Том 2, Выпуск 1
Стр. 55–73 (2024)

УДК 510.54, 512.57
MSC 03C05, 03D45

Локально конечные и финитно аппроксимируемые унoиды над вычислимо отделимыми эквивалентностями

Н.Х. Касымов

Аннотация. Доказано, что всякое кобесконечное множество является характеристической трансверсалью подходящей вычислимо отделимой эквивалентности, над которой представимы только локально конечные, локально финитно отделимые и финитно аппроксимируемые унарные алгебры. Рассмотрены аналогичные свойства для равномерно вычислимо отделимых эквивалентностей.

Ключевые слова: вычислимо отделимая эквивалентность, равномерность, характеристическая трансверсаль, унарная алгебра, локальная конечность, финитная аппроксимируемость, локально финитная отделимость.

DOI: 10.26907/2949-3919.2024.1.55-73

Введение

В работе рассматриваются эквивалентности на множестве натуральных чисел и представимые над ними универсальные унарные алгебры эффективных сигнатур.

С базовыми понятиями можно ознакомиться в [1–6].

Изучению алгоритмических свойств эквивалентностей на множестве натуральных чисел сейчас уделяется большое внимание. Здесь можно отметить работы У. Эндрюса, А. Сорби, К. Бернарди, Л. Сан Мауро, Ш. Лемппа, К.М. Нг, С.А. Бадаева, Н.А. Баженова, Б.С. Калмурзаева и других. Библиографию по этим вопросам можно найти в списках литературы к работам [7, 8]. Тесно примыкают к этой проблематике вопросы строения алгебр, представимых над эквивалентностями. Если θ – эквивалентность на множестве натуральных чисел ω, то универсальная алгебра $\mathfrak{A}$ называется представимой над θ (или θ-алгеброй), если существует ее нумерация ν с ядром равным θ (т. е. $\theta = \{\langle x, y\rangle \mid \nu x = \nu y\}$). Другими словами, алгебра $\mathfrak{A}$ представима над эквивалентностью θ, если существует такое семейство (не обязательно эффективное) F вычислимых функций, согласованных с

Благодарности. Работа выполнена в рамках реализации Программы развития Научно-образовательного математического центра Приволжского федерального округа (соглашение № 0075-02-2023-944).

Поступила: 02.12.2023. Принята: 27.02.2024. Опубликована: 11.04.2024.

θ (т.е. для каждой $f \in F : \forall \overline{x}, \overline{y}(\overline{x} = \overline{y} \pmod{\theta} \Rightarrow f(\overline{x}) = f(\overline{y}) \pmod{\theta}))$, что $\mathfrak{A}$ изоморфна фактор-алгебре $\langle \omega/\theta; F\rangle$ вычислимой алгебры $\langle \omega; F\rangle$ по конгруэнции θ. При этом естественный проектирующий гомоморфизм $\nu(x) = x/\theta$ и является нумерацией из вычислимой алгебры $\langle \omega; F\rangle$ на $\mathfrak{A}$. Уместно отметить, что роль и место вычислимых алгебр в теории нумерованных алгебр подобны роли и месту абсолютно свободных алгебр подходящего ранга в теории универсальных алгебр, так как и в том, и в другом случае существует гомоморфизм из подходящей вычислимой (некоторой свободной) алгебры на $\mathfrak{A}$. Заметим, что любая не более чем счетная универсальная алгебра счетной сигнатуры имеет нумерацию (индуцированную геделевской нумерацией абсолютно свободной алгебры термов от разрешимого множества порождающих, [4]). Случай неэффективной сигнатуры (любой алгоритмической сложности) ситуацию с наличием нумерации не меняет ([9]).

Оказалось, что структурные свойства θ-алгебр могут быть тесно связанными с алгоритмическими свойствами эквивалентности θ. Назовем характеристической трансверсалью эквивалентности θ множество $\mathrm{tr}(\theta) = \{x \mid \forall y(x = y \pmod{\theta} \Rightarrow x \leqslant y)\}$. Свойства множеств с сильными условиями конечности алгоритмического типа (особенно гипериммунности) плодотворно используются в современной теории вычислимости как в структурной теории различных степеней и иерархий, так и в общей теории нумераций (см., например, [10, 11]). В работе [12] было установлено, что всякая универсальная алгебра, представимая над эквивалентностью с гипериммунной характеристической трансверсалью является локально конечной. Гипериммунность характеристической трансверсали нумерации (т.е. ее ядра) может быть сильно связанной со структурными свойствами нумерованной алгебры. Например, А.И. Мальцев в [13] показал, что всякая позитивная нумерация конечно порожденной универсальной алгебры, обладающей ненулевыми конгруэнциями только конечного индекса, является разрешимой. В общем случае при отказе от конечной порожденности существуют контрпримеры – неразрешимые позитивные алгебры с ненулевыми конгруэнциями только конечного индекса и их характеристические трансверсали необходимо гипериммунны ([14]), а значит, учитывая вышесказанное, всякая такая алгебра локально конечна.

Понятие вычислимо отделимой алгебры, естественное само по себе, оказалось полезным для решения ряда задач как в теории вычислимых моделей, так и в теоретической информатике ([15]). Так, например, вычислимо отделимыми являются негативные нумерации, стандартные нумерации финитно аппроксимируемых и конечно порожденных алгебр, позитивные нумерации универсальных алгебр со счетными (в частности, нетеровыми) решетками конгруэнций ([15–17]). Примеры применения вычислимо отделимых алгебр также многообразны. Наряду с упомянутым выше примером к теореме А.И. Мальцева отметим проблему Бергстры–Такера в теории абстрактных типов данных – о существовании инициального в конечно-базируемом многообразии обогащения для любой конечно порожденной позитивной алгебры ([18]). Отрицательное решение этой проблемы было получено предъявлением соответствующего примера конечно порожденной алгебры, имеющей вычислимо отделимую позитивную нумерацию с иммунной характеристической трансверсалью ([12]).

Под гомоморфизмом $\varphi : \langle\mathfrak{A}, \mu\rangle \to \langle\mathfrak{B}, \nu\rangle$ двух нумерованных алгебр понимается гомоморфизм $\varphi : \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$ алгебр, являющийся морфизмом, т. е. существует такая вычислимая функция f, что $\varphi\mu = \nu f$, это совершенно естественно с интенсиональной точки зрения (см. [1, 2]). Заметим, что с этой точки зрения изоморфизм из $\langle\mathfrak{A}, \mu\rangle$ на $\langle\mathfrak{B}, \nu\rangle$ может быть необратимым, т. е. обратный изоморфизм может не поддерживаться вычислимой функцией на номерах. Наконец, если $\mathfrak{R} = \{\langle\mathfrak{A}_i, \mu_i\rangle \mid i \in I\}$ – семейство нумерованных алгебр, то будем говорить, что нумерованная алгебра $\langle\mathfrak{A}, \mu\rangle$ аппроксимируется $\mathfrak{R}$-алгебрами, если для любых двух разных элементов алгебры $\mathfrak{A}$ найдется гомоморфизм в некоторую $\mathfrak{R}$-алгебру, различающий эти элементы (т. е. для любых $a_0 \neq a_1$ из $\mathfrak{A}$ существуют $i \in I$ и эффективный на номерах гомоморфизм $\varphi_i : \langle\mathfrak{A}, \mu\rangle \to \langle\mathfrak{A}_i, \mu_i\rangle$ такие, что $\varphi_i(a_0) \neq \varphi_i(a_1)$).

Пусть $\langle A; \mu\rangle$ – нумерованное множество. Подмножество $A_0 \subseteq A$ называется μ-вычислимым (или вычислимым, без приставки μ-, когда из контекста ясно о какой нумерации μ идет речь), если вычислим полный μ-прообраз множества A_0 (т. е. $\mu^{-1}A_0$). Если $a \in A_0 \subseteq A$, то A_0 назовем окрестностью a. Нумерация μ множества A называется вычислимо отделимой, если для любых двух различных элементов этого множества найдется μ-вычислимая окрестность одного из них, не содержащая другой.

Особое место среди вычислимо отделимых алгебр занимают негативные алгебры, так как нумерованная алгебра вычислимо отделима тогда и только тогда, когда она аппроксимируется негативными алгебрами ([19]). Заметим, что вычислимая отделимость нумерации позволяет вводить полезные топологии, базу которых образуют вычислимые подмножества нумерованных алгебр. Эти пространства являются T_4-пространствами, причем все операции любой нумерованной алгебры непрерывны относительно вычислимо порожденной топологии на ней ([20]).

Важнейшим подклассом класса вычислимо отделимых алгебр является класс равномерно вычислимо отделимых алгебр, для которого существуют алгоритмы, позволяющие эффективно порождать характеристические индексы отделяющих множеств ([21]). Достаточно сказать, что контрпример к упомянутой выше проблеме А.И. Мальцева является равномерно вычислимо отделимой алгеброй, а контрпример к проблеме Бергстры–Такера можно усилить, выбрав такую равномерно вычислимо отделимую позитивную алгебру, никакое обогащение которой не является свободной системой ни в каком классе систем, конечно аксиоматизируемом универсальными предложениями специального, но весьма общего вида ([15]).

В настоящей статье рассматриваются в основном уноиды, т. е. универсальные алгебры с одноместными операциями. Унарные алгебры естественным образом возникают во многих областях. Например, с любой универсальной алгеброй тесно связана полугруппа ее трансляций, в значительной степени проливающая свет на строение решетки конгруэнций этой алгебры ([22]). Другой пример дается упорядоченными системами при сопоставлении каждой многоместной операции, согласованной с порядком, семейства одноместных операций, получающихся из данной операции путем фиксации в качестве параметров всех аргументов кроме одного; при этом образуется семейство эндоморфизмов, которое для любой нумерации исходной системы будет вычислимым семейством вычислимых эндоморфизмов ([23]).

Таким образом, на настоящий момент известно, что всякая универсальная алгебра, представимая над эквивалентностью с гипериммунной характеристической трансверсалью, является локально конечной ([15]). Тем не менее, вопрос о существовании эквивалентностей с бесконечными не иммунными характеристическими трансверсалями, над которыми представимы только локально конечные алгебры, остается открытым ([15]). В нашей работе дается частичное положительное решение этого вопроса для класса унарных алгебр. Более того, оказалось, что любое кобесконечное множество (дополненное нулем) является характеристической трансверсалью такой эквивалентности с конечными смежными классами, над которой представимы только локально конечные уноиды. Попутно рассматриваются некоторые структурные свойства уноидов, представимых над эквивалентностями таких типов – такие как финитная аппроксимируемость, финитная отделимость и локально финитная отделимость, которые важны с точки зрения алгоритмических задач алгебры.

Для удобства и сокращения обозначений будем отождествлять список имен сигнатурных операций с интерпретациями этих символов в задаваемых алгебрах. Эквивалентность на множестве натуральных чисел будем называть бесконечной, если бесконечно число ее смежных классов. Для двух эквивалентностей $\eta_0 \subseteq \eta_1$ вторую будем называть расширением первой.

В разделе 1 рассматриваются алгебраические факты, проливающие свет на полезные свойства операций для конечно порожденных уноидов. Исходя из этих свойств, строятся эквивалентности с конечными классами на множестве натуральных чисел, опускающие счетные семейства нетривиальных отображений. В разделе 2 показывается, что всякое кобесконечное множество является характеристической трансверсалью подходящей вычислимо отделимой эквивалентности, над которой представимы только локально конечные, финитно аппроксимируемые и локально финитно отделимые уноиды. В заключительном разделе 3 уточняются эти свойства для класса равномерно вычислимо отделимых эквивалентностей.

1. Нетривиальные операции и конечно порожденные подалгебры

Вначале рассмотрим некоторые общеалгебраические факты о бесконечных счетных множествах и семействах отображений (одноместных операций), заданных на этих множествах. Затем перенесем эти факты на множество натуральных чисел и семейства вычислимых отображений на нем.

Определение 1. Универсальная алгебра называется конечно порожденной (локально конечной), если некоторое (всякое) ее конечное обеднение является конечно порожденным (локально конечным).

Для конечных сигнатур данное определение совпадает с классическим. Для бесконечных сигнатур понятие порожденности конечным множеством элементов и всеми сигнатурными операциями не совпадает с классическим понятием конечной порожденности. Например, рассмотрим алгебру $\mathfrak{A} = \langle \omega; f_n \rangle$, где ω – множество натуральных чисел и $\forall x \in \omega\, (f_n(x) = n)$. Тогда алгебра $\mathfrak{A}$ локально конечна, но порождается любым своим элементом.

Пусть A – бесконечное множество. Множество $F_A = \{f \mid f : A \to A\}$ всех отображений A в себя разделим на две части $F_0, F_1 : F_0 \cup F_1 = A,\ F_0 \cap F_1 = \emptyset$ так, что для каждой операции $f \in F_0$ справедливо следующее условие: для любого конечного $B \subset A$ существует такой элемент $a \in A \setminus B$, что $a \neq f(a) \wedge f(a) \in A \setminus B$. Все функции из F_0 будем называть A-нетривиальными или (если из контекста ясно, о каком A идет речь) нетривиальными (без приставки A-) .

Операции из F_1 будем называть A-тривиальными или, аналогично сказанному выше, тривиальными. Таким образом, если f тривиально действует на A, т. е. $f \in F_1$, то существует такое конечное $B \subset A$, что для всякого элемента $a \in A \setminus B$ выполняется $a = f(a) \vee f(a) \in B$.

Отметим, что мощность как семейства F_0, так и семейства F_1 для счетно-бесконечного множества A есть континуум. В первом случае (для семейства F_0) упорядочим A по типу двоичного дерева и сопоставим каждой его ветви (число которых континуум) уникальное отображение, которое сопоставляет каждому элементу данной ветви непосредственно “следующий” элемент, а все элементы из дополнения этой ветви переводит в некоторый фиксированный элемент. Тогда каждая функция, порождающая соответствующую ей ветвь, является A-нетривиальной. Во втором случае (для F_1) достаточно заметить, что всякая характеристическая функция любого подмножества множества A (при фиксации пары элементов в качестве 0 и 1 на множестве A) является A-тривиальной.

Пусть $\mathfrak{A} = \langle A; \Sigma \rangle$ – универсальная алгебра сигнатуры Σ и $B \subseteq A$. Подалгебру алгебры $\mathfrak{A}$, порожденную подмножеством B, будем обозначать через $\Sigma(B)$.

Предложение 2. *Пусть $\mathfrak{A}$ – алгебра конечной сигнатуры $\Sigma \subset F_A$ (т. е. $\mathfrak{A}$ – униод), B – конечное подмножество A и подалгебра $\Sigma(B)$ бесконечна. Тогда существует хотя бы одна нетривиальная Σ-операция (т. е. из F_0).*

Доказательство. Пусть $\langle f_0, \ldots, f_m \rangle$ – список всех Σ-операций. Допустим, что все Σ-операции являются тривиальными, т. е. лежат в F_1. Обозначим через B_{f_k} $(k \leqslant m)$ такое конечное множество, что $\forall x \in A \setminus B_{f_k}(f_k(x) = x \vee f_k(x) \in B_{f_k})$ (такие множества существуют в силу тривиальности всех Σ-операций). Рассмотрим конечное множество $B^* = B \cup \bigcup\limits_{k \leqslant m} B_{f_k}$. В силу тривиальности каждой операции f_k $(k \leqslant m)$ результат применения любой из них ко всякому элементу из $A \setminus B^*$ либо тождественен, либо лежит в B^*. При этом, даже если результаты применения некоторых Σ-операций к некоторым элементам множества B^* находятся вне B^*, то подалгебра $\Sigma(B^*)$ конечна. Противоречие. □

В частности, имеет место очевидное

Следствие 3. *Всякий уноид с тривиальными операциями локально конечен.*

Пусть A – бесконечное счетное множество, θ – отношение эквивалентности на A и f – отображение из A^n в A. Будем говорить, что θ опускает f, если f не согласована с θ, т. е. найдутся такие наборы $\overline{x}, \overline{y}$, которые покомпонентно равны по модулю θ, но $f(\overline{x}) \neq f(\overline{y}) \pmod{\theta}$.

Другими словами, опускаемость операции f эквивалентностью θ означает, что действие f на A нельзя корректно перенести на фактор-множество A/η, образуя естественную фактор-алгебру. Если F – семейство операций на A, то будем говорить, что эквивалентность θ опускает семейство F, если θ опускает каждую операцию из F. Далее, до конца раздела будем рассматривать эквивалентности, опускающие семейства нетривиальных функций, заданных на множестве A.

Теперь, для упрощения рассмотрений, в качестве A будем рассматривать множество натуральных чисел ω.

Теорема 4. *Пусть F – счетное подсемейство семейства всех ω-нетривиальных отображений и T – бесконечное кобесконечное подмножество ω, содержащее 0. Тогда существует эквивалентность θ с конечными классами и характеристической трансверсалью T, опускающая семейство F.*

Доказательство. Пусть $T = \{0 = t_0 < t_1 < t_2 < \cdots\}$. Занумеруем семейство F: $F = \{f_1, f_2, \ldots\}$. Напомним, что множество называется θ-замкнутым (относительно эквивалентности θ), если вместе с каждым числом оно содержит и все ему θ-эквивалентные. Начальным сегментом назовем всякое множество, которое вместе с каждым числом содержит и все меньшие него.

Мы построим θ как предел последовательности эквивалентностей, возникающих в пошаговой конструкции, каждый шаг которой опускает текущую (рассматриваемую на данном шаге) ω-нетривиальную функцию из F.

Возможность осуществления шага этого построения дает

Лемма 5. *Пусть*

- *θ – эквивалентность на ω с характеристической трансверсалью T;*
- *B – θ-замкнутый конечный начальный сегмент ω;*
- *множество $\omega \backslash B$ – объединение классов эквивалентности θ вида $[t_i, t_{i+1})$, $k \leqslant i < \omega$, для подходящего $k < \omega$;*
- *f – ω-нетривиальная функция.*

Тогда существуют конечный θ-замкнутый начальный сегмент $B^* \supsetneqq B$ и эквивалентность θ^* такие, что

- *θ^* получается из θ перераспределением элементов между классами эквивалентности θ, содержащимися в $B^* \setminus B$;*
- *T – характеристическая трансверсаль для θ^*;*
- *существуют $x, y \in B^* \setminus B$ такие, что $f(x), f(y) \in B^* \setminus B$, $x = y (\bmod\, \theta^*)$ и $\neg\big(f(x) = f(y) (\bmod\, \theta^*)\big)$.*

Доказательство. Рассмотрим два случая.

Случай 1. Для любого $m \in \omega$ существует $x \in \omega \setminus T$ такое, что $m < x$, $m < f(x)$ и $f(x) \neq x$.

Возьмем некоторое $x \in \omega \setminus T$ такое, что $x \notin B$, $f(x) \notin B$, $f(x) \neq x$. Зафиксируем m_0 такое, что все элементы, θ-эквивалентные хотя бы одному элементу из множества $\{0, 1, \ldots, \max\{x, f(x)\}\}$, строго меньше m_0. Далее, возьмем некоторое $y \in \omega \setminus T$ такое, что $y, f(y) > m_0$, $f(y) \neq y$. Эквивалентность θ^* мы получим из θ удалением элемента y из его класса θ–эквивалентности и последующим склеиванием его с элементом x. Положим B^* равным наименьшему θ^*-замкнутому начальному сегменту, содержащему x, y, $f(x)$, $f(y)$. Нетрудно проверить, что θ^*, B^* и x, y являются искомыми.

Случай 2. Не выполнен случай 1, а именно, начиная с некоторого числа m, f тождественна на множестве $\omega \setminus T$.

Зафиксируем такое m. Без ограничения общности можно считать, что все элементы из B строго меньше m. Здесь возможны два подслучая.

Подслучай 2.1. Существует $x > m$ такое, что $f(x) > m$, $f(x) \neq x$, $f(x)$ не θ-эквивалентно x. Заметим, что для всех таких x справедливо $x \in T$.

Зафиксируем такое $x \in T$. Из кобесконечности T и устройства эквивалентности θ на $\omega \setminus B$ следует существование элемента $y \notin T$, который строго больше любого элемента из замыкания множества $\{0, 1, \ldots, \max\{x, f(x)\}\}$ относительно θ. Из условий рассматриваемого случая следует $f(y) = y$. Удалим y из его класса θ-эквивалентности и добавим его в класс эквивалентности для x. Полученную таким образом эквивалентность обозначим θ^*. Расширим множество B до θ^*-замкнутого начального сегмента $B^* \supsetneqq B$, содержащего y. Нетрудно проверить, что θ^*, B^*, x и y удовлетворяют требуемым условиям.

Подслучай 2.2. (*отрицание случая* 2.1). Для любого $x > m$ такого, что $x \neq f(x) > m$, $f(x)$ является θ-эквивалентным x. Заметим, что для всех таких x справедливо $x \in T$.

Выберем $x_0 > m$ такое, что $f(x_0) \neq x_0$. Затем выберем $x_1 > x_0$ такое, что $f(x_1) \neq x_1$, и, наконец, выберем $x_2 > x_1$ такое, что $f(x_2) \neq x_2$. Из условий следует, что x_0, x_1, x_2 – попарно различные элементы из T, и их классы эквивалентности $x_0/\theta, x_1/\theta, x_2/\theta$ расположены друг относительно друга в том же порядке, что и сами x_0, x_1, x_2. При этом для всех $i < 3$ справедливо $f(x_i) \in x_i/\theta$, поэтому $f(f(x_i)) = f(x_i)$. Заменим в θ классы x_0/θ, x_1/θ, x_2/θ соответственно на $x_0/\theta \cup \{f(x_1)\}$, $(x_1/\theta \setminus \{f(x_1)\}) \cup \{f(x_2)\}$, $x_2/\theta \setminus \{f(x_2)\}$. Полученную эквивалентность обозначим θ^*. Пусть B^* – наименьший начальный сегмент, содержащий x_0/θ, x_1/θ, x_2/θ, и замкнутый относительно θ^*. Непосредственно проверяем, что θ^*, B^*, $x = x_1$, $y = f(x_2)$ обладают требуемыми свойствами. □

Закончим доказательство теоремы. Пусть θ_0 – эквивалентность с классами $[t_i, t_{i+1})$, $i \in \omega$. Положим $B_0 = \varnothing$. Для всех s определим θ_{s+1} и B_{s+1}, соответственно, как θ^* и B^* из леммы 5 для $f = f_s$, $\theta = \theta_s$ и $B = B_s$.

Легко убедиться, что $\theta = \lim\limits_{s \to \infty} \theta_s$ существует и обладает всеми требуемыми свойствами. □

Если θ – эквивалентность на ω, то, как отмечалось выше, характеристической трансверсалью эквивалентности θ называется множество всех чисел, являющихся наименьшими в содержащих их θ-классах, а всякое множество, пересечение которого с любым θ-классом одноэлементно, называется трансверсалью этой эквивалентности. Очевидна единственность характеристической трансверсали для любой эквивалентности θ на ω и континуальность множества всех трансверсалей (за исключением тех случаев, когда число неодноэлеметных θ-классов конечно).

Следствие 6. *Пусть F – счетное семейство ω-нетривиальных отображений и T – бесконечное кобесконечное подмножество ω. Тогда существует эквивалентность θ с трансверсалью T, все классы которой конечны, опускающая семейство F.*

Доказательство. Для случая $0 \in T$ это непосредственно вытекает из теоремы 4.

Пусть $0 \notin T$ и t_1 – наименьший элемент в T, $t_1 > 0$. Применим процедуру построения эквивалентности из доказательства теоремы для множества $T \cup \{0\}$, положив на первом шаге $B_0 = [0, t_1)$. Построенная в результате этого эквивалентность опускает все функции из F и содержит класс $[0, t_1)$. “Склеим” этот класс с любым из оставшихся классов. Полученная эквивалентность и будет искомой. □

Следствие 7. *Для любого кобесконечного подмножества α множества натуральных чисел ω существует такая вычислимо отделимая эквивалентность θ с характеристической трансверсалью равной $\alpha \cup \{0\}$, что всякая уноидная алгебра представимая над θ является локально конечной.*

Доказательство. Достаточно в теореме 4 в качестве T взять множество $\alpha \cup \{0\}$, а в качестве счетного семейства ω-нетривиальных отображений – семейство F_{comp} всех вычислимых ω-нетривиальных функций. □

Замечания об эффективности. Если семейство F вычислимое и T вычислимо, то эквивалентность θ в теореме 4 (а значит, и в следствии 6) можно выбрать вычислимыми. Действительно, заметим, что в доказательстве теоремы 4 множество B_{s+1} и алгоритм для вычисления θ_{s+1} эффективно строятся по множеству B_s и алгоритму для вычисления θ_s просто путем перебора конечных сегментов B, расширяющих B_s, и эквивалентностей, отличающихся от θ_s на множестве $B \setminus B_s$, сохраняющих характеристическую трансверсаль. В итоге мы получим вычислимую эквивалентность $\theta = \lim\limits_{s\to\infty} \theta_s$, поскольку множества B_s образуют строго возрастающую цепь с объединением ω, а после шага s текущая эквивалентность на множестве B_s уже никогда не изменится. Таким образом имеет место

Следствие 8. *Для любого бесконечного и кобесконечного вычислимого подмножества $\alpha \subset \omega$ и всякого вычислимого подсемейства F семейства F_{comp} всех вычислимых ω-нетривиальных функций существует такая вычислимая эквивалентность θ с характеристической трансверсалью равной $\alpha \cup \{0\}$, что всякая не локально конечная уноидная алгебра, представимая над θ в естественной проектирующей нумерации $\nu(n) = n/\theta$, имеет в своем представлении операции из $F_{comp} \setminus F$.*

Доказательство. Действительно, в этом случае должна присутствовать хотя бы одна вычислимая ω-нетривиальная функция, согласованная с ядром нумерации ν. Однако каждая функция из F опускается ядром нумерации (эквивалентностью θ). □

Отметим, что наличие вычислимой нумерации семейства F (т. е. существование эффективной процедуры, сопоставляющей номеру функции алгоритм вычисления этой функции) вынуждает опускать некоторые функции многократно (даже бесконечное число раз), что никак не сказывается на конечном результате.

Еще одно важное замечание касается сложности семейства F_{comp} всех вычислимых ω-нетривиальных функций. В настоящей статье не ставится задача изучения этой сложности и связанных с ней вопросов. Однако очевидно, что сложность этого класса функций расположена достаточно низко в арифметической иерархии (всюду определенные вычислимые функции, для которых вне всякого конечного множества, заданного каноническим индексом, имеется точка, в которой значение функции также находится вне этого конечного множества). Поэтому алгоритмическая сложность эквивалентности θ из теоремы 4, вообще говоря, определяется сложностью ее характеристической трансверсали и может находиться далеко за пределами арифметической и других иерархий.

И, наконец, последнее замечание по эффективности конструкции. Если характеристическая трансверсаль $\alpha \cup \{0\}$ эквивалентности θ вычислима и F – вычислимое подсемейство семейства F_{comp}, то на каждом шаге конструкции из теоремы 4, определяемом леммой 5, можно попутно строить отличную от всех ранее опущенных вычислимую функцию, которая для каждого сегмента B_s имеет точку вне этого сегмента со значением в $\omega \setminus B_s$ и является согласованной с эквивалентностью θ_s. Другими словами, для каждого эффективного подсемейства F семейства F_{comp} всех вычислимых ω-нетривиальных функций можно эффективно построить вычислимую ω-нетривиальную функцию из $F_{comp} \setminus F$, т. е. F_{comp} – продуктивное семейство.

2. Локальная конечность и финитная аппроксимируемость

Напомним ([13]), что универсальная алгебра называется финитно аппроксимируемой, если для всякой пары ее различных элементов существует гомоморфизм на конечную алгебру, при котором образы этих элементов различны.

Аналогично, универсальная алгебра называется финитно отделимой (локально финитно отделимой), если для всякой ее подалгебры (конечно порожденной подалгебры) и элемента вне этой подалгебры существует гомоморфизм на конечную алгебру, при котором образ подалгебры не содержит образ данного элемента. Вопросы финитной отделимости важны с точки зрения алгоритмических задач алгебры. Например, если финитно аппроксимируемая алгебра задана конечным множеством соотношений от конечного семейства образующих в конечно-базируемом многообразии, то она автоматически позитивна, к тому же и негативна, так как свойство “быть различными” вычислимо перечислимо в силу конечности множества соотношений и устойчивости тождеств относительно гомоморфизмов

([6, 13]). Покажем, что эквивалентность из следствия 7 такова, что всякая представимая над ней алгебра финитно аппроксимируема и локально финитно отделима.

Теорема 9. *Пусть α – подмножество множества натуральных чисел ω. Следующие условия равносильны:*

1) *α – кобесконечное множество;*
2) *существует такая эквивалентность θ с конечными θ-классами и характеристической трансверсалью, равной $\alpha \cup \{0\}$, над которой представимы только локально конечные, финитно аппроксимируемые и локально финитно отделимые унарные алгебры.*

Доказательство. 1)$\Rightarrow$2). Если α конечно, то импликация очевидна.

Пусть $0 \in \alpha \subset \omega$ и α кобесконечно. Возьмем вычислимо отделимую эквивалентность θ из следствия 7, для которой $\mathrm{tr}(\theta) = \alpha \cup \{0\}$. Тогда любой θ-уноид локально конечен.

Предположим, что существует не финитно аппроксимируемый θ-уноид $\mathfrak{A}$ и пара разных элементов $b_0, b_1 \in \mathfrak{A}$ не различается никакой конгруэнцией конечного индекса. Рассмотрим нумерованную алгебру $(\mathfrak{A}, \mu)$, где μ – естественная проектирующая нумерация, т. е. $\mu x = x/\theta$. Известно ([15]), что нумерованная алгебра вычислимо отделима тогда и только тогда, когда она аппроксимируется негативными алгебрами. Следовательно, существуют такая негативная алгебра $(\mathfrak{B}, \nu)$ и такой эпиморфизм $\varphi : \mathfrak{A} \longrightarrow \mathfrak{B}$, являющийся морфизмом (т. е. для подходящей вычислимой функции f коммутативна диаграмма $\varphi\mu = \nu f$), что $\varphi(b_0) \neq \varphi(b_1)$. Нетрудно заметить, что ядро нумерации ν уноида $\mathfrak{B}$ является бесконечным негативным расширением эквивалентности θ. В [21] установлено, что всякая бесконечная негативная эквивалентность имеет бесконечное разрешимое расширение, которое обозначим через θ^*. Пусть $\mathrm{tr}(\theta^*) = \{0 = a_0 < a_1 < \ldots\}$ – прямой (очевидно вычислимый) пересчет характеристической трансверсали эквивалентности θ^*. Определим функцию s так, что $x = a_n \pmod{\theta^*} \Rightarrow s(x) = a_{n+1}$. Тогда унар $\langle \omega/\theta^*; s\rangle$, изоморфный алгебре следования, представим над θ^*. Однако вычислимая функция s согласована и с эквивалентностью θ, так как $x = y \pmod{\theta} \Rightarrow x = y \pmod{\theta^*} \Rightarrow s(x) = s(y)$. Таким образом, фактор-алгебра $\langle \omega/\theta; s\rangle$ содержит конечно порожденную подалгебру, изоморфную алгебре следования $S = \langle \omega; s\rangle, s(n) = n + 1$, что противоречит локальной конечности всякого θ-уноида.

Пусть $\mathfrak{A}$ – θ-уноид и $\mathfrak{A}_0$ – конечно порожденная подалгебра алгебры $\mathfrak{A}$. Тогда уноид $\mathfrak{A}_0$ конечен в силу локальной конечности всякого уноида, представимого над θ. Зафиксируем, как и выше, естественную нумерацию μ уноида $\mathfrak{A}$ и обозначим через $\{a_0/\theta, \ldots, a_m/\theta\}$ все элементы подалгебры $\mathfrak{A}_0$ в нумерации μ. Если $a \neq a_0 \pmod{\theta} \wedge \cdots \wedge a \neq a_m \pmod{\theta}$, то по теореме о негативной аппроксимируемости ([19]) существует семейство $\{\theta_0, \ldots, \theta_m\}$ негативных расширений эквивалентности θ, различающих a от $a_0, \ldots, a_m$, т. е. $a \neq a_0 \pmod{\theta_0} \wedge \cdots \wedge a \neq a_m \pmod{\theta_m}$. Каждая из этих эквивалентностей имеет конечный индекс, так как наличие бесконечного негативного расширения для θ противоречит локальной конечности всякого θ-уноида. Тогда пересечение $\theta^* = \bigcap\limits_{k \leqslant m} \theta_k$ есть негативная конгруэнция конечного индекса, по модулю которой элемент a/θ^* лежит вне подалгебры $\mathfrak{A}_0/\theta^*$.

2)$\Rightarrow$1). Пусть выполнено 2). Допустим, что α коконечно. Тогда любая эквивалентность с характеристической трансверсалью в качестве $\alpha \cup \{0\}$ разрешима и факт существования конечно порожденной, не финитно аппроксимируемой и не локально финитно отделимой унарной алгебры становится тривиальным. □

Таким образом, даже представимость над вычислимо отделимой эквивалентностью только локально конечных уноидов оказывается очень сильным свойством, обеспечивающим финитную аппроксимируемость и локально финитную отделимость любых (не обязательно унарных) алгебр, представимых над ней. Обратное, вообще говоря, неверно, так как существуют конечно порожденные финитно аппроксимируемые и локально финитно отделимые алгебры, представимые над вычислимо отделимыми эквивалентностями с иммунными характеристическими трансверсалями ([15]). Отметим существование такой вычислимой отделимой эквивалентности θ, что всякая θ-алгебра локально финитно отделима, но существует не финитно отделимая θ-алгебра ([24]).

Ранее было неизвестно, существуют ли бесконечные эквивалентности с не иммунными характеристическими трансверсалями, над которыми представимы только локально конечные унарные алгебры?

Следствие 10. *Существует такая вычислимо отделимая эквивалентность с бесконечной вычислимой характеристической трансверсалью, что всякая представимая над ней унарная алгебра является локально конечной, финитно аппроксимируемой и локально финитно отделимой.*

3. Равномерность

Пусть θ – эквивалентность на ω. Напомним, что множество α называется θ-замкнутым, если оно является объединением подходящих θ-классов, т. е. $x \in \alpha \wedge x = y \pmod{\theta} \Rightarrow y \in \alpha$.

Определение 11. Эквивалентность θ называется равномерно вычислимо отделимой, если существует частичная вычислимая функция $\lambda z.g(x, y, z)$ такая, что для всех $x \neq y \pmod{\theta}$ функция $\lambda z.g(x, y, z)$ является характеристической для некоторого θ-замкнутого множества, отделяющего x от y.

Неформально, эквивалентность θ на ω равномерно вычислимо отделима, если существует единообразная эффективная процедура, которая для каждой пары различных по модулю θ натуральных чисел "выдает" алгоритм разрешения θ-замкнутого вычислимого множества, отделяющего эти числа.

Согласно теореме 4 любое множество с минимальными ограничениями (достаточно, чтобы оно содержало число нуль и было кобесконечным) является характеристической трансверсалью некоторой вычислимо отделимой эквивалентности, над которой представимы только локально конечные, финитно аппроксимируемые и локально финитно отделимые унарные алгебры. Рассмотрим эти вопросы для класса равномерно вычислимо отделимых эквивалентностей, являющихся наиболее важными с точки зрения приложений.

Например, упоминавшаяся выше теорема А.И. Мальцева о разрешимости любой позитивной конечно порожденной алгебры, обладающей ненулевыми конгруэнциями только конечного индекса ([13]), в общем случае (без условия конечной порожденности) не имеет места ([14]), и контрпримером к ней является неразрешимая позитивная алгебра, обладающая ненулевыми конгруэнциями только конечного индекса. При этом любая неразрешимая позитивная нумерация такой алгебры равномерно вычислимо отделима и имеет гипериммунную характеристическую трансверсаль, а сама алгебра локально конечна, финитно аппроксимируема, локально финитно отделима и не является уноидом (см. также [14]). Заметим, что решетка конгруэнций всякого бесконечного локально конечного уноида не может быть нетеровой. В самом деле, пусть $\mathfrak{A}$ – локально конечный уноид конечной сигнатуры Σ. Выбираем любую конечно порожденную подалгебру $\mathfrak{A}_0$ уноида $\mathfrak{A}$, затем расширяем $\mathfrak{A}_0$ до подалгебры $\mathfrak{A}_1 = \Sigma(\mathfrak{A}_0 \cup \{a_0\})$, где $a_0 \notin \mathfrak{A}_0$. Итерируем эту процедуру: $\mathfrak{A}_{n+1} = \Sigma(\mathfrak{A}_n \cup \{a_n\}), a_n \notin \mathfrak{A}_n$, и заметим, что для каждого $n \in \omega$ множество $\theta_n = \mathfrak{A}_n^2 \cup id\, \mathfrak{A}$ есть конгруэнция уноида $\mathfrak{A}$. Поэтому наличие бесконечно возрастающей цепи конгруэнций $\theta_0 \subset \theta_1 \subset \ldots$ отвергает условие максимальности. Тем самым доказано

Предложение 12. *Решетка конгруэнций бесконечного локально конечного уноида не является нетеровой.*

В частности, в решетку конгруэнций всякого бесконечного локально конечного уноида вложим ординал $\omega + 1$.

Отметим, что всякая позитивная нумерация любой универсальной алгебры со счетной (в частности, нетеровой) решеткой конгруэнций является вычислимо отделимой и, более того, любая такая алгебра аппроксимируется не просто негативными, а вычислимыми алгебрами ([17]).

Следует также подчеркнуть широту спектра распространения равномерно вычислимо отделимых эквивалентностей. Так, в каждой m-степени имеется равномерно вычислимо отделимая эквивалентность ([21]). Квинтэссенцией равномерно вычислимо отделимых эквивалентностей являются негативные эквивалентности, так как легко убедиться в справедливости следующего утверждения ([15]):

эквивалентность негативна тогда и только тогда, когда она равномерно вычислима отделима и ее характеристическая трансверсаль вычислимо перечислима.

С другой стороны, существуют конечно порожденные позитивные равномерно вычислимо отделимые уноиды с иммунными характеристическими трансверсалями. Как уже отмечалось, это дает отрицательное решение проблемы Бергстры–Такера о существовании для любой конечно порожденной позитивной алгебры ее позитивного обогащения, являющегося свободной системой некоторого конечно-базируемого многообразия ([12]). На самом деле контрпример к проблеме Бергстры–Такера можно усилить, построив пример позитивной конечно порожденной алгебры, никакое обогащение которой не является свободной системой ни в каком конечно-акиоматизируемом универсале, определенном универсальными предложениями весьма общего вида. Это следует из возможности аппроксимации равномерно вычислимо отделимых алгебр не просто негативными алгебрами, а такими негативными, в которых реализуются очень общие универсальные вычислимо перечислимые факты, истинные в исходной алгебре ([21]).

Наконец, равномерно вычислимые эквивалентности неожиданным образом оказались тесно связанными с полуперечислимыми множествами, введенными К.Г. Джокушем в ([25]):

для любого $\alpha \subseteq \omega$ эквивалентность $\alpha^2 \cup id\ \omega$ равномерно вычислимо отделима тогда и только тогда, когда $\omega \setminus \alpha$ полуперечислимо ([26]).

Наличие такой связи, в частности, позволило показать, что

существует пара равномерно вычислимо отделимых эквивалентностей, пересечение которых не является равномерно вычислимо отделимой ([26]).

Очевидно, что пересечение любого эффективного (по в.п. индексам) семейства негативных эквивалентностей является негативным.

Сказанное обосновывает важность и полезность понятия равномерно вычислимо отделимой эквивалентности и стимулирует изучение структурных свойств алгебр, представимых над такими эквивалентностями.

В [24] доказано следующее

Предложение 13. *Для бесконечной равномерно вычислимо отделимой эквивалентности θ следующие условия эквивалентны*:

1) *характеристическая трансверсаль эквивалентности θ иммунна*;
2) *всякая θ-алгебра финитно аппроксимируема*;
3) *всякая θ-алгебра локально финитно отделима.*

Заметим, что это предложение верно для любых универсальных алгебр, а не только для униоидов. Таким образом, при наличии свойства равномерности ничего подобного теоремам 4 и 9 не имеет места.

Покажем, что для равномерно вычислимо отделимой эквивалентности эффективная бесконечность ее характеристичекой трансверсали достаточна для представимости над этой эквивалентностью конечно порожденного униоида.

Предложение 14. *Пусть θ – равномерно вычислимо отделимая эквивалентность с бесконечной и не иммунной характеристической трансверсалью. Тогда существует конечно порожденный θ-униоид.*

Доказательство. В [21] показано, что при этих условиях существует бесконечное негативное эквивалентное расширение θ_n эквивалентности θ. Очевидно, что $\mathrm{tr}(\theta_n)$ – вычислимо перечислимое множество. Зафиксируем некоторое бесконечное вычислимое подмножество

$\alpha = \{0 = a_0 < a_1 < \ldots\}$ множества $\mathrm{tr}(\theta_n)$. В [27] доказано, что существует разрешимое эквивалентное расширение θ^* эквивалентности θ_n, характеристическая трансверсаль которого есть α. Определим две одноместные функции f, g следующим образом: $[x = a_n \pmod{\theta^*} \Rightarrow f(x) = a_{n+1}] \wedge [x = a_n \pmod{\theta^*} \Rightarrow g(x) = n]$. Нетрудно заметить, что уноид $\langle \omega/\theta^*; f, g\rangle$ конечно порожденный, а функции f, g согласованы с эквивалентностью θ, так как $x = y \pmod{\theta} \Rightarrow x = y \pmod{\theta^*} \Rightarrow f(x) = f(y) \wedge g(x) = g(y)$. Поскольку любое натуральное число является значением подходящего терма вида $gf^k(0)$ для подходящего $k \in \omega$, то фактор-алгебра $\langle \omega/\theta; f, g\rangle$ также конечно порожденная. □

Еще раз отметим, что существуют конечно порожденные уноиды, обладающие равномерно вычислимо отделимыми позитивными нумерациями с иммунными характеристическими трансверсалями ([15]). Для любой эквивалентности (не обязательно вычислимо отделимой), как отмечалось выше, гипериммунность характеристической трансверсали достаточна для того, чтобы *всякая универсальная алгебра* (не обязательно уноид), представимая над этой эквивалентностью, была локально конечной. В связи с этим возникает принципиальный вопрос, упомянутый во введении.

Существует ли бесконечная эквивалентность с не иммунной характеристической трансверсалью, над которой представимы только локально конечные универсальные алгебры?

Список литературы

[1] Ю.Л. Ершов, *Теория нумераций*, Наука, М., 1977.

[2] Yu.L. Ershov, *Theory of numberings*, in: E.R. Griffor (ed.), Handbook of computability theory (Stud. Logic Found. Math., 140), Amsterdam, Elsevier, 1999, 473–503. DOI: https://doi.org/10.1016/S0049-237X(99)80030-5

[3] R.I. Soare, *Recursively enumerable sets and degrees. A study of computable functions and computably generated sets*, Perspectives in mathematical logic. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, etc., 1987. URL: https://link.springer.com/book/9783540666813

[4] С.С. Гончаров, Ю.Л. Ершов, *Конструктивные модели*, Научная книга, Новосибирск, 1999.

[5] П.М. Кон, *Универсальная алгебра*, Мир, М., 1968.

[6] А.И. Мальцев, *Алгебраические системы*, Наука, М., 1970.

[7] U. Andrews, A. Sorbi, *Joins and meets in the structure of ceers*, Computability **8** (3–4), 193–241 (2019). DOI: https://doi.org/10.3233/COM-180098

[8] U. Andrews, D.F. Belin, L. San Mauro, *On the structure of computable reducibility on equivalence relations of natural numbers*, J. Symb. Logic **88** (3), 1038–1063 (2023).
DOI: https://doi.org/10.1017/jsl.2022.28

[9] Н.Х. Касымов, Ф.Н. Ибрагимов, *Отделимые нумерации тел и эффективная вложимость в них колец*, Сиб. матем. журн. **60** (1), 82–94 (2019).
DOI: https://doi.org/10.33048/smzh.2019.60.107

[10] М.М. Арсланов, *Об эффективно гиперпростых множествах*, Алгебра и логика **8** (2), 143–153 (1969).
URL: https://www.mathnet.ru/rus/al1187

[11] М.Х. Файзрахманов, *Универсальные обобщенно вычислимые нумерации и гипериммунность*, Алгебра и логика **56** (4), 506–521 (2017).
DOI: https://doi.org/10.17377/alglog.2017.56.408

[12] Н.Х. Касымов, *Об алгебрах с финитно аппроксимируемыми позитивно представимыми обогащениями*, Алгебра и логика **26** (6), 715–730 (1987).
URL: https://www.mathnet.ru/rus/al1999

[13] А.И. Мальцев, *Конструктивные алгебры.* I, УМН **16** (3), 3–60 (1961).
URL: https://www.mathnet.ru/rus/rm6619

[14] Н.Х. Касымов, *Позитивные алгебры с конгруэнциями конечного индекса*, Алгебра и логика **30** (3), 293–305 (1991).
URL: https://www.mathnet.ru/rus/al2151

[15] Н.Х. Касымов, *Рекурсивно отделимые нумерованные алгебры*, УМН **51** (3), 145–176 (1996).
DOI: https://doi.org/10.4213/rm971

[16] Н.Х. Касымов, *Позитивные алгебры с нетеровыми решетками конгруэнций*, Сиб. матем. журн. **33** (2), 181–185 (1992).
URL: https://www.mathnet.ru/rus/smj3208

[17] Н.Х. Касымов, *Позитивные алгебры со счетными решетками конгруэнций*, Алгебра и логика **31** (1), 21–37 (1992).
URL: https://www.mathnet.ru/rus/al2179

[18] J.A. Bergstra, J.V. Tucker, *A characterization of computable data types by means of a finite, equational specification method*, Lecture Notes in Comput. Sci. **85**, 76–90 (1980).
DOI: https://doi.org/10.1007/3-540-10003-2_61

[19] Н.Х. Касымов, *О гомоморфизмах на негативные алгебры*, Алгебра и логика **31** (2), 132–144 (1992).
URL: https://www.mathnet.ru/rus/al2186

[20] Н.Х. Касымов, *О гомоморфизмах на эффективно отделимые алгебры*, Сиб. матем. журн. **57** (1), 47–66 (2016).
DOI: https://doi.org/10.17377/smzh.2016.57.105

[21] Н.Х. Касымов, *Нумерованные алгебры с равномерно рекурсивно отделимыми классами*, Сиб. матем. журн. **34** (5), 85–102 (1993).
URL: https://www.mathnet.ru/rus/smj836

[22] А.И. Мальцев, *К общей теории алгебраических систем*, Матем. сб. **35** (1), 3–20 (1954).
URL: https://www.mathnet.ru/rus/sm5264

[23] Н.Х. Касымов, Р.Н. Дадажанов, С.К. Джавлиев, *Структуры степеней негативной представимости линейных порядков*, Изв. вузов. Матем. **65** (12), 31–55 (2021).
URL: https://doi.org/10.26907/0021-3446-2021-12-31-55

[24] Н.Х. Касымов, *Вычислимо отделимые нумерации локально финитно отделимых алгебр*, Сиб. электрон. матем. изв. (принята к печати).

[25] C.G. Jockusch, J.C. Owings, *Weakly semirecursive sets*, J. Symb. Log. **55** (2), 637–644 (1990).
DOI: https://doi.org/10.2307/2274653

[26] Н.Х. Касымов, А.С. Морозов, *Нижние полурешетки отделимых конгруэнций нумерованных алгебр*, Сиб. матем. журн. **64** (4), 753–769 (2023).
DOI: https://doi.org/10.33048/smzh.2023.64.408

[27] Н.Х. Касымов, *Об алгебрах над негативными эквивалентностями*, Алгебра и логика **33** (1), 76–90 (1994).
URL: https://www.mathnet.ru/rus/al2257

Надимулла Хабибуллаевич Касымов
Национальный университет Узбекистана им. Мирзо Улугбека,
ул. Университетская, д. 4, г. Ташкент, 100174, Республика Узбекистан
e-mail: nadim59@mail.ru

Volume 2, Issue 1
pp. 55–73 (2024)

UDC 510.54, 512.57
MSC 03C05, 03D45

Locally finite and finitely approximated unoids over computably separable equivalences

N.Kh. Kasymov

Abstract. We prove that every coinfinite set is a characteristic transversal of a suitably computably separable equivalence relation, over which only locally finite, locally finite separable and finitely approximable unary algebras are represented. Similar properties for uniformly computable separable equivalences are considered.

Keywords: computably separable equivalence, uniformity, characteristic transversal, unary algebra, local finiteness, finite approximability, locally finite separability.

DOI: 10.26907/2949-3919.2024.1.55-73

References

[1] Yu.L. Ershov, *Theory of numberings*, Nauka, M., 1977 [in Russian].

[2] Yu. L. Ershov, *Theory of numberings*, in: E.R. Griffor (ed.), Handbook of computability theory (Stud. Logic Found. Math., 140), Amsterdam, Elsevier, 1999, 473–503.
DOI: https://doi.org/10.1016/S0049-237X(99)80030-5

[3] R. I. Soare, *Recursively enumerable sets and degrees. A study of computable functions and computably generated sets*, Perspectives in mathematical logic. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, etc., 1987.
URL: https://link.springer.com/book/9783540666813

[4] S.S. Goncharov, Yu.L. Ershov, *Constructive Models*, Siberian School of Algebra and Logic. Consultants Bureau, New York, 2000.

[5] P.M. Cohn, *Universal algebra*, MAIA 6, D. Reidel Publishing Co., Dordrecht–Boston, Mass., 1981.
DOI: https://doi.org/10.1007/978-94-009-8399-1

[6] A.I.Mal'tsev, *Algebraic Systems*, Springer-Verlag, New York–Heidelberg, 1973.
DOI: https://doi.org/10.1007/978-3-642-65374-2

[7] U. Andrews, A. Sorbi, *Joins and meets in the structure of ceers*, Computability **8** (3–4), 193–241 (2019).
DOI: https://doi.org/10.3233/COM-180098

Acknowledgements. The work is performed under the development program of Volga Region Mathematical Center (agreement No. 075-02-2023-944).

Received: 02 December 2023. Accepted: 27 February 2024. Published: 11 April 2024.

[8] U. Andrews, D.F. Belin, L. San Mauro, *On the structure of computable reducibility on equivalence relations of natural numbers*, J. Symb. Logic **88** (3), 1038–1063 (2023).
DOI: https://doi.org/10.1017/jsl.2022.28

[9] N.Kh. Kasymov, F.N. Ibragimov, *Separable enumerations of division rings and effective embeddability of rings therein*, Siberian Math. J. **60** (1), 62–70 (2019).
DOI: https://doi.org/10.1134/S0037446619010075

[10] M.M. Arslanov, *On effectively hypersimple sets*, Algebra Logic **8** (2), 79–85 (1969).
DOI: https://doi.org/10.1007/BF02219827

[11] M.Kh. Faizrakhmanov, *Universal generalized computable numberings and hyperimmunity*, Algebra Logic **56** (4), 337–347 (2017).
DOI: https://doi.org/10.1007/s10469-017-9454-5

[12] N.Kh. Kasymov, *Algebras with finitely approximable positively representable enrichments*, Algebra Logic **26** (6), 441–450 (1987).
DOI: https://doi.org/10.1007/BF01988315

[13] A.I. Mal'tsev, *Constructive algebras* I, Russian Math. Surveys **16** (3), 77–129 (1961).
DOI: https://doi.org/10.1070/RM1961v016n03ABEH001120

[14] N.Kh. Kasymov, *Positive algebras with congruences of finite index*, Algebra Logic **30** (6), 190–199 (1991).
DOI: https://doi.org/10.1007/BF01978852

[15] N.Kh. Kasymov, *Recursively separable enumerated algebras*, Russian Math. Surveys **51** (3), 509–538 (1996).
DOI: https://doi.org/10.1070/RM1996v051n03ABEH002913

[16] N.Kh. Kasymov, *Positive algebras with nonetherian congruence lattices*, Siberian Math. J. **33** (2), 338–341 (1992).
DOI: https://doi.org/10.1007/BF00971109

[17] N.Kh. Kasymov, *Positive algebras with countable congruence lattices*, Algebra Logic **31** (1), 12–23 (1992).
URL: https://doi.org/10.1007/BF02259854

[18] J.A. Bergstra, J.V. Tucker, *A characterization of computable data types by means of a finite, equational specification method*, Lecture Notes in Comput. Sci. **85**, 76–90 (1980).
DOI: https://doi.org/10.1007/3-540-10003-2_61

[19] N.Kh. Kasymov, *Homomorphisms onto negative algebras*, Algebra Logic **31** (2), 81–89 (1992).
DOI: https://doi.org/10.1007/BF02259847

[20] N.Kh. Kasymov, *Homomorphisms onto effectively separable algebras*, Siberian Math. J. **57** (1), 36–50 (2016).
DOI: https://doi.org/10.1134/S0037446616010055

[21] N.Kh. Kasymov, *Enumerated algebras with uniformly recursive-separable classes*, Siberian Math. J. **34** (5), 869–882 (1993).
DOI: https://doi.org/10.1007/BF00971403

[22] A.I. Mal'tsev, *On the general theory of algebraic systems*, Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2 **27**, 125–142 (1963).

[23] N.Kh. Kasymov, R.N. Dadazhanov, S.K. Zhavliev, *Structures of degrees of negative representations of linear orders*, Russ. Math. **65** (12), 27–46 (2021).
DOI: https://doi.org/10.3103/S1066369X21120045

[24] N.Kh. Kasymov, *Computably separable numbering of locally finite separable algebras*, Sib. Electron. Math. Rep. (to appear).

[25] C.G. Jockusch, J.C. Owings, *Weakly semirecursive sets*, J. Symb. Log. **55** (2), 637–644 (1990).
DOI: https://doi.org/10.2307/2274653

[26] N.Kh. Kasymov, A.S. Morozov, *Lower semilattices of separable congruences of numbered algebras*, Siberian Math. J. **64** (4), 864–876 (2023).
DOI: https://doi.org/10.1134/S0037446623040080

[27] N.Kh. Kasymov, *Algebras over negative equivalences*, Algebra logic **33** (1), 46–48 (1994).
DOI: https://doi.org/10.1007/BF00739416

Nadimulla Khabibullaevich Kasymov
National Universitet of Uzbekistan,
4 Universitetskaya str., Tashkent 100174, Republic of Uzbekistan,
e-mail: nadim59@mail.ru