Том 2, Выпуск 1
Стр. 31–54 (2024)

УДК 517.982, 517.983
MSC 28C20, 28A35

О продолжении сингулярных линейных бесконечномерных гамильтоновых потоков

В.А. Глазатов, В.Ж. Сакбаев

Аннотация. Исследуется явление ухода на бесконечность за конечное время фазовых траекторий гамильтоновой системы, фазовым пространством которой является сепарабельное гильбертово пространство. Показано, что если гамильтониан является плотно определенной квадратичной формой на фазовом пространстве, не мажорируемой ни снизу, ни сверху квадратичной формой гильбертовой нормы, то фазовые траектории допускают уход на бесконечность за конечное время. Для описания фазового потока таких гамильтоновых систем вводится расширенное фазовое пространство, которое представляет собой локально выпуклое пространство, на которое допускают продолжения определенные на исходном гильбертовом пространстве функция Гамильтона, траектории гамильтоновой системы и симплектическая форма. Также исследуются инвариантные относительно потока меры на расширенном пространстве. Исследованы свойства купмановкого унитарного представления продолженного фазового потока в гильбертовом пространстве функций, квадратично интегрируемых по инвариантной мере.

Ключевые слова: симплектоморфизм, трансляционно инвариантная мера, теорема А. Вейля, гамильтонов поток, купмановское представление.

DOI: 10.26907/2949-3919.2024.1.31-54

Введение

В ряде задач математической физики возникают гамильтоновы системы, фазовым пространством которых является бесконечномерное сепарабельное гильбертово пространство, наделенное трансляционно инвариантной симплектической формой [1–3]. В некоторых ситуациях фазовые траектории бесконечномерной гамильтоновой системы допускают уход на бесконечность за конечное время. В статье исследуется модельный пример явления ухода на бесконечность, описывемый линейной системой уравнений Гамильтона.

В настоящей статье исследуются квадратичные функции Гамильтона на вещественном сепарабельном гильбертовом пространстве, наделенном симплектической структурой

© 2024 В.А. Глазатов, В.Ж. Сакбаев
Поступила: 14.01.2024. Принята: 27.02.2024. Опубликована: 11.04.2024.

и неотрицательной конечно-аддитивной мерой, инвариантной относительно группы симплектоморфизмов [1,4,5]. Показано, что если квадратичная форма Гамильтониана не мажорирована квадратичной формой гильбертовой нормы ни сверху, ни снизу, то траектории таких гамильтоновых систем допускают уход на бесконечность в фазовом пространстве за конечное время.

Для описания фазового потока гамильтоновых систем, траектории которых за конечное время уходят на бесконечность, вводится расширенное фазовое пространство. Расширение фазового пространства представляет собой локально выпуклое пространство, в которое плотно вложено исходное гильбертово пространство. На расширенное фазовое пространство допускают продолжения плотно определенная на исходном гильбертовом пространнстве функция Гамильтона, траектории гамильтоновой системы, симплектическая форма и инвариантная мера. Представлен и новый класс инвариантных мер на расширенном фазовом пространстве. При этом расширенная функция Гамильтона плотно определена на расширенном фазовом пространстве, расширенная симплектическая форма не является ограниченной билинейной формой, но расширенный фазовый поток сохраняет расширенную симплектическую форму и меру на расширенном фазовом пространстве.

Наличие инвариантной относительно гамильтонова потока меры на расширенном фазовом пространстве позволяет получить купмановское унитарное представление потока в гильбертовом пространстве функций, квадратично интегрируемых по инвариантной мере. Купмановская унитарная группа не является непрерывной в сильной операторной топологии. Анализ спектральных свойств операторов купмановской группы позволяет найти инвариантные подпространства, сужение на которые унитарной группы обладает свойством сильной непрерывности.

Важную роль в реализации предложенной программы исследований бесконечномерных гамильтоновых систем играет мера на фазовом пространстве, инвариантная относительно группы гамильтоновых преобразований. Изучение мер на топологических векторных пространствах, инвариантных относительно групп преобразований, приводит согласно теореме Вейля к анализу мер, не обладающих некоторыми из свойств меры Лебега.

Конечно-аддитивные меры, в том числе аналоги меры Лебега на бесконечномерных локально выпуклых пространствах (ЛВП), имеют применения к изучению квантования бесконечномерных гамильтоновых систем (в частности, вторичного квантования), задачам статистической механики, теории квантовых изменений, изучению случайных унитарных групп и динамики открытых квантовых систем [5–9]. Одним из важных свойств меры Лебега на конечномерном евклидовом пространстве как на абелевой топологической группе с операцией сложения элементов является не только ее инвариантность относительно действия произвольного элемента группы (т. е. сдвига на произвольный вектор), но и относительно сдвигов вдоль траекторий бездивергентных векторных полей, в частности, относительно гамильтоновых преобразований.

Так как группа сдвигов на векторы пространства является подгруппой группы гамильтоновых потоков, порожденных линейными по координатам и импульсам функциями

Гамильтона, то построение трансляционно инвариантных мер на ЛВП является важным шагом в исследовании поставленной задачи [9–13]. В работах [4,5,14] исследованы продолжения меры из [13] на более широкое кольцо подмножеств, инвариантные относительно потоков, порождаемых некоторыми гамильтоновыми полями. Такие продолжения будем называть симплектическими мерами.

Исследуются класс квадратичных гамильтонианов (гиперболических осцилляторов) на гильбертовом фазовом пространстве, для которых решения линейной системы уравнений Гамильтона допускают явление неограниченного возрастания кинетической энергии за конечное время. Показано, что динамика таких гамильтоновых систем допускает естественное продолжение с гильбертова фазового пространства на содержащее его локально выпуклое фазовое пространство. А именно, найдено продолжение симплектической формы с гильбертова пространства на топологическое векторное простанство числовых последовательностей такое, что фазовый поток допускает единстивенное покоординатное продолжение в расширенное фазовое пространство. Инвариантные меры на расширенном фазовом пространстве, необходимые для получения купмановского представления потока, построены как произведения конечно-аддитивных трансляционно инвариантных мер на счетной совокупности конечномерных евклидовых пространств.

В настоящей работе, продолжающей начатые в [5,14] исследования явления blow-up в линейных системах, предложена новая конструкция расширения фазового пространства и продолжения фазовых траекторий. Введение инвариантных мер на расширенном фазовом пространстве позволило описать купмановское представление фазового потока в терминах спектральных свойств унитарных преобразований.

В разделе 1 приведено описание однородной симплектической структуры на сепарабельном гильбертовом пространстве.

В разделе 2 построена конечно-аддитивная мера на вещественном сеперабельном гильбертовом пространстве, снабженном стандартной симплектической структурой, инвариантная относительно гамильтоновых потоков, сохраняющих двумерные симплектические подпространства.

В разделе 3 рассмотрены приложения инвариантной меры к гамильтоновым системам. Исследованы классы гамильтоновых систем, в том числе линейные и квадратичные.

В разделе 4 определена процедура расширения фазового пространства и процедура продолжения траекторий гамильтоновой системы, покидающих исходное фазовое пространство за конечное время, в расширенное пространство.

В разделе 5 получено купмановское представление гамильтонова потока в расширенном фазовом пространстве посредством унитарной группы в пространстве функций, квадратично интегрируемых по инвариантной относительно потока мере.

1. Симплектическая структура

Симплектической структурой на вещественном сепарабельном гильбертовом пространстве E называется невырожденная замкнутая дифференциальная 2-форма на пространстве E. Если симплектическая структура на гильбертовом пространстве E инвариантна относительно сдвигов, то она задается невырожденной кососимметрической билинейной формой ω на пространстве E (при этом гильбертово пространство E отождествляется со своим сопряженным). Симплектическая структура ω на вещественном сепарабельном гильбертовом пространстве E называется естественной, если в пространстве E существует такой ортонормированный базис $\{g_k\} \equiv \mathcal{G}$, что $\omega(g_{2k-1}, g_j) = \delta_{j,2k},\ k, j \in \mathbb{N}$, $\delta_{j,i}$ – символ Кронеккера (см. [8, 9]).

Естественная симплектическая структура ω определяет разложение пространства E в прямую сумму двух подпространств $Q \oplus P$, базисами в которых являются соответственно ортонормированные системы $e_j = g_{2j-1}$, $j \in \mathbb{N}$, и $f_k = g_{2k},\ k \in \mathbb{N}$. Тогда

$$\omega(e_j, e_i) = 0, \quad \omega(f_i, f_j) = 0 \quad \forall\ i, j \in \mathbb{N}; \qquad \omega(e_j, f_k) = \delta_{jk}, \quad j, k \in \mathbb{N} \tag{1}$$

(см. [8]). В этом случае базис $\{g_i,\ i \in \mathbb{N}\} = \{e_j, f_k;\ j,\ k \in \mathbb{N}\}$ называется симплектическим базисом пространства E, соответствующим симплектической форме ω.

Ассоциированный с билинейной формой ω линейный оператор $\mathbf{J}$ является невырожденным кососимметрическим оператором, действие которого на векторы симплектического базиса задается равенствами

$$\mathbf{J}(e_j) = -f_j, \quad \mathbf{J}(f_k) = e_k, \quad j \in \mathbb{N},\ k \in \mathbb{N}.$$

При этом Q и P называются пространством координат и пространством импульсов соответственно, и предполагается, что P является сопряженным к Q (см. [8, 9, 15]).

Гамильтоновой системой называется тройка $(E, \mathbf{J}, h)$, где $(E, \mathbf{J})$ – гильбертово пространство с симплектической структурой, $h:\ E_2 \to \mathbb{R}$ – определенная и непрерывно дифференцируемая по Гато на векторном подпространстве E_2 пространства E функция, называемая функцией Гамильтона.

Плотно определенное векторное поле $\mathbf{v}:\ E_2 \to E$ называется гамильтоновым, если существует такая функция Гамильтона $h:\ E_1 \to \mathbb{R}$, $E_2 \subset E_1 \subset E$, что $\mathbf{v}(z) = \mathbf{J}Dh(z)$, $z \in E_2$. Здесь функция h дифференцируема на плотно вложенном в пространство E подпространстве $E_2 \subset E_1$, Dh – дифференциал функции h, $\mathbf{J}$ – линейный оператор, ассоциированный с билинейной формой ω в гильбертовом пространстве E.

Однопараметрическая группа Φ_t, $t \in \mathbb{R}$, непрерывно дифференцируемых преобразований пространства E_2 называется гладким гамильтоновым потоком в пространстве E_2, порожденным гамильтоновым векторным полем $\mathbf{v}:\ E_2 \to E$, если выполняется равенство $\dfrac{d}{dt}\mathbf{\Phi}_t(q,p) = \mathbf{v}(\mathbf{\Phi}_t(q,p))$, $(q,p) \in E_2$. Если гамильтонов поток в пространстве E_2 допускает единственное продолжение по непрерывности с пространства E_2 на пространство E, то такое продолжение потока называется обобщенным гамильтоновым потоком в пространстве E, порожденным гамильтоновым векторным полем $\mathbf{v}$ (гамильтонианом h). Такое продолжение гладкого гамильтонова потока до обобщенного существует, если гладкий поток не увеличивает норму векторов пространства E.

2. Меры, инвариантные относительно симплектоморфизмов

Поставим задачу описать инвариантные относительно некоторой группы гамильтоновых преобразований меры на вещественном сепарабельном гильбертовом пространстве E, снабженном трансляционно инвариантной симплектической формой ω. Пусть $E = Q \oplus P$ и $\mathcal{E} = \mathcal{F} \bigcup \mathcal{G}$ – симплектический базис формы ω (см. (1)).

Определение 1. Множество $\Pi \subset E$ называется абсолютно измеримым симплектическим брусом в пространстве E, если найдется такой симплектический базис $\{f_j, g_k,\ j \in \mathbb{N},\ k \in \mathbb{N}\}$, что

$$\Pi = \{z \in E:\ \ ((z, f_i), (z, g_i)) \in B_i,\ i \in \mathbb{N}\}, \tag{2}$$

где B_i – измеримые по Лебегу множества плоскости $\mathbb{R}^2$, удовлетворяющие условию

$$\sum_{j=1}^{\infty} \max\{\ln(\lambda_2(B_j)), 0\} < +\infty;$$

здесь λ_n – мера Лебега в $\mathbb{R}^n$, $n \in \mathbb{N}$.

Фиксируем некоторый симплектический базис $\mathcal{E} = \mathcal{F} \bigcup \mathcal{G}$. Пусть $\mathcal{K}_{\mathcal{F},\mathcal{G}}(E) \equiv \mathcal{K}_{\mathcal{E}}(E)$ – множество абсолютно измеримых симплектических брусов, имеющих форму (2) в выбранном базисе $\mathcal{F} \bigcup \mathcal{G}$.

Пусть $\lambda_{\mathcal{F},\mathcal{G}}:\ \mathcal{K}_{\mathcal{F},\mathcal{G}}(E) \to [0, +\infty)$ – функция множества, определенная равенством

$$\lambda_{\mathcal{F},\mathcal{G}}(\Pi) = \prod_{j=1}^{\infty} \lambda_2(B_j) = \exp\left(\sum_{j=1}^{\infty} \ln(\lambda_2(B_j))\right)$$

при условии $\Pi \neq \varnothing$; и $\lambda_{\mathcal{F},\mathcal{G}}(\Pi) = 0$ в случае $\Pi = \varnothing$. Легко заметить, что если $A, B \in \mathcal{K}_{\mathcal{F},\mathcal{G}}(E)$ в некотором ОНБ $\mathcal{F} \bigcup \mathcal{G}$, то $A \bigcap B \in \mathcal{K}_{\mathcal{F},\mathcal{F}}(G)$. Кроме того, класс множеств $\mathcal{K}_{\mathcal{F},\mathcal{G}}(E)$ и функция множества $\lambda_{\mathcal{F},\mathcal{G}}:\ \mathcal{K}_{\mathcal{F},\mathcal{G}}(E) \to [0, +\infty)$ инвариантны относительно сдвига на любой вектор пространства E. Множество $\Pi \in \mathcal{K}_{\mathcal{F},\mathcal{G}}(E)$ вида (2) обозначаются символом $\times_{j=1}^{\infty} B_j$.

Пусть $r_{\mathcal{F},\mathcal{G}}$ – кольцо, порожденное системой множеств $\mathcal{K}_{\mathcal{F},\mathcal{G}}$.

Лемма 2 ([14]). *Класс Λ множеств вида $A = \Pi \backslash (\bigcup\limits_{i=1}^{n} \Pi_i)$, где $n \in \mathbb{N}_0$, $\Pi, \Pi_1, ..., \Pi_n \in \mathcal{K}_{\mathcal{E},\mathcal{F}}$, является полукольцом.*

Теорема 3 ([14]). *Функция множества $\lambda:\ \mathcal{K}_{\mathcal{F},\mathcal{G}}(E) \to [0, +\infty)$ является аддитивной. Аддитивная функция множества $\lambda:\ \mathcal{K}_{\mathcal{E},\mathcal{F}}(E) \to [0, +\infty)$ допускает единственное аддитивное продолжение на кольцо $r_{\mathcal{F},\mathcal{G}}$, порожденное полукольцом Λ.*

Пополнение конечно-аддитивной меры $\lambda: \ r_{\mathcal{F},\mathcal{G}} \to [0,+\infty)$ является полной мерой $\lambda_{\mathcal{E},\mathcal{F}}: \ \mathcal{R}_{\mathcal{E},\mathcal{F}} \to [0,+\infty)$. Кольцо r определяет кольцо $\mathcal{R}_{\mathcal{E},\mathcal{F}}$ следующим образом. Внутренняя $\underline{\lambda}$ и внешняя $\overline{\lambda}$ меры произвольных множеств определяются мерой $\lambda: \ r_{\mathcal{F},\mathcal{G}} \to [0,+\infty)$ на семействе всех подмножеств пространства E. Тогда $\mathcal{R}_{\mathcal{E},\mathcal{F}} = \{A \subset E: \ \underline{\lambda}(A) = \overline{\lambda}(A) \in \mathbb{R}\}$.

Теорема 4 ([14])**.** *Мера $\lambda_{\mathcal{F},\mathcal{G}}: \ \mathcal{R}_{\mathcal{F},\mathcal{G}} \to [0,+\infty)$ инвариантна относительно любого симплектоморфизма $\Phi: \ E \to E$ такого, что при каждом $k \in \mathbb{N}$ отображение $\mathbf{P}_{E_k}\Phi: \ E \to E_k$ не зависит от значения проекции $\mathbf{P}_{E_k^{\perp}}x$ и отображение $\mathbf{P}_{E_k}\Phi: \ E_k \to E_k$ непрерывно дифференцируемо на пространстве E_k.*

Теорема 5. *При каждом $p \in [1,+\infty]$ пространство $L_p(E,\mathcal{R}_{\mathcal{E},\mathcal{F}},\lambda_{\mathcal{E},\mathcal{F}},\mathbb{C})$, определяемое как пополнение в L_p-норме пространства $S(E,\mathcal{R}_{\mathcal{E},\mathcal{F}},\lambda_{\mathcal{E},\mathcal{F}},\mathbb{C})$ классов эквивалентности простых функций, является несепарабельным банаховым пространством. При этом $L_p^*(E,\mathcal{R}_{\mathcal{E},\mathcal{F}},\lambda_{\mathcal{E},\mathcal{F}},\mathbb{C}) = L_q(E,\mathcal{R}_{\mathcal{E},\mathcal{F}},\lambda_{\mathcal{E},\mathcal{F}},\mathbb{C})$ для $p \in [1,+\infty)$, где $q = \dfrac{p}{p-1}$.*

Доказательство. Пусть $p \in [1,+\infty]$. Определим пространство $L_p(E,\mathcal{R}_{\mathcal{E},\mathcal{F}},\lambda_{\mathcal{E},\mathcal{F}},\mathbb{C})$ следующим образом (см. [16]). По кольцу $\mathcal{R}_{\mathcal{E},\mathcal{F}}$ зададим линейное пространство простых функций как линейное пространство над полем $\mathbb{C}$ линейных комбинаций индикаторных функций дизъюнктных множеств из кольца

$$S(E,\mathcal{R}_{\mathcal{E},\mathcal{F}},\mathbb{C}) = \left\{ \sum_{k=1}^{m} \alpha_k \chi_{B_k}, \ m \in \mathbb{N}, \ \alpha_k \in \mathbb{C}, \ B_k \in \mathcal{R}_{\mathcal{E},\mathcal{F}}, \right. \\ \left. \forall\, k = 1,...,m, \ B_j \bigcap B_k = \emptyset, \ \text{если } j \neq k \right\}.$$

Определим на пространстве простых функций $S(E,\mathcal{R}_{\mathcal{E},\lambda_{\mathcal{E},\mathcal{F}},\mathcal{F}},\mathbb{C})$ функционал

$$n_p(f) = \left(\int\limits_E |f|^p d\lambda_{\mathcal{E},\mathcal{F}} \right)^{\frac{1}{p}}, \ p \in [1,+\infty); \quad n_\infty(f) = \lim_{p\to+\infty} \left(\int\limits_E |f|^p d\lambda_{\mathcal{E},\mathcal{F}} \right)^{\frac{1}{p}}, \tag{3}$$

где

$$\int\limits_E \left| \sum_{k=1}^{m} \alpha_k \chi_{B_k} \right|^p d\lambda_{\mathcal{E},\mathcal{F}} = \sum_{k=1}^{m} |\alpha_k|^p \lambda_{\mathcal{E},\mathcal{F}}(B_k)$$

для каждой простой функции вида

$$f = \sum_{k=1}^{m} \alpha_k \chi_{B_k}.$$

Функционал $n_p: \ S(E,\mathcal{R}_{\mathcal{E},\mathcal{F}},\mathbb{C}) \to \mathbb{R}$, как несложно проверить, является полунормой на пространстве $S(E,\mathcal{R}_{\mathcal{E},\mathcal{F}},\mathbb{C})$.

С помощью неотрицательной конечно-аддитивной меры $\lambda_{\mathcal{E},\mathcal{F}}$ введем на пространстве $S(E,\mathcal{R}_{\mathcal{E},\mathcal{F}},\mathbb{C})$ отношение эквивалентности $f \sim g \ \Leftrightarrow \ \lambda_{\mathcal{E},\mathcal{F}}(\{x \in E: \ f(x) \neq g(x)\}) = 0$.

Тогда множество $S_0(E,\mathcal{R}_{\mathcal{E},\lambda_{\mathcal{E},\mathcal{F}},\mathcal{F}},\mathbb{C}) = \{f \in S(E,\mathcal{R}_{\mathcal{E},\mathcal{F}},\mathbb{C}):\ f\sim 0\}$ является подпространством в линейном пространстве простых функций. Рассмотрим пространство классов эквивалентности простых функций

$$S(E,\mathcal{R}_{\mathcal{E},\mathcal{F}},\lambda_{\mathcal{E},\mathcal{F}},\mathbb{C}) = S(E,\mathcal{R}_{\mathcal{E},\mathcal{F}},\mathbb{C})/S_0(E,\mathcal{R}_{\mathcal{E},\mathcal{F}},\lambda_{\mathcal{E},\mathcal{F}},\mathbb{C}).$$

Если $f,g\in S(E,\mathcal{R}_{\mathcal{E},\mathcal{F}},\mathbb{C})$ и $f\sim g$, то $n_p(f)=n_p(g)$. Поэтому функционал

$$n_p:\ S(E,\mathcal{R}_{\mathcal{E},\mathcal{F}},\lambda_{\mathcal{E},\mathcal{F}},\mathbb{C})\to\mathbb{R},$$

сопоставляющий каждому элементу $f\in S(E,\mathcal{R}_{\mathcal{E},\mathcal{F}},\lambda_{\mathcal{E},\mathcal{F}},\mathbb{C})$ значение функционала (3) на одном из представителей класса эквивалентности f, корректно определен и является нормой на пространстве $S(E,\mathcal{R}_{\mathcal{E},\mathcal{F}},\lambda_{\mathcal{E},\mathcal{F}},\mathbb{C})$. Пополнение $L_p(E,\mathcal{R}_{\mathcal{E},\mathcal{F}},\lambda_{\mathcal{E},\mathcal{F}},\mathbb{C})$ линейного нормированного пространства $(S(E,\mathcal{R}_{\mathcal{E},\mathcal{F}},\lambda_{\mathcal{E},\mathcal{F}},\mathbb{C}),n_p)$ является банаховым пространством, в котором всюду плотно пространство классов эквивалентности простых функций.

При каждом $p\in[1,+\infty]$ пространство $L_p(E,\mathcal{R}_{\mathcal{E},\mathcal{F}},\lambda_{\mathcal{E},\mathcal{F}},\mathbb{C})$ содержит континуальную систему элементов (это индикаторные функции множеств Π_σ вида (2), в которых $B_i=[\sigma(i),\sigma(i)+1)\times[0,1)$, где $\sigma:\ \mathbb{N}\to\{-1,0\}$), расстояние по L_p-норме между которыми не меньше единицы, что обеспечивает несепарабельность банахова пространства $L_p(E,\mathcal{R}_{\mathcal{E},\mathcal{F}},\lambda_{\mathcal{E},\mathcal{F}},\mathbb{C})$.

Пусть $p\in[1,+\infty)$ и $q=\dfrac{p}{p-1}$, $f\in S(E,\mathcal{R}_{\mathcal{E},\mathcal{F}},\lambda_{\mathcal{E},\mathcal{F}},\mathbb{C})$. Тогда

$$n_p(f)=\sup\left\{\left|\int\limits_E f(x)\overline{g(x)}d\lambda_{\mathcal{E},\mathcal{F}}(x)\right|:\ g\in S(E,\mathcal{R}_{\mathcal{E},\mathcal{F}},\lambda_{\mathcal{E},\mathcal{F}},\mathbb{C}),\ n_q(g)\le 1\right\}.$$

Так как пространство классов эквивалентности простых функций плотно в пространствах L_p и L_q, то $L_p^*=L_q$ и для каждой функции $f\in L_p(E,\mathcal{R}_{\mathcal{E},\mathcal{F}},\lambda_{\mathcal{E},\mathcal{F}},\mathbb{C})$ справедливо равенство

$$n_p(f)=\sup\left\{\left|\int\limits_E f(x)\overline{g(x)}d\lambda_{\mathcal{E},\mathcal{F}}(x)\right|:\ g\in L_q(E,\mathcal{R}_{\mathcal{E},\mathcal{F}},\lambda_{\mathcal{E},\mathcal{F}},\mathbb{C}),\ n_q(g)\le 1\right\}. \qquad \square$$

Замечание. При $p=2$ мера $\lambda_{\mathcal{E},\mathcal{F}}:\ \mathcal{R}_{\mathcal{E},\mathcal{F}}\to[0,+\infty)$ определяет гильбертово пространство $\mathcal{H}=L_2(E,\mathcal{R}_{\mathcal{E},\mathcal{F}},\lambda_{\mathcal{E},\mathcal{F}},\mathbb{C})$ как пополнение в евклидовой норме n_2 пространства $S(E,\mathcal{R}_{\mathcal{E},\mathcal{F}},\lambda_{\mathcal{E},\mathcal{F}},\mathbb{C})$ классов эквивалентности простых функций.

3. Инвариантность симплектической меры относительно гамильтоновых потоков

Пусть $h:E\to\mathbb{R}$ – невырожденная квадратичная функция Гамильтона на евклидовом пространстве E. Симметричная квадратичная функция на E, порожденная квадратичной формой h, обладает каноническим базисом $\mathcal{E}=\mathcal{F}\bigcup\mathcal{G}$, в котором квадратичная форма имеет диагональный вид. Предположим также, что базис $\mathcal{E}$ является каноническим базисом для симплектической формы $\mathbf{J}$ на пространстве E.

Поток $\mathbf{\Phi}_t$, $t \in \mathbb{R}$, задаваемый квадратичным гамильтонианом h, определяет однопараметрическую группу

$$\mathbf{U}_{\mathbf{\Phi}_t} u(x) = u(\mathbf{\Phi}_{-t}(x)), \quad x \in E, \quad u \in S(E, \mathcal{R}_{\mathcal{E}}, \mathbb{C}), \quad t \in \mathbb{R},$$

линейных изометрий пространства простых функций $S(E, \mathcal{R}_{\mathcal{E}}, \mathbb{C})$ на себя. Заданная на плотном в пространстве $\mathcal{H}_{\mathcal{E}}$ линейном подпространстве $S(E, \mathcal{R}_{\mathcal{E}}, \mathbb{C})$ группа изометрий $\mathbf{U}_{\mathbf{\Phi}_t}$, $t \in \mathbb{R}$, единственным образом продолжается по непрерывности до унитарной группы в пространстве $\mathcal{H}_{\mathcal{E}}$, действующей по правилу

$$\mathbf{U}_{\mathbf{\Phi}_t} u(x) = u(\mathbf{\Phi}_{-t}(x)), \quad t \in \mathbb{R}, \quad u \in \mathcal{H}_{\mathcal{F},\mathcal{G}}, \quad x \in E,$$

и называемой купмановским представлением гамильтонова потока $\mathbf{\Phi}$.

Приведем примеры гамильтоновых потоков, сохраняющих меру $\lambda_{\mathcal{F},G}$.

Пример 6. *Счетный набор невзаимодействующих двухмерных гамильтоновых систем* представлен функцией Гамильтона

$$\tilde{\mathbb{H}}(p,q) = \sum_{k \in \mathbb{N}} \phi_k(p_k, q_k), \quad (p,q) \in E. \tag{4}$$

Здесь $\{\phi_k\}$ – последовательность функций $\phi_k: \ E_k \to \mathbb{R}$, которые являются непрерывно дифференцируемыми при каждом $k \in \mathbb{N}$ и удовлетворяют условию

$$\sum_{k=1}^{\infty} M_k < \infty,$$

где $M_k = \sup\limits_{(p,q) \in \mathbb{R}^2} \left(|\phi_k(p,q)|^2 + \left| \dfrac{\partial}{\partial p_k} \phi_k(p,q) \right|^2 + \left| \dfrac{\partial}{\partial q_k} \phi_k(p,q) \right|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$.

При сделанных предположениях функция Гамильтона (4) является непрерывано дифференцируемой по Фреше функцией на пространстве E. Следовательно, функция Гамильтона (4) порождает гамильтонов поток $\Phi_{\tilde{\mathbb{H}}}$ в пространстве E. Согласно теореме 4 поток $\Phi_{\tilde{\mathbb{H}}}$ сохраняет меру $\lambda_{\mathcal{F},\mathcal{G}}$.

Пример 7. Если функция Гамильтона $\tilde{\mathbb{H}}$ является непрперывным линейным функционалом на пространстве E, т. е. $\tilde{\mathbb{H}}(z) = (h, \mathbf{J}z)_E$ при некотором $h \in E$, то

$$\Phi_{\tilde{\mathbb{H}}}(t)z = z + th, \ \ z \in E, \, t \in \mathbb{R}.$$

Пример 8. *Гармоническим осциллятор.* Пусть $\mathbf{H}$ – линейный самосопряженный оператор в пространстве H, обладающий дискретным спектром $\{a_k\}$, и ортонормированный базис

(ОНБ) из собственных векторов $\{h_k\} = \mathcal{H}$. Пусть $\mathbf{R}: \ H \to E$ – овеществление пространства H. Тогда

$$\mathbb{H} = \sum_{k\in\mathbb{N}} a_k(p_k^2 + q_k^2) = \sum_{k\in\mathbb{N}} a_k|z_k|^2, \quad (q,p) \in E_1 = \left\{(q,p) \in E: \ \sum_{k=1}^{\infty} |a_k| \left(p_k^2 + q_k^2\right) < +\infty\right\},$$

где $z = p \oplus q \in E$ и $z = \mathbf{R}u$. Функция Гамильтона $\mathbb{H}$ порождает гамильтонов поток $\mathbf{\Phi}$ в симплектическом пространстве $E = \mathbf{R}(H)$. Согласно теореме 4 поток $\mathbf{\Phi}$ сохраняет меру $\lambda_{\mathcal{F},\mathcal{G}}$. Поток $\mathbf{\Phi}$ задается равенством

$$\mathbf{\Phi}_t(q,p) = (\cos(\mathbf{A}t)q - \sin(\mathbf{A}t)p, \sin(\mathbf{A}t)q + \cos(\mathbf{A}t)p),$$

где $t \in \mathbb{R}, \ (q,p) \in E$, $\mathbf{A}$ – самосопряженный оператор в пространстве E такой, что

$$\mathbf{A}f_j = a_j f_j, \ \ \mathbf{A}g_j = a_j g_j, \ \ j \in \mathbb{N}. \tag{5}$$

В координатах действие-угол

$$q_k = \rho_k \cos\phi_k, \ \ p_k = \rho_k \sin\phi_k, \ \ k \in \mathbb{N}, \quad (\rho_k, \phi_k) \in (0, +\infty) \times \mathbb{R}|_{\mathrm{mod}\, 2\pi},$$

гамильтонов поток Φ задается однопараметрическим семейством отображений

$$\hat{\mathbf{\Phi}}_t(\rho,\phi) = (\rho, \phi + at),$$

где $t \in \mathbb{R}, \ (\rho,\phi) \in \ell_2^+ \times (\mathbb{R}|_{\mathrm{mod}\, 2\pi})^{\mathbb{N}}$ и $a = \{a_k\} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

Пример 9. *Гиперболический осциллятор* – гамильтонова система, функция Гамильтона плотно определена на фазовом пространстве (E,ω) равенством

$$\tilde{\mathbb{H}} = \frac{1}{2}\sum_{k\in\mathbb{N}} a_k(p_k^2 - q_k^2), \qquad (q,p) \in E_1 = \left\{(q,p) \in E: \ \sum_{k=1}^{\infty} |a_k|(p_k^2 + q_k^2) < +\infty\right\}. \tag{6}$$

Здесь $a \equiv \{a_k\} \in \mathbb{R}^N$.

Пусть $z_0 = (p_0, q_0) \in E$ – начальная точка фазовой траектории

$$\mathbf{\Psi}_t(z_0) = z(t, z_0), \ \ t \in (T_*, T^*). \tag{7}$$

Тогда траектория имеет вид $z(t,z_0) = (q(t,z_0), p(t,z_0)), \ \ t \in (T_*, T^*)$, где

$$p_k(t,z_0) = p_{0,k}\mathrm{ch}(a_k t) + q_{0,k}\mathrm{sh}(a_k t), \ \ k \in \mathbb{N},$$

$$q_k(t,z_0) = q_{0,k}\mathrm{ch}(a_k t) + p_{0,k}\mathrm{sh}(a_k t). \tag{8}$$

Лемма 10 ([14]). *Интервал (T_*, T^*) существования в пространстве E траектории (7) является вещественной прямой $\mathbb{R}$ тогда и только тогда, когда $a \in \ell_\infty$.*

Если $a \in \ell_\infty$, то фазовый поток гамильтоновой системы (6) в симплектическом пространстве (E, ω) сохраняет меру $\lambda_{\mathcal{F},\mathcal{G}}$ и задается равенством

$$\mathbf{\Psi}_t(q,p) = (\mathrm{ch}(\mathbf{A}t)q + \mathrm{sh}(\mathbf{A}t)p, \mathrm{sh}(\mathbf{A}t)q + \mathrm{ch}(\mathbf{A}t)p), \ \ t \in \mathbb{R}, \tag{9}$$

где самосопряженный оператор $\mathbf{A}$ в пространстве E задан равенствами (5).

Утверждение леммы 10 является следствием равенств (8) и теоремы 4. Возникновение сингулярности (ухода на бесконечность) за конечное время у траектории потока (7) описано в работе [14].

В отличие от случая гиперболического осцилятора с ограниченным множеством частот и в отличие от случая гармонического осциллятора плотно определенное на пространстве E гамильтоново векторное поле не позволяет определить группу гамильтоновых преобразований пространства E и пространства

$$E_2 = \left\{ (q,p) \in E : \ \sum_{k=1}^{\infty} |a_k|^2 \left(p_k^2 + q_k^2\right) < +\infty \right\}.$$

Напомним, что явление градиентного взрыва решения эволюционного нелинейного уравнения с частными производными состоит в существовании решения эволюционного уравнения на ограниченном временном промежутке, градиент которого неограничен в норме банахова пространства значений решения. Градиентный взрыв наблюдается при изучении решений уравнений газодинамики (уравнений Хопфа) и явления самофокусировки для решений нелинейного уравнения Шредингера [1,3]. Мы приводим пример системы гиперболических осцилляторов как линейной гамильтоновой системы, решения которой допускают явление градиентного взрыва.

Гамильтонову систему гиперболических осцилляторов на фазовом пространстве $(E, \omega_{\mathbf{J}})$ можно рассмотреть в терминах квантовой системы на комплексификации H пространства E, описываемой волновой функцией $u = q + ip$. При таком подходе функционал энергии выражается через волновую функцию равенством

$$h(q,p) = -\frac{1}{4}\sum_{k=1}^{\infty}[(\mathbf{\Delta} u_k + \mathbf{\Delta}\bar{u}_k)(u_k + \bar{u}_k) + (\mathbf{\Delta} u_k - \mathbf{\Delta}\bar{u}_k)(u_k - \bar{u}_k)] = -\mathrm{Re}(\sqrt{\mathbf{\Delta}}u, \sqrt{\mathbf{\Delta}}\bar{u})_H.$$

Здесь $\mathbf{\Delta}$ – самосопряженный оператор в пространстве H с простым дискретным неотрицательным спектром $\sigma(\mathbf{\Delta}) = \{\omega_{\mathbf{k}}\}$, а $\sqrt{\mathbf{\Delta}}$ – неотрицательный квадратный корень из оператора $\mathbf{\Delta}$.

Пусть $\{\psi_k\}$ – ортонормированный базис из собственных векторов оператора $\mathbf{\Delta}$. Произвольный вектор $u \in H$ допускает разложение

$$u = \sum_{k=1}^{\infty} (q_k + \mathrm{i} p_k)\psi_k = q + \mathrm{i} p.$$

Тогда уравнения Гамильтона, порождаемые функцией Гамильтона (6), обретают вид уравнения

$$\mathrm{i}\frac{d}{dt}u(t) = \boldsymbol{\Delta}\bar{u}(t),\ t \in \mathbb{R},$$

которое является гамильтоновым, но не является уравнением Шредингера, поскольку, во-первых, не линейно над полем комплексных чисел, и, во-вторых, не консервативно.

Наблюдаемый неограниченный рост кинетической энергии гамильтоновой системы за конечное время представляет собой явление градиентного взрыва (см. [1, 3]). Фазовые траектории гамильтоновой системы (6) покидают фазовое пространство за конечное время. Для рассматриваемой гамильтоновой системы (6) найдено естественное симплектическое расширение в локально выпуклое пространство, содержащее пространство E.

4. Расширение фазового пространства и продолжение динамики

Расширим пространство $E = Q \oplus P \sim \ell_2 \oplus \ell_2$ до локально выпуклого пространства последовательностей $\mathbb{E} = \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \oplus \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \supset E$. ЛВП $\mathbb{E}$ снабжено тихоновской топологией, потому вложение $E \subset \mathbb{E}$ является плотным и непрерывным. Продолжим с пространства E на пространство $\mathbb{E}$ симплектическую форму ω и поток $\boldsymbol{\Psi}$.

4.1. Продолжение симплектической формы. Если $\mathbb{E}$ – ЛВП, в которое непрерывно и плотно вложено гильбертово пространство E, то можно поставить вопрос о продолжении гамильтонова потока с пространства E на ЛВП $\mathbb{E}$.

Пусть $E = Q \oplus P$, $(\mathcal{E}, \mathcal{F})$ – ОНБ в гильбертовом пространстве E, в котором симплектическая форма ω_J имеет канонический вид:

$$\omega_J((\hat{q},\hat{p}),(\tilde{q},\tilde{p})) = \sum_{k=1}^{\infty} (\hat{q}_k \tilde{p}_k - \tilde{q}_k \hat{p}_k).$$

В качестве ЛВП $\mathbb{E}$ рассмотрим пространство $\mathbb{R}^{\mathbb{N}} \oplus \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ числовых последовательностей, наделенное метризуемой топологией поточечной (покоординатной) сходимости. Тогда вложение гильбертова пространства E в ЛВП $\mathbb{E}$ непрерывно и плотно.

Функцию $\Omega_{\mathbf{J}}:\ \mathbb{E} \times \mathbb{E} \supset D(\Omega_{\mathbf{J}}) \to \mathbb{R}$ назовем *псевдосимплектической формой* на пространстве $\mathbb{E}$, если для каждого $z \in \mathbb{E}$ множество $D(z) = \{y \in \mathbb{E}:\ (z,y) \in D(\Omega_{\mathbf{J}})\}$ является линейным пространством, а отображение $\Omega_{\mathbf{J}}(z,\cdot):\ D(z) \to \mathbb{R}$ – линейным функционалом на пространстве $D(z)$ и выполняются условия:

1) если $y \in D(z)$, то $z \in D(y)$ и $\Omega_J(y,z) = -\Omega_J(z,y)$;

2) если $\Omega_J(z,y) = 0\ \ \forall\, y \in D(z)$, то $z = 0$;

3) если $z \in E$, то $D(z) \supset E$ и $\Omega_J(z, y) = \omega_J(z, y) \quad \forall\, y \in E$.

Пару $(\mathbb{E}, \Omega)$, где $\mathbb{E}$ – содержащее E линейное пространство и Ω – псевдосимплектическая форма, назовем псевдосимплектическим пространством.

Лемма 11. *Симплектическая форма $\omega_{\mathbf{J}}$ на пространстве E имеет продолжение до псевдосимплектической формы $\Omega_{\mathbf{J}}$ на пространстве $\mathbb{E}$.*

Доказательство. Для каждого $z = (q, p) \in \mathbb{E}$ положим

$$D_{\mathbf{J}}(z) = \{(q', p') \in \mathbb{E} : \ \{q_k p'_k - q'_k p_k\} \in \ell_1\}\,.$$

Тогда $D_{\mathbf{J}}(z)$ является линейным подпространством в ЛВП $\mathbb{E}$.

Если определить $\Omega_{\mathbf{J}}(z, \cdot) : \ D_{\mathbf{J}}(z) \to \mathbb{R}$ равенством

$$\Omega_{\mathbf{J}}(z, z') = \sum_{k=1}^{\infty} q_k p'_k - q'_k p_k, \tag{10}$$

то отображение $\Omega_{\mathbf{J}}$, заданное на множестве $D(\Omega_{\mathbf{J}}) = \left\{ \bigcup\limits_{z \in \mathbb{E}} (z, D(z)) \right\}$ равенством (10), удовлетворяет 1)–3) и является псевдосимплектической формой на пространстве $\mathbb{E}$. Следовательно, псевдосимплектическое пространство $(\mathbb{E}, \Omega_{\mathbf{J}})$ является расширением симплектического пространства $(E, \omega_{\mathbf{J}})$. $\square$

4.2. Продолжение потока $\mathbf{\Psi}$ на пространство $\mathbb{E}$. Пусть $\{a_j\} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ – последовательность параметров функции Гамильтона (6). Тогда формула (9) определяет поток $\mathbf{\Psi}$ в псевдосимплектическом пространстве $(\mathbb{E}, \Omega_{\mathbf{J}})$:

$$\mathbf{\Psi}_t(p, q) = (\mathrm{ch}(\mathbf{A}t)p + \mathrm{sh}(\mathbf{A}t)q,\ \mathrm{ch}(\mathbf{A}t)q + \mathrm{sh}(\mathbf{A}t)p),\ t \in \mathbb{R}. \tag{11}$$

Однопараметрическое семейство преобразований (11) является продолжением потока $\mathbf{\Psi}$ из пространства E в пространство $\mathbb{E}$ через моменты времени T_* и T^*.

Легко видеть, что продолженный поток $\mathbf{\Psi}$ в пространстве $\mathbb{E}$ сохраняет псевдосимплектическую форму $\Omega_{\mathbf{J}}$.

Повторив рассуждения раздела 2, несложно показать, что мера $\lambda_{\mathcal{F},G}$ на пространстве E может быть преобразована в меру $\lambda_{\mathcal{F},G}$ на пространстве $\mathbb{E}$ как счетное произведение мер Лебега на двумерных подпространствах E_k, $k \in \mathbb{N}$, пространства $\mathbb{E}$. Такая мера инвариантна относительно продолженного потока Ψ, сохраняющего класс симплектических брусов пространства $\mathbb{E}$ и значения меры на таких симплектических брусах.

Теорема 12 ([14])**.** *Пусть $\mathcal{E} = \mathcal{F} \bigcup \mathcal{G}$ – ОНБ гильбертова пространства E, в котором симплектическая форма ω имеет канонический вид (1). Пусть $\mathbb{E} = \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \oplus \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ и пусть $(\mathbb{E}, \Omega_{\mathbf{J}})$ – псевдосимплектическое расширение симплектического пространства $(E, \omega_{\mathbf{J}})$. Пусть E_0 – подпространство пространства $\mathbb{E}$, векторы которого являются линейными комбинациями векторов из подпространств $E_k = \mathrm{span}(e_k, f_k)$, $k \in \mathbb{N}$.*

Пусть квадратичная функция h определена на плотном в локально выпуклом пространстве $\mathbb{E}$ подпространстве E_0 равенством $h = \sum\limits_{k=1}^{\infty} h_k$, где h_k – симметричная квадратичная форма на двумерном подпространстве E_k. Тогда гамильтоново векторное поле $\mathbf{v} = \mathbf{J}\nabla h\,:\; E_0 \to \mathbb{E}$ плотно определено на подпространстве E_0. Векторное поле $\mathbf{v}$ задает в пространстве E_0 гладкий гамильтонов поток $\mathbf{\Phi}_t$, $t \in \mathbb{R}$, допускающий единственное продолжение по непрерывности до гамильтонова потока $\mathbf{\Phi}$ на пространстве $\mathbb{E}$. При этом симплектическая мера $\lambda_{\mathcal{F},G}$ инвариантна относительно гамильтонова потока $\mathbf{\Phi}_t$, $t \in \mathbb{R}$, на пространстве $\mathbb{E}$.

Следствие 13. *Однопараметрическое семейство $\mathbf{U}_{\mathbf{\Phi}}(t)$, $t \in \mathbb{R}$, линейных операторов в пространстве $\mathcal{H}_{\mathcal{E},\mathcal{F}}$, действующих по правилу*

$$\mathbf{U}_{\mathbf{\Phi}}(t)u(x) = u(\mathbf{\Phi}(t)x), \qquad t \in \mathbb{R}, \quad u \in \mathcal{H}_{\mathcal{E},\mathcal{F}}, \quad x \in E,$$

является купмановским унитарным представлением гамильтонова потока $\mathbf{\Phi}$ в пространстве $\mathcal{H}_{\mathcal{E},\mathcal{F}}$.

Для описания подпространств сильной непрерывности купмановского унитарного представления потока Ψ используем не меру $\lambda_{\mathbb{F},G}$, а иную инвариантную меру. Чтобы задать новую инвариантную меру заметим, что фазовый поток Ψ представляет собой оператор сдвига в координатах действие-угол $(r,\phi) \in (\mathbb{R}\times\mathbb{R})^{\mathbb{N}}$, связанных с исходными координатами $(q,p) \in \mathbb{E}$ с помощью замены $\mathbf{G}:\ (\mathbb{R}\times\mathbb{R})^{\mathbb{N}} \to (\mathbb{R}\times\mathbb{R})^{\mathbb{N}}$, задаваемой равенством $(q,p) = \mathbf{G}(\rho,\phi):\ q = \rho\operatorname{ch}\phi,\ p = \rho\operatorname{sh}\phi$, т. е.

$$(q_k,p_k) = \mathbf{G}_k(r_k,\phi_k):\ q_k = r_k\mathrm{ch}\phi_k,\ p_k = r_k\mathrm{sh}\phi_k, \quad k \in \mathbb{N}. \tag{12}$$

Согласно (11) в кооринатах действие-угол фазовый поток Ψ задается отображением

$$\hat{\Psi}_t(r,\phi) = (r,\phi + at),\ t \in \mathbb{R}. \tag{13}$$

4.3. Мера на пространстве $\mathbb{E}$, инвариантная относительно потока. Поскольку мы исследуем инвариантные относительно сдвига конечно-аддитивные меры на бесконечномерном ЛВП вещественнозначных последовательностей, такие меры будут вводиться как бесконечные произведения трансляционно инвариантных конечно-аддитивных мер на вещественной прямой. На вещественной прямой $\mathbb{R}$ существует единственная с точностью до скалярного множителя неотрицательная трансляционно инвариантная счетно-аддитивная мера (мера Лебега). Но помимо меры Лебега на вещественной прямой свойством трансляционной инвариантности обладают конечно-аддитивные меры, порождаемые банаховыми пределами [17,18].

С помощью банаховых пределов определим на вещественной прямой $\mathbb{R}$ неотрицалельные нормированные конечно-аддитивные меры, инвариантные относительно сдвига, называемые банаховыми мерами.

Пусть β – банахов предел, заданный на пространстве $L_\infty(\mathbb{R})$, т. е. $\beta \in L_\infty^*(\mathbb{R})$ и этот функционал неотрицателен, нормирован условием $\beta(\mathbf{1}) = 1$ и инвариантен относительно сдвига, т. е. $\beta(\phi) = \beta(\mathbf{S}_h\phi)\ \forall\, \phi \in L_\infty(\mathbb{R})$, $\forall\, h \in \mathbb{R}$, где $\mathbf{S}_h\phi(x) = \phi(x+h),\ x \in \mathbb{R}$.

Если β – банахов предел, заданный на пространстве $L_\infty(\mathbb{R})$, то на σ-алгебре $\mathcal{L}(\mathbb{R})$ измеримых по Лебегу множеств числовой прямой равенством

$$\nu_\beta(A) = \beta(\chi_A),\ A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}), \tag{14}$$

определена инвариантная относительно сдвига неотрицательная нормированная конечно-аддитивная борелевская (область определения которой содержит борелевскую σ-алгебру) мера ν_β.

Определение 14. Множество $\Pi \subset \mathbb{E}$ называется абсолютно измеримым гиперболическим брусом в пространстве $\mathbb{E}$, если

$$\Pi = \{(q,p) \in \mathbb{E} : (q_i, p_i) = (r_i \operatorname{ch}\phi_i, r_i \operatorname{sh}\phi_i),\ (r_i, \phi_i) \in A_i \times B_i,\ i \in \mathbb{N}\}\,, \tag{15}$$

где $A_i \times B_i \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, A_i, B_i – измеримые по Лебегу множества вещественной прямой, удовлетворяющие следующему условию:

$$\sum_{j=1}^{\infty} \ln_+(\nu_{2,\beta}(A_j \times B_j)) < +\infty,$$

в котором $\nu_{2,\beta}(A_j \times B_j) = \nu_\beta(B_j) \int\limits_{A_j} |r| dr$.

Замечание. Поскольку при каждом $k \in \mathbb{N}$ якобиан k-й замены (12) равен $|r_k|$, то мера Лебега множества $A_j \times B_j$ равна $\lambda_2(A_j \times B_j) = \lambda_1(B_j) \int\limits_{A_j} |r| dr$. В определении 14 мы заменяем для изменения угловой переменной меру Лебега λ_1 на меру Банаха ν_β.

Пусть $\mathcal{K}_\beta(\mathbb{E})$ – множество всех измеримых гиперболических брусов. Пусть функция $\lambda_\beta :\ \mathcal{K}_\beta(\mathbb{E}) \to [0, +\infty)$ определена равенством

$$\lambda_\beta(\Pi) = \prod_{j=1}^{\infty} \nu_{2,\beta}(A_j \times B_j),\ \Pi \in \mathcal{K}_\beta(\mathbb{E}). \tag{16}$$

Лемма 15. *Функция множества $\lambda_\beta :\ \mathcal{K}_\beta(\mathbb{E}) \to [0, +\infty)$ является аддитивной и инвариантной относительно потока* (11).

Доказательство. Аддитивность функции $\lambda_\beta :\ \mathcal{K}_\beta(\mathbb{E}) \to [0, +\infty)$ установлена в [4, следствие 1]. Ее инвариантность относительно потока гиперболического осциллятора следует из равенства (13). $\square$

Пусть r_β – кольцо, порожденное семейством множеств $\mathcal{K}_\beta(\mathbb{E})$.

Теорема 16. *Аддитивная функция множества $\lambda_\beta:\ \mathcal{K}_\beta(\mathbb{E})\to[0,+\infty)$ допускает единственное аддитивное продолжение на кольцо r_β. Пополнение меры $\lambda_\beta:\ r_\beta\to[0,+\infty)$ является полной мерой $\lambda_\beta:\ \mathcal{R}_\beta\to[0,+\infty)$, которая инвариантна относительно гамильтонова потока системы гиперболических осцилляторов* (11).

Доказательство. Сначала покажем существование и единственность аддитивного продолжения аддитивной функции $\lambda_\beta:\ \mathcal{K}_\beta(\mathbb{E})\to[0,+\infty)$ с класса $\mathcal{K}_\beta(\mathbb{E})$ измеримых брусов на порожденное им кольцо r_β. Схема доказательства близка к построениям в работе [14]. Прежде всего заметим, что пересечение двух множеств из класса $\mathcal{K}_\beta(\mathbb{E})$ снова принадлежит этому классу. Отсюда следует, что совокупность Λ пористых измеримых гиперболических брусов, представляющих собой разность бруса из $\mathcal{K}_\beta(\mathbb{E})$ и конечного обьединения таких брусов, является полукольцом. Тогда кольцо r_β, порожденное семейством множеств из класса $\mathcal{K}_\beta(\mathbb{E})$, порождается полукольцом Λ и каждый элемент кольца r_β представим как конечное объединение дизъюнктных множеств из полукольца Λ.

Обозначим через Λ_j, $j=1,2,\ldots$, совокупность множеств, представимых в виде разности бруса из класса $\mathcal{K}_\beta(\mathbb{E})$ и объединения из j брусов того же класса (возможно, имеющих непустые пересечения). Через $\mathbb{V}_j$ обозначим множества, представимые как объединение j брусов из класса $\mathcal{K}_\beta(\mathbb{E})$. Тогда можно, применяя метод индукции, распространить по условию аддитивности функцию множества $\lambda_\beta:\ \mathbb{V}_1\to[0,+\infty)$ сначала на Λ_1, затем с Λ_1 на V_2, затем с V_2 на Λ_2, и т. д. Как показано в [14, теорема 3.6], такое продолжение не зависит от выбора представления множества в виде пористого бруса или конечного объединения брусов. Тем самым, функция множества $\lambda_\beta:\ \mathbb{V}_1\to[0,+\infty)$ допускает единственное аддитивное продолжение λ на полукольцо Λ. Аддитивная функция $\lambda:\ \Lambda\to\mathbb{R}$ по построению неотрицательна и, как известно, допускает единственное аддитивное продолжение до неотрицательной конечно-аддитивной меры $\lambda_\beta:\ r_\beta\to[0,+\infty)$.

Мера $\lambda_\beta:\ r_\beta\to[0,+\infty)$ задает внешнюю и внутреннюю меры на совокупности всех подмножеств пространства E по формулам

$$\overline{\lambda}_\beta(A)=\inf_{B\in r_\beta,\ B\supset A}\lambda_\beta(B),\quad \underline{\lambda}_\beta(A)=\sup_{B\in r_\beta,\ B\subset A}\lambda_\beta(B),\quad A\subset E,$$

соответственно. Тогда множество

$$\mathcal{R}_\beta=\{A\subset E:\ \overline{\lambda}_\beta(A)=\underline{\lambda}_\beta(A)<+\infty\}$$

является кольцом. Кольцо $\mathcal{R}_\beta$ называется пополнением кольца r_β по мере λ_β. Продолжение меры $\lambda_\beta:\ r_\beta\to[0,+\infty)$ на кольцо $\mathcal{R}_\beta$ по формуле $\lambda_\beta(A)=\overline{\lambda}_\beta(A)=\underline{\lambda}_\beta(A)$, $A\in\mathcal{R}_\beta$, называется пополнением меры λ_β.

Свойство инвариантности меры $\lambda_\beta:\ r_\beta\to[0,+\infty)$ относительно потока (11) следует из определения функции множества (16) в силу представления потока в виде (13). Во-первых, кольцо r_β инвариантно относительно потока (13). Во-вторых, пополнение меры $\lambda_\beta:\ r_\beta\to[0,+\infty)$ наследует свойство инвариантности, поскольку сохраняющий меру

$\lambda_\beta:\ r_\beta\to[0,+\infty)$ поток (13) сохраняет также и аппроксимацию образа произвольного множества изнутри и снаружи множествами из кольца r_β. $\square$

Пусть $\mathcal{H}_\beta = L_2(\mathbb{E},\mathcal{R}_\beta,\lambda_\beta,\mathbb{C})$ – гильбертово пространство, определенное по мере λ_β по схеме, изложенной в доказательстве теоремы 5. Исследуем унитарное представление гамильтонова потока (9) в пространстве $\mathcal{H}_\beta$.

5. Купмановская группа гиперболического осциллятора

Лемма 17 ([5])**.** *Пусть $\{a_k\}\in\ell_\infty$. Тогда равенство (9) определяет поток Ψ в фазовом пространстве E. Купмановское представление $\mathbf{U}_\Psi$ в пространстве $\mathcal{H}_{\mathcal{F},\mathcal{G}}$ потока Ψ гиперболических осцилляторов является унитарной группой. Группа $\mathbf{U}_\Psi$ является сильно непрерывной, если и только если последовательность $\{a_k\}$ финитна.*

Пусть $\{a_k\}\in\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. Тогда гамильтонов поток в расширенном фазовом пространстве $\mathbb{E}$ определяется равенством (11).

Введем координаты действие-угол, связанные с исходными фазовыми координатами пространства $\mathbb{E}$ с помощью отображения

$$\mathbf{G}:\ \mathbb{R}^{\mathbb{N}}\times\mathbb{R}^{\mathbb{N}}\to\mathbb{E}:\quad q=r\,\mathrm{ch}\,\phi,\ p=r\,\mathrm{sh}\,\phi,\quad r\in\mathbb{R}^{\mathbb{N}},\ \phi\in\mathbb{R}^{\mathbb{N}},$$

т. е. $q_k=r_k\,\mathrm{ch}\,\phi_k,\ p_k=r_k\,\mathrm{sh}\,\phi_k\ \forall\,k\in\mathbb{N}$.

Пусть $\lambda_{2,\beta}=\nu_{2,\beta}\circ\mathbf{G}_k^{-1}$ – образ меры $\nu_{2,\beta}$ при отображении $\mathbf{G}_k:\ \mathbb{R}\times\mathbb{R}\to E_k$ из (12).

Тогда, если $\{u_k\}:\ \mathbb{N}\to L_2(E_k,\lambda_{2,\beta},\mathbb{C})$,

$$\int\limits_{E_k}|u_k(q_k,p_k)|^2d\lambda_{2,\beta}(q_k,p_k)=\int\limits_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}}|\tilde u_k(\rho_k,\phi_k)|^2d\nu_{2,\beta}(\rho_k,\phi_k)\ \ \forall\ k\in\mathbb{N},\tag{17}$$

где $\tilde u_k(\rho_k,\phi_k)=u_k(\mathbf{G}_k(\rho_k,\phi_k)),\ (\rho_k,\phi_k)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}$.

При каждом $k\in\mathbb{N}$ отображение $\mathbf{G}$ биективно отображает множество $(\mathbb{R}\backslash\{0\})\times\mathbb{R}$ на себя, но вырождается на дополнении $\{0\}\times\mathbb{R}$ этого множества.

Отображение $\mathbf{G}$ биективно отображает множество $(\mathbb{R}\backslash\{0\})^{\mathbb{N}}\times\mathbb{R}^N$ на себя, но вырождается на дополнении Σ этого множества. При этом проекция Σ_j множества вырождения Σ на двумерное симплектическое подпространство $E_j=\mathrm{span}(f_j,g_j)$ является прямой $\Sigma_j=\{(0,p_j),\ p_j\in\mathbb{R}\}$. Следовательно, для каждого гиперболического бруса (15) множество $\Pi\backslash\Sigma$ представляет собой гиперболический брус Π' вида (15) с $A_j'=A_j\backslash\Sigma_j$ вместо A_j. Поэтому значение меры λ_β на пересечение любого множества $A\in\mathcal{R}_\beta$ с множеством Σ определено и равно нулю, что позволит индуцировать меру $\lambda_\beta\circ\mathbf{G}$ на кольце $\mathbf{G}^{-1}(\mathcal{R}_\beta)$ посредством равенства

$$(\lambda_\beta\circ\mathbf{G})(A)=\lambda_\beta(\mathbf{G}(A))\quad\forall\,A:\ \mathbf{G}(A)\in\mathcal{R}_\beta.$$

Тогда мера $\lambda_\beta \circ \mathbf{G}: \ \mathbf{G}^{-1}(\mathcal{R}_\rho) \to \mathbb{R}_+$ неотрицательна и конечно-аддитивна. Поток гамильтоновой системы (6) в координатах действие-угол задается равенством (13), поэтому кольцо $\mathbf{G}^{-1}(\mathcal{R}_\beta)$ и мера $\lambda_\beta \circ W$ инвариантны относительно этого потока. Определим гильбертово пространство $\tilde{\mathcal{H}}_\beta = L_2((\mathbb{R}\times\mathbb{R})^{\mathbb{N}}, \mathbf{G}^{-1}(\mathcal{R}_\beta), \lambda_\beta \circ \mathbf{G}, \mathbb{C})$.

Согласно равенству (17) отображение

$$\mathbf{W}_{\mathbf{G}}: \ \hat{u} \to u: \ u(\mathbf{G}(\rho,\phi)) = \hat{u}(\rho,\phi), \ (\rho,\phi) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \times \mathbb{R}^{\mathbb{N}}, \ \hat{u} \in \tilde{\mathcal{H}}_\beta,$$

является унитарным изоморфизмом гильбертовых пространств $\mathbf{W}_{\mathbf{G}}: \tilde{\mathcal{H}}_\beta \to \mathcal{H}_\beta$.

Купмановское представление гамильтонова потока (13) в пространстве $\tilde{\mathcal{H}}_\beta$ имеет вид

$$\mathbf{U}_{\hat{\mathbf{\Psi}}_t}\hat{u}(r,\phi) = \hat{u}(\hat{\mathbf{\Psi}}_t(r,\phi)), \ \hat{u} \in \tilde{\mathcal{H}}_\beta, \ t \in \mathbb{R}.$$

В множестве банаховых пределов на пространстве $L_\infty(\mathbb{R})$ выделим класс *чезаровских* банаховых пределов, представимых в виде предела по ультрафильтру от усреднения по Чезаро [18], т. е.

$$\beta(f) = \lim_{F}\left(\frac{1}{2x}\int_{-x}^{x} f(t)dt\right), \quad f \in L_\infty(\mathbb{R}), \tag{18}$$

где F – некоторый ультрафильтр, сосредоточенный на бесконечности, и $\lim\limits_{F}$ – предел по ультрафильтру F.

Тогда, если банахов предел β задается равенством (18), для каждой функции $f \in L_\infty(\mathbb{R})$ в силу определения (14) меры ν_β справедливо равенство

$$\beta(f) = \lim_{F}\left(\frac{1}{2x}\int_{-x}^{x} f(t)dt\right) = \int_{\mathbb{R}} f(t)d\nu_\beta(t). \tag{19}$$

Лемма 18. *Купмановское представление $\mathbf{U}_{\hat{\mathbf{\Psi}}}$ в пространстве $\tilde{\mathcal{H}}_\beta$ потока (13) гиперболического осциллятора является унитарной группой. Пусть, кроме того, банахов предел β является чезаровским. Тогда унитарная группа $\mathbf{U}_{\hat{\mathbf{\Psi}}}$ непрерывна в сильной операторной топологии, если и только если последовательность частот $\{a_k\}$ в (6) тривиальна.*

Доказательство. Унитарность группы следует из инвариантности меры λ_β относительно потока (13). Если допустить, что $\lambda_k \neq 0$, то группа $\mathbf{U}_\Psi$ не удовлетворяет условию сильной непрерывности. Это следует из существования такого вектора $\hat{u} \in \tilde{\mathcal{H}}_\beta$, что векторнозначная функция $\mathbf{U}_\Psi(t)u, \ t \in \mathbb{R}$, не является непрерывной в нуле. В качестве вектора $\hat{u} \in \tilde{\mathcal{H}}_\beta$ выберем функцию

$$\hat{u}(\rho,\phi) = \left(\prod_{j=1}^{\infty} \chi_{[a,b]}(r_j)\right) e^{\mathrm{i}\phi_k^2}, \ \phi \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}, \ \rho \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}},$$

где $a, b \in \mathbb{R}$ таковы, что $\int\limits_a^b |r|dr = 1$. Тогда векторнозначная функция $\mathbf{U}_\Psi(t)u$, $t \in \mathbb{R}$, вещественного аргумента не является непрерывной, поскольку числовая функция $g(t) = (\mathbf{U}_\Psi(t)u, u)_{\tilde{\mathcal{H}}_\beta}$, $t \in \mathbb{R}$, имеет устранимый разрыв при $t = 0$.

Действительно, $g(0) = \|\hat{u}\|^2_{\tilde{\mathcal{H}}_\beta} = 1$. В то время как для каждого $t \neq 0$ в силу определения меры $\lambda_\beta \circ \mathbf{G}$ справедливо равенство

$$g(t) = (\mathbf{U}_\Psi(t)u, u)_{\tilde{\mathcal{H}}_\beta} = \int\limits_{\mathbb{R}^\mathbb{N} \times \mathbb{R}^\mathbb{N}} \hat{u}(r, \phi + at)\overline{\hat{u}(r, \phi)} d(\lambda_\beta \circ \mathbf{G}).$$

В силу равенства (16), определяющего меру λ_β, получаем

$$g(t) = \int\limits_{\mathbb{R}} e^{\mathrm{i}(\phi_k + a_k t)^2} e^{-\mathrm{i}\phi_k^2} d\nu_\beta(\phi_k).$$

Поскольку банахов предел β является чезаровским, в силу (19) имеем, что для всех $t \neq 0$ выполняется равенство $g(t) = e^{\mathrm{i}a_k^2 t^2} \lim\limits_F \left(\frac{1}{2x} \int\limits_{-x}^{x} e^{2\mathrm{i}ta_x\phi_k} \right) d\nu_\beta \phi_k = 0$, подтверждающее разрыв в нуле функции g. $\square$

Хотя унитарная группа $\mathbf{U}_{\hat{\Psi}}$ в пространстве $\tilde{\mathcal{H}}_\beta$ разрывна, мы сможем определить ее инвариантные подпространства сильной непрерывности, найдя собственные значения и собственные векторы операторов этой полугруппы. Для этого введем следующее пространство.

Пусть $\mathcal{K}^{rad}_\beta(\mathbb{E}) \subset \mathcal{K}_\beta(\mathbb{E})$ – множество абсолютно измеримых гиперболических брусов, являющихся радиально симметричными в том смысле, что в представлении (15) $B_j = \mathbb{R}$ при всех $j \in \mathbb{N}$. Пусть r^{rad}_β – кольцо, порожденное набором множеств $\mathcal{K}^{rad}_\beta(\mathbb{E})$, и $\mathcal{R}^{rad}_\beta$ – пополнение кольца r^{rad}_β по мере λ_β. Пусть $\mathcal{H}^{rad}_\beta = L_2(E, \mathcal{R}^{rad}_\beta, \lambda_\beta, \mathbb{C})$ и $\tilde{\mathcal{H}}^{rad}_\beta = \mathbf{W_G}^{-1}(\mathcal{H}^{rad}_\beta)$.

Функция $u(\phi_k) = e^{\mathrm{i}m\phi_k} \in L_2(\mathcal{R}, \mathcal{L}(\mathbb{R}), \nu_\beta, \mathbb{C})$ является собственной функцией оператора $\mathbf{L}_k u = \frac{\partial u}{\partial \phi_k}$, соответствующего собственному значению $\mathrm{i}m$ при каждом $m \in \mathbb{R}$. Поскольку фазовый поток $\hat{\mathbf{\Psi}}$ имеет форму (13), справедлива

Теорема 19. *Унитарная группа $\mathbf{U}_\mathbf{\Psi}$ допускает инвариантное подпространство $\mathcal{H}_\Psi$ такое, что группа $\mathbf{U}_\mathbf{\Psi}|_{\mathcal{H}_\Psi}$ является сильно непрерывной в пространстве $\mathcal{H}_\Psi$. Генератор $\mathbf{H}_\Psi$ сильно непрерывной группы $\mathbf{U}_\mathbf{\Psi}|_{\mathcal{H}_\Psi}$ имеет континуум собственных значений*

$$a_{m_1,\ldots,m_N} = m_1 a_1 + \ldots + m_N a_N, \quad N \in \mathbb{N},\ m_1, \ldots, m_N \in \mathbb{R}.$$

При этом $\mathcal{H}_\mathbf{\Psi} \supset \oplus_{\vec{m}} \mathcal{H}_{\vec{m}}$, где $\vec{m} = \{m_1, \ldots, m_N, 0, 0\ldots\}$, $(\vec{m}, \phi) = m_1\phi_1 + \ldots + m_N\phi_N$ и

$$\mathcal{H}_{\vec{m}} = \mathbf{W_G}(\{e^{\mathrm{i}(\vec{m},\phi)} g,\ g \in \tilde{\mathcal{H}}^{rad}_\beta\}) \subset \mathrm{Ker}(\mathbf{H}_\Psi - a_{\vec{m}}\mathbf{I}).$$

Доказательство. Легко проверить, что при каждом $\vec{m} = \{m_1, ..., m_N, 0, 0...\}$ функция $e^{\mathrm{i}(\vec{m},\phi)}g,\ g \in \tilde{\mathcal{H}}_{\beta}^{rad}$ является собственной функцией оператора $\mathbf{U}_{\hat{\mathbf{\Psi}}}(t)$, отвечающей собственному значению $e^{\mathrm{i}t(m_1\lambda_1+...+m_N\lambda_N)}$. Следовательно, при каждом $\vec{m} = \{m_1, ..., m_N, 0, 0...\}$ подпространство $\mathcal{H}_{\vec{m}}$ инвариантно относительно группы $\mathbf{U}_{\mathbf{\Psi}}$ и сужение $\mathbf{U}_{\hat{\mathbf{\Psi}}}|_{\mathcal{H}_{\vec{m}}}$ группы на это инвариантное подпространство является сильно непрерывной группой в пространстве $\mathcal{H}_{\vec{m}}$. Ортогональность подпространств $\mathcal{H}_{\vec{m}_1}$ и $\mathcal{H}_{\vec{m}_2}$ при $\vec{m}_1 \neq \vec{m}_2$ следует из непосредственного вычисления скалярного произведения функций вида $e^{\mathrm{i}(\vec{m}_1,\phi)}g_1$ и $e^{\mathrm{i}(\vec{m}_2,\phi)}g_2,\ g_1, g_2 \in \tilde{\mathcal{H}}_{\beta}^{rad}$. Таким образом, подпространство $\oplus_{\vec{m}}\mathcal{H}_{\vec{m}}$ инвариантно относительно группы $\mathbf{U}_{\mathbf{\Psi}}$ и сужение $\mathbf{U}_{\hat{\mathbf{\Psi}}}|_{\oplus_{\vec{m}}\mathcal{H}_{\vec{m}}}$ является сильно непрерывной группой в пространстве $\oplus_{\vec{m}}\mathcal{H}_{\vec{m}}$. □

Список литературы

[1] J. Bourgain, *Periodic nonlinear Schrodinger equation and invariant measures*, Comm. Math. Phys. **166**, 1–26 (1994).
DOI: https://doi.org/10.1007/BF02099299

[2] P. Chernoff, J. Marsden, *Properties of infinite dimensional Hamiltonian systems*, Lecture Notes Math. **425**, Springer-Verlag Berlin, Heidelberg, 1974.
DOI: https://doi.org/10.1007/bfb0073665

[3] P.E. Zhidkov, *On invariant measure for some infinite-dimensional dynamical systems*, Ann. Inst. H. Poincare Sect. A **62**, 267–287 (1995).
URL: https://link.springer.com/chapter/10.1007/978-94-017-0693-3_32

[4] V.M. Busovikov, V.Zh. Sakbaev, *Direct limit of shift-invariant measures on a Hilbert space*, Lobachevskii J. Math. **44** (6), 1998–2006 (2023).
DOI: https://doi.org/10.1134/S1995080223060136

[5] V.Zh. Sakbaev, *Flows in infinite-dimensional phase space equipped with a finitely-additive invariant measure*, Mathematics **11** (5), 1161 (2023).
DOI: https://doi.org/10.3390/math11051161

[6] Ю.Н. Орлов, В.Ж. Сакбаев, О.Г. Смолянов, *Неограниченные случайные операторы и формулы Фейнмана*, Изв. РАН. Сер. матем. **80** (6), 141–172 (2016).
DOI: https://doi.org/10.4213/im8402

[7] M.D. Srinivas, *Collapse postulate for observables with continuous spectra*, Comm. Math. Phys. **71** (2), 131–158 (1980).
DOI: https://doi.org/10.1007/bf01197917

[8] В.В. Козлов, О.Г. Смолянов, *Гамильтонов подход к вторичному квантованию*, Докл. РАН **483** (2), 138–142 (2018).
DOI: https://doi.org/10.31857/S086956520003467-6

[9] О.Г. Смолянов, Н.Н. Шамаров, *Квантование по Шрёдингеру бесконечномерных гамильтоновых систем с неквадратичной функцией Гамильтона*, Докл. РАН. **492** (1), 65–69 (2020).
DOI: https://doi.org/10.31857/S2686954320030200

[10] T. Gill, A. Kirtadze, G. Pantsulaia, A. Plichko, *Existence and uniqueness of translation invariant measures in separable Banach spaces*, Functiones et Approximatio **50** (2), 1–19 (2014).
DOI: https://10.7169/facm/2014.50.2.12

[11] R. Baker, *"Lebesgue measure" on R^∞*, Proc. Amer. Math. Soc. **113** (4), 1023–1029 (1991).
DOI: https://doi.org/10.2307/2048779

[12] Д.В. Завадский, *Аналоги меры Лебега в пространствах последовательностей и классы интегрируемых по ним функций*, Итоги науки и техн. Сер. Соврем. матем. и ее прил. Темат. обз. **151**, 37–44 (2018).
URL: https://www.mathnet.ru/rus/into338

[13] В.Ж. Сакбаев, *Усреднение случайных блужданий и меры на гильбертовом пространстве, инвариантные относительно сдвига*, Теор. матем. физ. **191** (3), 473–502 (2017).
DOI: https://doi.org/10.4213/tmf9153

[14] В.А. Глазатов, В.Ж. Сакбаев, *Меры на гильбертовом пространстве, инвариантные относительно гамильтоновых потоков*, Уфимск. матем. журн. **14** (2), 3–22 (2022).
URL: https://www.mathnet.ru/rus/ufa607

[15] А.Ю. Хренников, *Симплектическая геометрия на бесконечномерном фазовом пространстве и асимптотическое представление квантовых средних гауссовыми функциональными интегралами*, Изв. РАН. Сер. Матем. **72** (1), 137–160 (2008).
DOI: https://doi.org/10.4213/im786

[16] Н. Данфорд, Дж.Т. Шварц, *Линейные операторы. Т. 1. Общая теория*, УРСС, М., 2004.

[17] Е.М. Семенов, Ф.А. Сукочев, А.С. Усачева, *Геометрия банаховых пределов и их приложения*, УМН **75** (4), 153–194 (2020).
DOI: https://doi.org/10.4213/rm9901

[18] F. Sukochev, A. Usachev, D. Zanin, *Generalized limits with additional invariance properties and their applications to noncommutative geometry*, Adv. Math. **239**, 164–189 (2013).
DOI: https://doi.org/10.1016/j.aim.2013.02.012

Владимир Андреевич Глазатов
Институт Прикладной Математики им. М.В. Келдыша РАН,
Миусская пл., д. 4, г. Москва, 125047, Россия,
e-mail: glazv96@mail.ru

Всеволод Жанович Сакбаев
Институт Прикладной Математики им. М.В. Келдыша РАН,
Миусская пл., д. 4, г. Москва, 125047, Россия,
e-mail: fumi2003@mail.ru

Volume 2, Issue 1
pp. 31–54 (2024)

UDC 517.982, 517.983
MSC 28C20, 28A35

On the extension of singular linear infinite-dimensional Hamiltonian flows

V.A. Glazatov, V.Zh. Sakbaev

Abstract. We study the phenomenon of phase trajectories of a Hamiltonian system going to infinity in a finite time, the phase space of which is a separable Hilbert space. It is shown that if the Hamiltonian is a densely defined quadratic form on the phase space, which is not majorized either from below or from above by the quadratic form of the Hilbert norm, then the phase trajectories allow going to infinity in a finite time. To describe the phase flow of such Hamiltonian systems, an extended phase space is introduced, which is a locally convex space to which the Hamiltonian function, trajectories of the Hamiltonian system, and the symplectic form defined on the original Hilbert space can be extended. Flow-invariant measures on extended space are also studied. The properties of the Koopman unitary representation of the extended phase flow in the Hilbert space of functions that are quadratically integrable with respect to an invariant measure are investigated.

Keywords: symplectomorphism, translation invariant measure, A. Weil's theorem, Hamiltonian flow, Koopman representation.

DOI: 10.26907/2949-3919.2024.1.31-54

References

[1] J. Bourgain, *Periodic nonlinear Schrodinger equation and invariant measures*, Comm. Math. Phys. **166**, 1–26 (1994).
DOI: https://doi.org/10.1007/BF02099299

[2] P. Chernoff, J. Marsden, *Properties of infinite dimensional Hamiltonian systems*, Lecture Notes Math. **425**, Springer-Verlag Berlin, Heidelberg, 1974.
DOI: https://doi.org/10.1007/bfb0073665

[3] P.E. Zhidkov, *On invariant measure for some infinite-dimensional dynamical systems*, Ann. Inst. H. Poincare Sect. A **62**, 267–287 (1995).
URL: https://link.springer.com/chapter/10.1007/978-94-017-0693-3_32

[4] V.M. Busovikov, V.Zh. Sakbaev, *Direct limit of shift-invariant measures on a Hilbert space*, Lobachevskii J. Math. **44** (6), 1998–2006 (2023).
DOI: https://doi.org/10.1134/S1995080223060136

Received: 14 January 2024. Accepted: 27 February 2024. Published: 11 April 2024.

[5] V.Zh. Sakbaev, *Flows in infinite-dimensional phase space equipped with a finitely-additive invariant measure*, Mathematics **11** (5), 1161 (2023).
DOI: https://doi.org/10.3390/math11051161

[6] Yu.N. Orlov, V.Zh. Sakbaev, O.G. Smolyanov, *Unbounded random operators and Feynman formulae*, Izv. Math., **80** (6), 1131–1158 (2016).
DOI: https://doi.org/10.1070/im8402

[7] M.D. Srinivas, *Collapse postulate for observables with continuous spectra*, Comm. Math. Phys. **71** (2), 131–158 (1980).
DOI: https://doi.org/10.1007/bf01197917

[8] V.V. Kozlov, O.G. Smolyanov, *Hamiltonian approach to secondary quantization*, Dokl. Math. **98** (3), 571–574 (2018).
DOI: https://doi.org/10.1134/S1064562418070098

[9] O.G. Smolyanov, N.N. Shamarov, *Schrödinger Quantization of Infinite-Dimensional Hamiltonian Systems with a Nonquadratic Hamiltonian Function*, Dokl. Math. **101** (3), 227–230 (2020).
DOI: https://doi.org/10.1134/S1064562420030205

[10] T. Gill, A. Kirtadze, G. Pantsulaia, A. Plichko, *Existence and uniqueness of translation invariant measures in separable Banach spaces*, Functiones et Approximatio **50** (2), 1–19 (2014).
DOI: https://10.7169/facm/2014.50.2.12

[11] R. Baker, *"Lebesgue measure" on R^∞*, Proc. Amer. Math. Soc. **113** (4), 1023–1029 (1991).
DOI: https://doi.org/10.2307/2048779

[12] D.V. Zavadskii, *Analogs of the Lebesgue measure in spaces of sequences and classes of functions integrable with respect to these measures*, J. Math. Sci. (N.Y.), **252** (1), 36–42 (2021).
DOI: https://doi.org/10.1007/s10958-020-05139-8

[13] V.Zh. Sakbaev, *Averaging of random walks and shift-invariant measures on a Hilbert space*, Theor. Math. Phys. **191** (3), 886–909 (2017).
DOI: https://doi.org/10.1134/S0040577917060083

[14] V.A. Glazatov, V.Zh. Sakbaev, *Measures on a Hilbert space that are invariant with respect to Hamiltonian flows*, Ufimsk. Mat. Zh. **14** (2), 3–21 (2022).
DOI: https://doi.org/10.13108/2022-14-2-3

[15] A.Yu. Khrennikov, *Symplectic geometry on an infinite-dimensional phase space and an asymptotic representation of quantum averages by Gaussian functional integrals*, Izv. Math. **72** (1), 127–148 (2008).
DOI: https://doi.org/10.1070/IM2008v072n01ABEH002395

[16] N. Dunford, J.T.Schwartz, *Linear operators, Part 1: General theory*, Wiley-Interscience, 1988.

[17] E.M. Semenov, F.A. Sukochev, A.S. Usachev, *Geometry of Banach limits and their applications*, Russ. Math. Surv. **75** (4), 725–763 (2020).
DOI: https://doi.org/10.1070/RM9901

[18] F. Sukochev, A. Usachev, D. Zanin, *Generalized limits with additional invariance properties and their applications to noncommutative geometry*, Adv. Math. **239**, 164–189 (2013).
DOI: https://doi.org/10.1016/j.aim.2013.02.012

Vladimir Andreevich Glazatov
Keldysh Institute of Applied Mathematics (Russian Academy of Sciences),
4 Miysskaya sq., Moscow 125047, Russia,
e-mail: glazv96@yandex.ru

Vsevolod Zhanovich Sakbaev
Keldysh Institute of Applied Mathematics (Russian Academy of Sciences),
4 Miysskaya sq., Moscow 125047, Russia,
e-mail: fumi2003@mail.ru