

О Σ -представлениях аддитивной группы вещественных чисел

А.С. Морозов

Аннотация. Доказано существование 2^ω попарно не Σ -вложимых друг в друга (и тем более не Σ -изоморфных) Σ -представлений аддитивной группы вещественных чисел в наследственно конечной надстройке над упорядоченным полем вещественных чисел.

Ключевые слова: обобщенная вычислимость, допустимое множество, наследственно конечная надстройка, сигма-представимая структура, вычислимая структура, конструктивная структура, вычислимость над вещественными числами, алгоритмическая размерность, автоустойчивость, число представлений

DOI: 10.26907/2949-3919.2024.1.74-93

Введение

Мы предполагаем, что читатель знаком с основными определениями, касающимися допустимых множеств и наследственно конечных надстроек над структурами, являющихся частным случаем допустимых множеств (см. [1, 2]).

Одним из интереснейших обобщений понятия вычислимости является Σ -определимость в допустимых множествах, в частности, в наследственно конечных надстройках. Заменяя классическую вычислимость над натуральными числами на различные ее обобщения, мы можем развивать различные аналоги известных классических теорий. В частности, это относится и к теории вычислимых структур. Так, заменив в определении вычислимой структуры вычислимость на Σ -определимость, мы естественным образом приходим к понятию Σ -представимой структуры в допустимом множестве, впервые сформулированному Ю.Л. Ершовым в [3].

С некоторыми результатами и идеями этого направления можно ознакомиться в обзоре [4].

Во введении к монографии [2] Ю.Л. Ершов выделяет в качестве особо интересного направления исследований изучение вычислимости в структуре $\mathcal{HF}(\mathbb{R})$ – наследственно конечной надстройке над упорядоченным полем вещественных чисел $\mathbb{R}$.

Благодарности. Работа поддержана базовым проектом FWNF-2022-0012 Минорбнауки РФ.

© 2024 А.С. Морозов

Поступила: 01.09.2023. Принята: 16.01.2024. Опубликовано: 11.04.2024.

В самом начале изучения вычислимых структур было обнаружено специфическое явление, состоящее в том, что две вычислимые структуры могут быть классически изоморфны, но вычислимого изоморфизма между ними может и не быть, т.е. одна и та же алгебраическая структура может иметь несколько вычислимых классически изоморфных представлений с существенно разными алгоритмическими свойствами (здесь одной из первых работ является [5]). Некоторые структуры могут иметь единственное вычислимое представление с точностью до вычислимого изоморфизма, а некоторые могут иметь и бесконечно много вычислимо неизоморфных представлений. Некоторые структуры вообще не имеют вычислимых представлений. Кроме того, С.С. Гончаровым [6] было доказано, что существуют структуры с любым конечным числом вычислимых представлений. Проблема изучения числа не вычислимо изоморфных представлений входит в число наиболее актуальных проблем теории вычислимых структур.

В данной работе продолжается изучение проблемы числа представлений структур над $\mathbb{HF}(\mathbb{R})$, начатое автором в работах [7, 8]. В этих работах было показано, что упорядоченное поле вещественных чисел имеет с точностью до Σ -изоморфизма единственное одномерное представление, а также что обычный порядок на вещественных числах имеет 2^ω попарно не- Σ -изоморфных одномерных представлений над $\mathbb{HF}(\mathbb{R})$, что является максимально возможным значением для этого числа. В работах [9, 10] предлагаются общие методы для доказательства не Σ -представимости широкого класса структур мощности континуума.

В этой работе, говоря о Σ -определимости, Σ -изоморфизмах и т.п., мы считаем допустимым использование параметров. Случаи, когда параметры не используются, будут оговариваться особо.

Главным результатом настоящей работы является утверждение о том, что аддитивная группа поля вещественных чисел $\langle \mathbb{R}; + \rangle$ имеет 2^ω попарно не Σ -изоморфных (и даже попарно не Σ -вложимых друг в друга) Σ -представлений.

В классической теории вычислимых структур при построении не вычислимо изоморфных представлений структур обычно используются либо алгоритмическая пошаговая конструкция, состоящая в одновременном построении семейства структур и удовлетворении счетного числа требований о неизоморфности, соответствующих счетному семейству алгоритмов, как правило, использующая метод приоритета, либо непосредственное использование специфических свойств вычислимо перечислимых множеств, интерпретируемых в данной структуре. В нашей ситуации, когда число возможных “алгоритмов”, определяемых Σ -формулами с вещественными параметрами, несчетно, подобные методы уже не работают. Здесь используются специфические свойства Σ -отображений такие как непрерывность вблизи точек, алгебраически независимых над параметрами, а также некоторые топологические соображения.

Перейдем к определениям и обозначениям.

Как уже было сказано выше, здесь мы будем рассматривать только наследственно конечную надстройку над упорядоченным полем вещественных чисел – структуру $\mathbb{HF}(\mathbb{R})$.

Легко показать, что в наследственно конечных надстройках любая Σ -формула с параметрами эквивалентна подходящей Σ -формуле, в которой в качестве параметров использованы только праэлементы, т. е. элементы из $\mathbb{R}$. Поэтому мы будем в качестве возможных параметров рассматривать только вещественные числа.

Под Σ -представлением структуры $\mathfrak{A}$ конечной сигнатуры над $\mathsf{HIF}(\mathbb{R})$ мы будем понимать такое отображение ν из некоторого подмножества $V \subseteq \mathsf{HIF}(\mathbb{R})$ на ее основное множество, что диаграмма структуры $\mathfrak{A}$ на ν -номерах Σ -определима в $\mathsf{HIF}(\mathbb{R})$. Отсюда, в частности, следует, что множество V Σ -определимо в $\mathsf{HIF}(\mathbb{R})$. Будем называть V *множеством обозначений* для этого представления ν .

Пусть V_0 и V_1 – множества обозначений для представлений ν_0 и ν_1 структур $\mathfrak{A}_0$ и $\mathfrak{A}_1$ соответственно. Под Σ -отображением (вложением, изоморфизмом) из представления ν_0 в представление ν_1 мы будем понимать любое отображение (вложение, изоморфизм) φ из $\mathfrak{A}_0$ в $\mathfrak{A}_1$, для которого существует функция f из V_0 в V_1 с Σ -определимым графиком, обладающая свойством $\varphi(\nu_0(x)) = \nu_1(f(x))$.

Следуя [7], формулы вида

$$h(\bar{x}) = 0 \wedge \bigwedge_{i=0}^{m-1} (r_i(\bar{x}) > 0), \quad \text{где } h, r_i \in \mathbb{Q}[\bar{x}], \quad i < m,$$

будем называть *базовыми*.

Важную роль в наших рассуждениях будет играть наличие элиминации кванторов в упорядоченном поле $\mathbb{R}$, рассматриваемом в обычной сигнатуре (см. [11]).

Предложение 1 ([7], замечание после леммы 4.2). *Любая Σ -формула $\psi(\bar{x})$ над $\mathsf{HIF}(\mathbb{R})$ эквивалентна бесконечной вычислимой дизъюнкции базовых формул.*

Определение 2 ([7]). Пусть $\bar{p} = p_1, \dots, p_k$ и $\bar{\alpha} = \alpha_1, \dots, \alpha_s$ – некоторые кортежи вещественных чисел. Будем говорить, что кортеж $\bar{\alpha}$ алгебраически независим над $\bar{p}$, если для любого полинома

$$f(x_1, \dots, x_s, y_1, \dots, y_k) \in \mathbb{Q}[x_1, \dots, x_s, y_1, \dots, y_k]$$

из $f(\bar{\alpha}, \bar{p}) = 0$ следует $\forall \bar{x} (f(\bar{x}, \bar{p}) = 0)$. Если кортеж состоит из единственного числа α , то мы будем называть это число трансцендентным над $\bar{p}$. В противном случае будем говорить, что α является алгебраическим над $\bar{p}$.

Следующую теорему будем называть алгебраическим принципом обобщения и сокращенно называть его AGP (algebraic generalization principle).

Теорема 3 (AGP, [7, лемма 4.4]). *Пусть $\varphi(\bar{x}, \bar{p})$ – бесконечная дизъюнкция формул первого порядка языка структуры $\mathbb{R}$, верная на некотором кортеже вещественных чисел $\bar{\beta} = \beta_1, \dots, \beta_n \in \mathbb{R}^n$, алгебраически независимым над $\bar{p}$. Тогда эта формула верна и для всех кортежей из некоторой открытой окрестности точки $\bar{\beta}$. То же самое верно и для*

Σ -формул, а также для обычных формул первого порядка с параметрами $\bar{p}$ и свободными переменными, содержащимися среди $\bar{x}$.

Предложение 4. Пусть график функции f определим над $\mathsf{HIF}(\mathbb{R})$ Σ -формулой с параметрами $\bar{p} \in \mathbb{R}^{<\omega}$, кортеж $\bar{\beta} \in \text{dom } f$ алгебраически независим над $\bar{p}$. Тогда вблизи $\bar{\beta}$ функция f определена, непрерывна и непрерывно дифференцируема по каждому аргументу. Кроме того, графики всех частных производных от f задаются вблизи $\bar{\beta}$ бескванторными формулами с теми же самыми параметрами $\bar{p} \in \mathbb{R}^{<\omega}$.

Доказательство. Действительно, пусть f определяется некоторой Σ -формулой с параметрами $\bar{p} \in \mathbb{R}^{<\omega}$ и пусть $f(\bar{\beta}) = y_0$. Эта формула эквивалентна (вообще говоря, бесконечной) дизъюнкции базовых формул от $\bar{x}, y, \bar{p}$. Одна из этих формул, скажем, $h(\bar{x}, y, \bar{p}) = 0 \wedge \bigwedge_{i=0}^{m-1} (r_i(\bar{x}, y, \bar{p}) > 0)$, должна быть выполнена при $\bar{x} = \bar{\beta}$ и $y = y_0$. Более того, из условия следует

$$\exists^{=1} y \left(h(\bar{\beta}, y, \bar{p}) = 0 \wedge \bigwedge_{i=0}^{m-1} (r_i(\bar{\beta}, y, \bar{p}) > 0) \right).$$

По лемме 4.5 из [7] f определена, непрерывна и непрерывно дифференцируема вблизи $\bar{\beta}$, а из этой же леммы и условия предложения вытекает, что ее график вблизи $\bar{\beta}$ задается условием

$$f(\bar{x}) = y \leftrightarrow h(\bar{x}, y, \bar{p}) = 0 \wedge \bigwedge_{i=0}^{m-1} (r_i(\bar{x}, y, \bar{p}) > 0). \quad (1)$$

Чтобы доказать, что частные производные функции f задаются бескванторными формулами, достаточно записать стандартные определения для этих производных с использованием (1) и применить элиминацию кванторов для $\mathbb{R}$. $\square$

В дальнейшем под $\mathbb{R}^+$ мы будем понимать множество всех строго положительных вещественных чисел, а через $\mathbb{Q}$ будет обозначаться поле рациональных чисел. Стоит подчеркнуть, что множество ординалов $\omega \subseteq \mathsf{HIF}(\mathbb{R})$ наследственно конечной надстройки и множество натуральных чисел $\mathbb{N}$, являющееся подмножеством $\mathbb{R}$, не пересекаются. Мы будем отождествлять эти два множества при помощи отображения $I : \omega \rightarrow \mathbb{N}$, $I : m \in \omega \mapsto m \in \mathbb{R}$, определяемого Σ -формулой без параметров. Заметим, что $\mathbb{N}$ является Δ -подмножеством в $\mathbb{R}$. Детали оставляем читателю.

Операцию транзитивного замыкания на $\mathsf{HIF}(\mathbb{R})$ (см. [1]) будем обозначать как обычно через $\text{TC}(x)$. Запись $A \subseteq^* B$ будет означать, что множество $A \setminus B$ конечно.

1. Простейшие представления

Сначала мы докажем некоторые свойства двух самых простых представлений нашей группы, а именно $\langle \mathbb{R}; + \rangle$ и его изоморфного образа относительно отображения $x \mapsto e^x$ — структуры $\langle \mathbb{R}^+; \cdot \rangle$.

Теорема 5. Все Σ -определимые автоморфизмы структуры $\langle \mathbb{R}; + \rangle$ исчерпываются отображениями вида $\varphi(x) = \beta x$ для подходящего $\beta \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Доказательство. Ясно, что при любом $\beta \neq 0$ отображение $\varphi(x) = \beta x$ является Σ -определимым автоморфизмом данной структуры.

Покажем, что других автоморфизмов нет. Пусть φ – произвольный Σ -определимый автоморфизм структуры $\langle \mathbb{R}; + \rangle$. Поскольку φ – автоморфизм, для любых $m \in \mathbb{Z}$ и $x \in \mathbb{R}$ справедливо $\varphi(mx) = m\varphi(x)$. Отсюда также получаем, что для любого $m \in \mathbb{Z}$, $m \neq 0$ и любого $x \in \mathbb{R}$ выполнено $\varphi\left(\frac{x}{m}\right) = \frac{1}{m}\varphi(x)$. Откуда, в свою очередь, следует, что для любого $q \in \mathbb{Q}$ и любого $x \in \mathbb{R}$ выполняется $\varphi(q \cdot x) = q \cdot \varphi(x)$. Положив $x = 1$, получим, что для всех $q \in \mathbb{Q}$ выполнено

$$\varphi(q) = q \cdot \varphi(1). \quad (2)$$

Поскольку φ – автоморфизм, имеем $\varphi(1) \neq 0$. Зафиксируем некоторое определение для φ с помощью Σ -формулы с параметрами. Возьмем произвольное $x_0 \in \mathbb{R}$, неалгебраическое над параметрами, использованными в этом определении. Согласно [предложению 4](#) существует некоторая открытая окрестность U точки x_0 , на которой φ непрерывен.

Покажем, что равенство (2) будет справедливо также и для всех $q \in U$. В самом деле, пусть $q \in U$ и $q = \lim_{n \rightarrow \infty} q_n$, где все q_n принадлежат $\mathbb{Q} \cap U$. В силу непрерывности φ на U и выполнения равенства (2) для всех q_n имеем

$$\varphi(q) = \varphi\left(\lim_{n \rightarrow \infty} q_n\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi(q_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} q_n \cdot \varphi(1) = q \cdot \varphi(1).$$

Теперь докажем, что равенство $\varphi(x) = x \cdot \varphi(1)$ будет выполнено вообще для всех $x \in \mathbb{R}$. Возьмем произвольное $x \in \mathbb{R}$. Если $x = 0$, то равенство очевидно. Если же $x \neq 0$, то существует рациональное число $r \neq 0$ такое, что $rx \in U$. Имеем $r\varphi(x) = \varphi(rx) = rx \cdot \varphi(1)$, откуда получаем $\varphi(x) = x \cdot \varphi(1)$. Таким образом, для любого x выполнено $\varphi(x) = x \cdot \beta$, где $\beta = \varphi(1) \neq 0$. $\square$

Следствие 6. Все ненулевые элементы группы $\langle \mathbb{R}; + \rangle$ переводятся друг в друга подходящим Σ -определимым автоморфизмом. Таким образом, все структуры $\langle \mathbb{R}; +, a \rangle$, $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ попарно Σ -изоморфны.

Прежде чем характеризовать Σ -определимые автоморфизмы группы $\langle \mathbb{R}^+; \cdot \rangle$, мы получим описание Σ -представимых степенных функций на $\mathbb{R}^+$.

Определение 7. Расширенными полиномами будем называть формальные выражения вида

$$f(x, y) = \sum_{\langle m, n \rangle \in S} a_{mn} x^m y^n,$$

где S – конечное подмножество в $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, а все коэффициенты a_{mn} – ненулевые вещественные числа.

Значения расширенного полинома на произвольных $x, y \in \mathbb{R}^+$ определяются естественным образом. Мы не исключаем случай $S = \emptyset$; здесь значение $f(x, y)$ тождественно равно нулю.

Предложение 8. Пусть $f(x, y)$ – произвольный расширенный полином, $\beta \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, и на некотором непустом открытом интервале в $\mathbb{R}^+$ выполняется равенство $f(x, x^\beta) = 0$. Тогда $S = \emptyset$, т. е. $f = 0$.

Лемма 9. Пусть $m_0, n_0, m_1, n_1 \in \mathbb{Z}$ и $m_0 + \beta n_0 = m_1 + \beta n_1$. Тогда $m_0 = m_1$ и $n_0 = n_1$. В частности, равенство $m + \beta n = 0$, где $m, n \in \mathbb{Z}$, влечет $m = n = 0$.

Доказательство. Действительно, если выполнено указанное равенство и $n_0 \neq n_1$, то $\beta = (m_0 - m_1)(n_1 - n_0)^{-1} \in \mathbb{Q}$, что противоречит условию. Значит, $n_0 = n_1$, откуда получаем и $m_0 = m_1$. $\square$

Доказательство предложения 8. Предположим, что доказываемое предложение неверно, т. е. для некоторого $\beta \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ существует расширенный полином $f(x, y)$ с $S \neq \emptyset$, для которого $f(x, x^\beta)$ равно нулю на нетривиальном открытом интервале. Зафиксируем такой расширенный полином $f(x, y)$, для которого множество S имеет наименьшую возможную ненулевую мощность. Имеем

$$f(x, x^\beta) = \sum_{\langle m, n \rangle \in S} a_{mn} x^{m+\beta n}. \quad (3)$$

Пусть $ax^{m_0+\beta n_0}$, $a \neq 0$, – одно из слагаемых этой суммы. Разделив обе части равенства (3) на $ax^{m_0+\beta n_0}$, мы получим

$$f(x, x^\beta) a^{-1} x^{-(m_0+\beta n_0)} = \sum_{\langle m, n \rangle \in S} a_{mn} a^{-1} \cdot x^{(m-m_0)+\beta(n-n_0)}. \quad (4)$$

В левой части этого равенства находится функция, равная нулю на некотором непустом открытом интервале в $\mathbb{R}^+$. Дифференцируя обе части равенства (4) по x и учитывая, что в правой части одно из слагаемых постоянно (равно 1), в правой части мы получаем сумму $|S| - 1$ слагаемых вида

$$[(m - m_0) + \beta(n - n_0)] a_{mn} a^{-1} \cdot x^{(m-m_0)+\beta(n-n_0)-1},$$

где $\langle m, n \rangle \neq \langle m_0, n_0 \rangle$, также равную нулю на некотором непустом открытом интервале в $\mathbb{R}^+$. Из леммы 9 следует, что в этих слагаемых все коэффициенты

$$[(m - m_0) + \beta(n - n_0)] a_{mn} a^{-1}$$

не равны 0. Проверим, что все показатели степеней x , входящие в эту сумму, попарно

различны. Действительно, используя [лемму 9](#), из равенства

$$(m' - m_0) + \beta(n' - n_0) - 1 = (m'' - m_0) + \beta(n'' - n_0) - 1$$

мы легко получаем $m' = m''$ и $n' = n''$.

Итак, рассматриваемая нами сумма равна нулю на некотором нетривиальном открытом подмножестве в $\mathbb{R}^+$, все коэффициенты при степенях x не равны нулю, показатели степеней при x в этой сумме попарно различны, все эти показатели имеют вид $m + \beta n$. Поэтому мы получили расширенный полином $f_1(x, y)$, представимый в виде ровно $|S| - 1 < |S|$ слагаемых, такой, что на некотором нетривиальном открытом подмножестве в $\mathbb{R}^+$ выполнено равенство $f_1(x, x^\beta) = 0$. Отсюда, поскольку мы выбрали f с наименьшим ненулевым количеством слагаемых, получаем, что число слагаемых в f_1 (т.е. $|S| - 1$) не может быть ненулевым, т.е. множество S одноэлементно. Но тогда $f(x, y)$ имеет вид $ax^m y^n$, $a \neq 0$, и равенство $ax^{m+\beta n} = 0$ должно выполняться на некотором непустом открытом интервале, что невозможно. $\square$

Следствие 10. Пусть $\beta \in \mathbb{R}$. Тогда функция $x \mapsto x^\beta$ на $\mathbb{R}^+$ Σ -представима над $\text{HIF}(\mathbb{R})$ тогда и только тогда, когда $\beta \in \mathbb{Q}$.

Доказательство. Если $\beta = \frac{m}{n}$, то эта функция представима Σ -формулой

$$x > 0 \wedge y > 0 \wedge (x^m = y^n).$$

Предположим, что $\beta \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, и функция $x \mapsto x^\beta$ представима некоторой Σ -формулой с параметрами $\bar{p} \in \mathbb{R}$. Тогда по [предложению 1](#) условие $y = x^\beta$ может быть записано в виде бесконечной дизъюнкции формул вида

$$g(x, y, \bar{p}) = 0 \wedge \bigwedge_{i < k} (h_i(x, y, \bar{p}) > 0), \quad (5)$$

где g и h_i — полиномы над $\mathbb{Q}$. Зафиксируем некоторое число $x_0 \in \mathbb{R}^+$ не алгебраическое над $\bar{p}$. Тогда для некоторого члена вида (5) вышеупомянутой бесконечной дизъюнкции будет выполнено

$$\exists^1 y \left(g(x_0, y, \bar{p}) = 0 \wedge \bigwedge_{i < k} h_i(x_0, y, \bar{p}) > 0 \right). \quad (6)$$

Согласно AGP условие (6) будет выполнено также и вблизи точки x_0 . Поскольку наша дизъюнкция представляет функцию $x \mapsto x^\beta$, вблизи x_0 будет выполнено также равенство $g(x, x^\beta, \bar{p}) = 0$. По [предложению 8](#) получаем, что полином $g(x, y, \bar{p})$ тождественно равен нулю. Таким образом, рассматриваемый нами член дизъюнкции на самом деле эквивалентен $\bigwedge_{i < k} h_i(x, y, \bar{p}) > 0$. Поскольку условие $\bigwedge_{i < k} h_i(x, y, \bar{p}) > 0$ определяет непустое открытое множество, оно не может определять график функции. Это противоречит (6). Следовательно, функция $x \mapsto x^\beta$ не Σ -представима. $\square$

Теорема 11. Все Σ -определимые автоморфизмы структуры $\langle \mathbb{R}^+; \cdot \rangle$ исчерпываются отображениями $\varphi(x) = x^\alpha$ для подходящего $\alpha \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$.

Доказательство. Заметим, что при любом $\alpha \neq 0$ отображение $\varphi(x) = x^\alpha$ является Σ -определимым автоморфизмом данной структуры. Покажем, что и любой ее автоморфизм имеет такой вид. Пусть φ – произвольный Σ -определимый автоморфизм структуры $\langle \mathbb{R}^+; \cdot \rangle$. По [предложению 4](#) φ непрерывен на некотором непустом открытом множестве $U \subseteq \mathbb{R}^+$.

Для любого $m \in \mathbb{Z}$ и любого $x \in \mathbb{R}$ имеем $\varphi(x^m) = \varphi(x)^m$. Отсюда также получаем, что для любого $m \in \mathbb{Z}$, $m \neq 0$, и любого $x \in \mathbb{R}$ выполнено $\varphi\left(x^{\frac{1}{m}}\right) = \varphi(x)^{\frac{1}{m}}$. Наконец, отсюда получаем, что для любого $q \in \mathbb{Q}$ и любого $x \in \mathbb{R}$

$$\varphi(x^q) = \varphi(x)^q. \quad (7)$$

Теперь покажем, что равенство (7) выполнено и для всех $x \in \mathbb{R}^+$ и $q \in \mathbb{R}$ таких, что $x^q \in U$. Пусть $x^q \in U$ и последовательность рациональных чисел $(q_n)_{n < \omega}$ такова, что $\lim_{n \rightarrow \infty} q_n = q$, $x^{q_n} \in U$ для всех n . Тогда

$$\varphi(x^q) = \varphi\left(x^{\lim_{n \rightarrow \infty} q_n}\right) = \varphi\left(\lim_{n \rightarrow \infty} x^{q_n}\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi(x^{q_n}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi(x)^{q_n} = \varphi(x)^q.$$

Покажем, что равенство (7) выполнено для всех $x \in \mathbb{R}^+$ и $q \in \mathbb{R}$. Случаи $x = 1$ и $q = 0$ тривиальны. Возьмем произвольные $x \in \mathbb{R}^+$ и $q \in \mathbb{R}$ такие, что $x \neq 1$ и $q \neq 0$. Выберем $r \in \mathbb{Q}$, $r \neq 0$, так, чтобы выполнялось $x^{qr} \in U$. Тогда

$$\varphi(x^q)^r = \varphi(x^{qr}) = \varphi(x)^{qr} = (\varphi(x)^q)^r,$$

откуда получаем требуемое $\varphi(x^q) = \varphi(x)^q$.

Пусть $\alpha \in \mathbb{R}$ таково, что $\varphi(2) = 2^\alpha$. Очевидно, $\alpha \neq 0$, иначе φ не было бы автоморфизмом. Тогда

$$\varphi(x) = \varphi(2^{\log_2 x}) = (\varphi(2))^{\log_2 x} = 2^{\alpha \log_2 x} = x^\alpha.$$

Поскольку автоморфизм φ Σ -определим, по [следствию 10](#) имеем $\alpha \in \mathbb{Q}$, что и требовалось доказать. $\square$

Из доказанного следует, что, хотя и структуры $\langle \mathbb{R}; + \rangle$ и $\langle \mathbb{R}^+; \cdot \rangle$ классически изоморфны, тем не менее группа всех Σ -определимых автоморфизмов первой из них имеет мощность континуума, а группа таких автоморфизмов второй счетна. Отсюда в частности следует, что $\langle \mathbb{R}; + \rangle$ и $\langle \mathbb{R}^+; \cdot \rangle$ не Σ -изоморфны.

Из [теоремы 5](#) имеем, что все группы вещественных чисел по сложению с выделенным ненулевым элементом классически изоморфны между собой (и даже Σ -изоморфны). Тем не менее справедливо

Следствие 12. Группа вещественных чисел по умножению с выделенным ненулевым элементом имеет 2^ω попарно не Σ -изоморфных представлений.

Доказательство. Действительно, из доказанного выше следует, что для произвольных $a_0, a_1 \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$ структуры $\langle \mathbb{R}^+; \cdot, a_0 \rangle$ и $\langle \mathbb{R}^+; \cdot, a_1 \rangle$ классически изоморфны любой структуре $\langle \mathbb{R}; +, a \rangle$, $a \neq 0$. С другой стороны, из описания Σ -определимых автоморфизмов структуры $\langle \mathbb{R}^+; \cdot \rangle$ имеем, что любой ее автоморфизм полностью определен своим значением на любом элементе, не равном 1. Отсюда при $a_0, a_1 \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$ структуры $\langle \mathbb{R}^+; \cdot, a_0 \rangle$ и $\langle \mathbb{R}^+; \cdot, a_1 \rangle$ Σ -изоморфны тогда и только тогда, когда существует $r \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$ со свойством $a_1 = a_0^r$. $\square$

2. Основной результат

Результаты предыдущего раздела показывают, что число попарно не Σ -изоморфных представлений для рассматриваемой нами группы с выделенным одним не нейтральным элементом является максимально возможным, равным 2^ω . Но эти результаты скорее могут быть интересны с точки зрения описания Σ -определимых автоморфизмов для двух конкретных представлений, рассмотренных выше. Однако это еще не отвечает на вопрос о числе представлений для самой группы. Здесь мы дадим ответ на этот вопрос, и на самом деле мы докажем следующее немного более сильное утверждение.

Теорема 13. *Существует 2^ω попарно не Σ -вложимых друг в друга Σ -представлений группы $\langle \mathbb{R}; + \rangle$.*

Лемма 14. *Существует Σ -функция $F : \mathbb{R} \times \omega \rightarrow 2$ такая, что для любого $S \subseteq \omega$ существует $r \in \mathbb{R}$ такое, что $S = \{n \mid F(r, n) = 1\}$.*

Эта лемма может быть получена из легко доказываемого факта, что функция, выдающая по вещественному числу r и натуральному числу n его n -ю цифру в двоичном разложении, определима Σ -формулой без параметров. Доказательство оставляется читателю.

Лемма 15.

- 1) Любое подмножество ординала $\omega \subseteq \text{HIF}(\mathbb{R})$ является Δ -подмножеством в $\text{HIF}(\mathbb{R})$.
- 2) Любое отображение f из ординала $\omega \subseteq \text{HIF}(\mathbb{R})$ в себя Σ -определимо над $\text{HIF}(\mathbb{R})$.
- 3) Любое подмножество в $\mathbb{R}$, состоящее из натуральных чисел, является Δ -подмножеством в $\text{HIF}(\mathbb{R})$.
- 4) Любое отображение f из множества натуральных чисел, рассматриваемых как подмножество в $\mathbb{R}$, в себя Σ -определимо над $\text{HIF}(\mathbb{R})$.

Доказательства пп. 1) и 2) следуют из [леммы 14](#), а остальных пунктов – из них и свойств отображения $I : \omega \rightarrow \mathbb{R}$, описанного во введении. $\square$

Нам будет удобно рассматривать группу $\langle \mathbb{R}; + \rangle$ как векторное пространство над $\mathbb{Q}$ размерности 2^ω . Поскольку тип изоморфизма векторного пространства над любым фиксированным полем полностью определяется его размерностью, все векторные пространства

над $\mathbb{Q}$ размерности 2^ω попарно изоморфны, и аддитивная группа любого из них изоморфна группе $\langle \mathbb{R}; + \rangle$. Очевидно, что любое изоморфное вложение группы $\langle \mathbb{R}; + \rangle$ в себя будет также изоморфным вложением соответствующего векторного пространства над $\mathbb{Q}$, и наоборот, вложение этого векторного пространства в себя будет также изоморфным самовложением его аддитивной группы, $\langle \mathbb{R}; + \rangle$.

Мы докажем существование 2^ω попарно не Σ -вложимых друг в друга представлений для таких векторных пространств. Результат для группы $\langle \mathbb{R}; + \rangle$ будет получен как следствие.

Обозначим через $\mathbb{B}$ множество всех чисел из интервала $(0, 1)$, имеющих вид $m/2^n$, $m, n \in \omega$.

Определим по индукции конечные множества открытых вещественных интервалов I_n , $n < \omega$, следующим образом. Положим $I_0 = \{(0, 1)\}$. Множество I_{n+1} будет состоять из всех интервалов (a, c) , (c, b) таких, что $(a, b) \in I_n$, и c – середина интервала (a, b) . Если не обращать внимания на серединные точки интервалов, то можно сказать, что каждое семейство I_{n+1} получается разделением всех интервалов из семейства I_n пополам.

Определим $\zeta(n)$ как множество всех середин отрезков из I_n . Нетрудно убедиться, что отображение $n \mapsto \zeta(n)$ Σ -определимо в $\mathbb{HIF}(\mathbb{R})$ без параметров, $|\zeta(n)| = 2^n$, и что множества $\zeta(n)$, $n < \omega$, образуют разбиение множества $\mathbb{B}$.

Пусть $S = \{s_0 < s_1 < \dots\}$ – произвольное бесконечное подмножество в $\mathbb{N}$. Определим отображение $f_S : \mathbb{B} \rightarrow S$ следующим образом:

$$f_S(x) = y \Leftrightarrow \exists n (x \in \zeta(n) \wedge y = s_n).$$

Очевидно, что отображение f_S также Σ -определимо в $\mathbb{HIF}(\mathbb{R})$ (вообще говоря, с параметрами) и, кроме того, обладает свойствами $\text{range } f_S = S$ и $f_S^{-1}(s_n) = \zeta(n)$ для всех $n < \omega$.

Лемма 16. Для любого открытого интервала $I \subseteq (0, 1)$ справедливо $|S \setminus f_S(I)| < \omega$.

Доказательство. Множество $\zeta(n)$ представляет собой множество середин расположенных непосредственно друг за другом отрезков длины $1/2^{n+1}$. Ввиду этого, начиная с некоторого достаточно большого n , интервал I будет содержать в качестве подмножества хотя бы один из отрезков из множества $\zeta(n)$, и, значит, его середина будет принадлежать I , откуда и следует лемма. $\square$

Теперь мы для произвольного бесконечного множества $S \subseteq \omega \setminus \{0\}$ определим векторное пространство V_S над $\mathbb{Q}$, имеющее вид $V_S = W/H_S$ для некоторых векторных пространств $H_S \subseteq W \subseteq \mathbb{HIF}(\mathbb{R})$.

Определим множество $W \subseteq \mathbb{HIF}(\mathbb{R})$ как множество всех конечных частичных отображений из $(0, 1) \times 2$ в $\mathbb{Q} \setminus \{0\}$, рассматривая здесь $\mathbb{Q}$ как Σ -подмножество $\mathbb{R}$. Наделим W структурой векторного пространства над $\mathbb{Q}$ с базисом $(0, 1) \times 2$, рассматривая произвольный элемент $h \in W$ как сумму базисных векторов $e \in \text{dom}(h)$ с коэффициентами $h(e)$, т. е.

как $\sum_{e \in \text{dom}(h)} h(e) \cdot e$; при этом $h = \emptyset$ соответствует нулевому элементу этого пространства. Нетрудно видеть, что само W , а также графики операций сложения векторов на W и умножения векторов из W на элементы из $\mathbb{Q}$ являются Σ -подмножествами в $\mathbb{HF}(\mathbb{R})$.

Идея нашего построения в чем-то перекликается с идеей А.И. Мальцева, использованной в его работе [5] для построения вычислимой (конструктивной) абелевой группы без кручения, не обладающей алгоритмом линейной зависимости. Определим подпространство H_S в W как подпространство, порожденное векторами $\langle q, 0 \rangle - f_S(q) \cdot \langle q, 1 \rangle$, $q \in \mathbb{B}$.

Поскольку пространство H_S счетно, фактор-пространство W/H_S имеет мощность континуума, и поэтому оно изоморфно векторному пространству $\langle \mathbb{R}; + \rangle$ над $\mathbb{Q}$.

Лемма 17. *Множества H_S и $W \setminus H_S$ Σ -определимы в $\mathbb{HF}(\mathbb{R})$.*

Доказательство. Σ -определимость H_S достаточно очевидна.

Докажем Σ -определимость множества $W \setminus H_S$. Сначала замечаем, что в силу условия $0 \notin S$ произвольное x из W не принадлежит H_S тогда и только тогда, когда выполнено хотя бы одно из следующих условий:

- для некоторого r x содержит элемент вида $\langle \langle r, 0 \rangle, \alpha \rangle$ тогда и только тогда, когда x не содержит элементов вида $\langle \langle r, 1 \rangle, \beta \rangle$;
- для некоторых $\alpha, \beta \in \mathbb{Q}$ и $r \in \mathbb{R}$ x содержит элементы $\langle \langle r, 0 \rangle, \alpha \rangle$ и $\langle \langle r, 1 \rangle, \beta \rangle$, но при этом либо $\beta/\alpha \notin I(S)$, либо $\beta/\alpha \in I(S)$, но $\exists n (I(s_n) = \beta/\alpha \wedge r \notin f_S^{-1}(s_n))$.
Напомним, что условие $r \notin f_S^{-1}(s_n)$ эквивалентно $r \notin \zeta(n)$.

Исходя из этого, можно записать условие принадлежности к множеству $W \setminus H_S$ в следующем виде:

$$\begin{aligned} x \in W \setminus H_S &\Leftrightarrow x \in W \wedge \\ &\left[\left[\exists r \in \text{TC}(x) \left(\exists \alpha \in \text{TC}(x) (\langle \langle r, 0 \rangle, \alpha \rangle \in x \leftrightarrow \neg \exists \beta \in \text{TC}(x) (\langle \langle r, 1 \rangle, \beta \rangle \in x)) \right) \right] \right. \\ &\quad \vee \exists \alpha, \beta, r \in \text{TC}(x) \left[\langle \langle r, 0 \rangle, \alpha \rangle \in x \wedge \langle \langle r, 1 \rangle, \beta \rangle \in x \right. \\ &\quad \left. \left. \wedge \left(\beta/\alpha \in I(S) \rightarrow \exists n (I(s_n) = \beta/\alpha \wedge r \notin \zeta(n)) \right) \right] \right]. \end{aligned}$$

Учитывая, что множество $I(S)$ Δ -определимо, а отображения I , f_S и множество S Σ -определимы, из этого условия получаем, что и множество $W \setminus H_S$ также Σ -определимо. $\square$

Из [леммы 17](#) следует, что отображение $\nu_S : x \in W \mapsto x/H_S$ является Σ -представлением над $\mathbb{HF}(\mathbb{R})$ для векторного пространства $V_S = W/H_S$, которое изоморфно векторному пространству $\langle \mathbb{R}, + \rangle$ над $\mathbb{Q}$; основное множество этого представления – это множество W , элементы пространства соответствуют классам вычетов по модулю H_S , а операции задаются очевидным образом.

Мы будем выбирать множества S , определяющие представления нашего векторного пространства, только среди подмножеств некоторого множества M , обладающего специфическими свойствами, существование которого утверждается следующей леммой.

Лемма 18. *Существует бесконечное $M \subseteq \omega$ такое, что для любых рациональных чисел a и b таких, что функция $x \mapsto ax + b$ не является ни тождественной, ни постоянной, т. е. выполнено $(a \neq 0) \wedge (a = 1 \rightarrow b \neq 0)$, множество $\{x \in M \mid ax + b \in M\}$ конечно.*

Доказательство. Пусть $h_i(x)$, $i < \omega$, – полный список функций вида, указанного в формулировке. Мы построим множество M по шагам.

Шаг 0. Полагаем $M_0 = \emptyset$.

Шаг $t + 1$. Находим наименьшее натуральное число $y \notin M_t$ такое, что для всех $i < t$ выполнены условия $h_i(y) \neq y$, $y \notin h_i(M_t)$ и $h_i(y) \notin M_t$, полагаем $M_{t+1} = M_t \cup \{y\}$. Выбор такого y возможен, поскольку отображение h_i разностнозначно, и условие $h_i(y) = y$ выполняется не более чем на одном числе.

Полагаем $M = \bigcup_{t < \omega} M_t$.

Чтобы доказать, что множество M обладает требуемыми свойствами, достаточно убедиться, что если y попадает в M на шаге $t + 1 > i$, то $h_i(y) \notin M$. Действительно, если y добавляется в M на таком шаге, то мы будем иметь $h_i(y) \neq y$, $h_i(y) \notin M_t$, откуда получим $h_i(y) \notin M_t \cup \{y\} = M_{t+1}$. Далее, из $y \in M_{t+1}$ следует $h_i(y) \in h_i(M_{t+1})$. Поскольку множества M_i образуют возрастающую цепочку, отсюда получаем $h_i(y) \in h_i(M_{t+1}) \subseteq h_i(M_{t'})$ для всех $t' \geq t + 1$. Это обстоятельство будет препятствовать помещению элемента $h_i(y)$ в множества $M_{t'}$, на всех шагах $t' > t + 1$. Поскольку элемент $h_i(y)$ не попал и в M_{t+1} , то он вообще никогда не попадет во множество M . $\square$

Зафиксируем некоторое множество M со свойствами как в только что доказанной лемме 18.

Предположим, $S_0, S_1 \subseteq M$ бесконечны, и $\varphi : V_{S_0} \rightarrow V_{S_1}$ – Σ -определимое изоморфное вложение, а ψ – произвольное Σ -определимое отображение такое, что для любого $x \in W$ выполняется $\varphi(x/H_{S_0}) = \psi(x)/H_{S_1}$. Докажем, что в таком случае будет выполнено свойство $S_0 \subseteq^* S_1$. Зафиксируем произвольное вещественное $r_0 \in (0, 1)$, алгебраически независимое над всеми использованными параметрами, а именно параметрами, использованными в определениях V_{S_0} , V_{S_1} и ψ . Обозначим конечное множество всех таких параметров через P . Образ элемента $\langle r_0, 0 \rangle$ относительно ψ имеет вид линейной комбинации элементов вида $\langle s, 0 \rangle$ и $\langle s, 1 \rangle$, $s \in (0, 1)$ с рациональными коэффициентами. Мы можем записать $\psi(\langle r_0, 0 \rangle)$ в виде

$$\psi(\langle r_0, 0 \rangle) = \sum_{i < k} (\alpha_i \cdot \langle s_i, 0 \rangle + \beta_i \cdot \langle s_i, 1 \rangle)$$

для подходящих $\alpha_i, \beta_i \in \mathbb{Q}$, $s_i \in (0, 1)$, где все s_i , $i < k$, попарно различны, и $\alpha_i^2 + \beta_i^2 \neq 0$ для всех $i < k$. Зафиксируем попарно непересекающиеся интервалы (u_i, v_i) , $i < k$, с рациональными концами такие, что для всех $i < k$ выполнено $s_i \in (u_i, v_i)$. Тогда для каждого

$j < k$ существует единственное число y_j , удовлетворяющее Σ -условию

$$y_j \in (u_j, v_j) \wedge \exists y_0 \dots y_{i-1} y_{i+1} \dots y_{k-1} \left(\bigwedge_{i < k, i \neq j} y_i \in (u_i, v_i) \right. \\ \left. \wedge \psi(\langle r_0, 0 \rangle) = \sum_{i < k} (\alpha_i \cdot \langle y_i, 0 \rangle + \beta_i \cdot \langle y_i, 1 \rangle) \right),$$

и оно равно s_j . По [предложению 4](#) существуют такие функции g_i , определяемые Σ -формулами с параметрами из P , что для всех r вблизи точки r_0 выполнено равенство

$$\psi(\langle r, 0 \rangle) = \sum_{i < k} (\alpha_i \cdot \langle g_i(r), 0 \rangle + \beta_i \cdot \langle g_i(r), 1 \rangle).$$

В силу [предложения 4](#) все функции g_i непрерывно дифференцируемы вблизи точки r_0 . Докажем, что хотя бы одна из производных $g'_i(r_0)$ не равна нулю. Действительно, если бы все эти производные равнялись нулю в точке r_0 , то, поскольку согласно [предложению 4](#) производная каждой из функций f_i также определима Σ -формулой вблизи точки r_0 , в силу АГР она была бы равна нулю и в некоторой ее окрестности. Это означало бы, что все функции f_i постоянны вблизи r_0 , а вместе с ними постоянно и значение $\psi(\langle r, 0 \rangle)$. Однако все элементы $\langle r, 0 \rangle$ при различных r попарно различны по модулю подпространства H_{S_0} , откуда следует, что и их образы относительно ψ должны быть попарно различны по модулю подпространства H_{S_1} , и тем более они не могут быть равны между собой. Противоречие.

Аналогичные условия выполняются и для $\psi(\langle r_0, 1 \rangle)$, а именно, вблизи точки r_0 имеет место равенство

$$\psi(\langle r, 1 \rangle) = \sum_{i < s} (\gamma_i \cdot \langle h_i(r), 0 \rangle + \delta_i \cdot \langle h_i(r), 1 \rangle) \quad (8)$$

для подходящих $s \in \omega$, $\gamma_i, \delta_i \in \mathbb{Q}$ и Σ -определимых функций h_i с параметрами из P , непрерывно дифференцируемых вблизи точки r_0 ; при этом все значения $h_i(r_0)$, $i < s$, попарно различны и $\gamma_i^2 + \delta_i^2 \neq 0$ для всех $i < s$.

Зафиксируем какой-либо индекс i_0 со свойством $g'_{i_0}(r_0) \neq 0$. Очевидно, что функция g_{i_0} будет строго монотонной вблизи точки r_0 . Докажем, что в разложении (8) для $\psi(\langle r_0, 1 \rangle)$ имеется слагаемое вида $\gamma_j \cdot \langle h_j(r_0), 0 \rangle + \delta_j \cdot \langle h_j(r_0), 1 \rangle$ со свойством $g_{i_0}(r_0) = h_j(r_0)$. Предположим, что такого слагаемого нет. Тогда, поскольку функции g_{i_0} и все функции h_i , $i < s$, непрерывны вблизи точки r_0 и $\alpha_{i_0}^2 + \beta_{i_0}^2 \neq 0$, а $g'_{i_0}(r_0) \neq 0$, найдется число r из $\mathbb{B}$, обладающее свойствами

- 1) $h_i(r) \neq g_{i_0}(r)$ для всех $i < s$,
- 2) $g_{i_0}(r) \notin \mathbb{B} \vee \left(g_{i_0}(r) \in \mathbb{B} \wedge \beta_{i_0} \neq -\alpha_{i_0} f_{S_1}(g_{i_0}(r)) \wedge f_{S_1}(g_{i_0}(r)) \neq 0 \right)$.

Поскольку $r \in \mathbb{B}$, имеем

$$(\langle r, 0 \rangle - f_{S_0}(r) \cdot \langle r, 1 \rangle) / H_{S_0} = \langle r, 0 \rangle / H_{S_0} - f_{S_0}(r) \cdot (\langle r, 1 \rangle / H_{S_0}) = 0.$$

Следовательно,

$$\psi(\langle r, 0 \rangle) - f_{S_0}(r) \cdot \psi(\langle r, 1 \rangle) \in H_{S_1}.$$

Далее, подставляя соответствующие разложения, получаем

$$\begin{aligned} \psi(\langle r, 0 \rangle) - f_{S_0}(r) \cdot \psi(\langle r, 1 \rangle) &= \sum_{i < k} (\alpha_i \cdot \langle g_i(r), 0 \rangle + \beta_i \cdot \langle g_i(r), 1 \rangle) \\ &\quad - f_{S_0}(r) \cdot \left(\sum_{i < s} (\gamma_i \cdot \langle h_i(r), 0 \rangle + \delta_i \cdot \langle h_i(r), 1 \rangle) \right). \end{aligned}$$

Это разложение содержит слагаемое $\alpha_{i_0} \cdot \langle g_{i_0}(r), 0 \rangle + \beta_{i_0} \cdot \langle g_{i_0}(r), 1 \rangle$. Если $r \notin \mathbb{B}$, то последний элемент не может принадлежать H_{S_1} в силу определения этой группы. Если же $r \in \mathbb{B}$, то это слагаемое не может иметь вид $\gamma(\langle r, 0 \rangle) - f_{S_1} \cdot \langle r, 1 \rangle$ ни для какого $\gamma \in \mathbb{Q}$, откуда снова следует, что этот элемент не принадлежит H_{S_1} . Противоречие.

Зафиксируем некоторое j_0 такое, что слагаемое $\gamma_{j_0} \cdot \langle h_{j_0}(r_0), 0 \rangle + \delta_{j_0} \cdot \langle h_{j_0}(r_0), 1 \rangle$ в разложении для $\psi(\langle r_0, 1 \rangle)$ обладает свойствами $\gamma_{j_0}^2 + \delta_{j_0}^2 \neq 0$ и $g_{i_0}(r_0) = h_{j_0}(r_0)$. Поскольку $g_{i_0}(r_0) = h_{j_0}(r_0)$ и r_0 алгебраически независимо над P , вблизи точки r_0 выполнено условие $g_{i_0}(r) = h_{j_0}(r)$.

Таким образом, справедлива

Лемма 19. *Существуют $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{Q}$, а также Σ -определимая функция g , непрерывно дифференцируемая вблизи точки r_0 , такие, что*

- 1) $\alpha^2 + \beta^2 \neq 0, \gamma^2 + \delta^2 \neq 0$;
- 2) g строго монотонна вблизи r_0 ;
- 3) для всех r , достаточно близких к r_0 , $\psi(\langle r, 0 \rangle)$ содержит слагаемое

$$\alpha \cdot \langle g(r), 0 \rangle + \beta \cdot \langle g(r), 1 \rangle;$$

- 4) для всех r , достаточно близких к r_0 , $\psi(\langle r, 1 \rangle)$ содержит слагаемое

$$\gamma \cdot \langle g(r), 0 \rangle + \delta \cdot \langle g(r), 1 \rangle.$$

Далее, зафиксируем $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ и g , как в [лемме 19](#). Поскольку для всех $r \in \mathbb{B}$ и, в частности, вблизи r_0 справедливо

$$\langle r, 0 \rangle - f_{S_0}(r) \langle r, 1 \rangle \in H_{S_0},$$

имеем

$$\begin{aligned} 0/H_{S_1} &= \varphi(0/H_{S_0}) = \varphi\left(\left(\langle r, 0 \rangle - f_{S_0}(r) \cdot \langle r, 1 \rangle\right)/H_{S_0}\right) = \varphi\left(\langle r, 0 \rangle/H_{S_0}\right) - f_{S_0}(r) \cdot \varphi\left(\langle r, 1 \rangle/H_{S_0}\right) \\ &= \left(\psi(\langle r, 0 \rangle) - f_{S_0}(r) \cdot \psi(\langle r, 1 \rangle)\right)/H_{S_1}. \end{aligned}$$

Так как для всех $r \in \mathbb{B}$, достаточно близких к r_0 , $\psi(\langle r, 0 \rangle)$ содержит слагаемое

$$\alpha \cdot \langle g(r), 0 \rangle + \beta \cdot \langle g(r), 1 \rangle,$$

а $\psi(\langle r, 1 \rangle)$ – слагаемое $\gamma \cdot \langle g(r), 0 \rangle + \delta \cdot \langle g(r), 1 \rangle$, то выражение $\psi(\langle r, 0 \rangle) - f_{S_0}(r) \cdot \psi(\langle r, 1 \rangle)$ будет содержать в качестве слагаемого результат вычисления выражения

$$\alpha \cdot \langle g(r), 0 \rangle + \beta \cdot \langle g(r), 1 \rangle - f_{S_0}(r)(\gamma \cdot \langle g(r), 0 \rangle + \delta \cdot \langle g(r), 1 \rangle),$$

что равняется

$$(\alpha - f_{S_0}(r)\gamma) \cdot \langle g(r), 0 \rangle + (\beta - f_{S_0}(r)\delta) \cdot \langle g(r), 1 \rangle.$$

Поскольку для всех $r \in \mathbb{B}$ вблизи r_0 выполнено $\psi(\langle r, 0 \rangle) - f_{S_0}(r) \cdot \psi(\langle r, 1 \rangle) \in H_{S_1}$, отсюда следует, что и для всех $r \in \mathbb{B}$ вблизи r_0 справедливо

$$(\alpha - f_{S_0}(r)\gamma) \cdot \langle g(r), 0 \rangle + (\beta - f_{S_0}(r)\delta) \cdot \langle g(r), 1 \rangle \in H_{S_1}.$$

Последнее эквивалентно тому, что для всех $r \in \mathbb{B}$ вблизи r_0 выполнено условие

$$g(r) \in \mathbb{B} \wedge [f_{S_1}(g(r)) \cdot (\alpha - f_{S_0}(r)\gamma) = \beta - f_{S_0}(r)\delta].$$

Покажем, что это возможно только при одновременном выполнении условий $\beta = 0$ и $-\delta/\alpha = 1$. Рассмотрим несколько случаев.

Случай $\alpha = \gamma = 0$. Докажем, что он невозможен. Действительно, в этом случае $\beta \neq 0$ и $\delta \neq 0$, и при этом для всех $r \in \mathbb{B}$ вблизи r_0 должно выполняться $\beta - f_{S_0}(r)\delta = 0$, что невозможно, поскольку значения $f_{S_0}(r)$, $r \in \mathbb{B}$, не ограничены вблизи r_0 .

Случай $\gamma \neq 0$.

Подслучай $\begin{vmatrix} \beta & \delta \\ \alpha & \gamma \end{vmatrix} = 0$. Тогда с одной стороны, из-за пропорциональности строк определителя и ввиду $\gamma \neq 0$ существует такое $c \in \mathbb{Q}$, что $\beta = c\alpha$, $\delta = c\gamma$. Значит, при всех r таких, что $\alpha - f_{S_0}(r)\gamma \neq 0$, справедливо

$$(\beta - f_{S_0}(r)\delta)(\alpha - f_{S_0}(r)\gamma)^{-1} = (c\alpha - cf_{S_0}(r)\gamma)(\alpha - f_{S_0}(r)\gamma)^{-1} = c.$$

С другой стороны, при всех таких r должно также выполняться

$$c = (\beta - f_{S_0}(r)\delta)(\alpha - f_{S_0}(r)\gamma)^{-1} = f_{S_1}(g(r)).$$

Но это невозможно, поскольку на множестве $\mathbb{B}$ вблизи r_0 функция $f_{S_1}(g(r))$ принимает бесконечно много различных значений.

Подслучай $\begin{vmatrix} \beta & \delta \\ \alpha & \gamma \end{vmatrix} \neq 0$. Здесь ввиду $\gamma \neq 0$ функция $G(x) = (\beta - x\delta)(\alpha - x\gamma)^{-1}$ при $x \rightarrow \infty$ имеет конечный предел δ/γ и при $x \neq \alpha/\gamma$ обладает не меняющей свой знак ненулевой производной $\begin{vmatrix} \beta & \delta \\ \alpha & \gamma \end{vmatrix} (\alpha - x\gamma)^{-2}$. Следовательно, функция G при $x \rightarrow \infty$ сходится к своему конечному пределу строго монотонно, но сам этот предел никогда не будет достигнут. С другой стороны, учитывая, что вблизи r_0 значения функции $f_{S_0}(r)$ при $r \in \mathbb{B}$ не ограничены, мы можем выбрать последовательность точек $q_0, q_1, \dots$ из $\mathbb{B}$ такую, что последовательность $f_{S_0}(q_i)$, $i < \omega$, строго монотонно возрастает и выполняется условие $G(f_{S_0}(q_i)) = f_{S_1}(g(r))$, т. е. последовательность значений $G(f_{S_0}(q_i))$, $i < \omega$, строго монотонна (убывающая или возрастающая), состоит из натуральных чисел и имеет при этом конечный предел, что невозможно. Получили противоречие.

Отсюда мы делаем вывод, что случай $\gamma \neq 0$ невозможен.

Случай $\gamma = 0$. Тогда $\alpha \neq 0$ и $\delta \neq 0$.

Подслучай $\beta/\alpha \neq 0 \vee \delta/\alpha \neq -1$. С учетом $\gamma = 0$ вблизи r_0 для всех $r \in \mathbb{B}$ должно быть выполнено равенство

$$\beta/\alpha - f_{S_0}(r) \cdot \delta/\alpha = f_{S_1}(g(r)),$$

причем $f_{S_1}(g(r)) \in S_1$. В силу того, что в любой окрестности точки r_0 имеется бесконечно много значений вида $f_{S_0}(r) \in S_0 \subseteq M$, мы получаем бесконечно много различных значений вида $f_{S_1}(g(r)) \in S_1 \subseteq M$, что противоречит свойствам множества M . Таким образом, рассматриваемый нами подслучай невозможен.

Остается единственный *случай* $\beta = 0$ и $\delta/\alpha = -1$. Равенство

$$\beta/\alpha - f_{S_0}(r) \cdot \delta/\alpha = f_{S_1}(g(r)),$$

выполненное вблизи r_0 , превращается в равенство

$$f_{S_0}(r) = f_{S_1}(g(r)).$$

В силу [леммы 16](#) вблизи r_0 значения функции $f_{S_0}(r)$ лежат в S_0 и при этом заполняют все S_0 , за исключением конечного числа элементов. Все значения функции $f_{S_1}(g(r))$ принадлежат S_1 , и мы получаем $S_0 \subseteq^* S_1$.

Обозначим аддитивную группу векторов векторного пространства V_S , $S \subseteq M$, через

G_S . Все векторные пространства V_S , $S \subseteq M$, имеют размерность 2^ω , поэтому они изоморфны векторному пространству $\langle \mathbb{R}; + \rangle$, откуда следует, что все группы G_S изоморфны группе $\langle \mathbb{R}; + \rangle$. Поскольку любое изоморфное Σ -вложение между группами G_{S_0} и G_{S_1} является также изоморфным Σ -вложением векторного пространства V_{S_0} в V_{S_1} , из изоморфной Σ -вложимости G_{S_0} в G_{S_1} также следует $S_0 \subseteq^* S_1$.

Для завершения доказательства остается указать такое семейство подмножеств множества M мощности 2^ω , что для любых его элементов S_0 и S_1 из $S_0 \neq S_1$ следует $S_0 \not\subseteq^* S_1$ и $S_1 \not\subseteq^* S_0$. Для этого разобьем множество M на попарно дизъюнктные бесконечные множества A_i , $i < \omega$. Для каждой последовательности $\varepsilon \in 2^\omega$ положим

$$D_\varepsilon = \bigcup_{\varepsilon(i)=0} A_{2i} \cup \bigcup_{\varepsilon(i)=1} A_{2i+1}.$$

Очевидно, при $\varepsilon_0 \neq \varepsilon_1$ утверждение $D_{\varepsilon_0} \subseteq^* D_{\varepsilon_1}$ ложно. Отсюда следует, что семейство Σ -представлений G_{D_ε} , $\varepsilon \in 2^\omega$, группы $\langle \mathbb{R}; + \rangle$ обладает требуемыми в теореме свойствами. Теорема доказана. $\square$

Список литературы

- [1] J. Barwise, *Admissible sets and structures*, Springer-Verlag, Berlin, Göttingen, Heidelberg, 1975.
- [2] Ю.Л. Ершов, *Определимость и вычислимость*, Научная книга, Новосибирск, 1996.
- [3] Yu.L. Ershov, *Σ -Definability of algebraic structures*, in: Handbook of Recursive Mathematics Volume 1: Recursive Model Theory, 235–260 (1998).
DOI: [https://doi.org/10.1016/S0049-237X\(98\)80006-2](https://doi.org/10.1016/S0049-237X(98)80006-2)
- [4] V.G. Puzarenko, Yu.L. Ershov, A.I. Stukachev, *HF-computability*, in: Computability in context. Computation and logic in the real world, 169–242, Imperial College Press, 2011.
DOI: [10.1142/9781848162778_0006](https://doi.org/10.1142/9781848162778_0006)
- [5] А.И. Мальцев, *О рекурсивных абелевых группах*, ДАН СССР **146** (5), 1009–1012 (1961).
URL: <https://www.mathnet.ru/rus/dan27085>
- [6] С.С. Гончаров, *Проблема числа неавтоэквивалентных конструктивизаций*, Алгебра и логика **19** (6), 621–639 (1980).
URL: <https://www.mathnet.ru/rus/al1702>
- [7] А.С. Морозов, *О некоторых представлениях поля вещественных чисел*, Алгебра и логика **51** (1), 96–128 (2012).
URL: <https://www.mathnet.ru/rus/al524>

- [8] А.С. Морозов, О Σ -представлениях вещественного порядка, Алгебра и логика **53** (3), 340–371 (2014).
URL: <https://www.mathnet.ru/rus/al639>
- [9] А.С. Морозов, *Непредставимость некоторых структур анализа в наследственно конечных надстройках*, Алгебра и логика **56** (6), 691–711 (2017).
DOI: <https://doi.org/10.17377/alglog.2017.56.604>
- [10] А.С. Морозов, *Об одном достаточном условии непредставимости структур в наследственно-конечных надстройках*, Алгебра и логика **55** (3), 366–379 (2016).
DOI: <https://doi.org/10.17377/alglog.2016.55.305>
- [11] A. Tarski, *A decision method for elementary algebra and geometry*, The Rand Corporation, Santa Monica, 1957.

Андрей Сергеевич Морозов

Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН,
пр. Акад. Коптюга, д. 4, г. Новосибирск, 630090, Россия,
Новосибирский Государственный Университет,
ул. Пирогова, д. 1, г. Новосибирск, 630090, Россия,
e-mail: morozov@math.nsc.ru

On Σ -presentations of the additive group of the real numbers

A.S. Morozov

Abstract. We prove the existence of 2^ω pairwise non- Σ -embeddable into each other (and henceforth non- Σ -isomorphic) Σ -presentations of the additive group of the real numbers in the hereditarily finite superstructure over the ordered field of the real numbers.

Keywords: generalized computability, admissible set, hereditarily finite superstructure, sigma-representable structure, computable structure, constructive structure, computability over reals, algorithmic dimension, autostability, number of presentations.

DOI: 10.26907/2949-3919.2024.1.74-93

References

- [1] J. Barwise, *Admissible sets and structures*, Springer-Verlag, Berlin, Göttingen, Heidelberg, 1975.
- [2] Yu.L. Ershov, *Definability and computability*, Siberian School of Algebra and Logic, Nauchnaya Kniga (NII MIOONGU), Novosibirsk, 1996 [in Russian].
- [3] Yu.L. Ershov, *Σ -Definability of algebraic structures*, in: Handbook of Recursive Mathematics Volume 1: Recursive Model Theory, 235–260 (1998).
DOI: [https://doi.org/10.1016/S0049-237X\(98\)80006-2](https://doi.org/10.1016/S0049-237X(98)80006-2)
- [4] V.G. Puzarenko, Yu.L. Ershov, A.I. Stukachev, *HF-computability*, in: Computability in context. Computation and logic in the real world, 169–242, Imperial College Press, 2011.
DOI: [10.1142/9781848162778_0006](https://doi.org/10.1142/9781848162778_0006)
- [5] A.I. Mal'tcev, *On recursive Abelian groups*, Dokl. AN SSSR **146** (5), 1009–1012 (1961) [in Russian].
URL: <https://www.mathnet.ru/rus/dan27085>
- [6] S.S. Goncharov, *The problem of the number of nonautoequivalent constructivizations*, Algebra Logika **19** (6), 621–639 (1980). 621–639 [in Russian].
URL: <https://www.mathnet.ru/rus/al1702>

Acknowledgements. The research was supported by basic project FWNF-2022-0012 of the Ministry of science and higher education of the Russian federation.

Received: 01 September 2023. Accepted: 16 January 2024. Published: 11 April 2024.

- [7] A.S. Morozov, *Some presentations of the real number field*, Algebra Logic **51** (1), 66–88 (2012).
DOI: <https://doi.org/10.1007/s10469-012-9171-z>
- [8] A.S. Morozov, *Σ -presentations of the ordering on the reals*, Algebra Logic **53** (3), 217–237 (2014).
DOI: <https://doi.org/10.1007/s10469-014-9285-6>
- [9] A.S. Morozov, *Nonpresentability of some structures of analysis in hereditarily finite superstructures*, Algebra Logic **56** (6), 458–472 (2018).
DOI: <https://doi.org/10.1007/s10469-018-9468-7>
- [10] A.S. Morozov, *A sufficient condition for nonpresentability of structures in hereditarily finite superstructures*, Algebra Logic **55** (3), 242–251 (2016).
DOI: <https://doi.org/10.1007/s10469-016-9392-7>
- [11] A. Tarski, *A decision method for elementary algebra and geometry*, The Rand Corporation, Santa Monica, 1957.

Andrey Sergeevich Morozov

Sobolev Institute of Mathematics,
4 Acad. Koptuyg Ave., Novosibirsk 630090, Russia,
Novosibirsk State University,
1 Pirogov str., Novosibirsk 630090, Russia,
e-mail: morozov@math.nsc.ru