Том 2, Выпуск 1
Стр. 94–108 (2024)

УДК 510.54, 510.57
MSC 03D45, 03D30

Некоторые свойства классов минимальных нумераций семейств арифметических множеств

Ш.Д. Нодиров, М.Х. Файзрахманов

Аннотация. Доказано, что для каждого $u \geqslant 2$ класс всех однозначных Σ^0_u-вычислимых нумераций любого бесконечного семейства всюду определенных функций эффективно бесконечен и класс всех его Σ^0_{u-1}-вычислимых нумераций порождается замыканием вниз относительно сводимости множества всех бесконечных прямых сумм равномерно Σ^0_{u-1}-вычислимых последовательностей его однозначных нумераций. Установлено, что если $u > 2$, то класс всех Σ^0_u-вычислимых нумераций любого бесконечного семейства порождается бесконечными прямыми суммами равномерно Σ^0_u-вычислимых и равномерно Σ^0_u-минимальных последовательностей его нумераций.

Ключевые слова: вычислимая нумерация, однозначная нумерация, минимальная нумерация.

DOI: 10.26907/2949-3919.2024.1.94-108

Введение

В классической теории алгоритмов нумерация α семейства вычислимо перечислимых (в. п.) множеств $\mathcal{A}$ (т. е. сюръективное отображение $\nu : \mathbb{N} \to \mathcal{A}$) называется *вычислимой* [1, 2], если множество пар

$$G_\alpha = \{\langle x, y\rangle \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : y \in \nu(x)\}$$

в. п. Во второй половине 90-х годов прошлого столетия в монографии Ю.Л. Ершова [3] и в совместной статье С.С. Гончарова и А. Сорби [4] были предложены различные естественные подходы к обобщению понятия вычислимой нумерации. В настоящий момент наиболее хорошо изученными являются классы обобщенно вычислимых нумераций семейств арифметических (см. [5–7]) и гиперарифметических множеств (см. [8, 9]). Зафиксируем до конца статьи произвольное число $u \geqslant 2$. Следуя [4], назовем нумерацию α семейства Σ^0_{u-1}-множеств Σ^0_{u-1}-*вычислимой*, если $G_\alpha \in \Sigma^0_{u-1}$. Наша статья имеет целью

Благодарности. Работа выполнена в рамках реализации программы развития Научно-образовательного математического центра Приволжского федерального округа (соглашение № 0075-02-2023-944). Работа второго автора также поддержана грантом Российского научного фонда (проект № 22-21-20024).

Поступила: 30.11.2023. Принята: 16.01.2024. Опубликована: 11.04.2024.

изучение классов широко распространенных в литературе (см. [5, 10, 11]) минимальных Σ^0_u-вычислимых нумераций семейств арифметических множеств. Так каждая однозначная (инъективная) и позитивная (у которой прообраз отношения равенства в. п.) нумерация минимальна. Согласно [5] любое бесконечное Σ^0_u-вычислимое семейство обладает бесконечным числом (попарно неэквивалентных) минимальных Σ^0_u-вычислимых нумераций. Наконец, естественность этого класса нумераций подчеркивается также критерием минимальности нумерации, полученным С.А. Бадаевым в его работе [12]. Задачи статьи заключаются в определении с различных позиций насколько “большими” могут быть классы минимальных обобщенно вычислимых нумераций семейств арифметических множеств. Первый используемый для этого подход основывается на введенном в [13] понятии *эффективной бесконечности* для классов нумераций. Она имеет место, если по любой вычислимой последовательности нумераций, принадлежащих заданному классу, можно эффективно указать вычислимую нумерацию, принадлежащую тому же классу и не эквивалентную ни одной из нумераций этой последовательности. Таким образом, эффективная бесконечность продолжает понятие продуктивности подмножества натуральных чисел на классы нумераций. Второй подход основывается на возможности порождения всех обобщенно вычислимых нумераций семейства замыканием вниз относительно сводимости бесконечных прямых сумм равномерно Σ^0_u-вычислимых последовательностей нумераций. Он базируется на работах [14, 15], в которых было установлено, что каждая вычислимая нумерация семейства всех в. п. множеств сводится к бесконечной прямой сумме равномерно вычислимой последовательности его однозначных нумераций.

В обозначениях и терминологии теории вычислимости мы придерживаемся монографии Р.И. Соара [16]. Через φ_e и W_e обозначаем частично вычислимую (ч. в.) функцию и в. п. множество с геделевским номером e соответственно. Для частичной функции ψ ее область определения обозначается как $\operatorname{dom}\psi$, а область ее значений – как $\operatorname{ran}\psi$. Используем запись $\psi(x)\downarrow$, если $x \in \operatorname{dom}\psi$, и $\psi(x)\uparrow$ в противном случае. Пусть $\overline{A} = \mathbb{N} \setminus A$ – дополнение множества $A \subseteq \mathbb{N}$. Через $c(x, y)$ обозначаем вычислимую биекцию $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ на $\mathbb{N}$. Для любого набора $x_0, \ldots, x_{n+2}$ по индукции определим $c(x_0, \ldots, x_{n+1}, x_{n+2}) = c(x_0, \ldots, x_n, c(x_{n+1}, x_{n+2}))$. Символом “$\leftrightharpoons$” заменяем словосочетание “равное по определению”.

1. Предварительные сведения

В обозначениях и терминологии теории нумераций мы придерживаемся монографии Ю.Л. Ершова [1] и его статьи [2]. Семейство арифметических множеств называется Σ^0_{u-1}-*вычислимым*, если оно обладает Σ^0_{u-1}-вычислимой нумерацией. Скажем, что нумерация μ не более чем счетного множества S *сводится* к его нумерации ν (в этом случае используется обозначение $\mu \leqslant \nu$), если существует такая вычислимая функция f, что $\mu = \nu \circ f$. Если $\mu = \nu \circ f$, то будем говорить, что μ сводится к ν посредством функции f. Нумерации μ и ν называются *эквивалентными*, если $\mu \leqslant \nu$ и $\nu \leqslant \mu$. Будем называть нумерацию μ *минимальной*, если $\mu \leqslant \alpha$ для любой нумерации $\alpha \leqslant \mu$ множества S. Множество всех нумераций S будем обозначать через $H(S)$. Для нумераций $\mu_0, \dots, \mu_k \in H(S)$ определим их *прямую сумму* $\mu_0 \oplus \dots \oplus \mu_k$, положив

$$(\mu_0 \oplus \dots \oplus \mu_k)((k+1)x + r) = \mu_r(x)$$

для всех x и всех $r \leqslant k$. *Прямой суммой* бесконечной последовательности $\{\mu_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ нумераций S называется нумерация $\bigoplus\limits_n \mu_n$ такая, что

$$\left(\bigoplus_n \mu_n\right)(c(m,x)) = \mu_m(x)$$

для всех m и x. Последовательность $\{\mu_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ нумераций семейства Σ^0_{u-1}-множеств $\mathcal{A}$ назовем *равномерно* Σ^0_{u-1}-*вычислимой*, если существует такая вычислимая функция f, что $G_{\mu_n} = W^{\emptyset^{(u-2)}}_{f(n)}$ для всех n. Скажем, что она *равномерно* Σ^0_{u-1}-*минимальна*, если существует такая бинарная функция $g \leqslant_T \emptyset^{(u-2)}$, что $\varphi_{g(e,n)}$ всюду определена и $\mu_n \leqslant \mu_n \circ \varphi_e$ посредством $\varphi_{g(e,n)}$ для всех e, n, для которых φ_e всюду определена и $\operatorname{ran}(\mu_n \circ \varphi_e) = \mathcal{A}$.

Для каждого e через α^{u-1}_e будем обозначать Σ^0_{u-1}-вычислимую нумерацию α, для которой $G_\alpha = W^{\emptyset^{(u-2)}}_e$. Класс K нумераций Σ^0_{u-1}-вычислимого семейства $\mathcal{A}$ называется Σ^0_{u-1}-вычислимым, если существует такое в. п. множество W, что

$$K = \{\alpha^{u-1}_x : x \in W\}.$$

В этом случае если $W = W_e$, то класс K будем обозначать через K_e. Следуя [13], назовем класс K, состоящий из Σ^0_{u-1}-вычислимых нумераций семейства $\mathcal{A}$, *эффективно бесконечным*, если существует такая вычислимая функция f с $\alpha^{u-1}_{f(e)} \in K \setminus K_e$ для всех таких e, что $K_e \subseteq H(\mathcal{A})$.

2. Однозначные нумерации семейств всюду определенных функций

Согласно критерию Махилла [16,17] множество P продуктивно тогда и только тогда, когда $\overline{\emptyset'} \leqslant_1 P$. Ориентируясь на него, в [18] было доказано, что произвольный класс K, состоящий из Σ^0_{u-1}-вычислимых нумераций семейства $\mathcal{A}$, эффективно бесконечен, если существует такая вычислимая функция f, что $\alpha^{u-1}_{f(e)} \in K$ для всех $e \notin \emptyset^{(u+1)}$ и

$$\forall \beta \in K \left[\beta \not\equiv \alpha^{u-1}_{f(e)}\right]$$

для всех $e \in \emptyset^{(u+1)}$. Ранее неоднократно поднимался вопрос является ли последнее достаточное условие также необходимым. Следующая теорема, помимо прочего, отвечает и на этот вопрос. В ней рассматриваются бесконечные Σ^0_u-вычислимые семейства (графиков) всюду определенных функций, которые согласно [1] всегда обладают однозначными Σ^0_u-вычислимыми нумерациями.

Теорема 1.

1) *Пусть $\mathcal{A}$ – бесконечное Σ^0_u-вычислимое семейство всюду определенных функций. Любой класс Σ^0_u-вычислимых нумераций $\mathcal{A}$, содержащий все его однозначные Σ^0_u-вычислимые нумерации, эффективно бесконечен.*
2) *Существует бесконечное Σ^0_u-вычислимое семейство $\mathcal{B}$ всюду определенных функций, для которого $\overline{\emptyset^{(u+2)}} \nleq_m \mathrm{Fr}(\mathcal{B}) \leftrightharpoons \{x : \alpha^u_x \in H(\mathcal{B})$ однозначна$\}$.*

Доказательство. 1) Зафиксируем некоторую однозначную Σ^0_u-вычислимую нумерацию β семейства $\mathcal{A}$ и последовательность функций $\{g_x\}_{x\in\mathbb{N}}$ такую, что $\beta(x) = g_x$ для всех x. Эффективно по произвольному в. п. множеству W определим Σ^0_u-вычислимую нумерацию α такую, что если

$$\{\alpha^u_x : x \in W\} \subseteq H(\mathcal{A}),$$

то $\alpha \in H(\mathcal{A})$ однозначна и $\alpha \nleq \alpha^u_x$ для всех $x \in W$. Если $W = \emptyset$, то полагаем $\alpha = \beta$. В противном случае выберем вычислимую функцию f такую, что $W = \mathrm{ran}\, f$. Используя принцип униформизации для Σ^0_u-множеств, выберем равномерно $\emptyset^{(u-1)}$-в. п. двойную последовательность $\{\psi^y_x\}_{x,y\in\mathbb{N}}$ частичных функций такую, что

$$\forall x \forall y \forall a\,[\exists b\,[\langle a, b\rangle \in \alpha^u_x(y)] \Leftrightarrow \exists d\,[\psi^y_x(a)\downarrow= d]]\,\&\,\forall x \forall y\,[\psi^y_x \subseteq \alpha^u_x(y)].$$

Таким образом, если для произвольных x и y $\alpha^u_x(y)$ является частичной функцией, то $\alpha^u_x(y) = \psi^y_x$. Чтобы определить нумерацию α, определим последовательность частичных функций $\{\chi_x\}_{x\in\mathbb{N}}$, а затем для всех x положим $\alpha(x) = \chi_x$. Для произвольных e, x определим частичные функции $\chi_{2c(e,x)}$ и $\chi_{2c(e,x)+1}$ таким образом, чтобы выполнялись соотношения

$$\{\chi_{2c(e,x)}, \chi_{2c(e,x)+1}\} = \{g_{2c(e,x)}, g_{2c(e,x)+1}\}, \tag{1}$$

$$\varphi_e(2c(e,x))\downarrow\Rightarrow \chi_{2c(e,x)} \neq \psi^y_{f(x)},\ \text{где } y = \varphi_e(2c(e,x)), \tag{2}$$

при условии, что для всех z частичная функция $\psi^z_{f(x)}$ всюду определена. Зафиксируем наименьшее a, для которого $g_{2c(e,x)}(a) \neq g_{2c(e,x)+1}(a)$. Определим

$$\chi_{2c(e,x)} = \begin{cases} \emptyset, & \text{если } \varphi_e(2c(e,x))\downarrow \,\&\, \psi^y_{f(x)}(a)\uparrow,\ \text{где } y = \varphi_e(2c(e,x)); \\ g_{2c(e,x)}, & \text{если } \varphi_e(2c(e,x))\uparrow \vee \varphi_e(2c(e,x))\downarrow \,\&\, g_{2c(e,x)}(a) \neq \psi^y_{f(x)}(a)\downarrow, \\ & \text{где } y = \varphi_e(2c(e,x)); \\ g_{2(c(e,x)+1} & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Положим $\chi_{2c(e,x)+1} = \emptyset$, если $\chi_{2c(e,x)} = \emptyset$, и $\chi_{2c(e,x)+1} = g_{2c(e,x)+i}$, если $\chi_{2c(e,x)} = g_{2c(e,x)+1-i}$, где $i = 0, 1$. Таким образом, если для всех x и z частичная функция $\psi^z_{f(x)}$ всюду определена, то для всех e справедливы условия (1) и (2), из которых, в свою очередь, вытекает, что α является однозначной нумерацией семейства $\mathcal{A}$ и $\alpha \nleqslant \alpha_{f(x)}$ для всех x. Нетрудно видеть, что α является Σ^0_u-вычислимой и определяется эффективно по W. Отсюда следует, что любой класс Σ^0_u-вычислимых нумераций $\mathcal{A}$, содержащий все его однозначные Σ^0_u-вычислимые нумерации, эффективно бесконечен.

2) Пусть $\mathcal{B}$ – семейство всех постоянных функций. Определим последовательность $\{\psi^y_x\}_{x,y\in\mathbb{N}}$ частичных функций так же, как и в доказательстве п. 1) теоремы. Чтобы показать, что $\overline{\emptyset^{(u+2)}} \nleqslant_m \mathrm{Fr}(\mathcal{B})$, определим множество $X \in \Sigma^0_{u+2}$, для которого $\overline{X} \nleqslant_m \mathrm{Fr}(\mathcal{B})$. Пусть X состоит из всех e, удовлетворяющих каждому из условий:

(a) $\varphi_e(e)\downarrow$;

(b) для всех y частичная функция $\psi^y_{\varphi_e(e)}$ всюду определена и постоянна;

(c) для всех a существует y такое, что $\psi^y_{\varphi_e(e)}(0) = a$.

Нетрудно видеть, что если для всех e $\varphi_e(e)\downarrow$, то

$$e \in X \Leftrightarrow \varphi_e(e) \in \mathrm{Fr}(\mathcal{B}).$$

Отсюда следует $\overline{X} \nleqslant_m \mathrm{Fr}(\mathcal{B})$. Поскольку каждое из зависящих от e условий (a)–(c) принадлежит классу $\Pi^0_2(\emptyset^{(u-1)}) = \Pi^0_{u+1}$, имеет место $X \in \Pi^0_{u+1} \subseteq \Sigma^0_{u+2}$. $\square$

Согласно следующей теореме класс всех Σ^0_{u-1}-нумераций бесконечного семейства всюду определенных функций порождается замыканием вниз относительно сводимости бесконечных прямых сумм равномерно Σ^0_{u-1}-вычислимых последовательностей его однозначных нумераций. Кроме того, бесконечные прямые суммы нельзя, вообще говоря, заменить конечными.

Теорема 2. *Пусть $\mathcal{A}$ – бесконечное Σ^0_{u-1}-вычислимое семейство всюду определенных функций.*

1) *Для любой Σ^0_{u-1}-вычислимой нумерации α семейства $\mathcal{A}$ существует равномерно Σ^0_{u-1}-вычислимая последовательность его однозначных нумераций $\{\beta_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ такая, что $\alpha \leqslant \bigoplus_n \beta_n$.*

2) *Если $\mathcal{A}$ обладает двумя неэквивалентными Σ^0_{u-1}-вычислимыми нумерациями, то существует его Σ^0_{u-1}-вычислимая нумерация α такая, что $\alpha \nleqslant \bigoplus_{n\leqslant k} \beta_n$ для любой конечной последовательности $\beta_0, \ldots, \beta_k$ однозначных нумераций.*

Доказательство. 1) Для каждого n определим $\beta_n(0) = \alpha(n)$, обеспечивая тем самым сводимость $\alpha \leqslant \bigoplus_n \beta_n$. Поскольку множество $\overline{\alpha^{-1}(\alpha(n))}$ принадлежит классу Σ^0_{u-1} равномерно по n и бесконечно, эффективно по n определяется геделевский номер $\emptyset^{(u-2)}$-вычислимой функции h такой, что

$$\overline{\alpha^{-1}(\alpha(n))} = \mathrm{ran}\, h.$$

Стало быть, композиция $\alpha \circ h$ является равномерно по n $\emptyset^{(u-2)}$-негативной нумерацией бесконечного семейства $\mathcal{A} \setminus \{\alpha(n)\}$. Согласно [1] по Σ^0_{u-1}-индексу дополнения нумерационной эквивалентности любой $\emptyset^{(u-2)}$-негативной нумерации бесконечного множества можно эффективно определить геделевский номер $\emptyset^{(u-2)}$-вычислимой функции, сводящей (посредством $\emptyset^{(u-2)}$-вычислимой функции) к ней однозначную нумерацию того же множества. Пусть δ – однозначная нумерация, соответствующая таким образом нумерации $\alpha \circ h$. Определив для всех x

$$\beta_n(x+1) = \delta(x),$$

получим, что β_n является однозначной Σ^0_{u-1}-вычислимой нумерацией семейства $\mathcal{A}$.

2) Пусть сначала $u = 2$. Выберем двойные сильно вычислимые последовательности $\{f_{x,s}\}_{x,s\in\mathbb{N}}$ и $\{g_{x,s}\}_{x\in\mathbb{N}}$ конечных частичных функций такие, что для всех x, s имеет место $f_{x,s} \subseteq f_{x,s+1}$, $g_{x,s} \subseteq g_{x,s+1}$, частичные функции $f_x \leftrightharpoons \bigcup_t f_{x,t}$ и $g_x \leftrightharpoons \bigcup_t g_{x,t}$ всюду определены, а также отображение $\nu : y \mapsto f_y$ является нумерацией семейства $\mathcal{A}$, которая не сводится к его нумерации $\mu : y \mapsto g_y$. Определим его искомую нумерацию α. Для этого зафиксировав произвольный набор k, i, y, для всех m построим значения $\alpha(x_m)$, где

$$x_m = c(k, i, y, m).$$

Как будет установлено ниже, этим построением при подходящем y обеспечивается, что α не сводится ни к какой нумерации $\bigoplus\limits_{n\leqslant k} \beta_n$ посредством φ_i при условии, что каждая из нумераций β_n, $n \leqslant k$, является однозначной. Приведем конструкцию построения значений $\alpha(x_m)$ для всех m.

Шаг 0. Для всех m полагаем $\alpha_0(x_m) = \emptyset$. На всех последующих шагах s будем обеспечивать, чтобы $\alpha_s(x_m) \subseteq f_y$.

Шаг $s + 1$. Если существуют различные числа $n_0 \leqslant s$ и $n_1 \leqslant s$ такие, что

$$\varphi_{i,s}(x_{n_0}) = (k+1)a + r,$$
$$\varphi_{i,s}(x_{n_1}) = (k+1)b + r$$

для некоторых $r \leqslant k$ и a, b, то при условии $a \neq b$ для всех $t > s$ и всех m полагаем

$$\alpha_t(x_m) = f_y$$

и прерываем построение. Поскольку $\alpha(x_{n_0}) = \alpha(x_{n_1})$ и $\varphi_i(x_{n_0}) \neq \varphi_i(x_{n_1})$, получаем, что для каждого набора нумераций $\beta_0, \ldots, \beta_k$ либо β_r не однозначна, либо α не сводится к $\bigoplus\limits_{n\leqslant k} \beta_n$ посредством φ_i. Если же $a = b$, то выберем число z_y такое, что $f_{y,s} \subseteq g_{z_y,u}$ для некоторого u, и определим

$$\alpha_t(x_{n_1}) = g_{z_y},$$
$$\alpha_t(x_l) = f_y$$

для всех $t > s$ и всех l, отличных от n_1. После этого также прерываем построение. Если нужных n_0, n_1 не существует, то для всех m полагаем

$$\alpha_{s+1}(x_m) = f_{y,s}$$

и переходим к следующему шагу.

В конце построения для всех m полагаем $\alpha(x_m) = \bigcup_s \alpha_s(x_m)$. Выберем произвольный набор однозначных нумераций $\beta_0, \ldots, \beta_k$ и число i, для которого φ_i всюду определена. Докажем, что α не сводится к $\bigoplus\limits_{n \leqslant k} \beta_n$ посредством φ_i методом от противного. Если $\alpha = \left(\bigoplus\limits_{n \leqslant k} \beta_n\right) \circ \varphi_i$, то согласно построению для каждого y найдутся такие n_0 и n_1, что

$$\nu(y) = f_y = \alpha(n_0) = \alpha(n_1) = g_{z_y} = \mu(z_y).$$

Отсюда следует $\nu \leqslant \mu$. Таким образом, приходим к противоречию с выбором этих нумераций.

Пусть теперь $u > 2$. Выберем произвольную однозначную Σ^0_{u-1}-вычислимую нумерацию β семейства $\mathcal{A}$. Зафиксируем произвольные k и i. Если существуют различные числа n_0 и n_1, удовлетворяющие для некоторых $r \leqslant k$ и a, b условиям

$$\varphi_i(c(k,i,n_0)) = (k+1)a + r,$$
$$\varphi_i(c(k,i,n_0)) = (k+1)b + r,$$

то выберем подходящие n_0, n_1 и при условии $a \neq b$ для всех m определим

$$\alpha(c(k,i,m)) = \beta(c(k,i)).$$

Таким образом,

$$\varphi_i(c(k,i,n_0)) \neq \varphi_i(c(k,i,n_0)),$$

но

$$\alpha(c(k,i,n_0)) = \alpha(c(k,i,n_1)).$$

Отсюда следует, что α не сводится посредством φ_i ни к какой прямой сумме $\bigoplus\limits_{n \leqslant k} \beta_n$ однозначных нумераций $\beta_0, \ldots, \beta_k$. Если же $a = b$, то положим

$$\alpha(c(k,i,n_0)) = \beta(c(k,i)),$$
$$\alpha(c(k,i,m)) = \beta(c(k,i) + 1)$$

для всех $m \neq n_0$. Таким образом,

$$\varphi_i(c(k,i,n_0)) = \varphi_i(c(k,i,n_0)),$$

но

$$\alpha(c(k,i,n_0)) \neq \alpha(c(k,i,n_1)).$$

Стало быть, и в этом случае α не сводится посредством φ_i ни к какой прямой сумме $\bigoplus\limits_{n\leqslant k}\beta_n$ нумераций $\beta_0,\ldots,\beta_k$. $\square$

3. Минимальные нумерации

В [11] было установлено, что класс минимальных Σ^0_u-вычислимых нумераций любого бесконечного Σ^0_u-вычислимого семейства эффективно бесконечен. Согласно следующей теореме при некоторых дополнительных ограничениях бесконечные прямые суммы равномерно Σ^0_u-вычислимых и равномерно Σ^0_u-минимальных последовательностей его нумераций порождают все Σ^0_u-вычислимые нумерации семейства.

Теорема 3. *Пусть $\mathcal{F}$ – бесконечное Σ^0_u-вычислимое семейство Σ^0_u-множеств.*

1) *Если $u>2$, то для любой Σ^0_u-вычислимой нумерации ξ семейства $\mathcal{F}$ существует равномерно Σ^0_u-вычислимая и равномерно Σ^0_u-минимальная последовательность $\{\upsilon_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ его нумераций такая, что $\xi\leqslant\bigoplus\limits_n\upsilon_n$.*
2) *Существует Σ^0_u-вычислимая нумерация ξ семейства $\mathcal{F}$ такая, что $\xi\not\leqslant\bigoplus\limits_{n\leqslant k}\upsilon_n$ для любой конечной последовательности $\upsilon_0,\ldots,\upsilon_k$ его минимальных Σ^0_u-вычислимых нумераций.*

Доказательство. 1) Зафиксируем произвольно низкое ($C'\leqslant_T\emptyset'$) невычислимое в. п. множество C. Поскольку C в. п. и невычислимо, согласно [19, лемма 3.3] (см. также [20]) существует позитивная эквивалентность $E\leqslant_T C$ на $\mathbb{N}$ такая, что для любой ч. в. функции φ с бесконечной областью значений разность

$$\mathbb{N}_{/E}\setminus\{[\varphi(y)]_E:\varphi(y)\downarrow,\ y\in\mathbb{N}\}, \tag{3}$$

где через $[x]_E$ обозначается класс E-эквивалентности произвольного элемента x, конечна.

Для каждого m определим минимальную нумерацию υ_m семейства $\mathcal{F}$ так, чтобы последовательность $\{\upsilon_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ удовлетворяла заключению п. 1) теоремы. Пусть $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ – строго возрастающая последовательность такая, что

$$\mathbb{N}_{/E}=\{[x_n]_E:n\in\mathbb{N}\},$$
$$\forall n\,[x_n=\min\,[x_n]_E].$$

Поскольку $E\leqslant_T C$, эта последовательность является C-вычислимой. Для всех $x\in[x_0]_E$ определим $\upsilon_{m,0}(x)=\xi(m)$. Предположим по индукции, что для некоторого s частичное отображение $\upsilon_{m,s}$ определено и существует такое k, что

$$\operatorname{dom}\upsilon_{m,s} = \bigcup_{n\leqslant k}[x_n]_E. \tag{4}$$

Используя оракул $\emptyset''$, проверим, является ли $\operatorname{ran}\varphi_s$ бесконечной. Если она бесконечна, то выберем наименьшее $l > k$ такое, что

$$\forall p \geqslant l \exists y\, [\varphi_s(y) \downarrow\in [x_p]_E]. \tag{5}$$

Такое l существует в силу конечности разности (3) при $\varphi = \varphi_s$. Поскольку $E \leqslant_T C$ и C низкое, отношение (5) принадлежит классу

$$\Pi^0_2(C) = \Pi^0_1(C') = \Pi^0_1(\emptyset') = \Pi^0_2$$

равномерно по l и s. Значит, такое l также находится с использованием оракула $\emptyset''$. Определим

$$\upsilon_{m,s+1}(x) = \begin{cases} \upsilon_{m,s}(x), & \text{если } x \in \bigcup\limits_{n\leqslant k}[x_n]_E;\\ \xi(0), & \text{если } x \in \bigcup\limits_{n=k+1}^{l-1}[x_n]_E;\\ \upsilon_{m,s+1}(x_n), & \text{если } n < l \,\&\, x \in [x_{l+n}]_E;\\ \xi(s), & \text{если } x \in [x_{2l}]_E. \end{cases}$$

Если $\operatorname{ran}\varphi_s$ конечна, то полагаем

$$\upsilon_{m,s+1}(x) = \begin{cases} \upsilon_{m,s}(x), & \text{если } x \in \bigcup\limits_{n\leqslant k}[x_n]_E;\\ \xi(s), & \text{если } x \in [x_{k+1}]_E. \end{cases}$$

Поскольку для всех m и s имеет место $\upsilon_{m,s} \subseteq \upsilon_{m,s+1}$ и $\upsilon_m \leftrightharpoons \bigcup_t \upsilon_{m,t}$ является нумерацией $\mathcal{F}$, в которой $\upsilon_m(0) = \xi(m)$, получаем $\xi \leqslant \bigoplus\limits_n \upsilon_n$. Кроме того, по своему определению последовательность $\{\upsilon_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ равномерно Σ^0_u-вычислима. Отметим также, что для всех $\langle u, v\rangle \in E$ выполняется $\upsilon_m(u) = \upsilon_m(v)$.

Покажем, что $\{\upsilon_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ равномерно Σ^0_u-минимальна. Для этого определим такую бинарную функцию $f \leqslant_T \emptyset''$, что если для всех m и s φ_e всюду определена и $\upsilon_m \circ \varphi_s$ является нумерацией семейства $\mathcal{F}$, то $\upsilon_m \leqslant \upsilon_m \circ \varphi_s$ посредством $\varphi_{f(m,s)}$. Если $\operatorname{ran}\varphi_s$ конечна (что проверяется эффективно по s с помощью $\emptyset''$), то $\upsilon_m \circ \varphi_s$ не является нумерацией семейства $\mathcal{F}$, поэтому можем определить $f(m,s) = 0$. В противном случае определим вычислимую функцию g, сводящую υ_m к $\upsilon_m \circ \varphi_s$, а затем положим значение $f(m,s)$ равным ее геделевскому номеру (который определяется по программе вычисления g). Зафиксируем k и наименьшее $l > k$, удовлетворяющие для выбранного s условиям (4) и (5) соответственно, а также элементы $x_0, \ldots, x_{2l-1}$. Для каждого x, эффективно перечисляя E, выберем y, удовлетворяющее одному из условий:

- $x \in [x_n]_E$ для некоторого $n < l$ и $\varphi_s(y) \in [x_{l+n}]_E$,
- $\langle x, \varphi_s(y) \rangle \in E$.

В силу бесконечности $\operatorname{ran} \varphi_s$ и выбора E такое y существует. Определим $g(x) = y$. Поскольку $\upsilon_m(u) = \upsilon_m(v)$ для всех $\langle u, v \rangle \in E$, имеет место сводимость $\upsilon_m \leqslant \upsilon_m \circ \varphi_s$ посредством g. По определению g ее геделевский номер указывается эффективно по элементам $x_0, \ldots, x_{2l-1}$. Стало быть, значение $f(m, s)$ определяется эффективно с использованием оракула $\emptyset''$.

2) Пусть ν – Σ^0_u-вычислимая нумерация семейства $\mathcal{F}$, которая не является минимальной. Определим Σ^0_u-вычислимую нумерацию ξ семейства $\mathcal{F}$ таким образом, чтобы для всех k, $r \leqslant k$ и e таких, что φ_e всюду определена, ξ сводится посредством φ_e к произвольной нумерации вида $\bigoplus\limits_{n \leqslant k} \upsilon_n$ и множество

$$S^r_{k,e} \leftrightharpoons \{m : \exists a\, [\varphi_e(c(k, e, m)) = (k+1)a + r]\}$$

бесконечно, выполнялась сводимость $\nu \leqslant \upsilon_r$ (в частности, υ_r не минимальна).

Зафиксируем произвольные числа k, e и для всех m определим значения $\xi(x_m)$, где $x_m = c(k, e, m)$. Выберем произвольно m и предположим по индукции, что для каждого $l < m$ значение $\xi(x_l)$ определено. Если

$$\varphi_e(x_m) \downarrow = (k+1)a + r$$

для некоторых $r \leqslant k$ и a, то полагаем $\xi(x_m) = \nu(z)$, где z – число элементов множества

$$\{l < m : \exists b\, [\varphi_e(x_l) \downarrow = (k+1)b + r]\}.$$

Таким образом, если φ_e всюду определена и сводит ξ к произвольной нумерации вида $\bigoplus\limits_{n \leqslant k} \upsilon_n$, то для некоторого $r \leqslant k$ множество $S^r_{k,e}$ бесконечно. По определению ξ имеем $\nu \leqslant \upsilon_r$. Следовательно, υ_r не минимальна. □

Остается нерешенным вопрос о справедливости п. 1) теоремы 3 для Σ^0_2-вычислимых семейств и для вычислимых классов семейств, естественным образом их обобщающих (см. [21]).

Список литературы

[1] Ю.Л. Ершов, *Теория нумераций*, Наука, М., 1977.

[2] Yu.L. Ershov, *Theory of numberings*, in: E.R. Griffor (ed.), Handbook of computability theory (Stud. Logic Found. Math., 140), Amsterdam, Elsevier, 1999, 473–503. DOI: https://doi.org/10.1016/S0049-237X(99)80030-5

[3] Ю.Л. Ершов, *Определимость и вычислимость* (Сибирская школа алгебры и логики), Новосибирск, Науч. кн., М., Экономика, 2-е изд., испр. и доп., 2000.

[4] С.С. Гончаров, А. Сорби, *Обобщенно-вычислимые нумерации и нетривиальные полурешетки Роджерса*, Алгебра и логика **36** (6), 621–641 (1997).
URL: http://mi.mathnet.ru/al2412

[5] С.А. Бадаев, С.С. Гончаров, *О полурешетках Роджерса семейств арифметических множеств*, Алгебра и логика **40** (5), 507–522 (2001).
URL: http://mi.mathnet.ru/al233

[6] С.Ю. Подзоров, *О локальном строении полурешёток Роджерса Σ^0_n-вычислимых нумераций*, Алгебра и логика **44** (2), 148–172 (2005).
URL: http://mi.mathnet.ru/al99

[7] С.А. Бадаев, С.С. Гончаров, А. Сорби, *Типы изоморфизмов полурешёток Роджерса семейств из различных уровней арифметической иерархии*, Алгебра и логика **45** (6), 637–654 (2006).
URL: http://www.mathnet.ru/rus/al163

[8] S.A. Badaev, S.S. Goncharov, *Computability and numberings*, in: S. B. Cooper (ed.) et al., New computational paradigms. Changing conceptions of what is computable, New York, Springer-Verlag, 19–34 (2008).
DOI: https://doi.org/10.1007/978-0-387-68546-5_2

[9] М.Х. Файзрахманов, *О теореме Хуторецкого для обобщённо вычислимых семейств*, Алгебра и логика **58** (4), 528–541 (2019).
DOI: https://doi.org/10.33048/alglog.2019.58.408

[10] С.А. Бадаев, *Минимальные нумерации*, Тр. Ин-та математики СО РАН **25**, 3–34 (1993).
URL: https://www.mathnet.ru/rus/mt425

[11] М.Х. Файзрахманов, *Минимальные обобщенно вычислимые нумерации и высокие степени*, Сиб. матем. журн. **58** (3), 710–716 (2017).
DOI: https://doi.org/10.17377/smzh.2017.58.318

[12] С.А. Бадаев, *Об одной проблеме С.С. Гончарова*, Сиб. матем. журн. **32** (3), 212–214 (1991).
URL: https://www.mathnet.ru/rus/smj3338

[13] S.S. Goncharov, A. Yakhnis, V. Yakhnis, *Some effectively infinite classes of enumerations*, Ann. Pure App. Log. **60** (3), 207–235 (1993).
DOI: https://doi.org/10.1016/0168-0072(93)90076-P

[14] B. Schinzel, *On decomposition of Gödelnumberings into Friedbergnumberings*, J. Symb. Log. **47** (2), 267–274 (1982).
DOI: https://doi.org/10.2307/2273141

[15] B. Schinzel, *Complexity of decompositions of Gödel numberings*, Fundam. Inform. **5** (1), 15–33 (1982).
DOI: https://doi.org/10.3233/FI-1982-5103

[16] R.I. Soare, *Recursively enumerable sets and degrees. A study of computable functions and computably generated sets*, Perspectives in mathematical logic. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, etc., 1987
URL: https://link.springer.com/book/9783540666813

[17] J. Myhill, *Creative sets*, Z. Math. Logik und Grundlag. Math. **1** (2), 97–108 (1955).
DOI: https://doi.org/10.1002/malq.19550010205

[18] M.Kh. Faizrahmanov, Z. K. Shchedrikova, *Effectively infinite classes of numberings and computable families of feals*, Computability **12** (4), 339–350 (2023).
DOI: https://doi.org/10.3233/COM-230461

[19] M.Kh. Faizrahmanov, *Extremal numberings and fixed point theorems*, Math. Log. Q. **68** (4), 398–408 (2022).
DOI: https://doi.org/10.1002/malq.202200035

[20] M. Faizrahmanov, *Fixed point theorems for minimal numberings*, J. Log. Comput. (2023)
DOI: https://doi.org/10.1093/logcom/exad074

[21] M. Faizrahmanov, I. Kalimullin, *The enumeration spectrum hierarchy of n-families*, Math. Log. Quart. **64** (4–5), 420–426 (2016).
DOI: https://doi.org/10.1002/malq.201500056

Шохрух Дилмуродович Нодиров
Каршинский государственный университет,
ул. Кучабаг, д. 17, г. Карши, 180119, Республика Узбекистан,
E-mail: shoh0809@mail.ru

Марат Хайдарович Файзрахманов
Казанский (Приволжский) федеральный университет,
Научно-образовательный математический центр ПФО,
ул. Кремлевская, д. 18, г. Казань, 420008, Россия
E-mail: marat.faizrahmanov@gmail.com

Volume 2, Issue 1
pp. 94–108 (2024)

UDC 510.54, 510.57
MSC 03D45, 03D30

Some properties of classes of minimal numberings of arithmetical set families

Sh.D. Nodirov, M.Kh. Faizrahmanov

Abstract. We prove that for each $u \geqslant 2$ the class of all single-valued Σ^0_u-computable numberings of any infinite family of total functions is effectively infinite and the class of all its Σ^0_{u-1}-computable numberings is generated by the downward closure with respect to the reducibility of the set of all infinite direct sums of uniformly Σ^0_{u-1}-computable sequences of its single-valued numberings. It is established that if $u > 2$, then the class of all Σ^0_u-computable numberings of any infinite family is generated by infinite direct sums of uniformly Σ^0_u-computable and uniformly Σ^0_u-minimal sequences of its numberings.

Keywords: computable numbering, single-valued numbering, minimal numbering.

DOI: 10.26907/2949-3919.2024.1.94-108

References

[1] Yu.L. Ershov, *Theory of numberings*, Nauka, M., 1977 [in Russian].

[2] Yu.L. Ershov, *Theory of numberings*, in: E.R. Griffor (ed.), Handbook of computability theory (Stud. Logic Found. Math., 140), Amsterdam, Elsevier, 1999, 473–503.
DOI: https://doi.org/10.1016/S0049-237X(99)80030-5

[3] Yu.L. Ershov, *Definability and computability* (Siberian School of Algebra and Logic), Novosibirsk, Nauch. Kniga, M., Ekonomika, 2nd ed., 2000 [in Russian].

[4] S.S. Goncharov, A. Sorbi, *Generalized computable numerations and nontrivial Rogers semilattices*, Algebra Logic **36** (6), 359–369 (1997).
DOI: https://doi.org/10.1007/BF02671553

[5] S.A. Badaev, S.S. Goncharov, *Rogers semilattices of families of arithmetic sets*, Algebra Logic **40** (5), 283–291 (2001).
DOI: https://doi.org/10.1023/A:1012516217265

[6] S.Yu. Podzorov, *Local structure of Rogers semilattices of Σ^0_n-computable numberings*, Algebra Logic **44** (2), 82–94 (2005).
DOI: https://doi.org/10.1007/s10469-005-0010-3

Acknowledgements. The work performed under the development program of Volga Region Mathematical Center (agreement no. 075-02-2023-944). The work of the second author is supported by the Russian Science Foundation (grant no. 22-21-20024).

Received: 30 November 2023. Accepted: 16 January 2024. Published: 11 April 2024.

[7] S.A. Badaev, S.S. Goncharov, A. Sorbi, *Isomorphism types of Rogers semilattices for families from different levels of the arithmetical hierarchy*, Algebra Logic **45** (6), 361–370 (2006).
DOI: https://doi.org/10.1007/s10469-006-0034-3

[8] S.A. Badaev, S.S. Goncharov, *Computability and numberings*, in: S. B. Cooper (ed.) et al., New computational paradigms. Changing conceptions of what is computable, New York, Springer-Verlag, 19–34 (2008).
DOI: https://doi.org/10.1007/978-0-387-68546-5_2

[9] M.Kh. Faizrakhmanov, *Khutoretskii's theorem for generalized computable families*, Algebra Logic **58** (4), 356–365 (2019).
DOI: https://doi.org/10.1007/s10469-019-09557-9

[10] S.A. Badaev, *Minimal enumerations*, Trudy Inst. Mat. SO RAN **25**, 3–34 (1993) [in Russian].
URL: https://www.mathnet.ru/eng/mt425

[11] M.Kh. Faizrahmanov, *Minimal generalized computable enumerations and high degrees*, Sib. Math. J. **58** (3), 553–558 (2017).
DOI: https://doi.org/10.1134/S0037446617030181

[12] S.A. Badaev, *A problem of S. S. Goncharov*, Sib. Math. J. **32** (3), 532–534 (1991).
DOI: https://doi.org/10.1007/BF00970493

[13] S.S. Goncharov, A. Yakhnis, V. Yakhnis, *Some effectively infinite classes of enumerations*, Ann. Pure App. Log. **60** (3), 207–235 (1993).
DOI: https://doi.org/10.1016/0168-0072(93)90076-P

[14] B. Schinzel, *On decomposition of Gödelnumberings into Friedbergnumberings*, J. Symb. Log. **47** (2), 267–274 (1982).
DOI: https://doi.org/10.2307/2273141

[15] B. Schinzel, *Complexity of decompositions of Gödel numberings*, Fundam. Inform. **5** (1), 15–33 (1982).
DOI: https://doi.org/10.3233/FI-1982-5103

[16] R.I. Soare, *Recursively enumerable sets and degrees. A study of computable functions and computably generated sets*, Perspectives in mathematical logic. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, etc., 1987
URL: https://link.springer.com/book/9783540666813

[17] J. Myhill, *Creative sets*, Z. Math. Logik und Grundlag. Math. **1** (2), 97–108 (1955).
DOI: https://doi.org/10.1002/malq.19550010205

[18] M.Kh. Faizrahmanov, Z. K. Shchedrikova, *Effectively infinite classes of numberings and computable families of feals*, Computability **12** (4), 339–350 (2023).
DOI: https://doi.org/10.3233/COM-230461

[19] M.Kh. Faizrahmanov, *Extremal numberings and fixed point theorems*, Math. Log. Q. **68** (4), 398–408 (2022).
DOI: https://doi.org/10.1002/malq.202200035

[20] M. Faizrahmanov, *Fixed point theorems for minimal numberings*, J. Log. Comput. (2023)
DOI: https://doi.org/10.1093/logcom/exad074

[21] M. Faizrahmanov, I. Kalimullin, *The enumeration spectrum hierarchy of n-families*, Math. Log. Quart. **64** (4–5), 420–426 (2016).
DOI: https://doi.org/10.1002/malq.201500056

Shohruh Dilmurodovich Nodirov
Karshi State University,
17 Kuchabag str., Karshi 180119, Republic of Uzbekistan,
E-mail: shoh0809@mail.ru

Marat Khaidarovich Faizrahmanov
Kazan Federal University,
Volga Region Mathematical Center,
18 Kremlyovskaya str., Kazan 420008, Russia,
E-mail: marat.faizrahmanov@gmail.com