

О функциональном пространстве со смешанной обобщенной логарифмической гладкостью

Г. Акишев

Аннотация. Рассматриваются анизотропное пространство Лоренца, 2π -периодических функций m переменных и пространство Никольского–Бесова – функций со смешанной обобщенной логарифмической гладкостью. Доказаны теоремы вложения для пространств функций со смешанной обобщенной логарифмической гладкостью.

Ключевые слова: пространство Лоренца, класс Никольского–Бесова, обобщенная гладкость.

DOI: 10.26907/2949-3919.2024.2.4-29

Введение

Пусть $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{R}$ – множества натуральных, целых, вещественных чисел соответственно и $\mathbb{Z}_+ = \mathbb{N} \cup \{0\}$, $\mathbb{R}^m$ – m -мерное евклидово пространство точек $\bar{x} = (x_1, \dots, x_m)$ с вещественными координатами; $I^m = [0, 1]^m$ – m -мерный единичный куб, $\mathbb{T}^m = [0, 2\pi]^m$.

Напомним определения невозрастающей перестановки функции.

Определение 1. Пусть f – измеримая по Лебегу функция одной переменной на $[0, 1]$. Функция распределения для $|f|$ определяется как мера Лебега (см., например, [1, гл. 2, разд. 2]) $\mu_f(y) := \mu\{x \in [0, 1] : |f(x)| > y\}$, $0 \leq y < \infty$.

Две неотрицательные измеримые функции f и g называются равноизмеримыми, если их функции распределения совпадают. Невозрастающей перестановкой функции f одной переменной называется невозрастающая на $[0, 1]$ функция $f^*(t)$ равноизмеримая с функцией $|f(x)|$. Она определяется по формуле

$$f^*(t) := \inf\{y > 0 : \mu_f(y) \leq t\}, \quad t \in [0, 1].$$

Теперь напомним определение невозрастающей перестановки функции m переменных.

Благодарности. Работа выполнена в рамках грантового финансирования Комитета науки Министерства науки и высшего образования РК (проект AP19677486).

Определение 2 (см. [2, 3]). Пусть $f(x_1, \dots, x_m)$ – измеримая по Лебегу функция m переменных на $I^m = [0, 1]^m$. Невозрастающей перестановкой функции $|f(x_1, \dots, x_m)|$, по первой переменной понимается функция $f^{*1}(t_1, x_2, \dots, x_m)$, равноизмеримая на I^m , невозрастающая по t_1 и такая, что функции $|f(x_1, \dots, x_m)|$ и $f^{*1}(t_1, x_2, \dots, x_m)$ равноизмеримы как функции одной переменной для почти всех фиксированных $x_2, \dots, x_m$.

Аналогичным образом, рассматривая невозрастающую перестановку функции $f^{*1}(t_1, x_2, \dots, x_m)$ по переменной x_2 , при фиксированных $t_1, x_3, \dots, x_m$ определяется функция $f^{*1*2}(t_1, t_2, x_3, \dots, x_m)$ равноизмеримая с функцией $f(x_1, \dots, x_m)$. Продолжая этот процесс определяется невозрастающая перестановка $f^{*1*2\dots*m}(t_1, t_2, \dots, t_m)$ равноизмеримая с функцией $|f(x_1, \dots, x_m)|$.

Пусть $\bar{q} = (q_1, \dots, q_m)$, $\bar{\tau} = (\tau_1, \dots, \tau_m)$, $1 < q_j < \infty$, $1 \leq \tau_j < \infty$, $j = 1, \dots, m$. Через $L_{\bar{q}, \bar{\tau}}^*(\mathbb{T}^m)$ обозначим анизотропное пространство Лоренца всех измеримых по Лебегу функций $f(\bar{x})$ определенных на $\mathbb{R}^m$, имеющих 2π -период по каждой переменной и для которых величина

$$\|f\|_{\bar{q}, \bar{\tau}}^* = \left[\int_0^1 t_m^{\frac{\tau_m}{q_m} - 1} \left[\dots \left[\int_0^1 \left(f^{*1, \dots, *m}(t_1, \dots, t_m) \right)^{\tau_1} t_1^{\frac{\tau_1}{q_1} - 1} dt_1 \right]^{\frac{\tau_2}{\tau_1}} \dots \right]^{\frac{\tau_m}{\tau_{m-1}}} dt_m \right]^{\frac{1}{\tau_m}}$$

конечна, где $f^{*1, \dots, *m}(t_1, \dots, t_m)$ – невозрастающая перестановка функции $|f(2\pi\bar{x})|$ по каждой переменной $x_j \in [0, 1)$, при фиксированных остальных переменных (см. [2, 4]).

В случае $q_1 = \dots = q_m = \tau_1 = \dots = \tau_m = q$ пространство Лоренца $L_{\bar{q}, \bar{\tau}}^*(\mathbb{T}^m)$ совпадает с пространством Лебега $L_q(\mathbb{T}^m)$ с нормой (см. [5, гл. I, п. 1.1])

$$\|f\|_q = \left[\int_0^{2\pi} \dots \int_0^{2\pi} |f(x_1, \dots, x_m)|^q dx_1 \dots dx_m \right]^{\frac{1}{q}}, \quad 1 < q < \infty.$$

Пусть $\mathring{L}_{\bar{q}, \bar{\tau}}^*(\mathbb{T}^m)$ – множество всех функций $f \in L_{\bar{q}, \bar{\tau}}^*(\mathbb{T}^m)$ таких, что

$$\int_0^{2\pi} f(\bar{x}) dx_j = 0, \quad \forall j = 1, \dots, m.$$

Каждой функции $f \in \mathring{L}_1(\mathbb{T}^m) = \mathring{L}(\mathbb{T}^m)$ сопоставим ее ряд Фурье (см. [6])

$$\sum_{\substack{\bar{n} \in \mathbb{Z}^m \\ \prod_{j=1}^m n_j \neq 0}} a_{\bar{n}}(f) e^{i\langle \bar{n}, \bar{x} \rangle},$$

по кратной тригонометрической системе $\{e^{i\langle \bar{n}, \bar{x} \rangle}\}_{\bar{n} \in \mathbb{Z}^m}$, где $\mathbb{Z}^m$ – множество точек из $\mathbb{R}^m$ с

целочисленными координатами. Положим

$$\delta_{\bar{s}}(f, \bar{x}) = \sum_{\bar{n} \in \rho(\bar{s})} a_{\bar{n}}(f) e^{i\langle \bar{n}, \bar{x} \rangle},$$

где $\langle \bar{y}, \bar{x} \rangle = \sum_{j=1}^m y_j x_j$, $s_j = 1, 2, \dots$,

$$\rho(\bar{s}) = \{ \bar{k} = (k_1, \dots, k_m) \in \mathbb{Z}^m : 2^{s_j-1} \leq |k_j| < 2^{s_j}, j = 1, \dots, m \}.$$

Величина (см. [7, 8]) $Y_{l_1, \dots, l_m}(f)_p = \inf_{T_{l_j}} \|f - \sum_{j=1}^m T_{l_j}\|_p$, $l_j = 0, 1, 2, \dots$ называется наилучшим приближением “углом” функции $f \in L_p(\mathbb{T}^m)$ тригонометрическими полиномами, где $T_{l_j} \in L_p(\mathbb{T}^m)$ – тригонометрический полином порядка l_j по переменной x_j , $j = 1, \dots, m$.

Определение 3. Пусть $k \in \mathbb{N}$ и $\bar{h} = (h_1, \dots, h_m) \in \mathbb{R}^m$. Для функции $f \in L_1(\mathbb{T}^m)$ полная разность порядка k определяется по формуле

$$\Delta_{\bar{h}}^k f(\bar{x}) := \sum_{l=0}^k (-1)^{k-l} C_k^l f(\bar{x} + l\bar{h}), \quad C_k^l = \frac{k!}{l!(k-l)!}.$$

Определение 4. Полным модулем гладкости порядка k функции $f \in L_p(\mathbb{T}^m)$ называется величина (см. [5, гл. 4, п. 4.2])

$$\omega_k(f, t)_p = \sup_{\|\bar{h}\| \leq t} \|\Delta_{\bar{h}}^k f\|_p, \quad \|\bar{h}\| = \left(\sum_{j=1}^m h_j^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Определение 5. Смешанный модуль гладкости функции $f \in L_p(\mathbb{T}^m)$ определяется по формуле (см., например, [5, 7, 8])

$$\omega_{\bar{k}}(f, \bar{t})_p = \omega_{k_1, \dots, k_m}(f, t_1, \dots, t_m)_p = \sup_{|h_1| \leq t_1, \dots, |h_m| \leq t_m} \|\Delta_{\bar{h}}^{\bar{k}}(f)\|_p,$$

где $\Delta_{\bar{t}}^{\bar{k}} f(\bar{x}) = \Delta_{t_m}^{k_m}(\dots \Delta_{t_1}^{k_1} f(\bar{x}))$ – смешанная разность порядка $\bar{k}$ с шагом $\bar{t} = (t_1, \dots, t_m)$.

0.1. ПРОСТРАНСТВО БЕСОВА ([9, 10], [5, гл. 4, разд. 4.3]). Пусть $k \in \mathbb{N}$ и $k > r > 0$, $1 \leq \theta \leq \infty$. Пространством Бесова $\mathbf{B}_{p, \theta}^r(\mathbb{T}^m)$ называется множество всех функций $f \in L_p(\mathbb{T}^m)$, $1 \leq p < \infty$, для которых

$$\|f\|_{\mathbf{B}_{p, \theta}^r} := \|f\|_p + \left(\int_0^1 (t^{-r} \omega_k(f, t)_p)^\theta \frac{dt}{t} \right)^{\frac{1}{\theta}} < \infty,$$

при $1 \leq \theta < \infty$ и

$$\|f\|_{\mathbf{B}_{p, \infty}^r} := \|f\|_p + \sup_{0 < t \leq 1} t^{-r} \omega_k(f, t)_p < \infty, \quad \text{для } \theta = \infty.$$

В настоящее время имеются различные обобщения пространства Никольского–Бесова (см., например, [11–14] и библиографию в них). В статьях [11, 12] определено следующее обобщение пространства Бесова $\mathbf{B}_{p,\theta}^{r,b}(\mathbb{T}^m)$ – множество всех функций $f \in L_p(\mathbb{T}^m)$, $1 \leq p < \infty$, для которых

$$\|f\|_{\mathbf{B}_{p,\theta}^{r,b}} := \|f\|_p + \left(\int_0^1 (t^{-r}(1 - \log t)^b \omega_k(f, t)_p)^\theta \frac{dt}{t} \right)^{\frac{1}{\theta}} < \infty,$$

при $0 < \theta \leq \infty$, $b > -1/\theta$, $k \in \mathbb{N}$, $k > r > 0$.

Эквивалентные нормы пространства $\mathbf{B}_{p,\theta}^{0,b}(\mathbb{T}^m)$ найдены в статьях [11, 12]. В работах [12, 13] определено пространство $B_{p,\theta}^{0,b}(\mathbb{T}^m)$, как множество функций $f \in \dot{L}_p(\mathbb{T}^m)$, для которых

$$\left\{ \sum_{s \in \mathbb{Z}_+} (s+1)^{b\theta} \|\sigma_s(f)\|_p^\theta \right\}^{\frac{1}{\theta}} < \infty,$$

при $1 < p < \infty$, $b > -1/\theta$, $0 < \theta \leq \infty$. Здесь и далее при $\theta = \infty$, для $d_{\bar{s}} \in \mathbb{R}$ величина

$$\left\{ \sum_{\bar{s} \in \mathbb{Z}_+^m} |d_{\bar{s}}|^\theta \right\}^{\frac{1}{\theta}},$$

понимается как $\sup_{\bar{s} \in \mathbb{Z}_+^m} |d_{\bar{s}}|$.

Соотношения между пространствами $B_{p,\theta}^{0,b}(\mathbb{T}^m)$ и $\mathbf{B}_{p,\theta}^{0,b}(\mathbb{T}^m)$ исследованы в [12, 13], в частности, показано, что эти пространства не совпадают.

0.2. ПРОСТРАНСТВО С ДОМИНИРУЮЩИМ СМЕШАННЫМ МОДУЛЕМ ГЛАДКОСТИ.

$S_p^{\bar{r}}H$, $S_{p,\theta}^{\bar{r}}B$ – пространства функций с доминирующей смешанной производной соответственно определены С.М. Никольским [15] и Т.И. Амановым ([16, гл. I, п.17]). П.И. Лизоркиным и С.М. Никольским [6] исследовано декомпозиционное разложение элементов пространства $S_{p,\theta}^{\bar{r}}B$. Приведем его определение.

Пусть $\bar{r} = (r_1, \dots, r_m)$, $r_j > 0$, $j = 1, \dots, m$, $1 \leq p < \infty$, $1 \leq \theta \leq +\infty$. Пространство $S_{p,\theta}^{\bar{r}}B$ состоит из всех функций $f \in \dot{L}_p(\mathbb{T}^m)$ для которых

$$\|f\|_{S_{p,\theta}^{\bar{r}}B} = \|f\|_p + \left[\int_0^1 \dots \int_0^1 \omega_{\bar{k}}^\theta(f, \bar{t})_p \prod_{j=1}^m \frac{dt_j}{t_j^{1+\theta r_j}} \right]^{\frac{1}{\theta}} < +\infty.$$

М.К. Потаповым [7, 8] определено и исследовано обобщение пространств $S_p^{\bar{r}}H$, $S_{p,\theta}^{\bar{r}}B$, с заменой функции t^{r_j} , $j = 1, \dots, m$, на более общие функции, удовлетворяющие некоторым условиям.

Определение 6 (см., например, [17]). Функция $\varphi(t)$ называется почти возрастающей на $[1, \infty)$, если существует такое постоянное число C , что $\varphi(t_1) \leq C\varphi(t_2)$ для $1 \leq t_1 < t_2 < \infty$.

Функция $\varphi(t)$ называется почти убывающей на $[1, \infty)$, если существует такое постоянное число C , что $\varphi(t_1) \geq C\varphi(t_2)$ для $1 \leq t_1 < t_2 < \infty$.

Определение 7 (см., например, [18, гл. 3, подраздел 3.4.3]). Положительная и измеримая по Лебегу функция $b(t)$ называется слабо меняющейся на $[1, \infty)$ в смысле Караматы, если для любого $\varepsilon > 0$ функция $t^\varepsilon b(t)$ почти возрастает на $[1, \infty)$ и функция $t^{-\varepsilon} b(t)$ почти убывает на $[1, \infty)$. Множество таких функций обозначается $SV[1, \infty)$.

Рассмотрим следующее пространство функций со смешанной обобщенной логарифмической гладкостью.

Определение 8. Пусть $1 \leq p < \infty$, $0 < \theta \leq \infty$, $b_j \in SV[1, \infty)$, $j = 1, \dots, m$. Через $S_{p,\theta}^{0,\bar{b}(\cdot)} \mathbf{B}$ обозначим пространство всех функций $f \in \mathring{L}_p(\mathbb{T}^m)$ для которых

$$\|f\|_{S_{p,\theta}^{0,\bar{b}(\cdot)} \mathbf{B}} = \|f\|_p + \left[\int_0^1 \dots \int_0^1 \omega_k^\theta(f, \bar{t})_p \prod_{j=1}^m \frac{b_j^\theta\left(\frac{1}{t_j}\right)}{t_j} dt_1 \dots dt_m \right]^{\frac{1}{\theta}} < +\infty,$$

где $\bar{b}(t) = (b_1(t), \dots, b_m(t))$, $\bar{k} = (k_1, \dots, k_m)$, $k_j \in \mathbb{N}$, $j = 1, \dots, m$.

Также рассмотрим следующий класс $S_{p,\theta}^{0,\bar{b}(\cdot)} B$, состоящий из всех функций $f \in \mathring{L}_p(\mathbb{T}^m)$ для которых

$$\|f\|_{S_{p,\theta}^{0,\bar{b}(\cdot)} B} = \left\{ \sum_{\bar{s} \in \mathbb{Z}_+^m} \prod_{j=1}^m b_j^\theta(2^{s_j}) \|\delta_{\bar{s}}(f)\|_p^\theta \right\}^{\frac{1}{\theta}} < \infty,$$

при $1 < p < +\infty$, $1 \leq \theta \leq +\infty$, $\bar{b}(t) = (b_1(t), \dots, b_m(t))$, $b_j \in SV[1, \infty)$, $j = 1, \dots, m$.

Замечание 9. Если

$$\int_0^1 b_j^\theta\left(\frac{1}{t_j}\right) \frac{dt_j}{t_j} < +\infty, \quad j = 1, \dots, m,$$

то пространство $S_{p,\theta}^{0,\bar{b}(\cdot)} \mathbf{B}$ совпадает с пространством $\mathring{L}_p(\mathbb{T}^m)$, $1 \leq p < \infty$, $0 < \theta \leq \infty$.

Поэтому будем считать, что

$$\int_0^1 b_j^\theta\left(\frac{1}{t_j}\right) \frac{dt_j}{t_j} = +\infty, \quad j = 1, \dots, m. \quad (1)$$

Для функции $b_j(1/t) = \log^{b_j}(2/t)$, условие (1) эквивалентно неравенству $b_j \geq -1/\theta$.

Статья состоит из введения и двух разделов. В первом разделе приведены некоторые известные результаты и доказаны вспомогательные утверждения, которые часто используются в доказательствах основных результатов. Доказательства основных результатов приведены во втором разделе. Основными результатами являются следующие утверждения.

Теорема 10. Пусть $1 < p < +\infty$, $0 < \theta \leq \infty$ и функции $b_j \in SVL[1, \infty)$, для $j = 1, \dots, m$ и удовлетворяют условию (1). Тогда для функции $f \in S_{p,\theta}^{0,\bar{b}(\cdot)} \mathbf{B}$ справедливо соотношение

$$\|f\|_{S_{p,\theta}^{0,\bar{b}(\cdot)} \mathbf{B}} \asymp \left(\sum_{\nu_m=0}^{\infty} \dots \sum_{\nu_1=0}^{\infty} \prod_{j=1}^m b_j^{\theta}(2^{\nu_j}) Y_{[2^{\nu_1-1}], \dots, [2^{\nu_m-1}]}^{\theta}(f)_p \right)^{\frac{1}{\theta}}.$$

Здесь и далее для положительных величин $A(y), B(y)$ запись $A(y) \asymp B(y)$ означает, что существуют положительные числа C_1, C_2 такие, что $C_1 \cdot A(y) \leq B(y) \leq C_2 \cdot A(y)$. Для краткости записи, в случае выполнения неравенств $B(y) \geq C_1 A(y)$ или $B(y) \leq C_2 A(y)$ часто будем писать $B(y) \gg A(y)$ или $B(y) \ll A(y)$ соответственно. Постоянные $C(p, q, m, \dots)$ в формулах не зависят от y .

Определение 11 (см. [19]). Множество всех положительных, измеримых по Лебегу на $[1, \infty)$ функций $b(t) = (1 + \log t)^{\alpha}$ или $b(t)$, для которых $(\log 2t)^{\varepsilon} b(t) \uparrow$ и $(\log 2t)^{-\varepsilon} b(t) \downarrow$ на $[1, \infty)$ для любого числа $\varepsilon > 0$, обозначим $SVL[1, \infty)$. Нетрудно убедиться в том, что $SVL[1, \infty) \subset SV[1, \infty)$.

Пример 12. Функции $l_1(t) = 1 + \log_2 t$, $l_2(t) = 1 + \log l_1(t)$ и $l_i(t) = 1 + \log_2 l_{i-1}(t)$ принадлежат множеству $SVL[1, \infty)$.

Теорема 13. Пусть $1 < p < +\infty$, $0 < \theta \leq \infty$ и функции $b_j \in SVL[1, \infty)$ для $j = 1, \dots, m$ удовлетворяют условию (1). Тогда для функции $f \in S_{p,\theta}^{0,\bar{b}(\cdot)} \mathbf{B}$ справедливо соотношение

$$\|f\|_{S_{p,\theta}^{0,\bar{b}(\cdot)} \mathbf{B}} \asymp \|f\|_p + \left(\sum_{\nu_m=1}^{\infty} \dots \sum_{\nu_1=1}^{\infty} \prod_{j=1}^m b_j^{\theta}(2^{\nu_j}) \left\| \left(\sum_{s_m=\nu_m}^{\infty} \dots \sum_{s_1=\nu_1}^{\infty} |\delta_{\bar{s}}(f)|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right\|_p^{\theta} \right)^{\frac{1}{\theta}}.$$

Теорема 14. Пусть $1 < p < +\infty$, $0 < \theta \leq \infty$ и функции $b_j \in SVL[1, \infty)$ для $j = 1, \dots, m$ удовлетворяют условию (1). Тогда для функции $f \in S_{p,\theta}^{0,\bar{b}(\cdot)} \mathbf{B}$ справедливы неравенства

$$\begin{aligned} C_1 \left\{ \|f\|_p + \left(\sum_{l_m=1}^{\infty} \dots \sum_{l_1=1}^{\infty} \prod_{j=1}^m b_j^{\theta}(2^{l_j}) 2^{l_j} \left\| \sum_{s_m=[2^{l_m-1}]+1}^{2^{l_m}} \dots \sum_{s_1=[2^{l_1-1}]+1}^{2^{l_1}} \delta_{\bar{s}}(f) \right\|_p^{\theta} \right)^{\frac{1}{\theta}} \right\} &\leq \|f\|_{S_{p,\theta}^{0,\bar{b}(\cdot)} \mathbf{B}} \\ &\leq C_2 \left\{ \|f\|_p + \left(\sum_{l_m=0}^{\infty} \dots \sum_{l_1=0}^{\infty} \prod_{j=1}^m b_j^{\theta}(2^{l_j}) 2^{l_j} \left\| \sum_{s_m=[2^{l_m-1}]+1}^{2^{l_m}} \dots \sum_{s_1=[2^{l_1-1}]+1}^{2^{l_1}} \delta_{\bar{s}}(f) \right\|_p^{\theta} \right)^{\frac{1}{\theta}} \right\}. \end{aligned}$$

В следующих теоремах установим условия вложения классов $S_{p,\theta}^{0,\bar{b}} \mathbf{B}$ и $S_{p,\theta}^{0,\bar{b}} B$.

Теорема 15. Пусть $1 < p < +\infty$, $0 < \theta \leq \infty$ и функции $b_j \in SVL[1, \infty)$ для $j = 1, \dots, m$ удовлетворяют условию (1). Тогда $S_{p,\theta}^{0,\bar{v}(\cdot)} B \subset S_{p,\theta}^{0,\bar{b}(\cdot)} \mathbf{B} \subset S_{p,\theta}^{0,\bar{u}(\cdot)} B$, где $\bar{v}(t) = (v_1(t), \dots, v_m(t))$, $\bar{u}(t) = (u_1(t), \dots, u_m(t))$, $v_j(t) = b_j(t)(1 + \log t)^{\frac{1}{\min\{2,p,\theta\}}}$, $u_j(t) = b_j(t)(1 + \log t)^{\frac{1}{\max\{2,p,\theta\}}}$, для $j = 1, \dots, m$.

Замечание 16. В случае $b_j(t) = \log^{b_j}(2t)$, для $t \in [1, \infty)$, $b_j \in \mathbb{R}$, $j = 1, \dots, m$, [теорема 14](#) и [теорема 15](#) представлены в [20].

Рассмотрим условие вложения класса $S_{p,\theta}^{0,\bar{b}}B$ в пространство Лоренца. Если $1 < p \leq \tau < \infty$, то известно, что $L_p(\mathbb{T}^m) \subset L_{p,\tau}^*(\mathbb{T}^m)$. Следовательно, $S_{p,\theta}^{0,\bar{b}}B \subset L_{p,\tau}^*(\mathbb{T}^m)$. Если же $1 < \tau < p < \infty$, то известно, что $L_{p,\tau}^*(\mathbb{T}^m) \subset L_p(\mathbb{T}^m)$ (см., например, [21]). Значит, пространство $S_{p,\theta}^{0,\bar{b}}B$ может быть не вложено в $L_{p,\tau}^*(\mathbb{T}^m)$. В этом случае справедлива

Теорема 17. Пусть $1 < \tau \leq \min\{2, p\}$, $1 < p < \infty$, $0 < \theta \leq \infty$ и функции $b_j \in SVL[1, \infty)$, $j = 1, \dots, m$, $\bar{b}(t) = (b_1(t), \dots, b_m(t))$.

Если $1 < \tau < \theta \leq \infty$ и

$$\sum_{s_j=0}^{\infty} b_j^{-\tau\eta'} (2^{s_j})_{s_j}^{\left(\frac{1}{\tau}-\frac{1}{p}\right)\tau\eta'} < \infty, \quad j = 1, \dots, m, \quad (2)$$

то $S_{p,\theta}^{0,\bar{b}(\cdot)}B \subset L_{p,\tau}^*(\mathbb{T}^m)$.

Если $0 < \theta \leq \tau < \infty$ и

$$\sup_{\bar{s} \in \mathbb{Z}_+^m} \prod_{j=1}^m b_j^{-1} (2^{s_j})_{s_j}^{\left(\frac{1}{\tau}-\frac{1}{p}\right)} < \infty, \quad (3)$$

то $S_{p,\theta}^{0,\bar{b}(\cdot)}B \subset L_{p,\tau}^*(\mathbb{T}^m)$.

1. Вспомогательные утверждения

Теорема 18 (Литтлвуд–Пэли, [5, гл. 1, подразд. 1.5.2]). Пусть $f \in L_p(\mathbb{T}^m)$, $1 < p < \infty$. Тогда

$$\|f\|_p \asymp \left\| \left(\sum_{\bar{s} \in \mathbb{Z}_+^m} |\delta_{\bar{s}}(f)|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right\|_p.$$

Лемма 19 (неравенство Йенсена, [5, лемма 3.3.3]). Пусть $1 \leq p \leq q \leq \infty$. Для любых чисел $a_k \geq 0$ выполняется неравенство

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty} a_k^q \right)^{\frac{1}{q}} \leq \left(\sum_{k=1}^{\infty} a_k^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Лемма 20 (обобщенное неравенство Харди, [22, 23]). Пусть даны положительные числа $b_{\bar{k}} = b_{k_1, \dots, k_m}$, для $\bar{k} = (k_1, \dots, k_m) \in \mathbb{Z}_+^m$ и a_{k_j} , $k_j = 0, 1, 2, \dots$ и $1 \leq \theta_j < +\infty$, $j = 1, \dots, m$.

а) Если

$$\sum_{k_j=0}^{n_j} a_{k_j} \leq C a_{n_j}, \quad j = 1, \dots, m,$$

то

$$\sum_{\bar{n} \in \mathbb{Z}_+^m} \prod_{j=1}^m a_{n_j} \left(\sum_{k_m=n_m}^{\infty} \dots \sum_{k_1=n_1}^{\infty} b_{\bar{k}} \right)^{\theta_1} \leq C \sum_{\bar{n} \in \mathbb{Z}_+^m} \prod_{j=1}^m a_{n_j} b_{\bar{n}}^{\theta_1}.$$

b) Если

$$\sum_{k_j=n_j}^{\infty} a_{k_j} \leq C a_{n_j}, \quad j = 1, \dots, m,$$

то

$$\sum_{\bar{n} \in \mathbb{Z}_+^m} \prod_{j=1}^m a_{n_j} \left(\sum_{k_m=0}^{n_m} \dots \sum_{k_1=0}^{n_1} b_{\bar{k}} \right)^{\theta_1} \leq C \sum_{\bar{n} \in \mathbb{Z}_+^m} \prod_{j=1}^m a_{n_j} b_{\bar{n}}^{\theta_1}.$$

Для доказательства основных результатов сначала введем дополнительные обозначения и приведем вспомогательные утверждения.

Множество индексов $\{1, \dots, m\}$ обозначим символом e_m , его произвольное подмножество – через e и $|e|$ – количество элементов e .

Если дан элемент $\bar{r} = (r_1, \dots, r_m) \in \mathbb{Z}_+^m$, то $\bar{r}^e = (r_1^e, \dots, r_m^e)$ – вектор с компонентами $r_j^e = r_j$ при $j \in e$ и $r_j^e = 0$ при $j \notin e$.

Пусть $\bar{l} = (l_1, \dots, l_m)$ элемент m -мерного пространства с целыми положительными координатами и непустое множество $e \subset e_m$. Положим

$$G_{\bar{l}}(e) = \{\bar{k} = (k_1, \dots, k_m) \in \mathbb{Z}^m : |k_j| \leq l_j, j \in e; \quad |k_j| > l_j, j \notin e\}.$$

Рассматриваются частные суммы по различным переменным:

$$S_{\bar{l}^e, \infty}(f, \bar{x}) = \sum_{\bar{k} \in \prod_{j \in e} [-l_j, l_j] \times \mathbb{R}^{m-|e|}} a_{\bar{k}}(f) e^{i\langle \bar{k}, \bar{x} \rangle}$$

– частная сумма по переменным x_j при $j \in e$.

Для заданного подмножества $e \subset e_m$ положим (см., например, [7, 8, 24])

$$U_{\bar{l}}(f, \bar{x}) = \sum_{e \subset e_m, e \neq \emptyset} \sum_{\bar{k} \in G_{\bar{l}}(e)} a_{\bar{k}}(f) e^{i\langle \bar{k}, \bar{x} \rangle}.$$

В частности, для $m = 2$ имеем (см. [7]) $U_{l_1, l_2}(f, \bar{x}) = S_{l_1, \infty}(f, \bar{x}) + S_{\infty, l_2}(f, \bar{x}) - S_{l_1, l_2}(f, \bar{x})$.

Лемма 21. Пусть $0 < \theta < \infty$ и функция $b \in SV[1, \infty)$. Тогда

$$\int_{\frac{1}{2^\nu}}^{\frac{1}{2^{\nu-1}}} b^\theta \left(\frac{1}{t} \right) \frac{dt}{t} \asymp b^\theta(2^\nu), \quad \nu \in \mathbb{N}.$$

В этом соотношении постоянные зависят от θ , но не зависят от ν .

Доказательство. Так как функция $b \in SV[1, \infty)$, то $b(1/t) \leq C 2^{\nu\epsilon} b(2^\nu) t^\epsilon$ для $t \geq 1/2^\nu$ и

произвольного числа $\varepsilon > 0$. Поэтому

$$\int_{\frac{1}{2^\nu}}^{\frac{1}{2^{\nu-1}}} b^\theta \left(\frac{1}{t} \right) \frac{dt}{t} \leq C 2^{\nu\varepsilon} b^\theta(2^\nu) \int_{\frac{1}{2^\nu}}^{\frac{1}{2^{\nu-1}}} t^{\theta\varepsilon-1} dt \leq C b^\theta(2^\nu).$$

Аналогично, учитывая, что $b(1/t) \geq C 2^{(\nu-1)\varepsilon} b(2^{\nu-1}) t^\varepsilon$, для $t \leq 1/2^{\nu-1}$ и произвольного числа $\varepsilon > 0$ будем иметь

$$\int_{\frac{1}{2^\nu}}^{\frac{1}{2^{\nu-1}}} b^\theta \left(\frac{1}{t} \right) \frac{dt}{t} \geq C 2^{(\nu-1)\varepsilon} b^\theta(2^{\nu-1}) \int_{\frac{1}{2^\nu}}^{\frac{1}{2^{\nu-1}}} t^{\theta\varepsilon-1} dt \geq C b^\theta(2^\nu).$$

□

Лемма 22. Пусть $0 < \theta < \infty$ и функция $b \in SVL[1, \infty)$. Тогда

$$\begin{aligned} \sum_{\nu=[2^{l-1}]+1}^{2^l} b(2^\nu) &\asymp 2^l b(2^{2^l}), \quad l = 0, 1, \dots, \\ \sum_{l=0}^{\mu} 2^l b(2^{2^l}) &\leq C 2^\mu b(2^{2^\mu}), \quad \mu = 0, 1, \dots \end{aligned}$$

и постоянные не зависят от l, μ .

Доказательство. Так как функция $b \in SVL[1, \infty)$, то

$$b(2^\nu) \leq C b(2^{2^l}) \left(\log 2^{1+2^l} \right)^\varepsilon (\log 2^{1+\nu})^{-\varepsilon},$$

для $\nu \leq 2^l$ и произвольного числа $\varepsilon > 0$. Поэтому

$$\sum_{\nu=[2^{l-1}]+1}^{2^l} b(2^\nu) \leq C \left(b(2^{2^l}) (1 + 2^l)^\varepsilon \right)^\theta \sum_{\nu=[2^{l-1}]+1}^{2^l} (\nu + 1)^{-\varepsilon\theta} \leq C b(2^{2^l}) 2^l.$$

Докажем противоположное неравенство. Так как функция $b \in SVL[1, \infty)$, то

$$b(2^\nu) \geq C b(2^{2^l}) \left(\log 2^{1+2^l} \right)^{-\varepsilon} (\log 2^{1+\nu})^\varepsilon,$$

для $\nu \leq 2^l$ и произвольного числа $\varepsilon > 0$. Следовательно

$$\sum_{\nu=[2^{l-1}]+1}^{2^l} b(2^\nu) \geq C \left(b(2^{2^l}) (1 + 2^l)^\varepsilon \right)^\theta \sum_{\nu=[2^{l-1}]+1}^{2^l} (\nu + 1)^{-\varepsilon\theta} \geq C b(2^{2^l}) 2^l.$$

В силу того, что функция $b \in SVL[1, \infty)$, будем иметь

$$b(2^{2^l}) \leq C b(2^{2^\mu}) \left(\log 2^{1+2^\mu} \right)^\varepsilon (\log 2^{1+l})^{-\varepsilon},$$

для $l \leq \mu$ и $\varepsilon > 0$. Отсюда следует, что

$$\sum_{l=0}^{\mu} 2^l b^{\theta}(2^{2^l}) \leq C b^{\theta}(2^{2^{\mu}}) \sum_{l=0}^{\mu} 2^{l(1-\varepsilon\theta)} \leq C b^{\theta}(2^{2^{\mu}}) 2^{\mu}.$$

□

Лемма 23. Если $0 < \theta < \infty$ и функция $b \in SVL[1, \infty)$, то

$$\sum_{\nu=0}^s b^{\theta}(2^{\nu}) \leq C(\theta) s b^{\theta}(2^s), \quad s \in \mathbb{N}.$$

Доказательство. Так как функция $b \in SVL[1, \infty)$, то

$$b(2^{\nu}) \leq C b(2^s) (\log 2^{1+s})^{\varepsilon} (\log 2^{1+\nu})^{-\varepsilon},$$

для $\nu \leq s$ и произвольного числа $\varepsilon > 0$. Поэтому, выбирая число $\varepsilon \in (0, 1/\theta)$, получим

$$\sum_{\nu=0}^s b^{\theta}(2^{\nu}) \leq C b^{\theta}(2^s) (1+s)^{\varepsilon\theta} \sum_{\nu=0}^s (1+\nu)^{-\varepsilon\theta} \leq C b^{\theta}(2^s) s.$$

□

2. Доказательства основных результатов

Доказательство теоремы 10. По свойству монотонности смешанного модуля гладкости и по лемме 21 имеем

$$\begin{aligned} & \int_0^1 \dots \int_0^1 \omega_k^{\theta}(f, \bar{t})_p \prod_{j=1}^m \frac{b_j^{\theta}(1/t_j)}{t_j} dt_1 \dots dt_m \\ & \leq \sum_{\nu_m=1}^{\infty} \dots \sum_{\nu_1=1}^{\infty} \omega_k^{\theta}(f, \frac{1}{2^{\nu_1-1}}, \dots, \frac{1}{2^{\nu_m-1}})_p \int_{\frac{1}{2^{\nu_1}}}^{\frac{1}{2^{\nu_1-1}}} \dots \int_{\frac{1}{2^{\nu_m}}}^{\frac{1}{2^{\nu_m-1}}} \prod_{j=1}^m \frac{b_j^{\theta}(1/t_j)}{t_j} dt_1 \dots dt_m \\ & \leq C \sum_{\nu_m=1}^{\infty} \dots \sum_{\nu_1=1}^{\infty} \prod_{j=1}^m b_j^{\theta}(2^{\nu_j}) \omega_k^{\theta}(f, \frac{1}{2^{\nu_1-1}}, \dots, \frac{1}{2^{\nu_m-1}})_p. \quad (4) \end{aligned}$$

В силу свойства модуля гладкости и [леммы 21](#) нетрудно убедиться в том, что

$$\begin{aligned} & \int_0^1 \dots \int_0^1 \omega_{\bar{k}}^\theta(f, \bar{t})_p \prod_{j=1}^m \frac{b_j^\theta(1/t_j)}{t_j} dt_1 \dots dt_m \\ & \geq C \sum_{\nu_m=1}^\infty \dots \sum_{\nu_1=1}^\infty \omega_{\bar{k}}^\theta \left(f, \frac{1}{2^{\nu_1-1}}, \dots, \frac{1}{2^{\nu_m-1}} \right)_p \int_{\frac{1}{2^{\nu_1}}}^{\frac{1}{2^{\nu_1-1}}} \dots \int_{\frac{1}{2^{\nu_m}}}^{\frac{1}{2^{\nu_m-1}}} \prod_{j=1}^m \frac{b_j^\theta(1/t_j)}{t_j} dt_1 \dots dt_m \\ & \geq C \sum_{\nu_m=1}^\infty \dots \sum_{\nu_1=1}^\infty \prod_{j=1}^m b_j^\theta(2^{\nu_j}) \omega_{\bar{k}}^\theta \left(f, \frac{1}{2^{\nu_1-1}}, \dots, \frac{1}{2^{\nu_m-1}} \right)_p, \quad (5) \end{aligned}$$

для $j = 1, \dots, m$. Теперь пользуясь [\[7, лемма 6\]](#), из неравенства (5) получим

$$\sum_{\nu_m=1}^\infty \dots \sum_{\nu_1=1}^\infty \prod_{j=1}^m b_j^\theta(2^{\nu_j}) Y_{[2^{\nu_1-1}], \dots, [2^{\nu_m-1}]}^\theta(f)_p \leq C \int_{[0,1]^m} \omega_{\bar{k}}^\theta(f, \bar{t})_p \prod_{j=1}^m \frac{b_j^\theta(1/t_j)}{t_j} dt_1 \dots dt_m, \quad (6)$$

для $j = 1, \dots, m$.

Согласно обратной теореме теории приближения “углом” в пространстве Лебега ([\[7, лемма 6\]](#)) из неравенства (4) следует, что

$$\begin{aligned} & \int_0^1 \dots \int_0^1 \omega_{\bar{k}}^\theta(f, \bar{t})_p \prod_{j=1}^m \frac{b_j^\theta(1/t_j)}{t_j} dt_1 \dots dt_m \\ & \leq C \sum_{\nu_m=1}^\infty \dots \sum_{\nu_1=1}^\infty \prod_{j=1}^m b_j^\theta(2^{\nu_j}) \prod_{j=1}^m (2^{\nu_j} + 1)^{-k_j \theta} \left(\sum_{l_m=0}^{2^{\nu_m}} \dots \sum_{\nu_1=0}^{2^{\nu_1}} \prod_{j=1}^m (l_j + 1)^{k_j-1} Y_{l_1, \dots, l_m}(f)_p \right)^\theta, \quad (7) \end{aligned}$$

для $j = 1, \dots, m$. В силу монотонного убывания наилучшего приближения “углом” имеем

$$\begin{aligned} & \sum_{l_m=0}^{2^{\nu_m}} \dots \sum_{\nu_1=0}^{2^{\nu_1}} \prod_{j=1}^m (l_j + 1)^{k_j-1} Y_{l_1, \dots, l_m}(f)_p \\ & = \sum_{\mu_m=0}^{\nu_m} \dots \sum_{\mu_1=0}^{\nu_1} \sum_{l_m=[2^{\mu_m-1}]}^{2^{\mu_m}} \dots \sum_{\nu_1=[2^{\mu_1-1}]}^{2^{\nu_1}} \prod_{j=1}^m (l_j + 1)^{k_j-1} Y_{l_1, \dots, l_m}(f)_p \\ & \leq C \sum_{\mu_m=0}^{\nu_m} \dots \sum_{\mu_1=0}^{\nu_1} \prod_{j=1}^m 2^{\mu_j k_j} Y_{[2^{\mu_1-1}], \dots, [2^{\mu_m-1}]}(f)_p. \quad (8) \end{aligned}$$

Теперь из неравенств (7) и (8) следует, что

$$\begin{aligned} & \int_0^1 \dots \int_0^1 \omega_k^\theta(f, \bar{t})_p \prod_{j=1}^m \frac{b_j^\theta(1/t_j)}{t_j} dt_1 \dots dt_m \\ & \leq C \sum_{\nu_m=0}^{\infty} \dots \sum_{\nu_1=0}^{\infty} \prod_{j=1}^m b_j^\theta(2^{\nu_j}) \prod_{j=1}^m (2^{\nu_j} + 1)^{-k_j \theta} \left(\sum_{\mu_m=0}^{\nu_m} \dots \sum_{\mu_1=0}^{\nu_1} \prod_{j=1}^m 2^{\mu_j k_j} Y_{[2^{\mu_1-1}], \dots, [2^{\mu_m-1}]}(f)_p \right)^\theta \end{aligned} \quad (9)$$

при $j = 1, \dots, m$. Так как функции $b_j \in SVL[1, \infty)$, для $j = 1, \dots, m$, то нетрудно убедиться в том, что

$$\sum_{\nu_j=\mu_j}^{\infty} b_j^\theta(2^{\nu_j}) (2^{\nu_j} + 1)^{-k_j \theta} \leq C b_j^\theta(2^{\mu_j}) 2^{-\mu_j k_j \theta},$$

для $j = 1, \dots, m$. Поэтому используя обобщенное неравенство Харди (см. [лемму 20](#)), из (9) получим

$$\int_0^1 \dots \int_0^1 \omega_k^\theta(f, \bar{t})_p \prod_{j=1}^m \frac{b_j^\theta(1/t_j)}{t_j} dt_1 \dots dt_m \leq C \sum_{\nu_m=0}^{\infty} \dots \sum_{\nu_1=0}^{\infty} \prod_{j=1}^m b_j^\theta(2^{\nu_j}) Y_{[2^{\nu_1-1}], \dots, [2^{\nu_m-1}]}^\theta(f)_p. \quad (10)$$

□

Доказательство теоремы 13. По теореме Литтлвуда–Пэли в пространстве Лебега для функции $f \in L_p(\mathbb{T}^m)$ имеет место неравенство (см. [теорему 18](#))

$$\begin{aligned} Y_{[2^{\nu_1-1}], \dots, [2^{\nu_m-1}]}(f)_p & \leq \|f - U_{[2^{\nu_1-1}], \dots, [2^{\nu_m-1}]}(f)\|_p \\ & = \left\| \sum_{s_m=\nu_m}^{\infty} \dots \sum_{s_1=\nu_1}^{\infty} \sum_{\bar{n} \in \rho(\bar{s})} a_{\bar{n}}(f) e^{i\langle \bar{n}, \bar{x} \rangle} \right\|_p \asymp \left\| \left(\sum_{s_m=\nu_m}^{\infty} \dots \sum_{s_1=\nu_1}^{\infty} |\delta_{\bar{s}}(f)|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right\|_p, \end{aligned} \quad (11)$$

при $1 < p < \infty$. Теперь из неравенств (10) и (11) следует, что

$$\begin{aligned} & \int_0^1 \dots \int_0^1 \omega_k^\theta(f, \bar{t})_p \prod_{j=1}^m \frac{b_j^\theta(1/t_j)}{t_j} dt_1 \dots dt_m \\ & \leq C \sum_{\nu_m=0}^{\infty} \dots \sum_{\nu_1=0}^{\infty} \prod_{j=1}^m b_j^\theta(2^{\nu_j}) \left\| \left(\sum_{s_m=\nu_m}^{\infty} \dots \sum_{s_1=\nu_1}^{\infty} |\delta_{\bar{s}}(f)|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right\|_p^\theta, \end{aligned} \quad (12)$$

для $1 < p < \infty$.

Докажем противоположное неравенство к (12). Известно, что (см., например, [9])

$$\|f - U_{[2^{\nu_1-1}], \dots, [2^{\nu_m-1}]}(f)\|_p \leq C Y_{[2^{\nu_1-1}], \dots, [2^{\nu_m-1}]}(f)_p,$$

для функции $f \in L_p(\mathbb{T}^m)$, при $1 < p < \infty$. Поэтому из неравенства (6) и соотношения (11)

следует, что

$$\sum_{\nu_m=1}^{\infty} \dots \sum_{\nu_1=1}^{\infty} \prod_{j=1}^m b_j^{\theta}(2^{\nu_j}) \left\| \left(\sum_{s_m=\nu_m}^{\infty} \dots \sum_{s_1=\nu_1}^{\infty} |\delta_{\bar{s}}(f)|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right\|_p^{\theta} \leq C \int_{[0,1]^m} \omega_k^{\theta}(f, \bar{t})_p \prod_{j=1}^m \frac{b_j^{\theta}(1/t_j)}{t_j} dt_1 \dots dt_m, \quad (13)$$

для $1 < p < \infty$. Далее учитывая, что

$$\left\| \left(\sum_{s_1=0}^{\infty} \dots \sum_{s_j=0}^{\infty} \sum_{s_{j+1}=\nu_{j+1}}^{\infty} \dots \sum_{s_m=\nu_m}^{\infty} |\delta_{\bar{s}}(f)|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right\|_p \leq \left\| \left(\sum_{s_1=0}^{\infty} \dots \sum_{s_m=0}^{\infty} |\delta_{\bar{s}}(f)|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right\|_p \asymp \|f\|_p,$$

для функции $f \in L_p(\mathbb{T}^m)$, при $1 < p < \infty$, неравенство (13) можно переписать в следующем виде

$$\int_0^1 \dots \int_0^1 \omega_k^{\theta}(f, \bar{t})_p \prod_{j=1}^m \frac{b_j^{\theta}(1/t_j)}{t_j} dt_1 \dots dt_m \leq C \left\{ \|f\|_p^{\theta} + \sum_{\nu_m=1}^{\infty} \dots \sum_{\nu_1=1}^{\infty} \prod_{j=1}^m b_j^{\theta}(2^{\nu_j}) \left\| \left(\sum_{s_m=\nu_m}^{\infty} \dots \sum_{s_1=\nu_1}^{\infty} |\delta_{\bar{s}}(f)|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right\|_p^{\theta} \right\}, \quad (14)$$

для $1 < p < \infty$.

Теперь из неравенств (13) и (14) по определению класса получим утверждение [теоремы 13](#). $\square$

Доказательство теоремы 14. Так как $b_j \in SVL[1, \infty)$, для $j = 1, \dots, m$, то пользуясь [леммой 22](#) и тем, что последовательность

$$\sigma_{\nu_1, \dots, \nu_m} = \left\| \left(\sum_{s_m=\nu_m}^{\infty} \dots \sum_{s_1=\nu_1}^{\infty} |\delta_{\bar{s}}(f)|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right\|_p$$

монотонно убывает по каждому индексу ν_j , для $j = 1, \dots, m$, получаем

$$\begin{aligned} \sum_{\nu_m=1}^{\infty} \dots \sum_{\nu_1=1}^{\infty} \prod_{j=1}^m b_j^{\theta}(2^{\nu_j}) \left\| \left(\sum_{s_m=\nu_m}^{\infty} \dots \sum_{s_1=\nu_1}^{\infty} |\delta_{\bar{s}}(f)|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right\|_p^{\theta} &= \sum_{\nu_m=1}^{\infty} \dots \sum_{\nu_1=1}^{\infty} \prod_{j=1}^m b_j^{\theta}(2^{\nu_j}) \sigma_{\nu_1, \dots, \nu_m}^{\theta} \\ &\leq C \sum_{l_m=0}^{\infty} \dots \sum_{l_1=0}^{\infty} \prod_{j=1}^m b_j^{\theta}(2^{2^{l_j}}) 2^{l_j} \sigma_{[2^{l_1-1}]+1, \dots, [2^{l_m-1}]+1}^{\theta}. \end{aligned} \quad (15)$$

По [теореме 18](#) Литтлвуда–Пэли и неравенству треугольника имеем

$$\begin{aligned} \sigma_{[2^{l_1-1}]+1, \dots, [2^{l_m-1}]+1} &\leq C \left\| \sum_{s_m=[2^{l_m-1}]+1}^{\infty} \dots \sum_{s_1=[2^{l_1-1}]+1}^{\infty} \delta_{\bar{s}}(f) \right\|_p \\ &\leq C \sum_{\mu_m=l_m}^{\infty} \dots \sum_{\mu_1=l_1}^{\infty} \left\| \sum_{s_m=[2^{\mu_m-1}]+1}^{2^{\mu_m}} \dots \sum_{s_1=[2^{\mu_1-1}]+1}^{2^{\mu_1}} \delta_{\bar{s}}(f) \right\|_p. \end{aligned}$$

Поэтому из [\(15\)](#) следует, что

$$\begin{aligned} &\sum_{\nu_m=1}^{\infty} \dots \sum_{\nu_1=1}^{\infty} \prod_{j=1}^m b_j^{\theta}(2^{\nu_j}) \left\| \left(\sum_{s_m=\nu_m}^{\infty} \dots \sum_{s_1=\nu_1}^{\infty} |\delta_{\bar{s}}(f)|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right\|_p^{\theta} \\ &\leq C \sum_{l_m=0}^{\infty} \dots \sum_{l_1=0}^{\infty} \prod_{j=1}^m b_j^{\theta}(2^{2^{l_j}}) 2^{l_j} \left(\sum_{\mu_m=l_m}^{\infty} \dots \sum_{\mu_1=l_1}^{\infty} \left\| \sum_{s_m=[2^{\mu_m-1}]+1}^{2^{\mu_m}} \dots \sum_{s_1=[2^{\mu_1-1}]+1}^{2^{\mu_1}} \delta_{\bar{s}}(f) \right\|_p \right)^{\theta}. \quad (16) \end{aligned}$$

Так как функции $b_j \in SVL[1, \infty)$, для $j = 1, \dots, m$, то по [лемме 22](#)

$$\sum_{l_j=0}^{\mu_j} b_j^{\theta}(2^{2^{l_j}}) 2^{l_j} \leq C b_j^{\theta}(2^{2^{\mu_j}}) 2^{\mu_j}, \quad j = 1, \dots, m.$$

Поэтому пользуясь обобщенным неравенством Харди (см. [лемму 20](#)) из формулы [\(15\)](#) получим

$$\begin{aligned} &\sum_{\nu_m=1}^{\infty} \dots \sum_{\nu_1=1}^{\infty} \prod_{j=1}^m b_j^{\theta}(2^{\nu_j}) \left\| \left(\sum_{s_m=\nu_m}^{\infty} \dots \sum_{s_1=\nu_1}^{\infty} |\delta_{\bar{s}}(f)|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right\|_p^{\theta} \\ &\leq C \sum_{l_m=0}^{\infty} \dots \sum_{l_1=0}^{\infty} \prod_{j=1}^m b_j^{\theta}(2^{2^{l_j}}) 2^{l_j} \left\| \sum_{s_m=[2^{l_m-1}]+1}^{2^{l_m}} \dots \sum_{s_1=[2^{l_1-1}]+1}^{2^{l_1}} \delta_{\bar{s}}(f) \right\|_p^{\theta}. \quad (17) \end{aligned}$$

Теперь из неравенства [\(17\)](#) и [теоремы 13](#) следует второе неравенство в [теореме 14](#).

Для доказательства первого неравенства в [теореме 14](#), в силу монотонного убывания последовательности $\{\sigma_{\nu_1, \dots, \nu_m}\}$ и теоремы Литтлвуда–Пэли имеем

$$\begin{aligned}
\sum_{\nu_m=1}^{\infty} \dots \sum_{\nu_1=1}^{\infty} \prod_{j=1}^m b_j^{\theta}(2^{\nu_j}) \sigma_{\nu_1, \dots, \nu_m}^{\theta} &\geq C \sum_{l_m=1}^{\infty} \dots \sum_{l_1=1}^{\infty} \prod_{j=1}^m b_j^{\theta}(2^{2^{l_j}}) 2^{l_j} \sigma_{[2^{l_1-1}]+1, \dots, [2^{l_m-1}]+1}^{\theta} \\
&\geq C \sum_{l_m=1}^{\infty} \dots \sum_{l_1=1}^{\infty} \prod_{j=1}^m b_j^{\theta}(2^{2^{l_j}}) 2^{l_j} \left\| \left(\sum_{s_m=2^{l_m-1}+1}^{2^{l_m}} \dots \sum_{s_1=2^{l_1-1}+1}^{2^{l_1}} |\delta_{\bar{s}}(f)|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right\|_p^{\theta} \\
&\geq C \sum_{l_m=1}^{\infty} \dots \sum_{l_1=1}^{\infty} \prod_{j=1}^m b_j^{\theta}(2^{2^{l_j}}) 2^{l_j} \left\| \sum_{s_m=2^{l_m-1}+1}^{2^{l_m}} \dots \sum_{s_1=2^{l_1-1}+1}^{2^{l_1}} \delta_{\bar{s}}(f) \right\|_p^{\theta}. \quad (18)
\end{aligned}$$

Теперь из неравенства (14) и теоремы 13 следует первое неравенство в теореме 14. $\square$

Доказательство теоремы 15. Для функции $f \in L_p(\mathbb{T}^m)$, при $1 < p < \infty$ известно, что (см., например, [25])

$$\left\| \left(\sum_{s_m=\nu_m}^{\infty} \dots \sum_{s_1=\nu_1}^{\infty} |\delta_{\bar{s}}(f)|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right\|_p^{\frac{1}{2}} \leq C \left(\sum_{s_m=\nu_m}^{\infty} \dots \sum_{s_1=\nu_1}^{\infty} \|\delta_{\bar{s}}(f)\|_p^{\beta} \right)^{\frac{1}{\beta}}, \quad (19)$$

где $\beta = \min\{2, p\}$.

Если $0 < \theta \leq \beta$, то согласно неравенству Йенсена (см. лемму 19) из формулы (14) получим

$$\left\| \left(\sum_{s_m=\nu_m}^{\infty} \dots \sum_{s_1=\nu_1}^{\infty} |\delta_{\bar{s}}(f)|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right\|_p^{\theta} \leq C \sum_{s_m=\nu_m}^{\infty} \dots \sum_{s_1=\nu_1}^{\infty} \|\delta_{\bar{s}}(f)\|_p^{\theta}.$$

Поэтому по теореме 13 имеем

$$\|f\|_{S_{p,\theta}^{0,\bar{b}} \mathbf{B}} \leq \left\{ \|f\|_p + \left(\sum_{\nu_m=1}^{\infty} \dots \sum_{\nu_1=1}^{\infty} \prod_{j=1}^m b_j^{\theta}(2^{\nu_j}) \sum_{s_m=\nu_m}^{\infty} \dots \sum_{s_1=\nu_1}^{\infty} \|\delta_{\bar{s}}(f)\|_p^{\theta} \right)^{\frac{1}{\theta}} \right\}. \quad (20)$$

Далее меняя порядок суммирования и пользуясь леммой 23, из (20) получим

$$\begin{aligned}
&\sum_{\nu_m=1}^{\infty} \dots \sum_{\nu_1=1}^{\infty} \prod_{j=1}^m b_j^{\theta}(2^{\nu_j}) \sum_{s_m=\nu_m}^{\infty} \dots \sum_{s_1=\nu_1}^{\infty} \|\delta_{\bar{s}}(f)\|_p^{\theta} \\
&= \sum_{s_m=1}^{\infty} \dots \sum_{s_1=1}^{\infty} \|\delta_{\bar{s}}(f)\|_p^{\theta} \sum_{\nu_m=1}^{s_m} \dots \sum_{\nu_1=1}^{s_1} \prod_{j=1}^m b_j^{\theta}(2^{\nu_j}) \leq C \sum_{s_m=1}^{\infty} \dots \sum_{s_1=1}^{\infty} \prod_{j=1}^m b_j^{\theta}(2^{s_j}) s_j \|\delta_{\bar{s}}(f)\|_p^{\theta}. \quad (21)
\end{aligned}$$

Теперь из неравенств (20) и (21) следует, что $S_{p,\theta}^{0,\bar{v}(\cdot)} B \subset S_{p,\theta}^{0,\bar{b}(\cdot)} \mathbf{B}$, в случае $0 < \theta \leq \beta$.

Пусть $1 < \beta = \min\{2, p\} < \theta \leq \infty$. Выберем число ε такое, что $0 < \frac{1}{\beta} - \frac{1}{\theta} < \varepsilon < \frac{1}{\beta}$.

Тогда применяя неравенство Гёльдера при $\eta = \frac{\theta}{\beta}$, $\frac{1}{\eta} + \frac{1}{\eta'} = 1$ из (19) получим

$$\begin{aligned} \left\| \left(\sum_{s_m=\nu_m}^{\infty} \dots \sum_{s_1=\nu_1}^{\infty} |\delta_{\bar{s}}(f)|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right\|_p &\leq C \left(\sum_{s_m=\nu_m}^{\infty} \dots \sum_{s_1=\nu_1}^{\infty} \prod_{j=1}^m b_j^{\beta}(2^{s_j}) (\log 2^{1+s_j})^{\varepsilon\beta} \|\delta_{\bar{s}}(f)\|_p^{\beta} \right. \\ &\quad \times \left. \prod_{j=1}^m b_j^{-\beta}(2^{s_j}) (\log 2^{1+s_j})^{-\varepsilon\beta} \right)^{\frac{1}{\beta}} \leq C \left(\sum_{s_m=\nu_m}^{\infty} \dots \sum_{s_1=\nu_1}^{\infty} \prod_{j=1}^m b_j^{\theta}(2^{s_j}) (\log 2^{1+s_j})^{\varepsilon\theta} \|\delta_{\bar{s}}(f)\|_p^{\theta} \right)^{\frac{1}{\theta}} \\ &\quad \times \left(\sum_{s_m=\nu_m}^{\infty} \dots \sum_{s_1=\nu_1}^{\infty} \prod_{j=1}^m b_j^{-\beta\eta'}(2^{s_j}) (\log 2^{1+s_j})^{-\varepsilon\eta'} \right)^{\frac{1}{\beta\eta'}}. \quad (22) \end{aligned}$$

Выберем число δ такое, что $0 < \delta + \frac{1}{\beta} - \frac{1}{\theta} < \varepsilon$. Так как функции $b_j \in SVL[1, \infty)$, то последовательность $\{b_j(2^{s_j})(\log 2^{1+s_j})^{\delta}\}$ почти возрастает. Значит $\left\{ \frac{1}{b_j(2^{s_j})(\log 2^{1+s_j})^{\delta}} \right\}$ почти убывает, т. е.

$$\frac{1}{b_j(2^{s_j})(\log 2^{1+s_j})^{\delta}} \leq C \frac{1}{b_j(2^{\nu_j})(\log 2^{1+\nu_j})^{\delta}},$$

для номеров $s_j > \nu_j$, $j = 1, \dots, m$. Поэтому

$$\begin{aligned} \left(\sum_{s_j=\nu_j}^{\infty} b_j^{-\beta\eta'}(2^{s_j}) (\log 2^{1+s_j})^{-\varepsilon\beta\eta'} \right)^{\frac{1}{\beta\eta'}} &\leq C \frac{1}{b_j(2^{\nu_j})(\log 2^{1+\nu_j})^{\delta}} \left(\sum_{s_j=\nu_j}^{\infty} \frac{1}{(s_j + 1)^{(\varepsilon-\delta)\beta\eta'}} \right)^{\frac{1}{\beta\eta'}} \\ &\leq C \frac{1}{b_j(2^{\nu_j})(\log 2^{1+\nu_j})^{\delta}} \frac{1}{(\nu_j + 1)^{\varepsilon-\delta-\frac{1}{\beta\eta'}}} = C \frac{1}{b_j(2^{\nu_j})(\nu_j + 1)^{\varepsilon-\frac{1}{\beta\eta'}}}, \end{aligned}$$

для $j = 1, \dots, m$. Из (22) и отсюда получим

$$\begin{aligned} \left\| \left(\sum_{s_m=\nu_m}^{\infty} \dots \sum_{s_1=\nu_1}^{\infty} |\delta_{\bar{s}}(f)|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right\|_p &\leq C \prod_{j=1}^m \frac{1}{b_j(2^{\nu_j})(\nu_j + 1)^{\varepsilon-\frac{1}{\beta\eta'}}} \\ &\quad \times \left(\sum_{s_m=\nu_m}^{\infty} \dots \sum_{s_1=\nu_1}^{\infty} \prod_{j=1}^m b_j^{\theta}(2^{s_j}) (1 + s_j)^{\varepsilon\theta} \|\delta_{\bar{s}}(f)\|_p^{\theta} \right)^{\frac{1}{\theta}}. \end{aligned}$$

Теперь отсюда и из (20) следует, что

$$\begin{aligned} \|f\|_{S_{p,\theta}^{0,\bar{b}}\mathbf{B}} &\leq \left\{ \|f\|_p + \left(\sum_{\nu_m=1}^{\infty} \dots \sum_{\nu_1=1}^{\infty} \prod_{j=1}^m (\nu_j + 1)^{\left(\frac{1}{\beta\eta'} - \varepsilon\right)\theta} \right. \right. \\ &\quad \times \left. \left. \sum_{s_m=\nu_m}^{\infty} \dots \sum_{s_1=\nu_1}^{\infty} \prod_{j=1}^m b_j^{\theta}(2^{s_j}) (1 + s_j)^{\varepsilon\theta} \|\delta_{\bar{s}}(f)\|_p^{\theta} \right)^{\frac{1}{\theta}} \right\}, \quad (23) \end{aligned}$$

в случае $1 < \beta = \min\{2, p\} < \theta \leq \infty$.

Теперь меняя порядок суммирования в правой части формулы (23), выбирая число $\varepsilon \in (0, \frac{1}{\beta})$ и учитывая, что

$$\sum_{\nu=1}^s \nu^{\left(\frac{1}{\beta\eta}-\varepsilon\right)\theta} \leq C s^{\frac{\theta}{\beta}-\varepsilon\theta},$$

из неравенства (23) получим

$$\begin{aligned} \|f\|_{S_{p,\theta}^{0,\bar{b}}\mathbf{B}} &\leq C \left\{ \|f\|_p + \left(\sum_{s_m=1}^{\infty} \dots \sum_{s_1=1}^{\infty} \prod_{j=1}^m b_j^{\theta}(2^{s_j})(1+s_j)^{\varepsilon\theta} \|\delta_{\bar{s}}(f)\|_p^{\theta} \right. \right. \\ &\quad \times \left. \sum_{\nu_m=1}^{s_m} \dots \sum_{\nu_1=1}^{s_1} \prod_{j=1}^m (\nu_j+1)^{\left(\frac{1}{\beta\eta}-\varepsilon\right)\theta} \right)^{\frac{1}{\theta}} \Big\} \\ &\leq C \left\{ \|f\|_p + \left(\sum_{s_m=1}^{\infty} \dots \sum_{s_1=1}^{\infty} \prod_{j=1}^m b_j^{\theta}(2^{s_j}) s_j^{\frac{\theta}{\beta}} \|\delta_{\bar{s}}(f)\|_p^{\theta} \right)^{\frac{1}{\theta}} \right\}, \quad (24) \end{aligned}$$

в случае $1 < \beta = \min\{2, p\} < \theta \leq \infty$. Следовательно $S_{p,\theta}^{0,\bar{b}}B \subset S_{p,\theta}^{0,\bar{b}}\mathbf{B}$, в случае $1 < \beta = \min\{2, p\} < \theta \leq \infty$.

Докажем включение $S_{p,\theta}^{0,\bar{b}}\mathbf{B} \subset S_{p,\theta}^{0,\bar{u}}B$. Так как по предположению ряды (условие (1))

$$\sum_{s_j=0}^{\infty} b_j^{\theta}(2^{s_j}) = +\infty, \quad j = 1, \dots, m$$

то ряды

$$\sum_{s_j=0}^{\infty} b_j^{\theta}(2^{s_j})(s_j+1)^{\frac{\theta}{\gamma}}, \quad j = 1, \dots, m$$

также расходятся, т. е. пространство $S_{p,\theta}^{0,\bar{u}}B \subset L_p(\mathbb{T}^m)$ и включение строгое.

Пусть $f \in S_{p,\theta}^{0,\bar{b}}\mathbf{B}$. Тогда согласно [теореме 14](#) имеем

$$\sum_{\nu_m=0}^{\infty} \dots \sum_{\nu_1=0}^{\infty} \prod_{j=1}^m b_j^{\theta}(2^{2^{\nu_j}}) 2^{\nu_j} \left\| \sum_{s_m=[2^{\nu_m-1}]+1}^{2^{\nu_m}} \dots \sum_{s_1=[2^{\nu_1-1}]+1}^{2^{\nu_1}} \delta_{\bar{s}}(f) \right\|_p^{\theta} < \infty. \quad (25)$$

По известной теореме Литтлвуда–Пэли (см. [теорему 18](#)) для функции $f \in L_p(\mathbb{T}^m)$, при $1 < p < \infty$ справедливо неравенство (см., например, [\[25\]](#))

$$\left\| \sum_{s_m=[2^{\nu_m-1}]+1}^{2^{\nu_m}} \dots \sum_{s_1=[2^{\nu_1-1}]+1}^{2^{\nu_1}} \delta_{\bar{s}}(f) \right\|_p \geq C \left(\sum_{s_m=[2^{\nu_m-1}]+1}^{2^{\nu_m}} \dots \sum_{s_1=[2^{\nu_1-1}]+1}^{2^{\nu_1}} \|\delta_{\bar{s}}(f)\|_p^{\gamma} \right)^{\frac{1}{\gamma}} \quad (26)$$

где $\gamma = \max\{2, p\}$. Поэтому

$$\begin{aligned} & \sum_{\nu_m=0}^{\infty} \dots \sum_{\nu_1=0}^{\infty} \prod_{j=1}^m b_j^{\theta}(2^{2^{\nu_j}}) 2^{\nu_j} \left\| \sum_{s_m=[2^{\nu_m-1}]+1}^{2^{\nu_m}} \dots \sum_{s_1=[2^{\nu_1-1}]+1}^{2^{\nu_1}} \delta_{\bar{s}}(f) \right\|_p^{\theta} \\ & \geq C \sum_{\nu_m=0}^{\infty} \dots \sum_{\nu_1=0}^{\infty} \prod_{j=1}^m b_j^{\theta}(2^{2^{\nu_j}}) 2^{\nu_j} \left(\sum_{s_m=[2^{\nu_m-1}]+1}^{2^{\nu_m}} \dots \sum_{s_1=[2^{\nu_1-1}]+1}^{2^{\nu_1}} \|\delta_{\bar{s}}(f)\|_p^{\gamma} \right)^{\frac{\theta}{\gamma}}. \end{aligned} \quad (27)$$

Пусть $0 < \theta < \gamma = \max\{2, p\}$. Тогда $\max\{2, p, \theta\} = \gamma$. Применяя неравенство Гёльдера при $\eta = \frac{\gamma}{\theta}, \frac{1}{\eta} + \frac{1}{\eta'} = 1$ получим

$$\begin{aligned} & \sum_{s_m=[2^{\nu_m-1}]+1}^{2^{\nu_m}} \dots \sum_{s_1=[2^{\nu_1-1}]+1}^{2^{\nu_1}} \prod_{j=1}^m b_j^{\theta}(2^{s_j}) s_j^{\frac{\theta}{\gamma}} \|\delta_{\bar{s}}(f)\|_p^{\theta} \\ & \leq C \left(\sum_{s_m=[2^{\nu_m-1}]+1}^{2^{\nu_m}} \dots \sum_{s_1=[2^{\nu_1-1}]+1}^{2^{\nu_1}} \|\delta_{\bar{s}}(f)\|_p^{\gamma} \right)^{\frac{\theta}{\gamma}} \left(\sum_{s_m=[2^{\nu_m-1}]+1}^{2^{\nu_m}} \dots \sum_{s_1=[2^{\nu_1-1}]+1}^{2^{\nu_1}} \prod_{j=1}^m b_j^{\theta\eta'}(2^{s_j}) s_j^{\frac{\theta}{\gamma}\eta'} \right)^{\frac{1}{\eta'}}. \end{aligned} \quad (28)$$

Так как функции $b_j \in SVL[1, \infty)$, то

$$\begin{aligned} & \sum_{s_j=[2^{\nu_j-1}]+1}^{2^{\nu_j}} b_j^{\theta\eta'}(2^{s_j}) s_j^{\frac{\theta}{\gamma}\eta'} \leq C \left(b_j(2^{2^{\nu_j}}) (\log 2^{1+2^{\nu_j}})^{\varepsilon} \right)^{\theta\eta'} \sum_{s_j=[2^{\nu_j-1}]+1}^{2^{\nu_j}} s_j^{\frac{\theta}{\gamma}\eta'} (\log 2^{1+s_j})^{-\varepsilon\theta\eta'} \\ & \leq C \left(b_j(2^{2^{\nu_j}}) (1 + 2^{\nu_j})^{\varepsilon} \right)^{\theta\eta'} \sum_{s_j=[2^{\nu_j-1}]+1}^{2^{\nu_j}} (s_j + 1)^{(\frac{1}{\gamma}-\varepsilon)\theta\eta'} \\ & \leq C \left(b_j(2^{2^{\nu_j}}) (1 + 2^{\nu_j})^{\varepsilon} \right)^{\theta\eta'} 2^{\nu_j((\frac{1}{\gamma}-\varepsilon)\theta\eta'+1)} \leq C b_j^{\theta\eta'}(2^{2^{\nu_j}}) 2^{\nu_j(\frac{\theta\eta'}{\gamma}+1)}, \end{aligned}$$

для $j = 1, \dots, m$. Поэтому из (28) получим

$$\begin{aligned} & \sum_{s_m=[2^{\nu_m-1}]+1}^{2^{\nu_m}} \dots \sum_{s_1=[2^{\nu_1-1}]+1}^{2^{\nu_1}} \prod_{j=1}^m b_j^{\theta}(2^{s_j}) s_j^{\frac{\theta}{\gamma}} \|\delta_{\bar{s}}(f)\|_p^{\theta} \\ & \leq C \left(\sum_{s_m=[2^{\nu_m-1}]+1}^{2^{\nu_m}} \dots \sum_{s_1=[2^{\nu_1-1}]+1}^{2^{\nu_1}} \|\delta_{\bar{s}}(f)\|_p^{\gamma} \right)^{\frac{\theta}{\gamma}} \prod_{j=1}^m b_j^{\theta}(2^{2^{\nu_j}}) 2^{\nu_j(\frac{\theta\eta'}{\gamma}+1)\frac{1}{\eta'}} \\ & = C \left(\sum_{s_m=[2^{\nu_m-1}]+1}^{2^{\nu_m}} \dots \sum_{s_1=[2^{\nu_1-1}]+1}^{2^{\nu_1}} \|\delta_{\bar{s}}(f)\|_p^{\gamma} \right)^{\frac{\theta}{\gamma}} \prod_{j=1}^m b_j^{\theta}(2^{2^{\nu_j}}) 2^{\nu_j}. \end{aligned}$$

Следовательно из (27) и (28) следует, что

$$\begin{aligned}
& \sum_{s_m=1}^{\infty} \dots \sum_{s_1=1}^{\infty} \prod_{j=1}^m b_j^{\theta} (2^{s_j}) s_j^{\frac{\theta}{\beta}} \|\delta_{\bar{s}}(f)\|_p^{\theta} \\
& \leq C \sum_{\nu_m=0}^{\infty} \dots \sum_{\nu_1=0}^{\infty} \prod_{j=1}^m b_j^{\theta} (2^{2^{\nu_j}}) 2^{\nu_j} \left(\sum_{s_m=[2^{\nu_m-1}]+1}^{2^{\nu_m}} \dots \sum_{s_1=[2^{\nu_1-1}]+1}^{2^{\nu_1}} \|\delta_{\bar{s}}(f)\|_p^{\gamma} \right)^{\frac{\theta}{\gamma}} \\
& \leq C \sum_{\nu_m=0}^{\infty} \dots \sum_{\nu_1=0}^{\infty} \prod_{j=1}^m b_j^{\theta} (2^{2^{\nu_j}}) 2^{\nu_j} \left\| \sum_{s_m=[2^{\nu_m-1}]+1}^{2^{\nu_m}} \dots \sum_{s_1=[2^{\nu_1-1}]+1}^{2^{\nu_1}} \delta_{\bar{s}}(f) \right\|_p^{\theta},
\end{aligned}$$

для функции $f \in S_{p,\theta}^{0,\bar{b}(\cdot)} \mathbf{B}$, в случае $0 < \theta < \gamma = \max\{2, p\}$. Значит в силу (25) будем иметь $S_{p,\theta}^{0,\bar{b}(\cdot)} \mathbf{B} \subset S_{p,\theta}^{0,\bar{u}(\cdot)} B$, в случае $0 < \theta < \gamma = \max\{2, p\}$.

Пусть $1 < \gamma = \max\{2, p\} \leq \theta < \infty$. Тогда $\max\{2, p, \theta\} = \theta$, т. е. $\theta / \max\{2, p, \theta\} = 1$. Тогда согласно неравенству Йенсена (см. лемму 19), условия $b_j \in SVL[1, \infty)$, для $j = 1, \dots, m$ и неравенству (26) имеем

$$\begin{aligned}
& \sum_{s_m=[2^{\nu_m-1}]+1}^{2^{\nu_m}} \dots \sum_{s_1=[2^{\nu_1-1}]+1}^{2^{\nu_1}} \prod_{j=1}^m b_j^{\theta} (2^{s_j}) s_j^{\frac{\theta}{\gamma}} \|\delta_{\bar{s}}(f)\|_p^{\theta} \\
& \leq C \prod_{j=1}^m b_j^{\theta} (2^{2^{\nu_j}}) 2^{\nu_j} \sum_{s_m=[2^{\nu_m-1}]+1}^{2^{\nu_m}} \dots \sum_{s_1=[2^{\nu_1-1}]+1}^{2^{\nu_1}} \|\delta_{\bar{s}}(f)\|_p^{\theta} \\
& \leq C \prod_{j=1}^m b_j^{\theta} (2^{2^{\nu_j}}) 2^{\nu_j} \left(\sum_{s_m=[2^{\nu_m-1}]+1}^{2^{\nu_m}} \dots \sum_{s_1=[2^{\nu_1-1}]+1}^{2^{\nu_1}} \|\delta_{\bar{s}}(f)\|_p^{\gamma} \right)^{\frac{\theta}{\gamma}} \\
& \leq C \prod_{j=1}^m b_j^{\theta} (2^{2^{\nu_j}}) 2^{\nu_j} \left\| \sum_{s_m=[2^{\nu_m-1}]+1}^{2^{\nu_m}} \dots \sum_{s_1=[2^{\nu_1-1}]+1}^{2^{\nu_1}} \delta_{\bar{s}}(f) \right\|_p^{\theta}. \quad (29)
\end{aligned}$$

Теперь из неравенств (26) и (29) следует, что

$$\begin{aligned}
& \sum_{s_m=1}^{\infty} \dots \sum_{s_1=1}^{\infty} \prod_{j=1}^m b_j^{\theta} (2^{s_j}) s_j^{\frac{\theta}{\max\{2,p,\theta\}}} \|\delta_{\bar{s}}(f)\|_p^{\theta} \\
& \leq C \sum_{\nu_m=0}^{\infty} \dots \sum_{\nu_1=0}^{\infty} \prod_{j=1}^m b_j^{\theta} (2^{2^{\nu_j}}) 2^{\nu_j} \left\| \sum_{s_m=[2^{\nu_m-1}]+1}^{2^{\nu_m}} \dots \sum_{s_1=[2^{\nu_1-1}]+1}^{2^{\nu_1}} \delta_{\bar{s}}(f) \right\|_p^{\theta},
\end{aligned}$$

для функции $f \in S_{p,\theta}^{0,\bar{b}(\cdot)} \mathbf{B}$, в случае $1 < \gamma = \max\{2, p\} \leq \theta < \infty$. Следовательно, в силу (25) будем иметь $S_{p,\theta}^{0,\bar{b}(\cdot)} \mathbf{B} \subset S_{p,\theta}^{0,\bar{u}(\cdot)} B$, в случае $1 < \gamma = \max\{2, p\} \leq \theta < \infty$, где $u_j = b_j + \frac{1}{\theta}$, для $j = 1, \dots, m$.

Пусть $\theta = \infty$. Тогда $\max\{2, p, \theta\} = \infty$. Значит $1 / \max\{2, p, \theta\} = 0$. Следовательно,

учитывая, что $b_j \in SVL[1, \infty)$, для $j = 1, \dots, m$ нетрудно убедиться в том, что

$$\prod_{j=1}^m b_j(2^{s_j}) s_j^{\frac{1}{\max\{2, p, \theta\}}} = \prod_{j=1}^m b_j(2^{s_j}) \leq C \prod_{j=1}^m b_j(2^{2^{\nu_j}}),$$

для $s_j = [2^{\nu_j-1}] + 1, \dots, [2^{\nu_j}]$, $j = 1, \dots, m$. Поэтому

$$\begin{aligned} \prod_{j=1}^m b_j(2^{s_j}) s_j^{\frac{1}{\max\{2, p, \theta\}}} \|\delta_{\bar{s}}(f)\|_p &= \prod_{j=1}^m b_j(2^{s_j}) \|\delta_{\bar{s}}(f)\|_p \leq C \prod_{j=1}^m b_j(2^{2^{\nu_j}}) \|\delta_{\bar{s}}(f)\|_p \\ &\leq C \prod_{j=1}^m b_j(2^{2^{\nu_j}}) \left(\sum_{s_m=[2^{\nu_m-1}]+1}^{2^{\nu_m}} \dots \sum_{s_1=[2^{\nu_1-1}]+1}^{2^{\nu_1}} \|\delta_{\bar{s}}(f)\|_p^\gamma \right)^{\frac{1}{\gamma}} \\ &\leq C \prod_{j=1}^m b_j(2^{2^{\nu_j}}) \left\| \sum_{s_m=[2^{\nu_m-1}]+1}^{2^{\nu_m}} \dots \sum_{s_1=[2^{\nu_1-1}]+1}^{2^{\nu_1}} \delta_{\bar{s}}(f) \right\|_p, \end{aligned}$$

для $s_j = [2^{\nu_j-1}] + 1, \dots, [2^{\nu_j}]$, $j = 1, \dots, m$. Следовательно,

$$\sup_{\bar{s} \in \mathbb{Z}_+^m} \prod_{j=1}^m b_j(2^{s_j}) s_j^{\frac{1}{\max\{2, p, \theta\}}} \|\delta_{\bar{s}}(f)\|_p \leq C \sup_{\bar{\nu} \in \mathbb{Z}_+^m} \prod_{j=1}^m b_j(2^{2^{\nu_j}}) \left\| \sum_{s_m=[2^{\nu_m-1}]+1}^{2^{\nu_m}} \dots \sum_{s_1=[2^{\nu_1-1}]+1}^{2^{\nu_1}} \delta_{\bar{s}}(f) \right\|_p.$$

Значит $S_{p, \theta}^{0, \bar{b}(\cdot)} \mathbf{B} \subset S_{p, \theta}^{0, \bar{u}(\cdot)} B$, в случае $1 < \gamma = \max\{2, p, \theta\}$, $\theta = \infty$. $\square$

Доказательство теоремы 17. Пусть $f \in S_{p, \theta}^{0, \bar{b}(\cdot)} B$. Если $1 < \tau < \theta < \infty$, применяя неравенство Гёльдера при $\eta = \frac{\theta}{\tau}$, $\frac{1}{\tau} + \frac{1}{\eta} = 1$ получим

$$\begin{aligned} \left\{ \sum_{s_m=1}^{\infty} \dots \sum_{s_1=1}^{\infty} \prod_{j=1}^m s_j^{1-\frac{\tau}{p}} \|\delta_{\bar{s}}(f)\|_p^\tau \right\}^{\frac{1}{\tau}} &\leq \left\{ \sum_{s_m=1}^{\infty} \dots \sum_{s_1=1}^{\infty} \prod_{j=1}^m b_j^\theta(2^{s_j}) \|\delta_{\bar{s}}(f)\|_p^\theta \right\}^{\frac{1}{\theta}} \\ &\times \left\{ \sum_{s_m=1}^{\infty} \dots \sum_{s_1=1}^{\infty} \prod_{j=1}^m b_j^{-\tau\eta'}(2^{s_j}) s_j^{\left(\frac{1}{\tau}-\frac{1}{p}\right)\tau\eta'} \right\}^{\frac{1}{\tau\eta'}}. \quad (30) \end{aligned}$$

Согласно условию (2) из неравенства (30) следует, что

$$\sum_{s_m=1}^{\infty} \dots \sum_{s_1=1}^{\infty} \prod_{j=1}^m s_j^{1-\frac{\tau}{p}} \|\delta_{\bar{s}}(f)\|_p^\tau < \infty.$$

В [21] доказано, что

$$\|f\|_{p, \tau}^* << \left\{ \sum_{s_m=1}^{\infty} \dots \sum_{s_1=1}^{\infty} \prod_{j=1}^m s_j^{1-\frac{\tau}{p}} \|\delta_{\bar{s}}(f)\|_p^\tau \right\}^{\frac{1}{\tau}}. \quad (31)$$

Следовательно $S_{p,\theta}^{0,\bar{b}(\cdot)} B \subset L_{p,\tau}^*(\mathbb{T}^m)$, $1 < \tau < \theta < \infty$.

Если $\theta = \infty$, то из формулы (31) получим

$$\|f\|_{p,\tau}^* < \left\{ \sum_{s_m=1}^{\infty} \cdots \sum_{s_1=1}^{\infty} \prod_{j=1}^m b_j^{-\tau} (2^{s_j})_{s_j}^{\left(\frac{1}{\tau}-\frac{1}{p}\right)\tau} \right\}^{\frac{1}{\tau}} \sup_{\bar{s} \in \mathbb{Z}_+} \prod_{j=1}^m b_j(2^{s_j}) \|\delta_{\bar{s}}(f)\|_p. \quad (32)$$

В силу условия (2) из неравенства (32) следует, что $S_{p,\theta}^{0,\bar{b}(\cdot)} B \subset L_{p,\tau}^*(\mathbb{T}^m)$, в случае $\theta = \infty$.

Если $1 < \theta \leq \tau < \infty$, то применяя лемму 19 из формулы (31) согласно условию (3) получим, что $S_{p,\theta}^{0,\bar{b}(\cdot)} B \subset L_{p,\tau}^*(\mathbb{T}^m)$. $\square$

Автор благодарен рецензентам за замечания к тексту статьи и С.Ю. Тихонову за обсуждение результатов.

Список литературы

- [1] С.Г. Крейн, Ю.И. Петунин, Е.М. Семенов, *Интерполяция линейных операторов*, Наука, М., 1978.
- [2] A.P. Blozinski, *Multivariate rearrangements and Banach function spaces with mixed norms*, Trans. Amer. Math. Soc. **263** (1), 149–167 (1981).
DOI: <https://doi.org/10.2307/1998649>
- [3] V.I. Kolyada, *On embedding theorems*, In Nonlinear Analysis, Function Spaces and Applications, Proceedings of the Spring School held in Prague, Vol. 8, 35–94 (2007).
URL: <https://dml.cz/handle/10338.dmlcz/702492>
- [4] Е.Д. Нурсултанов, *О коэффициентах кратных рядов Фурье из L_p -пространств*, Изв. РАН. Сер. матем. **64** (1), 95–122 (2000).
DOI: <https://doi.org/10.4213/im275>
- [5] С.М. Никольский, *Приближение функций многих переменных и теоремы вложения*, Наука, М., 1977.
- [6] П.И. Лизоркин, С.М. Никольский, *Пространства функций смешанной гладкости с декомпозиционной точки зрения*, Тр. МИАН СССР **187**, 143–161 (1989).
URL: <https://www.mathnet.ru/rus/tm1807>
- [7] М.К. Потапов, *Изучение некоторых классов функций при помощи приближения “углом”*, Тр. МИАН СССР, **117**, 256–291 (1972).
URL: <https://www.mathnet.ru/rus/tm3100>
- [8] М.К. Потапов, *Теоремы вложения смешанной метрике*, Тр. МИАН СССР **156**, 143–156 (1980).
URL: <https://www.mathnet.ru/rus/tm2415>

-
- [9] С.М. Никольский, *Неравенства для целых функций конечной степени и их применение в теории дифференцируемых функций многих переменных*, Тр. МИАН СССР **38**, 244–278 (1951).
URL: <https://www.mathnet.ru/rus/tm1119>
- [10] О.В. Бесов, *Исследование одного семейства функциональных пространств в связи с теоремами вложения и продолжения*, Тр. МИАН СССР **60**, 42–81 (1961).
URL: <https://www.mathnet.ru/rus/tm1480>
- [11] F. Cobos, O. Dominguez, *On Besov spaces of logarithmic smoothness and Lipschitz spaces*, J. Math. Anal. Appl. **425** (1), 71–84 (2015).
DOI: <https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2014.12.034>
- [12] F. Cobos, O. Dominguez, H. Triebel, *Characterizations of logarithmic Besov spaces in terms of differences, Fourier-analytical decompositions, wavelets and semi-groups*, J. Funct. Anal. **270** (12), 4386–4425 (2016).
DOI: <https://doi.org/10.1016/j.jfa.2016.03.007>
- [13] O. Dominguez, S. Tikhonov, *Function spaces of logarithmic smoothness: embedding and characterizations*, Preprint, arXiv:1811.06399 [math.FA], 2018.
URL: <https://arxiv.org/abs/1811.06399>
- [14] S. Artamonov, K.V. Runovskii, H.-J. Schmeisser, *Besov spaces with generalized smoothness and summability of multiple Fourier series*, J. Approx. Theory **284**, art. 105822 (2022).
DOI: <https://doi.org/10.1016/j.jat.2022.105822>
- [15] С.М. Никольский, *Функции с доминирующей смешанной производной, удовлетворяющей кратному условию Гёльдера*, Сиб. матем. журн. **4** (6), 1342–1364 (1963).
URL: <https://www.mathnet.ru/rus/smj4971>
- [16] Т.И. Аманов, *Пространства дифференцируемых функций с доминирующей смешанной производной*, Наука, Алма-Ата, 1976.
- [17] Н.К. Бари, С.Б. Стечкин, *Наилучшие приближения и дифференциальные свойства двух сопряженных функций*, Тр. ММО **5**, 483–522 (1956).
URL: <https://www.mathnet.ru/rus/mmo56>
- [18] D.E. Edmunds, W.D. Evans, *Hardy operators, function spaces and embedding*, Springer-Verlag, Berlin, 2004.
DOI: <https://doi.org/10.1007/978-3-662-07731-3>
- [19] Н. Темиргалиев, *О вложении классов H_p^ω в пространства Лоренца*, Сиб. матем. журн. **24** (2), 160–172 (1983).
URL: <https://www.mathnet.ru/rus/smj6703>
- [20] Г. Акишев, *Теоремы вложения пространств со смешанной логарифмической гладкостью*, Традиционная международная апрельская математическая конференция в честь Дня науки Республики Казахстан: Тезисы докладов, 60–62 (2023).

- [21] Г. Акишев, *О порядках приближения функций многих переменных в пространстве Лоренца*, Тр. ИММ УрО РАН **22** (4), 13–28 (2016).
DOI: <https://doi.org/10.21538/0134-4889-2016-22-4-13-28>
- [22] Н. Johansson, *Embedding of H_p^ω in some Lorentz spaces*, Research Reports. Univ. Umeå, Report No. 6 (1975).
- [23] G. Akishev, *Estimates of the order of approximation of functions of several variables in the generalized Lorentz space*, Preprint: arXiv: 2105.14810v1 (2021).
URL: <https://arxiv.org/abs/2105.14810>
- [24] M.K. Potapov, B.V. Simonov, S.Yu. Tikhonov, *Mixed moduli of smoothness in L_p , $1 < p < \infty$: a survey*, Surveys in Approximation Theory **8**, 1–57 (2013).
URL: <https://www.emis.de/journals/SAT/papers/18/index.html>
- [25] В.Н. Темляков, *Приближение функций с ограниченной смешанной производной*, Тр. МИАН СССР **178**, 3–113 (1986).
URL: <https://www.mathnet.ru/rus/tm2107>

Габдолла Акишев

Казахстанский филиал

Московского государственного университета имени М.В. Ломоносова,
ул. Кажымукана, д. 11, г. Астана, 100001, Казахстан,

Институт математики и математического моделирования,

ул. Пушкина, д. 125, г. Алматы, 050010, Казахстан,

e-mail: akishev_g@mail.ru

On a function space with mixed generalized logarithmic smoothness

G. Akishev

Abstract. We consider the anisotropic Lorentz space of 2π -periodic functions of m variables and the Nikol'skii–Besov space of functions with mixed generalized logarithmic smoothness. Embedding theorems are proved for spaces of functions with mixed generalized logarithmic smoothness.

Keywords: Lorentz space, Nikol'ski–Besov class, generalized smoothness.

DOI: 10.26907/2949-3919.2024.2.4-29

References

- [1] S.G. Krein, Yu.I. Petunin, E.M. Semenov, *Interpolation of linear operators*, Ser. Translat. Math. Monographs **54**, AMS, Providence, R.I., 1982.
- [2] A.P. Blozinski, *Multivariate rearrangements and Banach function spaces with mixed norms*, Trans. Amer. Math. Soc. **263** (1), 149–167 (1981).
DOI: <https://doi.org/10.2307/1998649>
- [3] V.I. Kolyada, *On embedding theorems*, In Nonlinear Analysis, Function Spaces and Applications, Proceedings of the Spring School held in Prague, Vol. 8, 35–94 (2007).
URL: <https://dml.cz/handle/10338.dmlcz/702492>
- [4] E.D. Nursultanov, *On the coefficients of multiple Fourier series in L_p -spaces*, Izv. Math. **64** (1), 93–120 (2000).
DOI: <https://doi.org/10.1070/im2000v064n01ABEH000275>
- [5] S.M. Nikol'skii, *Approximation of functions of several variables and embedding theorems*, Nauka, Moscow, 1977 [in Russian].
- [6] P.I. Lizorkin, S. M. Nikol'skii, *Functional spaces of mixed smoothness from decompositional point of view*, Proc. Steklov Inst. Math. **187**, 163–184 (1990).
- [7] M.K. Potapov, *The study of certain classes of functions by means of “angular” approximation*, Proc. Steklov Inst. Math. **117**, 301–342 (1972).

Acknowledgements. This work was supported by a grant the Committee of Science of the Ministry of Science and Higher Education of the Republic of Kazakhstan (project AP19677486).

Received: 26 March 2024. Accepted: 02 July 2024. Published: 16 July 2024.

- [8] M.K. Potapov, *Imbedding theorems in a mixed metric*, Proc. Steklov Inst. Math. **156**, 155–171 (1983).
- [9] S.M. Nikol'skii, *Inequalities for entire functions of finite degree and their application in the theory of differentiable functions of several variables*, Tr. Mat. Inst. Steklov **38**, 244–278 (1951) [in Russian].
URL: <https://www.mathnet.ru/rus/tm1119>
- [10] O.V. Besov, *Investigation of a class of function spaces in connection with imbedding and extension theorems*, Tr. Mat. Inst. Steklov **60**, 42–81 (1961) [in Russian].
URL: <https://www.mathnet.ru/rus/tm1480>
- [11] F. Cobos, O. Dominguez, *On Besov spaces of logarithmic smoothness and Lipschitz spaces*, J. Math. Anal. Appl. **425** (1), 71–84 (2015).
DOI: <https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2014.12.034>
- [12] F. Cobos, O. Dominguez, H. Triebel, *Characterizations of logarithmic Besov spaces in terms of differences, Fourier-analytical decompositions, wavelets and semi-groups*, J. Funct. Anal. **270** (12), 4386–4425 (2016).
DOI: <https://doi.org/10.1016/j.jfa.2016.03.007>
- [13] O. Dominguez, S. Tikhonov, *Function spaces of logarithmic smoothness: embedding and characterizations*, Preprint, arXiv:1811.06399 [math.FA], 2018.
URL: <https://arxiv.org/abs/1811.06399>
- [14] S. Artamonov, K.V. Runovskii, H.-J. Schmeisser, *Besov spaces with generalized smoothness and summability of multiple Fourier series*, J. Approx. Theory **284**, art. 105822 (2022).
DOI: <https://doi.org/10.1016/j.jat.2022.105822>
- [15] S. M. Nikol'skii, *Functions with dominating mixed derivatives satisfying multiple Hölder conditions*, Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2 **102**, 27–51 (1973).
- [16] T.I. Amanov, *Spaces of differentiable functions with dominating mixed derivatives*, Alma-Ata, Nauka, 1976.
- [17] N.K. Bary, S.B. Stechkin, *Best approximations and differential properties of two conjugate functions*, Tr. Mosk. Mat. Obs. **5**, 483–522 (1956) [in Russian].
URL: <https://www.mathnet.ru/rus/mmo56>
- [18] D.E. Edmunds, W.D. Evans, *Hardy operators, function spaces and embedding*, Springer-Verlag, Berlin, 2004.
DOI: <https://doi.org/10.1007/978-3-662-07731-3>
- [19] N. Temirgaliev, *Embeddings of the classes H_p^ω in Lorentz spaces*, Sib. Math. J. **24** (2), 287–298 (1983).
DOI: <https://doi.org/10.1007/BF00968743>
- [20] G. Akishev, *Embedding theorems for spaces with mixed logarithmic smoothness*, Traditional International April Mathematical Conference In Honor of the Kazakhstan Day of science

workers, 60–62 (2023).

- [21] G. Akishev, *On approximation orders of functions of several variables in the Lorentz space*, Proc. Steklov Inst. Math. **300** (Suppl 1), 9–24 (2018).
DOI: <https://doi.org/10.1134/S0081543818020037>
- [22] H. Johansson, *Embedding of H_p^ω in some Lorentz spaces*, Research Reports. Univ. Umeå, Report No. 6 (1975).
- [23] G. Akishev, *Estimates of the order of approximation of functions of several variables in the generalized Lorentz space*, Preprint: arXiv: 2105.14810v1 (2021).
URL: <https://arxiv.org/abs/2105.14810>
- [24] M.K. Potapov, B.V. Simonov, S.Yu. Tikhonov, *Mixed moduli of smoothness in L_p , $1 < p < \infty$: a survey*, Surveys in Approximation Theory **8**, 1–57 (2013).
URL: <https://www.emis.de/journals/SAT/papers/18/index.html>
- [25] V.N. Temlyakov, *Approximation of functions with bounded mixed derivative*, Proc. Steklov Inst. Math. **178**, 1–121 (1989).

Gabdolla Akishev

Lomonosov Moscow University, Kazakhstan Branch,
11 Kazhymukan str., Astana 100001, Kazakhstan,
Institute of mathematics and mathematical modeling,
125 Pushkin str., Almaty 050010, Kazakhstan,
e-mail: akishev_g@mail.ru