотрению колец R/s_1R и R/s_2R и заметить, что процесс дробления когда-либо должен завершиться, так как ему соответствует разбиение множества $\{1, \dots, n\}$ в дизъюнктное объединение непустых множеств. $\square$

В силу леммы 4 и китайской теоремы об остатках имеет место цепочка изоморфизмов

$$\text{Aut}_R(K_s(R)/I) \cong \text{Aut}_R((R/sR) \oplus (R/sR)) \cong \text{Aut}_R\left(\left(\bigoplus_{i=1}^t R/s_iR\right) \oplus \left(\bigoplus_{i=1}^t R/s_iR\right)\right).$$

Так как $\text{Hom}_R(R/s_iR, R/s_jR) = 0$ при $i \neq j$, то

$$\text{Aut}_R\left(\left(\bigoplus_{i=1}^t s_iR\right) \oplus \left(\bigoplus_{i=1}^t R/s_iR\right)\right) \cong \bigoplus_{i=1}^t \text{Aut}_R(R/s_iR \oplus R/s_iR)$$

(см., например, [11, §3.4]). Итак, $\text{Aut}(K_s(R))/I \cong \underbrace{S_2 \times \dots \times S_2}_{t \text{ копий}}$.

Таким образом, $\text{Out}_R(K_s(R))$ изоморфно вкладывается в $\underbrace{S_2 \times \dots \times S_2}_{t \text{ копий}}$. Покажем, что на самом деле здесь имеет место изоморфизм.

Лемма 5. Пусть кольцо R факториально, $s \in R$ и $e = \begin{pmatrix} a & x \\ 1 & 1-a \end{pmatrix} \in K_s(R)$ — идемпотент. Тогда существует автоморфизм Θ алгебры $K_s(R)$ такой, что $\Theta(E_{11}) = e$.

Доказательство. В силу того, что $e^2 = e$, выполняется $a(1-a) = sx$. Ввиду факториальности кольца R существуют элементы $a_s, a_x, (1-a)_x, (1-a)_s \in R$ такие, что

$$a_s a_x = a, \quad (1-a)_s (1-a)_x = (1-a), \quad a_s (1-a)_s = s, \quad a_x (1-a)_x = x.$$

В $K_s(R)$ положим

$$F_{11} = \begin{pmatrix} a & x \\ 1 & (1-a) \end{pmatrix}, \quad F_{22} = \begin{pmatrix} 1-a & -x \\ -1 & a \end{pmatrix},$$

$$F_{12} = \begin{pmatrix} a_x s & -a_s a_x a_x \\ (1-a)_s & -a_x s \end{pmatrix}, \quad F_{21} = \begin{pmatrix} (1-a)_x s & (1-a)_s (1-a)_x (1-a)_x \\ -a_s & -(1-a)_x s \end{pmatrix}.$$

Зададим отображение $\Theta : K_s(R) \rightarrow K_s(R)$ по правилу $\Theta(E_{ij}) = F_{ij}$ и продолжим по линейности. Непосредственно проверяется, что отображение Θ является гомоморфизмом. Покажем, что гомоморфизм Θ является биекцией. Для этого достаточно показать, что матрицы $F_{11}, F_{22}, F_{12}, F_{21}$ линейно независимы над R . Рассмотрим уравнение

$$x_1 F_{11} + x_2 F_{22} + x_3 F_{21} + x_4 F_{22} = 0.$$

Расписывая его как систему из четырех линейных уравнений, получим систему с матрицей

$$H = \begin{pmatrix} a & (1-a) & a_x s & (1-a)_x s \\ x & -x & -a_s a_x a_x & (1-a)_s (1-a)_x (1-a)_x \\ 1 & -1 & (1-a)_s & -a_s \\ 1-a & a & -a_x s & -(1-a)_x s \end{pmatrix}.$$

Если непосредственно вычислить определитель и упростить его с помощью таких свойств, как $a_s a_x = a$, и после этого подставить в определитель равенство $sx = a(1-a)$, то получим $\det(H) = 1$. $\square$

С учетом [леммы 5](#) нам достаточно каждому элементу $\widehat{\Phi} \in \bigoplus_{i=1}^t \text{Aut}_R(R/s_i R \oplus R/s_i R)$

сопоставить идемпотент $e = \begin{pmatrix} a & x \\ 1 & 1-a \end{pmatrix}$ такой, что в элементе $(a + sR, (1-a) + sR)$, соответствующем $(e + I)/I$, компоненты, отвечающие факторам $R/p_i^{a_i} R$, переставлены таким же образом, как их переставляет $\widehat{\Phi}$. Пусть $\widehat{\Phi} = \widehat{\Phi}_1 \oplus \dots \oplus \widehat{\Phi}_t$. Тогда

- 1) $\widehat{\Phi}_i [(1 + s_i R) \oplus (0 + s_i R)] = [(1 + s_i R) \oplus (0 + s_i R)]$ равносильно тому, что $a + s_i R$ принадлежит $1 + s_i R$,
- 2) $\widehat{\Phi}_i [(1 + s_i R) \oplus (0 + s_i R)] = [(0 + s_i R) \oplus (1 + s_i R)]$ равносильно тому, что $a + s_i R$ принадлежит $s_i R$.

Таким образом, существование такого элемента a непосредственно следует из изоморфизма $R/sR \cong \bigoplus_{i=1}^t R/p_i^{a_i} R$. При этом, очевидно, $a(1-a)$ кратно s , а значит, можно подобрать $x \in R$ такой, что $a(1-a) = sx$. Итак, нами доказана

Теорема 6. Пусть кольцо R факториально, элемент $s \in R$ отличен от нуля и необратим в кольце R . Тогда

$$\text{Out}_R(K_s(R)) \cong \underbrace{S_2 \times \dots \times S_2}_{t \text{ копий}}.$$

Следствие 7. Пусть кольцо R факториально, элемент $s \in R$ отличен от нуля и необратим в кольце R . Тогда $\Phi^2 \in \text{Inn}_R(K_s(R))$ для каждого $\Phi \in \text{Aut}_R(K_s(R))$.

Следствие 8. Пусть кольцо R является кольцом главных идеалов и элемент $s \in R$ отличен от нуля и необратим в кольце R . Тогда

$$\text{Out}_R(K_s(R)) \cong \underbrace{S_2 \times \dots \times S_2}_{k \text{ копий}},$$

где k – число различных простых делителей s .

Нам потребуется следующая техническая

Лемма 9. Пусть кольцо R целостно и $s \in R$. Тогда всякий R -гомоморфизм α кольца $K_s(R)$ можно поднять до $Q(R)$ -гомоморфизма $\beta : K_s(Q(R)) \rightarrow K_s(Q(R))$. При этом если отображение α было изоморфизмом, то и отображение β будет изоморфизмом.

Доказательство. Будем ассоциировать кольца R и $K_s(R)$ с их образами при вложении в $Q(R)$ и $K_s(Q(R))$ соответственно.

Пусть $x = (a_{ij}/b_{ij}) \in K_s(Q(R))$, $a_{ij}, b_{ij} \in R \subseteq Q(R)$. Положим $\overline{b_{ij}} = 1$, если $a_{ij} = 0$, и $\overline{b_{ij}} = b_{ij}$, иначе. Тогда матрицу x можно представить в виде $x = u^{-1}Y$, где $u = \prod_{i,j} \overline{b_{ij}} \in R$ и все элементы матрицы Y лежат в R . Определим отображение $\beta : K_s(Q(R)) \rightarrow K_s(Q(R))$ по правилу: $\beta(x) = u^{-1}\alpha(Y)$. Далее в доказательстве под символами u, v будут пониматься ненулевые элементы из R , а под символами Y, W – элементы $K_s(R)$.

Для начала проверим корректность отображения β . Пусть $x \in K_s(Q(R))$ и одновременно $x = u^{-1}Y$ и $x = v^{-1}W$. Тогда

$$u\alpha(W) = \alpha(uW) = \alpha(vY) = v\alpha(Y).$$

Далее, покажем, что отображение β является $Q(R)$ -гомоморфизмом. R -гомоморфизм α индуцирует тождественный автоморфизм на R : $\alpha(rE) = rE$ для всех $r \in R$. Нетрудно видеть, что β действует тождественно на $Q(R)$ и сохраняет произведение. Остается проверить, что β сохраняет сумму. Пусть $x = u^{-1}Y, y = v^{-1}W \in K_s(Q(R))$. Имеем

$$\begin{aligned} uv\beta(x+y) &= \beta(uv(x+y)) = \beta(vY + uW) = \alpha(vY + uW) = \alpha(vY) + \alpha(uW) \\ &= v\alpha(Y) + u\alpha(W) = v\beta(Y) + u\beta(W) = uv(\beta(u^{-1}Y) + \beta(v^{-1}W)) \\ &= uv(\beta(x) + \beta(y)). \end{aligned}$$

Пусть теперь R -гомоморфизм α является изоморфизмом. Фиксируем произвольный элемент $x = u^{-1}Y \in K_s(Q(R))$. Если $\beta(x) = 0$, то и $\alpha(Y) = 0$, а значит, гомоморфизм β инъективен. С другой стороны, найдется матрица $W \in K_s(R)$ такая, что $Y = \alpha(W)$. Таким образом, $x = \beta(u^{-1}W)$, и β еще и сюръективен. $\square$

Следствие 10. Пусть кольцо R целостно и $0 \neq s \in R$. Тогда всякий R -автоморфизм $\alpha : K_s(R) \rightarrow K_s(R)$ сохраняет определитель.

Доказательство. В силу леммы 9 автоморфизм α поднимается до R -автоморфизма β алгебры $K_s(Q(R))$. Так как $0 \neq s \in U(Q(R))$, то $K_s(Q(R)) \cong M_2(Q(R))$, а значит, автоморфизм β является внутренним. В силу того, что определитель матриц из $K_s(Q(R))$ определяется как определитель образа при отображении в $M_2(Q(R))$, отображение β сохраняет определитель. $\square$

2. Инволюции в кольцах $K_s(R)$ специального вида

Пусть кольцо R факториально и $s \in R$. Через $\tau : K_s(R) \rightarrow K_s(R)$ обозначим транспонирование матриц. Очевидно, что τ является антиавтоморфизмом второго порядка, а значит, и инволюцией в $K_s(R)$. Пусть $\gamma : K_s(R) \rightarrow K_s(R)$ – произвольная инволюция. Композиция τ и γ является автоморфизмом. Следовательно, любая инволюция в $K_s(R)$ имеет вид $\gamma = \Phi \circ \tau$ для некоторого R -автоморфизма Φ .

Опишем явно как устроены инволюции в алгебре $K_s(R)$. Для начала выделим особые случаи $s \in U(R)$ и $s = 0$.

Случай 1. Пусть $s \in U(R)$. Тогда $K_s(R) \cong M_2(R)$. Согласно [12] все автоморфизмы алгебры $M_2(R)$ являются внутренними. Таким образом, если $\gamma : K_s(R) \rightarrow K_s(R)$ является инволюцией, то $\gamma = C_U \circ \tau$ для некоторой обратимой матрицы $U \in K_s(R)$. Для произвольной матрицы $A \in K_s(R)$

$$A = \gamma^2(A) = \gamma(UA^TU^{-1}) = U(U^T)^{-1}AU^TU^{-1}.$$

Следовательно, матрица $U(U^T)^{-1}$ коммутирует со всеми матрицами из $K_s(R)$. Согласно [1, лемма 1] эта матрица является скалярной матрицей, и $U = \lambda U^T$ для некоторого $\lambda \in U(R)$. Так как $\det(\lambda U^T) = \lambda^2 \det U$ и матрица U обратима, то $\lambda^2 = 1$. Таким образом, $\lambda = \pm 1$.

Если $\lambda = 1$, то матрица U симметрическая. При этом нетрудно видеть, что для любой обратимой симметрической матрицы U отображение $C_U \circ \tau$ будет инволюцией.

Если $\lambda = -1$, то $U = \begin{pmatrix} 0 & u \\ -u & 0 \end{pmatrix}$. В силу обратимости матрицы U элемент $u \in R$ также обратим. Так как матрица U восстанавливается по отображению C_U с точностью до обратимого скаляра, то можно считать, что $U = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. Поэтому отображение γ имеет вид

$$\gamma \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix},$$

для любых $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22} \in R$.

Случай 2. Пусть $s = 0$. Все нетривиальные идемпотенты алгебры $K_s(R)$ имеют вид $e = \begin{pmatrix} a & x \\ y & 1-a \end{pmatrix}$, где $a(1-a) = sxy$. Если $s = 0$, то в силу целостности кольца R элемент a равен либо 1, либо 0.

Пусть $\gamma : K_s(R) \rightarrow K_s(R)$ – инволюция и $\gamma = \Phi \circ \tau$ для некоторого R -автоморфизма Φ . Положим $\gamma(E_{11}) = \begin{pmatrix} a & x \\ y & 1-a \end{pmatrix}$. Тогда $\Phi(E_{11}) = \gamma(\tau(E_{11})) = \gamma(E_{11})$. Поэтому

$$\Phi(E_{12}R) = \Phi(E_{11}K_s(R)E_{22}) = \gamma(E_{11})K_s(R)(1 - \gamma(E_{11})).$$

Пусть $A = \begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} \\ r_{21} & r_{22} \end{pmatrix} \in K_s(R)$ – произвольная матрица. Имеем

$$\gamma(E_{11})A(1 - \gamma(E_{11})) = \begin{pmatrix} a & x \\ y & 1-a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} \\ r_{21} & r_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1-a & -x \\ -y & a \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
&= \begin{pmatrix} ar_{11} & ar_{12} + xr_{22} \\ yr_{11} + (1-a)r_{21} & (1-a)r_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1-a & -x \\ -y & a \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} ar_{11}(1-a) & -ar_{11}x + ar_{12}a + xr_{22}a \\ yr_{11}(1-a) - (1-a)r_{22}y & (1-a)r_{22}a \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

1) Положим $a = 1$. Тогда $\Phi(E_{12}R) = E_{12}R$ и аналогично $\Phi(E_{21}R) = E_{21}R$. Поэтому найдутся обратимые $\alpha, \beta \in U(R)$ такие, что $\Phi(E_{12}) = \alpha E_{12}$ и $\Phi(E_{21}) = \beta E_{21}$. Так как γ является инволюцией, то

$$E_{12} = \gamma^2(E_{12}) = \Phi\tau\Phi\tau(E_{12}) = \Phi\tau(\beta E_{21}) = \Phi(\beta E_{12}) = \alpha\beta E_{12}.$$

Поэтому $\beta = \alpha^{-1}$. Так как $\Phi(E_{11}) \in E_{11} + I$, то по [лемме 2](#) автоморфизм Φ будет внутренним. Пусть $\Phi = C_U$, где $U = \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{pmatrix} \in K_s(R)$ – обратимая матрица. Тогда $UE_{11} = \Phi(E_{11})U$, $UE_{12} = \Phi(E_{12})U$, $UE_{22} = \Phi(E_{22})U$. Вычисляя данные произведения, получаем матричные равенства

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} u_{11} & 0 \\ u_{21} & 0 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} + u_{22}x \\ u_{11}y & 0 \end{pmatrix}, \\
\begin{pmatrix} 0 & u_{11} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 & \alpha u_{22} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \\
\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ u_{22} & 0 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \beta u_{11} & 0 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Следовательно, матрица U имеет вид $U = \begin{pmatrix} \alpha u_{22} & -u_{22}x \\ \alpha u_{22}y & u_{22} \end{pmatrix}$.

Так как матрица U обратима, то обратим и ее определитель $\det(U) = \alpha u_{22}^2$. В силу того, что матрица U определяется по отображению C_U с точностью до обратимого множителя, можно считать, что $U = \begin{pmatrix} \alpha & -x \\ \alpha y & 1 \end{pmatrix}$.

Поскольку отображение γ является инволюцией, имеем

$$\begin{aligned}
E_{11} &= \gamma^2(E_{11}) = \gamma(E_{11} + xE_{12} + yE_{21}) = \gamma(E_{11}) + x\Phi(E_{21}) + y\Phi(E_{12}) \\
&= E_{11} + (x + \alpha y)E_{12} + (y + \beta x)E_{21}.
\end{aligned}$$

Таким образом, γ будет инволюцией, только если либо $x = y = 0$, либо $x = -\alpha y$.

2) Пусть $a = 0$. Тогда $\Phi(E_{12}R) = E_{21}R$ и аналогично $\Phi(E_{21}R) = E_{12}R$. Поэтому найдутся обратимые $\alpha, \beta \in U(R)$ такие, что $\Phi(E_{12}) = \alpha E_{21}$ и $\Phi(E_{21}) = \beta E_{12}$. Так как γ

является инволюцией, то

$$E_{12} = \gamma^2(E_{12}) = \Phi\tau\Phi\tau(E_{12}) = \Phi\tau(\beta E_{12}) = \Phi(\beta E_{21}) = \beta^2 E_{12}.$$

Поэтому $\beta^2 = 1$. Аналогично и $\alpha^2 = 1$.

Пусть $\pi = (12) \in S_2$. Очевидно, R -линейное отображение $\tilde{\pi} : K_s(R) \rightarrow K_s(R)$ такое, что $\tilde{\pi}(E_{ij}) = E_{\pi(i)\pi(j)}$ будет автоморфизмом алгебры $K_s(R)$. Положим $\Psi = \tilde{\pi} \circ \Phi$. Тогда $\Psi(E_{11}) = \tilde{\pi}(\gamma(E_{11}))$, $\Psi(E_{12}) = \alpha E_{12}$, $\Psi(E_{21}) = \beta E_{21}$. Так как $\Psi(E_{11}) \in E_{11} + I$, то по лемме 2 отображение Ψ будет внутренним. Как и в случае $a = 1$, можно записать матричные равенства и получить $\alpha\beta = 1$ и $\Psi = C_U$, где

$$U = \begin{pmatrix} \alpha & -y \\ \alpha x & 1 \end{pmatrix}.$$

Так как γ является инволюцией и $\Phi = \tilde{\pi} \circ \Psi$, то

$$\begin{aligned} E_{11} &= \gamma^2(E_{11}) = \gamma(E_{22} + xE_{12} + yE_{21}) = \gamma(1 - E_{11}) + x\Phi(E_{21}) + y\Phi(E_{12}) \\ &= (E_{11} - xE_{12} - yE_{21}) + \beta xE_{12} + \alpha yE_{21} = E_{11} + x(-1 + \beta)E_{12} + y(-1 + \alpha)E_{21}. \end{aligned}$$

Таким образом, γ будет инволюцией, только если либо $x = y = 0$, либо $\alpha = \beta = 1$.

Предложение 11. Пусть кольцо R является факториальным кольцом и γ – некоторая инволюция алгебры $K_0(R)$. Тогда выполняется ровно одно из трех условий:

- 1) если $\gamma(E_{11}) = E_{11}$, то $\gamma = C_U\tau$, где $U = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ и $\alpha \in U(R)$;
- 2) если $\gamma(E_{11}) = E_{22}$, то
$$\gamma \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{22} & \beta a_{12} \\ \alpha a_{21} & a_{11} \end{pmatrix}$$
 для любых $\alpha, \beta \in \{-1, 1\}$;
- 3) если $\gamma(E_{11}) = \begin{pmatrix} 1 & x \\ y & 0 \end{pmatrix}$ и хотя бы один из элементов x, y отличен от нуля, то

$$x = -\alpha y \text{ для некоторого обратимого } \alpha \in U(R) \text{ и } \gamma = C_U\tau, \text{ где } U = \begin{pmatrix} \alpha & \alpha y \\ \alpha y & 1 \end{pmatrix};$$

- 4) если $\gamma(E_{11}) = \begin{pmatrix} 0 & x \\ y & 1 \end{pmatrix}$ и хотя бы один из элементов x, y отличен от нуля, то
$$\text{и } \gamma = \tilde{\pi}C_U\tau, \text{ где } U = \begin{pmatrix} 1 & -y \\ x & 1 \end{pmatrix}.$$

Более того, каждое из отображений, указанных в п. 1)–4), является инволюцией.

3. Инволюции в кольце $K_s(R)$

Пусть кольцо R факториально, элемент $s \in R$ отличен от нуля, необратим и $s = up_1^{\alpha_1} \cdots p_k^{\alpha_k}$ – разложение s на попарно неассоциированные простые множители. Опишем все инволюции в кольце $K_s(R)$.

Пусть Φ является R -автоморфизмом кольца $K_s(R)$ и $\Phi(E_{11}) = \begin{pmatrix} a & x \\ y & 1-a \end{pmatrix}$. Из рассуждений в конце [раздела 1](#) непосредственно вытекает, что смежный класс $\Phi + \text{Inn}_R(K_s(R))$ однозначно определяет принадлежность $a + p_i^{\alpha_i} R$ либо $1 + p_i^{\alpha_i} R$, либо $p_i^{\alpha_i} R$ для каждого $1 \leq i \leq k$. Иными словами, нас интересуют разбиения $s = pq$ в произведение взаимно простых элементов p и q (с точностью до ассоциированности) таких, что $a \in qR$ и $1-a \in pR$.

Пусть $\gamma : K_s(R) \rightarrow K_s(R)$ – произвольная инволюция и $\gamma = \Phi \circ \tau$ для некоторого R -автоморфизма Φ . Пусть также $s = pq$ – разбиение s , соответствующее автоморфизму Φ . Так как идеалы pR и qR комаксимальны, то $1 = pu + qv$ для некоторых $u, v \in R$. Фиксируем какую-нибудь пару значений u, v . Тогда автоморфизм Φ лежит в том же смежном классе по $\text{Inn}_R(K_s(R))$, что и автоморфизм α такой, что $\alpha(E_{11}) = \begin{pmatrix} qv & uv \\ 1 & pu \end{pmatrix}$. Согласно [лемме 5](#) автоморфизм α можно определить в виде

$$\alpha(E_{12}) = \begin{pmatrix} pqv & -qv^2 \\ p & -pqv \end{pmatrix}, \quad \alpha(E_{21}) = \begin{pmatrix} pqu & pu^2 \\ -q & -pqu \end{pmatrix}, \quad \alpha(E_{22}) = \begin{pmatrix} pu & -uv \\ -1 & qv \end{pmatrix}.$$

Итак, $\Phi = \alpha C_U$ для некоторой обратимой матрицы U . Таким образом,

$$\gamma^2(A) = (\alpha C_U \tau)^2(A) = \alpha(U) (\alpha \tau \alpha(U^{-1}) \alpha \tau \alpha(A) \alpha \tau \alpha(U)) \alpha(U^{-1}).$$

Выясним как устроен автоморфизм $\alpha \tau \alpha$. Отображение $\tau \alpha \tau$ также является автоморфизмом, причем

$$\tau \alpha \tau(E_{11}) = \tau \alpha(E_{11}) = \begin{pmatrix} qv & 1 \\ uv & pu \end{pmatrix}.$$

Отсюда автоморфизмы α и $\tau \alpha \tau$ лежат в одном смежном классе по $\text{Inn}_R(K_s(R))$: $\tau \alpha \tau = \alpha C_B$ для некоторой обратимой матрицы $B \in K_s(R)$. В силу [следствия 7](#) имеем $\alpha \tau \alpha \tau = \alpha^2 C_B = C_H$ для некоторой обратимой матрицы $H \in K_s(R)$.

Таким образом,

$$\begin{aligned} A &= \gamma^2(A) = \alpha(U) (C_H \tau(U^{-1}) C_H(A) C_H \tau(U)) \alpha(U^{-1}) \\ &= \alpha(U) (H(U^T)^{-1} H^{-1} H A H^{-1} H U^T H^{-1}) \alpha(U^{-1}) \\ &= [\alpha(U) H(U^T)^{-1}] A [\alpha(U) H(U^T)^{-1}]^{-1}. \end{aligned}$$

Следовательно, матрица $[\alpha(U) H(U^T)^{-1}]$ коммутирует со всеми матрицами из $K_s(R)$. Согласно [\[1, лемма 1\]](#) эта матрица является скалярной матрицей и $U^T = \lambda \alpha(U) H$, где

$\lambda \in U(R)$. По [следствию 10](#) автоморфизм α сохраняет определитель. Тогда $\lambda^2 \det(H) = 1$. Так как матрица H из равенства $\alpha\tau\alpha\tau = C_H$ определяется с точностью до скалярного множителя, то, не нарушая общности, можно считать $\det(H) = 1$ и $U^T = \pm\alpha(U)H$.

Выясним, что из себя представляет матрица H . С одной стороны,

$$\begin{aligned} C_H(E_{11}) &= \alpha\tau\alpha\tau(E_{11}) = \alpha \begin{pmatrix} qv & 1 \\ uv & pu \end{pmatrix} = qv\alpha(E_{11}) + \alpha(E_{12}) + uv\alpha(E_{21}) + pu\alpha(E_{22}) \\ &= \begin{pmatrix} q^2v^2 + pqv + pqu^2v + p^2u^2 & quv^2 - qv^2 + pu^3v - pu^2v \\ qv + p - quv - pu & pquv - pqv - pqu^2v + pquv \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

С другой стороны, положим $H = \begin{pmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{pmatrix}$. Тогда

$$C_H(E_{11}) = \begin{pmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{pmatrix} E_{11} \begin{pmatrix} h_{22} & -h_{12} \\ -h_{21} & h_{11} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h_{11}h_{22} & -h_{11}h_{12} \\ h_{21}h_{22} & -pqh_{12}h_{21} \end{pmatrix}.$$

Таким образом, мы получаем систему

$$\begin{aligned} h_{11}h_{22} &= q^2v^2 + pqv + pqu^2v + p^2u^2, \\ h_{11}h_{12} &= -(quv^2 - qv^2 + pu^3v - pu^2v), \\ h_{21}h_{22} &= qv + p - quv - pu, \\ h_{12}h_{21} &= -(2uv - v - u^2v). \end{aligned}$$

После преобразования уравнений в правой части имеем

$$\begin{aligned} h_{11}h_{22} &= (qv + pu^2)(qv + p), \\ h_{11}h_{12} &= (qv + pu^2)v(1 - u), \\ h_{21}h_{22} &= (1 - u)(qv + p), \\ h_{12}h_{21} &= v(1 - u)(1 - u). \end{aligned}$$

Так как p и q взаимно просты и $pq \notin U(R)$, то $(qv + p) \neq 0$, и можно считать, что $h_{22} = (qv + p)t$ для некоторого $t \in Q(R)$. Тогда $h_{12} = v(1 - u)t$. В силу равенства $h_{22}u + qh_{12} = (pu + qv)t = t$, получаем $t \in R$. С другой стороны,

$$h_{11} + puh_{21} = (qv + pu^2)t^{-1} + pu(1 - u)t^{-1} = t^{-1},$$

а значит, и $t^{-1} \in R$. Следовательно, $t \in U(R)$. Итак, мы получили

$$H = \begin{pmatrix} (qv + pu^2)t^{-1} & v(1 - u)t \\ (1 - u)t^{-1} & (qv + p)t \end{pmatrix}.$$

Аналогично рассматривая $C_H(E_{12})$, получаем

$$\begin{pmatrix} -pqh_{11}h_{21} & h_{11}^2 \\ -pqh_{21}^2 & pqh_{11}h_{21} \end{pmatrix} = \alpha\tau\alpha\tau(E_{12}) = \alpha \begin{pmatrix} pqu & -q \\ pu^2 & -pqu \end{pmatrix} \\ = \begin{pmatrix} -pq(1-u)(pu^2+qv) & (pu^2+qv)^2 \\ -pq(-1+u)^2 & pq(1-u)(pu^2+qv) \end{pmatrix}.$$

Таким образом, $t^2 = 1$, а значит, $t = \pm 1$. При этом выбор знака t влияет только на знак матрицы H . Так как на $\det(H)$ знак матрицы влияния не оказывает, то у нас есть свобода выбора знака матрицы и можно считать $t = 1$.

Выясним теперь как устроена матрица U . Мы уже знаем, что эта матрица удовлетворяет свойству $U^T = \pm\alpha(U)H$. Для начала допустим $U^T = \alpha(U)H$. Перепишем это равенство в виде $U^TH^{-1} = \alpha(U)$. Положим $U = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix}$ и подставим в равенство выше

$$U^TH^{-1} = \begin{pmatrix} x_{11}(qv+p) + x_{21}pq(u-1) & x_{11}v(u-1) + x_{21}(qv+pu^2) \\ x_{12}(qv+p) + x_{22}(u-1) & x_{12}pqv(u-1) + x_{22}(qv+pu^2) \end{pmatrix}, \\ \alpha(U) = \begin{pmatrix} x_{11}qv + x_{12}pqv + x_{21}pqu + x_{22}pu & x_{11}uv - x_{12}qv^2 + x_{21}pu^2 - x_{22}uv \\ x_{11} + x_{12}p - x_{21}q - x_{22} & x_{11}pu - x_{12}pqv - x_{21}pqu + x_{22}qv \end{pmatrix}.$$

Получаем систему уравнений

$$\begin{aligned} x_{11}p - x_{21}pq &= x_{12}pqv + x_{22}pu, \\ -x_{11}v + x_{21}qv &= -x_{12}qv^2 - x_{22}uv, \\ x_{12}qv + x_{22}u &= x_{11} - x_{21}q, \\ x_{12}pqvu + x_{22}pu^2 &= x_{11}pu - x_{21}pqu. \end{aligned}$$

Данная система эквивалентна одному уравнению $x_{11} - x_{21}q = x_{12}qv + x_{22}u$.

Так как матрица U должна быть обратима, то ее определитель должен быть обратим. Итак, элементы матрицы должны удовлетворять системе уравнений

$$\begin{aligned} x_{11} - x_{21}q &= x_{12}qv + x_{22}u, \\ x_{11}x_{22} - pqx_{12}x_{21} &\in U(R). \end{aligned}$$

Положим

$$\begin{aligned} a &= x_{21}q + x_{22}u, \\ b &= -x_{21}p + x_{22}v, \\ c &= x_{12} + x_{21}q + x_{22}u. \end{aligned}$$

Тогда

$$\begin{aligned}x_{12} &= c - a, \\x_{21} &= av - bu, \\x_{22} &= ap + bq.\end{aligned}$$

Таким образом, тройки (a, b, c) параметризуют тройки (x_{12}, x_{21}, x_{22}) . И в параметрах a, b, c система на U выше принимает вид

$$\begin{aligned}x_{11} &= apu + cv, \\a^2p + bcq &\in U(R).\end{aligned}$$

Допустим теперь, что $U^T = -\alpha(U)H$. Это приводит нас к следующей системе уравнений

$$\begin{aligned}x_{11}(qv + p) + x_{21}pq(u - 1) &= -(x_{11}qv + x_{12}pqv + x_{21}pqu + x_{22}pu), \\x_{11}v(u - 1) + x_{21}(qv + pu^2) &= -(x_{11}uv - x_{12}qv^2 + x_{21}pu^2 - x_{22}uv), \\x_{12}(qv + p) + x_{22}(u - 1) &= -(x_{11} + x_{12}p - x_{21}q - x_{22}), \\x_{12}pqv(u - 1) + x_{22}(qv + pu^2) &= -(x_{11}pu - x_{12}pqv - x_{21}pqu + x_{22}qv).\end{aligned}$$

После группировки переменных имеем

$$\begin{aligned}x_{11}(2qv + p) + x_{12}pqv + x_{21}pq(2u - 1) + x_{22}pu &= 0, \\x_{11}v(2u - 1) - x_{12}qv^2 + x_{21}(qv + 2pu^2) - x_{22}uv &= 0, \\x_{11} + x_{12}(qv + 2p) - x_{21}q + x_{22}(u - 2) &= 0, \\x_{11}pu + x_{12}pqv(u - 2) - x_{21}pqu + x_{22}(2qv + pu^2) &= 0.\end{aligned}$$

Рассматривая уравнения выше как систему линейных уравнений над $Q(R)$, решаем ее стандартными методами алгебры. Решение системы имеет вид

$$\begin{aligned}x_{11} &= -upx_{12}, \quad x_{21} = vx_{12}, \quad x_{22} = px_{12}, \quad x_{12} \in Q(R). \\ \det(U) &= x_{11}x_{22} - pqx_{12}x_{21} = -up^2x_{12}^2 - pqvx_{12}^2 = -px_{12}^2.\end{aligned}$$

Элемент x_{12} должен быть элементом R , а значит, данное равенство возможно тогда и только тогда, когда $p, x_{12} \in U(R)$. Так как матрица U определяется с точностью до обратимого множителя, то можно считать $x_{12} = 1$. В этом случае $U = \begin{pmatrix} -pu & 1 \\ v & p \end{pmatrix}$.

Это нас приводит к следующей классификации инволюций.

Предложение 12. Пусть кольцо R является факториальным кольцом и $0 \neq s \in R \setminus U(R)$. Пусть также γ – некоторая инволюция алгебры $K_s(R)$. Тогда для инволюции γ выполняется одна из альтернатив:

- 1) $\gamma \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix}$ для любых $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22} \in R$;
- 2) для некоторого разбиения $s = pq$ такого, что идеалы pR и qR комаксимальны, и разложения $1 = pu + qv$ выполняется $\gamma = \alpha C_U \tau$, где $\alpha \in \text{Aut}_R(K_s(R))$ и обрати-

мая матрица U удовлетворяют следующим свойствам:

$$\begin{aligned}\alpha(E_{11}) &= \begin{pmatrix} qv & uv \\ 1 & pu \end{pmatrix}, & \alpha(E_{12}) &= \begin{pmatrix} sv & -qv^2 \\ p & -sv \end{pmatrix}, \\ \alpha(E_{21}) &= \begin{pmatrix} su & pu^2 \\ -q & -su \end{pmatrix}, & \alpha(E_{22}) &= \begin{pmatrix} pu & -uv \\ -1 & qv \end{pmatrix}, \\ U &= \begin{pmatrix} apu + cqv & c - a \\ av - bu & ap + bq \end{pmatrix}, & a^2p + bcq &= 1, \quad a, b, c \in R.\end{aligned}$$

Обратно, если отображение $\gamma : K_s(R) \rightarrow K_s(R)$ имеет один из указанных выше видов, то γ является инволюцией алгебры $K_s(R)$.

Доказательство. Несложная проверка показывает, что если отображение γ определено как в условии теоремы, то γ будет инволюцией. Пусть теперь γ – некоторая инволюция алгебры $K_s(R)$. Как мы видели ранее, γ можно представить в виде $\gamma = \alpha C_U \tau$. Если $U^T = -\alpha(U)H$, то можно считать, что $p = u = -1$, $q = s$, $v = 0$. Непосредственная проверка показывает, что это будет в точности инволюция из п. 1). Если же $U^T = \alpha(U)H$, то мы знаем, что матрица U имеет указанный в условии теоремы вид, но $d = \det(U) = a^2p + bcq \in U(R)$. Исправим выбор параметров p и q так, чтобы определитель матрицы U стал равняться единице. Для этого положим $p' = \frac{p}{d}$, $q' = qd$, $u' = ud$, $v' = vd$. Тогда $s = p'q'$ и $1 = p'u' + q'v'$.

В силу леммы 9 отображение α можно поднять до автоморфизма β алгебры $K_s(Q(R))$. Так как $K_s(Q(R)) \cong M_2(Q(R))$, то полученный автоморфизм обязан быть внутренним. Несложная проверка на матричных единицах показывает, что $\beta = C_V$, где $V = \begin{pmatrix} qv & u \\ 1 & -q \end{pmatrix}$. Матрица V обратима в $K_s(Q(R))$, так как $\det V = q$. При этом

$$V = \begin{pmatrix} qv & u \\ 1 & -q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q'v' & u' \\ 1 & -q' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & d^{-1} \end{pmatrix} = V' \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & d^{-1} \end{pmatrix}.$$

Положим $a' = a$, $b' = bd^{-2}$, $c' = c$ и на основе введенных параметров определим отображение α' и матрицу U' по аналогии с таковыми в условии теоремы. Тогда α' продолженное до автоморфизма $K_s(Q(R))$ есть сопряжение на матрицу V' и

$$U = \begin{pmatrix} apu + cqv & c - a \\ av - bu & ap + bq \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & d^{-1} \end{pmatrix} U'.$$

Следовательно,

$$\gamma = \alpha C_U \tau = C_V C_U \tau = C_{VU} \tau = C_{V'U'} \tau = \alpha' C_{U'} \tau.$$

При этом выполняется условие $\det(U') = (a')^2 p' + b' c' q' = 1$. □

Замечание 13. Тройки (a, b, c) из п. 2) предложения 12 существуют в том и только том случае, когда p является квадратичным вычетом по модулю q .

В лемме 5 мы строили автоморфизм, который переводит E_{11} в заданный идемпотент. Выясним какие идемпотенты могут быть реализованы как образы E_{11} под действием некоторой инволюции и используем это для описания самих инволюций.

Лемма 14. Пусть кольцо R является факториальным кольцом и $0 \neq s \in R \setminus U(R)$.

Пусть также $e = \begin{pmatrix} a & x \\ y & 1-a \end{pmatrix} \neq E_{11}$ – нетривиальный идемпотент алгебры $K_s(R)$.

Тогда эквивалентны следующие условия:

- 1) существует инволюция γ алгебры $K_s(R)$ такая, что $\gamma(E_{11}) = e$;
- 2) $1-a \neq 0$ и $\exists p \in \text{НОД}(1-a, s)$ такой, что $\frac{1-a}{p}$ является полным квадратом и делит x^2 и y^2 .

Доказательство. 1) $\Rightarrow$ 2). Пусть γ – некоторая инволюция алгебры $K_s(R)$. Если γ – инволюция из п. 1) предложения 12, то $e = E_{22}$, и утверждение п. 2) выполняется. В противном случае для некоторого разбиения $s = pq$ и $1 = pu + qv$ имеем $\gamma = \alpha C_U \tau$. Обозначим $U = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix}$. Непосредственные вычисления $\gamma(E_{11}) = \alpha C_U \tau(E_{11}) = \alpha C_U(E_{11})$ показывают, что

$$\begin{aligned} 1-a &= p(x_{11} - x_{21}q)^2 = p(x_{12}qv + x_{22}u)^2, \\ x &= (x_{11}v + x_{21}pu)(x_{11} - x_{21}q), \\ y &= (x_{22} - x_{12}p)(x_{11} - x_{21}q). \end{aligned}$$

Если $1-a = 0$, то и $x_{11} - x_{21}q = 0$, а значит, $x = y = 0$ и $e = E_{11}$. Следовательно, $1-a \neq 0$. Очевидно, $\text{НОД}(x_{11} - x_{21}q, q) = \text{НОД}(x_{11}, q)$. В то же время, $1 = \det(U) = x_{11}x_{22} - pqx_{12}x_{21}$, а значит, $\text{НОД}(x_{11}, q) = U(R)$. Наконец, в силу взаимной простоты p и q имеем $\text{НОД}(1-a, s) = \text{НОД}(p(x_{11} - x_{21}q)^2, pq) = pU(R)$.

2) $\Rightarrow$ 1). Фиксируем элемент p из условия теоремы и положим $s = pq$. Выберем $g_{22} \in R$ так, что $g_{22}^2 = \frac{1-a}{p}$, и обозначим

$$g_{12} = \frac{x}{g_{22}}, \quad g_{21} = \frac{y}{g_{22}}.$$

Элементы g_{12}, g_{21}, g_{22} лежат в R согласно условию. Так как $a(1-a) = pqxy$, то $a = qg_{12}g_{21}$, если $xy \neq 0$. Если $xy = 0$, то $a = 0 = qg_{12}g_{21}$. Так как $1 = (1-a) + a$, то $1 = pu + qv$ для некоторых $u, v \in R$, а значит, идеалы pR и qR комаксимальны.

Положим $U = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix}$, где

$$x_{11} = g_{22} + x_{21}q, \quad x_{12} = g_{22} - ug_{21},$$

$$x_{21} = g_{12} - vg_{22}, \quad x_{22} = g_{21} + px_{12}.$$

Покажем, что введенные нами элементы удовлетворяют системе

$$\begin{aligned} x_{11} - x_{21}q &= x_{12}qv + x_{22}u, \\ x_{11}x_{22} - pqx_{12}x_{21} &= 1. \end{aligned}$$

В самом деле,

$$\begin{aligned} x_{11} - x_{21}q &= g_{22}, \\ x_{12}qv + x_{22}u &= (g_{22} - ug_{21})qv + (g_{21} + px_{12})u = g_{22}qv + g_{21}u(1 - qv) + pu(g_{22} - ug_{21}) = g_{22}, \\ x_{11}x_{22} - pqx_{12}x_{21} &= (g_{22} + x_{21}q)(g_{21} + px_{12}) - pqx_{12}x_{21} = (g_{22} + x_{21}q)g_{21} + pg_{22}x_{12} \\ &= ((1 - qv)g_{22} + qg_{12})g_{21} + pg_{22}(g_{22} - ug_{21}) \\ &= (1 - qv - pu)g_{22}g_{21} + qg_{12}g_{21} + pg_{22}^2 = \frac{qxy}{g_{22}^2} + (1 - a) = \frac{pqxy}{pg_{22}^2} + (1 - a) \\ &= \frac{a(1 - a)}{(1 - a)} + (1 - a) = 1. \end{aligned}$$

Наконец, с помощью [предложения 12](#) определим инволюцию $\gamma = \alpha C_U \tau$. Равенства для $(1 - a), x, y$ из доказательства п. 1) $\Rightarrow$ 2) гарантируют, что $\gamma(E_{11}) = e$. $\square$

Обратим внимание, что равенства в доказательстве импликаций 1) $\Rightarrow$ 2) и 2) $\Rightarrow$ 1) гарантируют, что любая инволюция такая, что $\gamma(E_{11}) \neq E_{11}$, может быть получена с помощью конструкции из доказательства 2) $\Rightarrow$ 1). Таким образом, доказательство [леммы 14](#) дает конструктивное описание инволюций. Однако свобода в выборе параметров p, q, u, v теоретически может порождать разные инволюции с одинаковым образом E_{11} . Покажем, что на самом деле в условиях [леммы 14](#) инволюция γ определяется однозначно, если $e \neq E_{22}$.

Предположим, что γ_1, γ_2 – инволюции алгебры $K_s(R)$ такие, что $\gamma_1(E_{11}) = \gamma_2(E_{22})$ и $\gamma_2(E_{22}) \neq E_{11}, E_{22}$. Так как $\gamma_1\gamma_2$ сохраняет E_{11} и E_{22} , то $\gamma_1\gamma_2$ – внутренний автоморфизм по [лемме 2](#). Более того,

$$\gamma_1\gamma_2(E_{12}R) = \gamma_1\gamma_2(E_{11}K_s(R)E_{22}) = E_{11}K_s(R)E_{22} = E_{12}R.$$

Для некоторого обратимого $w \in R$ имеем $\gamma_1\gamma_2(E_{12}) = wE_{12}$. Непосредственная проверка показывает, что $\gamma_1\gamma_2(E_{21}) = w^{-1}E_{21}$ и $\gamma_1\gamma_2 = C_W$, где $W = \begin{pmatrix} w & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Тогда $\gamma_1 = C_W\gamma_2$ и для произвольной матрицы $A \in K_s(R)$

$$A = \gamma_1^2(A) = (C_W\gamma_2)^2(A) = (W\gamma_2(W)^{-1})A(W\gamma_2(W)^{-1}).$$

Следовательно, $\gamma_2(W) = \lambda W$ для некоторого обратимого $\lambda \in R$. Однако

$$\gamma_2(W) = \gamma_2(wE_{11} + E_{22}) = \gamma_2(1 + (w - 1)E_{11}) = 1 + (w - 1)\gamma_2(E_{11}).$$

Так как $\gamma_2(E_{11}) \neq E_{11}, E_{22}$, то равенство $\gamma_2(W) = \lambda W$ влечет $w = 1$. Значит, $\gamma_1 = \gamma_2$.

В силу однозначности задания инволюций в лемме 14, можно явно определить образы матричных единиц. Получаем итоговую классификацию инволюций в алгебре $K_s(R)$.

Теорема 15. Пусть кольцо R является факториальным кольцом и $0 \neq s \in R \setminus U(R)$. Пусть также γ – некоторая инволюция алгебры $K_s(R)$. Тогда выполняется ровно одно из трех условий:

- 1) если $\gamma(E_{11}) = E_{11}$, то $\gamma = C_W \tau$, где $W = \begin{pmatrix} w & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ и $w \in U(R)$;
- 2) если $\gamma(E_{11}) = E_{22}$, то либо

$$\gamma \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix} \text{ для любых } a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22} \in R,$$
 либо

$$\gamma \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{22} & a_{12} \\ a_{21} & a_{11} \end{pmatrix} \text{ для любых } a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22} \in R;$$
- 3) если $\gamma(E_{11}) = \begin{pmatrix} a & x \\ y & 1 - a \end{pmatrix}$ есть нетривиальный идемпотент, отличный от E_{11}, E_{22} , то $1 - a \neq 0$ и $\exists p \in \text{НОД}(1 - a, s)$ такой, что $\frac{1 - a}{p}$ является полным квадратом и делит x^2 и y^2 . При этом

$$\gamma(E_{12}) = \begin{pmatrix} ys & 1 - a \\ -s\frac{y^2}{1-a} & -ys \end{pmatrix}, \quad \gamma(E_{21}) = \begin{pmatrix} xs & -s\frac{x^2}{1-a} \\ 1 - a & -xs \end{pmatrix}, \quad \gamma(E_{22}) = 1 - \gamma(E_{11}).$$

Более того, каждое из отображений, указанных в п. 1)–3), является инволюцией.

Доказательство. 1) Допустим, что $\gamma(E_{11}) = E_{11}$. В этом случае отображение $\gamma\tau$ является автоморфизмом алгебры $K_s(R)$, который оставляет E_{11} на месте. Как и ранее, заключаем $\gamma\tau = C_W$, где $W = \begin{pmatrix} w & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Таким образом, $\gamma = C_W \tau$. Тривиально проверяется, что $(C_W \tau)^2 = \text{id}$ для любого $w \in U(R)$.

2) Пусть γ_1, γ_2 – инволюции $K_s(R)$ такие, что $\gamma_1(E_{11}) = \gamma_2(E_{22}) = E_{22}$. Как и ранее, получаем $\lambda W = \gamma_2(W) = 1 + (w - 1)\gamma_2(E_{11})$, $\gamma_1\gamma_2 = C_W$, где $W = \begin{pmatrix} w & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Возьмем в качестве γ_2 инволюцию из п. 1) предложения 12. Тогда

$$\lambda(wE_{11} + E_{22}) = 1 + (w - 1)\gamma_2(E_{11}) = (E_{11} + wE_{22}).$$

Поэтому значение w равно либо 1, либо -1 .

3) Допустим, что $\gamma(E_{11}) \neq E_{11}, E_{22}$. Зададим явно данную инволюцию.

Пусть γ – такая инволюция, что $\gamma(E_{11}) = e = \begin{pmatrix} a & x \\ y & 1-a \end{pmatrix} \neq E_{11}$. Как было показано ранее, инволюция γ определяется как $\gamma = \alpha C_U \tau$, где $U = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix}$ и

$$\begin{aligned} x_{21} &= g_{12} - v g_{22}, \\ x_{11} &= g_{22} + x_{21} q = g_{22} + (g_{12} - v g_{22}) q = g_{22} p u + g_{12} q, \\ x_{12} &= g_{22} - u g_{21}, \\ x_{22} &= g_{21} + p x_{12} = g_{21} + p(g_{22} - u g_{21}) = g_{21} q v + g_{22} p. \end{aligned}$$

Если, как и при доказательстве предложения 12, перейти к кольцу $K_s(Q(R))$, то $\alpha = C_V$, где $V = \begin{pmatrix} qv & u \\ 1 & -q \end{pmatrix}$. Тогда $\gamma = C_{VU} \tau$ и

$$VU = \begin{pmatrix} qv & u \\ 1 & -q \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g_{22} p u + g_{12} q & g_{22} - u g_{21} \\ g_{12} - v g_{22} & g_{21} q v + g_{22} p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_{12} q & g_{22} \\ g_{22} & -g_{21} q \end{pmatrix}.$$

Непосредственные вычисления показывают, что

$$\gamma(E_{12}) = (VU)E_{21}(VU)^{-1} = \begin{pmatrix} g_{21} g_{22} s & g_{22}^2 p \\ -q g_{21}^2 & -g_{21} g_{22} s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y s & 1-a \\ -s \frac{y^2}{1-a} & -y s \end{pmatrix}.$$

$$\text{Аналогично } \gamma(E_{21}) = \begin{pmatrix} x s & -s \frac{x^2}{1-a} \\ 1-a & -x s \end{pmatrix}.$$

□

4. Эквивалентность инволюций

Пусть (A, γ) и (B, σ) – две алгебры с инволюциями γ и σ . Говорят, что данные алгебры изоморфны как алгебры с инволюциями, если существует изоморфизм алгебр $\varphi : A \rightarrow B$ такой, что $\varphi(\gamma(a)) = \sigma(\varphi(a))$ для любого $a \in A$. Будем называть инволюции γ и σ алгебры A эквивалентными, если (A, γ) и (A, σ) изоморфны как алгебры с инволюциями.

Лемма 16. Пусть кольцо R является факториальным кольцом и $0 \neq s \in R$. Пусть также Φ и γ – автоморфизм и инволюция алгебры $K_s(R)$ соответственно. Тогда существует матрица $V \in U(K_s(R))$ такая, что $\gamma \Phi = \Phi C_V \gamma$. При этом $\det(V)$ является полным квадратом в R .

Доказательство. Положим $\Psi = \gamma \Phi \gamma$. Выясним, что из себя представляет автоморфизм Ψ .

1) Допустим $\gamma = \tau$. Тогда $\Psi(E_{11}) = \tau \Phi \tau(E_{11}) = \tau(\Phi(E_{11})) \in \Phi(E_{11}) + I$. В силу следствия 3 найдется отображение $\beta \in \text{Inn}(K_s(R))$ такое, что $\Psi = \Phi \beta$.

2) Пусть теперь γ – произвольная инволюция алгебры $K_s(R)$. Так как композиция инволюций является автоморфизмом, то $\gamma = \Omega\tau$ для некоторого автоморфизма Ω . Из того, что автоморфизм γ^2 тождественный, следует $\tau\Omega\tau = \Omega^{-1}$. Тогда

$$\Psi = \gamma\Phi\gamma = \Omega\tau\Phi\Omega\tau = \Omega(\tau\Phi\tau)\Omega^{-1} = \Omega\Phi\Omega^{-1}.$$

Так как группа $\text{Aut}_R(K_s(R)/I)$ абелева, то $\Psi(E_{11}) + I = \tau\Phi\tau(E_{11}) + I = \Phi(E_{11}) + I$. Снова в силу [следствия 3](#) найдется отображение $\alpha \in \text{Inn}(K_s(R))$ такое, что $\Psi = \Phi\alpha$, а значит, $\gamma\Phi = \Psi\gamma = \Phi\alpha\gamma$. Из равенства $\Phi\alpha = \Psi = \gamma\Phi\gamma$ вытекает $\alpha = \Phi^{-1}\gamma\Phi\gamma$.

Согласно [лемме 9](#) отображение Φ можно поднять до автоморфизма $K_s(Q(R))$. Тогда для некоторой матрицы $M \in U(K_s(Q(R)))$ имеет место $\Phi = C_M$. Следовательно

$$\alpha = \Phi^{-1}\gamma\Phi\gamma = C_{M^{-1}}\gamma C_M\gamma = C_{M^{-1}}C_{\gamma(M^{-1})} = C_{M^{-1}\gamma(M^{-1})}.$$

Так как $\alpha \in \text{Inn}(K_s(R))$, то $\alpha = C_V$ для некоторой матрицы $V \in U(K_s(R))$. Таким образом, найдется $\lambda \in U(Q(R))$ такой, что $V = \lambda M^{-1}\gamma(M^{-1})$. Так как каждый автоморфизм сохраняет определитель, то определители сохраняет и любая инволюция (так как этим свойством обладает транспонирование). Переходя к определителю, получаем $\det(V) = f^2$ для некоторого $f \in Q(R)$. Так как кольцо R целостное, то $f \in R$. $\square$

Лемма 17. Пусть кольцо R является факториальным кольцом и $0 \neq s \in R$ и γ, σ – некоторые инволюции алгебры $K_s(R)$. Если инволюции γ и σ эквивалентны, то существует матрица $V \in U(K_s(R))$ такая, что $\gamma = C_V\sigma$, и $\det(V)$ является полным квадратом в R .

Доказательство. Допустим, что инволюции γ и σ эквивалентны. Тогда существует автоморфизм $\varphi \in \text{Aut}(K_s(R))$ такой, что $\varphi\gamma = \sigma\varphi$. В силу [леммы 16](#) найдется обратимая матрица $V \in U(K_s(R))$ такая, что $\sigma\varphi = \varphi C_V\sigma$. Следовательно, $\gamma = C_V\sigma$. $\square$

Предложение 18. Пусть кольцо R является факториальным кольцом и $0 \neq s \in R \setminus U(R)$. Если инволюции γ и σ алгебры $K_s(R)$ эквивалентны, то они принадлежат одному типу в [теореме 15](#). Более того,

- 1) инволюции типа 1 эквивалентны тогда и только тогда, когда соответствующие элементы $w_1, w_2 \in U(R)$ связаны тождеством $w_1 = \lambda^2 w_2$ для некоторого $\lambda \in U(R)$;
- 2) инволюции типа 2 эквивалентны между собой тогда и только тогда, когда (-1) является квадратом в R ;
- 3) если инволюции типа 3 эквивалентны между собой, то соответствующие элементы $p \in R$ ассоциированы.

Доказательство. Пусть инволюции γ и σ эквивалентны. В силу [леммы 17](#) имеем $\gamma = C_V\sigma$, и $\det(V)$ является полным квадратом в R . Инволюции γ и σ должны иметь вид $\Phi \circ \tau$ и $\Psi \circ \tau$ для некоторых $\Phi, \Psi \in \text{Aut}(K_s(R))$. Тогда утверждение [леммы 17](#) говорит о том, что

Φ и Ψ лежат в одном смежном классе по $\text{Inn}_R(K_s(R))$. Поэтому инволюции разного типа в [теореме 15](#) не эквивалентны между собой.

Утверждение 1) очевидно вытекает из того, что центр $K_s(R)$ состоит из скалярных матриц, а у них определитель является квадратом. Утверждение 2) следует из того, что инволюции типа 2 в [теореме 15](#) получаются друг из друга сопряжением на матрицу

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Наконец, пусть γ – инволюция типа 3. Тогда $\gamma = \Phi \circ \tau$, и разложение $s = pq$, где идеалы pR и qR комаксимальны, задает класс сопряженности по $\text{Inn}_R(K_s(R))$ автоморфизма Φ . □

Пример 19. 1) Пусть $p \in \mathbb{Z}$ – простой элемент. Пусть также кольцо R является локализацией $\mathbb{Z}$ по идеалу $p\mathbb{Z}$ или кольцом p -адических целых чисел $\mathbb{Z}_p$. Если $0 \neq s \in R \setminus U(R)$, то в алгебре $K_s(R)$ существует бесконечное число попарно не эквивалентных инволюций.

В обоих случаях существует бесконечно много инволюций типа 1, так как любые два простых целых числа $w_1, w_2 \in R$, отличные от p , не могут быть связаны соотношением $w_1 = \lambda^2 w_2$.

2) Пусть $R = \mathbb{Q}[x]$ или $R = \mathbb{Q}[[x]]$. Если $0 \neq s \in R \setminus U(R)$, то в алгебре $K_s(R)$ существует бесконечное число попарно не эквивалентных инволюций.

В обоих случаях существует бесконечно много инволюций типа 1, так как любые два простых целых числа $w_1, w_2 \in R$ не могут быть связаны соотношением $w_1 = \lambda^2 w_2$.

Список литературы

- [1] П.А. Крылов, *Об изоморфизме колец обобщённых матриц*, Алгебра и логика **47** (4), 456–463 (2008).
URL: <https://www.mathnet.ru/rus/al367>
- [2] G. Tang, Ch. Li, Y. Zhou, *Study of Morita contexts*, Commun. Algebra **42** (4), 1668–1681 (2014).
DOI: <https://doi.org/10.1080/00927872.2012.748327>
- [3] G. Tang, Y. Zhou, *A class of formal matrix rings*, Linear Algebra Appl. **438** (12), 4672–4688 (2013).
DOI: <https://doi.org/10.1016/j.laa.2013.02.019>
- [4] П.А. Крылов, А.А. Туганбаев, *Формальные матрицы и их определители*, Фундамент. и прикл. матем. **19** (1), 65–119 (2014).
URL: <https://www.mathnet.ru/rus/fpm1569>
- [5] П.А. Крылов, А.А. Туганбаев, *Автоморфизмы матричных колец*, Итоги науки и техн. Сер. Соврем. матем. и ее прил. Темат. обз. **219**, 16–38 (2023).

DOI: <https://doi.org/10.36535/0233-6723-2022-219-16-38>

- [6] П.А. Крылов, А.А. Туганбаев, *Кольца формальных матриц и модули над ними*, МЦ-НМО, М., 2017.
- [7] A.A. Albert, Structure of algebras, Amer. Math. Soc. Colloquium Publ. **24**, AMS, Providence, R.I., 1961.
- [8] M.A. Knus, A. Merkurjev, M. Rost, J.-P. Tignol, *The book of involutions*, Amer. Math. Soc. Colloquium Publ. **44**, AMS, Providence R.I., 1998.
- [9] N. Jacobson, *Finite-dimensional division algebras over fields*, Springer-Verlag, Berlin, 1996.
DOI: <https://doi.org/10.1007/978-3-642-02429-0>
- [10] А.Н. Абызов, Д.Т. Тапкин, *Кольца формальных матриц и их изоморфизмы*, Сиб. матем. журн. **56** (6), 1199–1214 (2015).
DOI: <https://doi.org/10.17377/smzh.2015.56.601>
- [11] Р. Пирс, *Ассоциативные алгебры*, Мир, М., 1986.
- [12] I.M. Isaacs, *Automorphism of matrix algebras over commutative rings*, Linear Algebra Appl. **31**, 215–231 (1980).
DOI: [https://doi.org/10.1016/0024-3795\(80\)90221-9](https://doi.org/10.1016/0024-3795(80)90221-9)

Иван Александрович Кульгускин

Казанский (Приволжский) федеральный университет,
ул. Кремлевская, д. 18, г. Казань, 420008, Россия,
e-mail: ivan-kull@rambler.ru

Даниль Тагирзянович Тапкин

Казанский (Приволжский) федеральный университет,
ул. Кремлевская, д. 18, г. Казань, 420008, Россия,
e-mail: danil.tapkin@yandex.ru

Involutions of $K_s(R)$

I.A. Kulguskin, D.T. Tapkin

Abstract. We give a description of involutions in formal matrix ring $K_s(R)$ over an UFD. Some results on equivalency of involutions were also obtained.

Keywords: formal matrix ring, involutions, equivalency of involutions.

References

- [1] P.A. Krylov, *Isomorphism of generalized matrix rings*, Algebra and Logic **47** (4), 258–262 (2008).
DOI: <https://doi.org/10.1007/s10469-008-9016-y>
- [2] G. Tang, Ch. Li, Y. Zhou, *Study of Morita contexts*, Commun. Algebra **42** (4), 1668–1681 (2014).
DOI: <https://doi.org/10.1080/00927872.2012.748327>
- [3] G. Tang, Y. Zhou, *A class of formal matrix rings*, Linear Algebra Appl. **438** (12), 4672–4688 (2013).
DOI: <https://doi.org/10.1016/j.laa.2013.02.019>
- [4] P.A. Krylov, A.A. Tuganbaev, *Formal matrices and their determinants*, J. Math. Sci. **211** (3), 341–380 (2015).
DOI: <https://doi.org/10.1007/s10958-015-2610-3>
- [5] P.A. Krylov, A.A. Tuganbaev, *Automorphisms of matrix rings*, Itogi Nauki i Tekhniki. Ser. Sovrem. Matem. Pril. Temat. Obz. **219**, 16–38 (2023) [in Russian].
DOI: <https://doi.org/10.36535/0233-6723-2022-219-16-38>
- [6] P.A. Krylov, A.A. Tuganbaev, *Formal matrices*, Springer Cham, 2017.
DOI: <https://doi.org/10.1007/978-3-319-53907-2>
- [7] A.A. Albert, *Structure of algebras*, Amer. Math. Soc. Colloquium Publ. **24**, AMS, Providence, R.I., 1961.
- [8] M.A. Knus, A. Merkurjev, M. Rost, J.-P. Tignol, *The Book of Involutions*, Amer. Math. Soc. Colloquium Publ. **44**, AMS, Providence R.I., 1998.

Acknowledgements. The work of Tapkin D.T. is supported by the Russian Science Foundation and the Government of the Republic of Tatarstan (grant no. 23-21-10086) and performed under the development program of Volga Region Mathematical Center (agreement no. 075-02-2023-944).

Received: 09 August 2023. Accepted: 28 November 2023. Published: 26 December 2023.

- [9] N. Jacobson, *Finite-dimensional division algebras over fields*, Springer-Verlag, Berlin, 1996.
DOI: <https://doi.org/10.1007/978-3-642-02429-0>
- [10] A.N. Abyzov, D.T. Tapkin, *Formal matrix rings and their isomorphisms*, Siberian Math. J. **56** (6), 955–967 (2015).
DOI: <https://doi.org/10.1134/S0037446615060014>
- [11] R.S. Pierce, *Associative algebras*, Springer, N.Y., 1982.
DOI: <https://doi.org/10.1007/978-1-4757-0163-0>
- [12] I.M. Isaacs, *Automorphism of matrix algebras over commutative rings*, Linear Algebra Appl. **31**, 215–231 (1980).
DOI: [https://doi.org/10.1016/0024-3795\(80\)90221-9](https://doi.org/10.1016/0024-3795(80)90221-9)

Ivan Aleksandrovich Kulguskin

Kazan Federal University,
18 Kremlyovskaya str., Kazan 420008, Russia,
e-mail: ivan-kull@rambler.ru

Danil Tagirzyanovich Tapkin

Kazan Federal University,
18 Kremlyovskaya str., Kazan 420008, Russia,
e-mail: danil.tapkin@yandex.ru