

Монотонно линейно связные множества в геометрической теории приближения и ее приложениях

А.Р. Алимов, И.Г. Царьков

Аннотация. В последнее время активно развивается направление геометрической теории приближений, связанное с понятием монотонных множеств. Особенно полезным в различных приложениях является понятие монотонно линейно связного множества. Цель настоящей работы – дать краткий, но емкий обзор по этой проблематике, а также показать взаимосвязь с ключевыми свойствами приближающих множеств. К таким свойствам относятся характеристики элементов наилучшего приближения, а также свойства единственности и устойчивости.

Ключевые слова: монотонно линейно связное множество, чебышевское множество, солнце, наилучшее приближение, устойчивость наилучшего приближения, ассоциированная норма.

DOI: 10.26907/2949-3919.2024.2.30-46

Введение

Одним из важных направлений теории приближений является геометрическая теория приближений, проблематика которой и классические результаты подробно изложены в монографиях [1, 2] и обзорах [3, 4]. В настоящей работе мы освещаем современные результаты геометрической теории приближения, связанные с монотонной линейной связностью множеств и ее приложениями. Монотонная линейная связность является ослаблением свойства выпуклости. Понятие монотонной линейной связности находит применение в различных областях математики и ее приложений. В частности, теорему типа Куна–Таккера удастся перенести со случая выпуклого множества на случай монотонно линейно связных множеств.

Ниже $X = (X, \|\cdot\|)$ – действительное линейное нормированное пространство. Далее:

- $B(x, r) = \{y \in X \mid \|x - y\| \leq r\}$ – замкнутый шар с центром x и радиусом r ;
- $\mathring{B}(x, r) = \{y \in X \mid \|x - y\| < r\}$ – открытый шар с центром x и радиусом r ;
- $S(x, r) = \{y \in X \mid \|x - y\| = r\}$ – сфера с центром x и радиусом r .

Благодарности. Работа выполнена в МГУ имени М. В. Ломоносова за счет гранта Российского научного фонда (проект № 22-11-00129).

© 2024 А.Р. Алимов, И.Г. Царьков

Поступила: 08.04.2024. Принята: 04.06.2024. Опубликовано: 16.07.2024.

В частном случае $B := B(0, 1)$, $S = S(0, 1)$ – единичные шар и сфера.

Величиной наилучшего приближения или расстоянием от заданного элемента x линейного нормированного пространства X до заданного непустого множества $M \subset X$ называется величина $\rho(x, M) := \inf_{y \in M} \|x - y\|$. Множество всех ближайших точек (элементов наилучшего приближения) в M для заданного x обозначается $P_M x$, т. е.

$$P_M x := \{y \in M \mid \rho(x, M) = \|x - y\|\}.$$

Оператор $x \mapsto P_M x$ называется *оператором метрической проекции*.

1. Моноotonно линейно связные и m-связные множества

1.1. ОПРЕДЕЛЕНИЕ (ВМ)-ПРОСТРАНСТВ. При изучении связности солнц в конечномерных пространствах А.Л. Браун [5] ввел класс (ВМ) линейных нормированных пространств (см. также [6, § 3.1]). В таких пространствах оказалось возможным установить ряд нетривиальных результатов о геометрическо-топологических свойствах солнц (см. § 2.1 ниже).

Определение 1. Пространство X называется (ВМ)-пространством, если

$$B(0, \|x\|) \cap (m(x, y) \setminus \{x\}) \neq \emptyset \quad (1)$$

при условии, что $[x, x - y] \cap \mathring{B}(0, \|x\|) = \emptyset$, $x \neq 0$.

Здесь и далее $m(M)$ – пересечение *всех* замкнутых шаров, содержащих множество M , и, в частности, $m(x, y)$ – пересечение всех замкнутых шаров, содержащих точки x, y (оболочка Банаха–Мазура точек x и y ; см. [1, § 7.7.1]).

Класс (ВМ)-пространств содержит в себе все гладкие пространства, все двумерные пространства с полигональным единичным шаром, пространства ℓ_n^∞ , c_0 , c , ℓ^∞ , все замкнутые идеалы пространства $C(Q)$, все подрешетки $C(Q)$ с единицей (см. [6, § 3.1.1]). Строго выпуклое пространство лежит в классе (ВМ) тогда и только тогда, когда оно гладкое [5]. Пространства ℓ^1 , ℓ_n^1 , $n \geq 3$, не принадлежат классу (ВМ).

В пространстве $C(Q)$ (Q – компактное хаусдорфово пространство) структура оболочки Банаха–Мазура $m(x, y)$ вполне ясна:

$$m(x, y) = \{z \mid z(q) \in [x(q), y(q)], \quad q \in Q\} =: \llbracket x, y \rrbracket. \quad (2)$$

Аналогичное представление также верно и в пространстве $C_0(Q)$.

1.2. АССОЦИИРОВАННАЯ НОРМА. ТЕОРЕМА РЕЙНУОТЕРА–СИМОНСА О СЛАБОЙ СХОДИМОСТИ ДЛЯ АССОЦИИРОВАННОЙ НОРМЫ. Ниже $\text{ext } S$ – множество экстремальных (крайних) точек единичной сферы S , $\text{ext } S^*$ – множество экстремальных (крайних) точек сопряженной единичной сферы S^* .

В дальнейшем нам потребуется понятие ассоциированной нормы (см. [1, § 7.7], [6, § 3.2.1]). Напомним определения двух важных классов пространств.

Класс (MeI) пространств X определяется¹ следующим образом:

$$m(x, y) = \llbracket x, y \rrbracket \quad \text{для всех } x, y \in X. \quad (\text{MeI})$$

Здесь

$$\llbracket x, y \rrbracket := \{z \in X \mid \min\{\varphi(x), \varphi(y)\} \leq \varphi(z) \leq \max\{\varphi(x), \varphi(y)\} \quad \forall \varphi \in \text{ext } S^*\} \quad (3)$$

– *сегмент* $\llbracket x, y \rrbracket$ (см. [1, § 7.7.2]).

В условии (MeI) включение

$$m(x, y) \supset \llbracket x, y \rrbracket \quad (4)$$

имеет место в любом X ; равенство $m(x, y) = \llbracket x, y \rrbracket$ (см. (MeI)) выполнено, в частности, в любом сепарабельном пространстве (см. [6, § 3.2.1]).

Также рассмотрим класс² пространств (Ex- w^* s), введенный Франкетти и Роверси:

$$\text{ext } S^* \text{ является } w^*\text{-сепарабельным.} \quad (\text{Ex-}w^*\text{s})$$

В определении класса (Ex- w^* s) мы всегда предполагаем, что

$$F = (f_i)_{i \in I} \subset \text{ext } S^* \text{ является } w^*\text{-плотным в } \text{ext } S^*, \quad \text{card } I \leq \aleph_0, \quad F = -F.$$

Любое пространство из класса (Ex- w^* s) имеет w^* -сепарабельный единичный шар. Далее, хорошо известно, что если X – сепарабельное линейное нормированное пространство, то w^* -топология единичного шара B^* сопряженного пространства X^* метризуема. Отсюда следует, что *любое сепарабельное пространство лежит в классе (Ex- w^* s)*. Класс (Ex- w^* s) также содержит *несепарабельное* пространство ℓ^∞ .

Определение 2. Пусть пространство X принадлежит классу (Ex- w^* s), а $F = (f_i)_{i \in I}$ – семейство функционалов из определения класса (Ex- w^* s); пусть также $(\alpha_i) \subset \mathbb{R}$, $\alpha_i > 0$, $i \in I$, $\text{card } I \leq \aleph_0$, и $\sum \alpha_i < \infty$. Для $x \in X$ положим

$$|x| = \sum_{i \in I} \alpha_i |f_i(x)|. \quad (5)$$

Тогда $|\cdot|$ – норма на X , которую, следуя А.Л. Брауну [5], мы называем *ассоциированной (по Брауну)*. Ясно, что $|x| \leq \|x\| \sum \alpha_i$.

Отметим ряд свойств ассоциированной нормы (см. [1, 6]).

¹Сокращение (MeI) происходит от английского “The hull $m(x, y)$ equals the interval $\llbracket x, y \rrbracket$ for all x, y ”.

²Сокращение (Ex- w^* s) происходит от немецкого “Die Extrempunktmenge der konjugierten Einheitskugel ist w^* -separabel”.

Предложение 3. Пусть $X \in (\text{Ex-}w^*s)$ и $F = (f_i)_{i \in I}$ – соответствующее семейство функционалов из определения класса $(\text{Ex-}w^*s)$. Тогда:

- a) $x_n \xrightarrow{|\cdot|} x \Rightarrow f_i(x_n) \rightarrow f_i(x)$ для любого $f_i \in F$;
- b) $(x_n) - |\cdot|$ -последовательность Коши $\Leftrightarrow (f_i(x_n))$ сходится в $\mathbb{R}$ для любого $i \in I$;
- c) $x_n \xrightarrow{|\cdot|} x \Rightarrow \|x\| \leq \liminf \|x_n\|$;
- d) любой замкнутый шар $|\cdot|$ -замкнут; как следствие, $m(M) - |\cdot|$ -замкнуто для любого ограниченного множества $M \subset X$;
- e) $x_n \xrightarrow{|\cdot|} x \Rightarrow x_n \xrightarrow{w} x$;
- f) если $F - \|\cdot\|$ -плотно в $\text{ext } S^*$, то $x_n \xrightarrow{|\cdot|} x \Leftrightarrow x_n \xrightarrow{w} x$ (это условие выполнено, например, для пространства c_0);
- g) если $A \subset X - \|\cdot\|$ -компактно, то ε -расширение $A_\varepsilon := \{x \in X \mid \rho(x, A) \leq \varepsilon\}$ множества $A - |\cdot|$ -замкнуто в X .

Нам потребуется обобщение классической теоремы Рейнуотера–Симонса (см., например, [7, § 3.11.8.5]) на случай сходимости относительно ассоциированной нормы $|\cdot|$ на пространствах класса $(\text{Ex-}w^*s)$ (в частности, на сепарабельных пространствах). Такое обобщение позволяет при исследовании монотонной связности солнц и чебышевских множеств³ применить аппарат метрической выпуклости для ассоциированной нормы $|\cdot|$. Теорема Рейнуотера–Симонса утверждает, что ограниченная последовательность (x_n) в банаховом пространстве X слабо сходится к $x \in X$, если и только если последовательность $(f(x_n))$ сходится к $f(x)$ для каждого функционала f из произвольной фиксированной границы Джеймса пространства X (например, для всех $f \in \text{ext } S^*$). Таким образом, хотя в общем случае слабая сходимость не метризуема, имеется норма на $X \in (\text{Ex-}w^*s)$, относительно которой сходимость последовательностей равносильна слабой сходимости. Здесь напомним (см., например, [7, § 3.11.8]), что подмножество A единичной сферы S^* сопряженного пространства X^* называется *границей* (Джеймса) для пространства X , если для каждого $x \in X$ найдется $f \in A$ такой, что $f(x) = \|x\|$.

Отметим следующее обобщение классической теоремы Рейнуотера–Симонса (см. [8]). Пусть $X \in (\text{Ex-}w^*s)$ – банахово пространство, $F := (f_i)_{i \in I} \subset \text{ext } S^*$ – набор функционалов из определения класса $(\text{Ex-}w^*s)$. Пусть $(x_n) - |\cdot|$ -ограниченная последовательность в X . Рассмотрим следующие условия:

- a) $x_n \xrightarrow{|\cdot|} x$;
- b) $f_i(x_n) \rightarrow f_i(x)$ для любого $i \in I$;
- c) $x_n \xrightarrow{w} x$.

³Множество M называется *чебышевским*, если оно есть множество существования и единственности, т. е. множество $P_M x$ одноточечно для любого $x \in X$. Множество M называется *солнцем*, если любая точка $x \notin M$ является точкой солнечности, что по определению означает, что существует точка $y \in P_M x \neq \emptyset$ (точка светимости) такая, что $y \in P_M((1 - \lambda)y + \lambda x)$ для всех $\lambda \geq 0$ (геометрически это означает, что из точки y исходит “солнечный” луч, проходящий через x , для каждой точки которого точка y является ближайшей из M). Множество M называется строгим солнцем, если для любого $x \notin M - P_M x \neq \emptyset$ и любая точка $y \in P_M x$ является точкой светимости.

Тогда условия а) и б) эквивалентны, любое из них обеспечивается выполнением условия с). При этом, если X^* сепарабельно, то все три условия эквивалентны.

Отметим, что $\|\cdot\|$ -ограниченная последовательность $|\cdot|$ -ограничена, а также, что $(X, |\cdot|)$ является пространством Шура, т.е. в нем слабо сходящиеся последовательности сходятся по норме.

1.3. МОНОТОННО ЛИНЕЙНО СВЯЗНЫЕ МНОЖЕСТВА.

Определение 4. Замкнутое множество $M \subset X$ называется *монотонно линейно связным*, если любые две точки из M можно соединить непрерывной монотонной кривой (дугой) $k(\cdot) \subset M$; здесь непрерывная кривая $k(\tau)$, $0 \leq \tau \leq 1$, в линейном нормированном пространстве X называется *монотонной*, если $f(k(\tau))$ является монотонной функцией по τ для любого $f \in \text{ext } S^*$ (по поводу дальнейших деталей см. [1, § 7.7.3]).

Определение 5. Множество $M \subset X$ называется *m-связным* (связным по Менгеру), если $m(x, y) \cap M \neq \{x, y\}$ для любых различных точек $x, y \in M$.

Любое выпуклое множество монотонно линейно связно; пересечение монотонно линейно связного множества и промежутка⁴ монотонно линейно связно. Монотонно линейно связное множество всегда B -линейно связно (т.е. его пересечение с любым замкнутым – а следовательно, и с открытым – шаром линейно связно).

Замечание 6. Используя (4), нетрудно проверить, что *монотонно линейно связное множество необходимо m-связно*. Однако (в бесконечномерном случае) *обратное утверждение может нарушаться даже для замкнутых множеств* – соответствующий пример в пространстве $C[0, 1]$ предложен К. Франкетти и С. Роверси: пусть $M = M_1 \cup M_{-1}$, где $M_\sigma = \{x \in C[0, 1] \mid x(0) = \sigma\}$, $\sigma = \pm 1$. Тогда M состоит из двух выпуклых непересекающихся компонент, однако множество M m-связно.

Отметим, что в c_0 и в произвольном конечномерном пространстве эти свойства эквивалентны для замкнутых множеств (см. [6, § 3.2.2]). Также отметим, что в конечномерных пространствах X со свойством $\overline{\text{ext } S^*} = S^*$ класс монотонно линейно связных (m-связных) замкнутых множеств совпадает с классом замкнутых выпуклых множеств – в таких пространствах X всегда имеет место равенство $m(x, y) = [x, y]$ для любых $x, y \in X$.

Далее, если Q обозначает некоторое свойство (например, “связность”), мы будем говорить, что замкнутое множество M обладает свойством:

- P - Q , если при всех $x \in X$ множество $P_M x$ непусто и обладает свойством Q ;
- B - Q , если $M \cap B(x, r)$ обладает свойством Q при всех $x \in X$, $r > 0$;
- $\overset{\circ}{B}$ - Q , если $M \cap \overset{\circ}{B}(x, r)$ обладает свойством Q при всех $x \in X$, $r > 0$.

К примеру, замкнутое подмножество конечномерного пространства P -непусто, т.е. является множеством существования.

⁴Промежуток – это множество M со свойством $[[x, y]] \subset M$ при условии, что $x, y \in M$ (см. (3)).

Приведем основной результат о связи монотонно линейно связных и m -связных множеств (см. [9]). В [теореме 7](#) экстремальная ограниченная клеточноподобность понимается следующим образом: если пересечение множества M с брусом⁵ ограничено, то оно клеточноподобно (см. [1, § 10.4.2]).

Теорема 7. Пусть X – банахово пространство из класса $(\text{MeI}) \cap (\text{Ex-}w^*s)$ (в частности, X – сепарабельное пространство), и пусть множество $M \subset X$ замкнуто и m -связно. Предположим, что выполнено хотя бы одно из следующих условий:

- а) M ограничено компактно (в норме $\|\cdot\|$);
- б) M является $|\cdot|$ -замкнутым, а $m(x, y)$ $|\cdot|$ -компактно для любых $x, y \in X$;
- с) $m(x, y)$ является $\|\cdot\|$ -компактным для любых $x, y \in X$.

Тогда M монотонно линейно связно.

Если вдобавок множество M ограничено компактно, то оно P - и B -клеточноподобно, P - и B -ациклично (относительно любой непрерывной теории (ко)гомологий) и является солнцем.

Если X конечномерно, то, дополнительно, M экстремально стягиваемо (в частности, P - и B -стягиваемо) и на множество M существует непрерывная (аддитивная или, эквивалентно, мультипликативная) ε -выборка для всех $\varepsilon > 0$.

Предложение 8. Пусть X – банахово пространство из класса $(\text{MeI}) \cap (\text{Ex-}w^*s)$ (в частности, X – сепарабельное пространство), и пусть последовательность (x_n) стремится к x по норме $|\cdot|$ и монотонно (последнее означает, что $f(x_n) \rightarrow f(x)$ монотонно для любого $f \in \text{ext } S^*$). Тогда $x_n \xrightarrow{\|\cdot\|} x$.

Отметим еще один близкий результат [10].

Предложение 9. Пусть (x_n) слабо сходится к элементу x монотонно относительно функционалов из $\text{ext } S^*$. Тогда $\|x_n - x\| \rightarrow 0$.

Для слабо компактных множеств имеет место следующий результат (см. [9]).

Теорема 10. Пусть X – сепарабельное банахово пространство, и пусть $\emptyset \neq M \subset X$ ограничено слабо компактно. Предположим, что M m -связно. Тогда M монотонно линейно связно.

Имеет место следующий предельный результат (см., например, [6, теорема 3.25]).

Теорема 11. Пусть $X \in (\text{MeI}) \cap (\text{Ex-}w^*s)$ (в частности, X – сепарабельное банахово пространство), и пусть (M_i) – последовательность m -связных подмножеств пространства X . Тогда:

⁵Ниже под брусом мы будем понимать пересечения экстремальных гиперполос вида $\{x \in X \mid a \leq f(x) \leq b\}$, $-\infty \leq a \leq b \leq +\infty$, $f \in \text{ext } S^*$, порождаемых в исходном пространстве экстремальными функционалами из S^* . Частным случаем бруса является замкнутый единичный шар.

- а) если $M_1 \supset M_2 \supset \dots \supset M_i \supset \dots$ и если каждое из множеств M_i ограничено компактно, то множество $\bigcap_{i=1}^{\infty} M_i$ монотонно линейно связно;
- б) если $M_1 \subset M_2 \subset \dots \subset M_i \subset \dots$ и $M_i \subset H$, где H – ограничено компактное множество в X , то множество $K := \overline{\bigcup_{i=1}^{\infty} M_i}$ монотонно линейно связно.

Пусть пространство X лежит в классе $(\text{MeI}) \cap (\text{Ex-}w^*s)$ (в частности, X – сепарабельное линейное нормированное пространство), и пусть $F = (f_i) \subset \text{ext } S^* - w^*$ -плотное в $\text{ext } S^*$ семейство из определения класса $(\text{Ex-}w^*s)$. Для каждого $n \in \mathbb{N}$ рассмотрим ограниченный линейный оператор $s_n : X \rightarrow \ell_n^\infty$, определенный как $s_n(x) = (f_1(x), \dots, f_n(x))$. Отметим, что $\|s_n(x)\| \leq \|x\|$ и $\|s_n(x)\| \rightarrow \|x\|$ при $n \rightarrow \infty$.

Теорема 12 (см., например, [6, теорема 3.26]). Пусть X – банахово пространство из класса $(\text{MeI}) \cap (\text{Ex-}w^*s)$ (в частности, X – сепарабельное банахово пространство), и пусть $\emptyset \neq M \subset X$ ограничено компактно. Тогда:

- 1) если M m -связно в X , то $s_n(M)$ монотонно линейно связно в ℓ_n^∞ для всех $n \in \mathbb{N}$;
- 2) если $s_n(M)$ m -связно в ℓ_n^∞ для всех $n \in \mathbb{N}$, то M монотонно линейно связно в X .

Теорема 13 (см., например, [6, теорема 3.27]). Пусть $X \in (\text{MeI}) \cap (\text{Ex-}w^*s)$ – банахово пространство (в частности, X сепарабельно или $X = \ell^\infty$), и пусть множество $\emptyset \neq M \subset X$ ограничено компактно и m -связно. Тогда M P - и B -клеточноподобно, т. е. каждое из множеств

$$P_M x, \quad M \cap B(x, r), \quad x \in X, \quad r > 0,$$

клеточноподобно. В частности, множество M P - и B -ациклично (относительно любой непрерывной теории (ко)гомологий) и является солнцем.

Замечание 14. Ответ на обратный вопрос о монотонной линейной связности B -ациклических (P -ациклических) множеств не так подробно изучен (см. [пример 30](#) ниже).

Замечание 15. В любом линейном нормированном пространстве X из условия, что $M = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} M_n$, где каждое M_n – монотонно линейно связное множество, и $M_n \subset M_{n+1}$ ($n \in \mathbb{N}$), вытекает, что M – монотонно линейно связное множество.

Следствие 16. Множество M монотонно линейно связно тогда и только тогда, когда для любой расширяющейся последовательности шаров, объединение которых содержит M , пересечение с каждым шаром такой последовательности монотонно линейно связно.

Теорема 17 (И.Г. Царьков, [6, теорема 3.28]). Пусть M – монотонно линейно связное непустое множество и N – замкнутый промежуток в пространстве ℓ_n^∞ . Тогда их арифметическая сумма $M + N$ является монотонно линейно связным множеством.

Теорема 18 (И.Г. Царьков, [6, теорема 3.29]). Пусть M – монотонно линейно связное непустое множество в пространстве $C(Q)$, где Q – метрический компакт. Тогда арифметическая сумма $M + \overset{\circ}{B}(0, R)$ ($R > 0$) монотонно линейно связна.

Отметим еще несколько свойств монотонно линейно связных множеств.

1°. Пусть M_α – монотонно линейно связное множество в линейно нормированном пространстве X_α ($\alpha \in A$). Тогда декартово произведение $M = \prod_{\alpha \in A} M_\alpha$ является монотонно линейно связным множеством в пространстве $X = \prod_{\alpha \in A} X_\alpha$ с нормой $\|x\| = \sup_{\alpha \in A} \|x_\alpha\|$, где $x = (x_\alpha)_{\alpha \in A}$.

Пусть X, Y – линейные нормированные пространства. Отображение $F : X \rightarrow Y$ называется *монотонным*, если для любого промежутка $\Pi \subset Y$ его прообраз $F^{-1}(\Pi)$ является промежутком в X .

2°. Пусть $G \subset \mathbb{R}^n$ – выпуклое непустое множество и отображение $F : G \rightarrow \mathbb{R}$ является монотонной функцией на непустом пересечении произвольной прямой в $\mathbb{R}^n$ с множеством G . Тогда множество функций $\{F \circ f(t) \mid f \in C(Q, G)\}$ монотонно линейно связно в пространстве $C(Q, \mathbb{R}^n)$.

3°. Пусть $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ – монотонная непрерывная функция, M – монотонно линейно связное множество в $C(Q, \mathbb{R})$. Тогда множество $M^F := \{F \circ f \mid f \in M\}$ монотонно линейно связно в $C(Q, \mathbb{R})$.

4°. Предположим, что X и Y – линейные нормированные пространства, $F : X \rightarrow Y$ – монотонное непрерывное отображение. Тогда для монотонно линейно связного множества $M \subset X$ множество $F(M)$ монотонно линейно связно в Y .

5°. Пусть $\{M_n\}_{n=1}^\infty$ – вложенная система монотонно линейно связных слабо компактных множеств в сепарабельном пространстве X . Тогда пересечение $\bigcap_{n=1}^\infty M_n$ монотонно линейно связно (см. также [теорему 11](#) выше).

2. Монотонная связность солнц

Напомним, что такое важное понятие, как строгое солнце, есть по сути геометрическая переформулировка характеристического свойства элемента наилучшего приближения (критерий Колмогорова). Отправной точкой при исследовании монотонной связности (в разных смыслах) в теории приближений служит теорема Д. Браесса [11], которая в современных терминах переформулируется следующим образом: каждое *строгое* солнце в пространстве ℓ_n^∞ монотонно линейно связно. Х. Беренс и Л. Хетцельт [12] для более общего случая солнц получили более слабое утверждение, а именно: в ℓ_n^∞ каждое солнце связно по Менгеру (m-связно). Имеет место следующий более сильный результат.

Теорема 19 (см., например, [6, теорема 3.31]). *Непустое подмножество пространства ℓ_n^∞ является солнцем тогда и только тогда, когда оно замкнуто и монотонно линейно связно.*

Отметим, что на плоскости любое солнце монотонно линейно связно. Однако в конечномерных пространствах большей размерности (начиная с размерности 3) есть примеры не монотонно линейно связных чебышевских множеств (которые, конечно, являются солнцами); см. [13] и [пример 30](#) ниже.

2.1. МОНОТОННАЯ ЛИНЕЙНАЯ СВЯЗНОСТЬ СОЛНЦ В (ВМ)-ПРОСТРАНСТВАХ.

Следующий результат [9], характеризующий солнца в (ВМ)-пространствах в терминах монотонной линейной связности, обобщает теорему 19. В нем m -связность установлена А.Л. Брауном [5], а монотонная линейная связность гарантируется теоремой 7.

Теорема 20 (см., например, [6, теорема 3.32]). *В конечномерном (ВМ)-пространстве класс солнц совпадает с классом монотонно линейно связных множеств и совпадает с классом замкнутых m -связных множеств.*

На случай ограниченно компактных солнц в бесконечномерных пространствах теорема 20 обобщается следующим образом (см. [9]).

Теорема 21. *Пусть X – (ВМ)-пространство из класса $(\text{MeI}) \cap (\text{Ex-}w^*s)$ (в частности, X – сепарабельное пространство) и такое, что в нем оболочка $m(x, y) \mid \cdot \mid$ -компактна⁶ для любых $x, y \in X$. Тогда в X любое ограниченно компактное солнце монотонно линейно связно (и, в частности, m -связно).*

Ряд характеристик солнц в полиэдральных (ВМ)-пространствах также дается в [6, теорема 3.40].

2.2. СОЛНЕЧНОСТЬ И МОНОТОННАЯ ЛИНЕЙНАЯ СВЯЗНОСТЬ В ПРОСТРАНСТВЕ ТИПА $C(Q)$. ХАРАКТЕРИЗАЦИЯ МОНОТОННО ЛИНЕЙНО СВЯЗНЫХ МНОЖЕСТВ В ТЕРМИНАХ СОЛНЕЧНОСТИ. Следующий результат дает пример (негладкого) бесконечномерного пространства в котором *всякое* солнце связно (и, более того, монотонно линейно связно).

Теорема 22 (см., например, [6, теорема 3.34]).

- 1) Произвольное солнце в c_0 монотонно линейно связно.
- 2) m -связное (и тем более монотонно линейно связное) аппроксимативно компактное непустое подмножество пространства c_0 является солнцем.

Рассмотрим аналогичный вопрос о связности солнц в пространствах $C(Q)$.

Определение 23. Подмножество $M \subset X$ называется *сильно связным по Менгеру*, если $\llbracket x, y \rrbracket \cap M \neq \{x, y\}$ для любых различных точек $x, y \in M$.

Замечание 24. Обычная *связность по Менгеру* (m -связность) определяется так же, как и сильная связность по Менгеру, с одной только разницей, что сегмент $\llbracket x, y \rrbracket$ заменяется на множество $m(x, y) := \bigcap_{B(z, r) \supset \{x, y\}} B(z, r)$. Как известно, $\llbracket x, y \rrbracket \subset m(x, y)$, и поэтому из сильной связности по Менгеру вытекает обычная связность по Менгеру. Известно, что в сепарабельном пространстве эти связности эквивалентны. До сих пор не известно ни одного примера, когда была бы обычная связность по Менгеру, а сильной не было. Связано это с тем, что не известно примеров пространств, в которых $\llbracket x, y \rrbracket \neq m(x, y)$ (см. (4)).

⁶Это свойство выполнено, в частности, для пространства c_0 (см. §2.2 ниже).

Отметим также, что в определении слабой связности по Менгеру можно ограничиться линейно независимыми наборами $\alpha = (x_1^*, \dots, x_n^*)$.

Теорема 25 (см., например, [6, теорема 3.36]). *В пространстве $C(Q)$ или $\ell^\infty(E)$ ограничено слабо компактное солнце сильно связно по Менгеру и, следовательно, в $C(Q)$ монотонно линейно связно.*

Следствие 26. *В пространстве $C(Q)$ ограничено компактное солнце сильно связно по Менгеру и, следовательно, монотонно линейно связно.*

Из теорем 28 и 25 вытекает следующая характеристика монотонно линейно связных множеств в $C(Q)$ в терминах солнечности.

Теорема 27 (см., например, [6, теорема 3.37]). *В $C(Q)$ ограничено компактное множество является солнцем если и только если оно монотонно линейно связно.*

Следующий результат является обобщением одной известной теоремы Л.П. Власова (см. [4, теорема 4.4]) о солнечности ограничено компактных P -ациклических солнц.

Теорема 28 (см., например, [6, теорема 3.23]). *Монотонно линейно связное ограничено компактное подмножество банахова пространства является солнцем.*

2.3. МОНОТОННАЯ ЛИНЕЙНАЯ СВЯЗНОСТЬ И ЧЕБЫШЕВСКИЕ МНОЖЕСТВА В ПРОИЗВОЛЬНЫХ ПРОСТРАНСТВАХ. Следующую теорему можно рассматривать, как первый результат, в котором солнечность чебышевского множества устанавливается при наложении на него структурных ограничений типа связности.

Теорема 29 (см., например, [1, теорема 10.11]). *Пусть M – монотонно линейно связное подмножество линейного нормированного пространства. Предположим, что $P_M x = \{y\}$ для некоторого $x \notin M$. Тогда x – точка солнечности (y – точка светимости).*

Как следствие, монотонно линейно связное чебышевское множество в линейном нормированном пространстве является солнцем.

Отметим, что существуют примеры пространств, отличных от $C(Q)$, которые содержат не монотонно линейно связные солнца (и даже чебышевские солнца). Следующий пример показывает, что можно построить пространство любой конечной размерности $n \geq 3$, содержащее не монотонно линейно связное чебышевское множество. По поводу некоторых дальнейших результатов в конечномерном случае см., например, [13–15].

Пример 30. Пусть $\dim X < \infty$, $\overline{\text{ext } S^*} = S^*$. Выше мы отмечали, что в таком пространстве монотонная линейная связность замкнутого множества равносильна его выпуклости. И.Г. Царьков (см., например, [6, пример 3.2]) для любого конечного $3 \leq n < \infty$ построил пример пространства X размерности n со свойством $\overline{\text{ext } S^*} = S^*$, содержащего неограниченное невыпуклое чебышевское множество M' ; при этом любое ограниченное чебышевское множество в X выпукло. Такое множество M' служит примером не монотонно линейно связного B -ациклического (P -ациклического) множества (чебышевского солнца).

Из недавних результатов отметим работу Е.А. Савиновой [16], которая нашла необходимые и достаточные условия для того, чтобы заданное линейно связное подмножество $M \subset \mathbb{R}^n$ было монотонно линейно связным относительно некоторой нормы на $\mathbb{R}^n$ (по поводу дальнейших продвижений см. также [17]).

Среди нерешенных проблем в этой области выделим следующую: охарактеризовать пространства, в которых каждое (ограниченное) чебышевское множество (солнце, строгое солнце) монотонно линейно связно, m -связно. Ряд продвижений в этом вопросе в трехмерном случае был получен А.Р. Алимовым и Б.Б. Бедновым (см., например, [13–15, 18]).

3. Приложения

Отметим некоторые приложения полученных выше результатов о монотонной линейной связности с конкретным объектам приближения.

Пусть $n \in \mathbb{N}$, $K > 0$, $a < b$. Через $S(n, K) = S(n, K, [a, b])$ обозначим множество всех n -звенных K -липшицевых ломаных в $C[a, b]$. Множество $S(n, K)$ монотонно линейно связно в пространстве $C[a, b]$. Отсюда вытекает, что множество всех n -звенных ломаных $S_n = \bigcup_{m=1}^{\infty} S(n, m)$ монотонно линейно связно в $C[a, b]$. Как следствие, множество $S(n, K)$ всех n -звенных K -липшицевых ломаных является солнцем в $C[a, b]$. Также отметим, что множество всех k -монотонных векторов в ℓ_n^{∞} монотонно линейно связно (см. [6, § 3.2.6]).

Подмножество $M \subset X$ называется *устойчиво монотонно линейно связным* [10], если существует непрерывное отображение $p: M \times M \times [0, 1] \rightarrow M$, для которого $p(x, y, \cdot)$ является монотонным путем, соединяющим точки $x, y \in M$.

Теорема 31 (см., например, [3, § 3]). *Пусть X – банахово пространство, $M \subset X$ – устойчиво монотонно линейно связное множество (или монотонно линейно связное R -компактное множество) с непрерывной по Хаусдорфу метрической проекцией. Тогда множество M обладает непрерывной выборкой из метрической проекции.*

Рассмотрим следующее классическое семейство рациональных функций в $C[a, b]$:

$$\mathcal{R}_{n,m} = \mathcal{R}_{n,m}[a, b] := \{p/q \mid p \in \mathcal{P}_n, \quad q \in \mathcal{P}_m, \quad q \neq 0\},$$

где $\mathcal{P}_n$ – подпространство алгебраических многочленов степени не выше n . Хорошо известно, что $\mathcal{R}_{n,m}$ – чебышевское солнце в $C[a, b]$. Однако в $L^p[a, b]$, $1 < p < \infty$, Н.В. Ефимовым и С.Б. Стечкиным из общих теорем геометрической теории приближений было установлено, что $\mathcal{R}_{n,m}$, $m \geq 1$, является множеством существования, но не единственности. В случае $L^1[a, b]$ ими же было показано отсутствие единственности наилучшего приближения классом $\mathcal{R}_{0,2}$. И.Г. Царьков, используя общие теоремы геометрической теории приближений, доказал отсутствие единственности наилучшего приближения в $L^1[a, b]$ для всех классов дробей $\mathcal{R}_{n,m}$, $m \geq 1$. Рассмотрим более общий класс рациональных функций:

$$\mathcal{R}_W^V := \{r = v/w \mid v \in V, \quad w \in W\},$$

здесь Q – метрический компакт, $V, W \subset C(Q)$ – выпуклые множества, W состоит из положительных функций. Множество $\mathcal{R}_W^V$ является строгим протосолнцем в $C(Q)$.

Пусть $V, W \subset C(Q)$, и пусть $U \subset V \times W$ – непустое выпуклое множество. Рассмотрим следующее обобщение классов $\mathcal{R}_{n,m}$ и $\mathcal{R}_W^V$ дробно-рациональных функций:

$$\mathcal{R}_U := \{r \in C(Q) \mid rw = v, \quad w \not\equiv 0, \quad (v, w) \in U\}. \quad (6)$$

Теорема 32 (см. [19]). *Множество обобщенных дробно-рациональных функций $\mathcal{R}_U$ является строгим протосолнцем в $C(Q)$.*

Этот результат означает, что дроби наилучшего приближения классом $\mathcal{R}_U$ характеризуются в терминах критерия Колмогорова элемента наилучшего приближения, что, в свою очередь, позволяет строить алгоритмы нахождения наилучших дробей.

Задача об устойчивости элементов (почти) наилучшего приближения традиционно связана со свойствами аппроксимативной компактности множества или существования непрерывных ε -выборок. Хорошо известно, что в невырожденных случаях (т. е. при $m \geq 1$) метрическая проекция на (чебышевское) множество $\mathcal{R}_{n,m}$ имеет точки разрыва в $C[a, b]$, но при этом для любого $\varepsilon > 0$ на $\mathcal{R}_{n,m}$ существует непрерывная ε -выборка. Следующий результат обобщает и расширяет этот результат.

Теорема 33 (см. [19]). *Множество обобщенных рациональных дробей $\mathcal{R}_U$ (при выпуклом U ; см. (6)) в $C(Q)$ является устойчиво монотонно линейно связным множеством, и, следовательно, на это множество существует непрерывная аддитивная ε -выборка для любого $\varepsilon > 0$. В случае замкнутости $\mathcal{R}_U$ для каждого $\varepsilon > 0$ существует непрерывная мультипликативная ε -выборка на $\mathcal{R}_U$. Кроме того, $\mathcal{R}_U$ является B -стягиваемым ($\check{B}$ -стягиваемым) множеством в $C(Q)$.*

Благодарность. Авторы благодарны рецензентам за полезные замечания.

Список литературы

- [1] A.R. Alimov, I.G. Tsar'kov, *Geometric approximation theory*, Springer Monographs in Mathematics, Springer, Cham, 2021.
DOI: <https://doi.org/10.1007/978-3-030-90951-2>
- [2] D. Braess, *Nonlinear approximation theory*, Springer Ser. Comput. Math., vol. 7, Springer, Berlin, 1986.
DOI: <http://doi.org/10.1007/978-3-642-61609-9>
- [3] А.Р. Алимов, К.С. Рютин, И.Г. Царьков, *Вопросы существования, единственности и устойчивости наилучших и почти наилучших приближений*, УМН **78** (3), 3–52 (2023).
DOI: <https://doi.org/10.4213/rm10113>

-
- [4] Л.П. Власов, *Аппроксимативные свойства множеств в линейных нормированных пространствах*, УМН **28** (6), 3–66 (1973).
URL: <http://mi.mathnet.ru/rus/rm4976>
- [5] A.L. Brown, *Suns in normed linear spaces which are finite dimensional*, Math. Ann. **279** (1), 87–101 (1987).
DOI: <https://doi.org/10.1007/BF01456192>
- [6] А.Р. АЛИМОВ, И.Г. ЦАРЬКОВ, *Современная геометрическая теория приближений*, ОнтоПринт, М., 2023.
- [7] M. Fabian, P. Habala, P. Hájek, V. Montesinos, V. Zizler, *Banach space theory. The basis for linear and nonlinear analysis*, Springer, New York, 2011.
DOI: <https://doi.org/10.1007/978-1-4419-7515-7>
- [8] A.R. Alimov, *The Rainwater–Simons weak convergence theorem for the Brown associated norm*, Eurasian Math. J. **5** (2), 126–131 (2014).
URL: <http://mi.mathnet.ru/rus/emj159>
- [9] А.Р. АЛИМОВ, *Монотонная линейная связность и солнечность связных по Менгеру множеств в банаховых пространствах*, Изв. РАН. Сер. матем. **78** (4), 3–18 (2014).
DOI: <https://doi.org/10.4213/im8128>
- [10] И.Г. ЦАРЬКОВ, *Свойства монотонно связных множеств*, Матем. заметки **109** (5), 781–792 (2021).
DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm12890>
- [11] D. Braess, *Geometrical characterizations for nonlinear uniform approximation*, J. Approx. Theory **11** (3), 260–274 (1974).
DOI: [https://doi.org/10.1016/0021-9045\(74\)90018-5](https://doi.org/10.1016/0021-9045(74)90018-5)
- [12] H. Berens, L. Hetzelt, *Die metrische Struktur der Sonnen in $\ell^\infty(n)$* , Aequat. Math. **27** (13), 274–287 (1984).
DOI: <https://doi.org/10.1007/BF02192677>
- [13] А.Р. АЛИМОВ, Б.Б. БЕДНОВ, *Монотонная линейная связность чебышевских множеств в трехмерных пространствах*, Матем. сб. **212** (5), 37–57 (2021).
DOI: <https://doi.org/10.4213/sm9325>
- [14] Б.Б. БЕДНОВ, *Конечномерные пространства, в которых класс чебышевских множеств совпадает с классом замкнутых и монотонно линейно связных множеств*, Матем. заметки **111** (4), 483–493 (2022).
DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm13314>
- [15] Б.Б. БЕДНОВ, *Трехмерные пространства, в которых каждое ограниченное чебышевское множество монотонно линейно связно*, Матем. заметки **114** (3), 323–338 (2023).
DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm13569>

- [16] Е.А. Савинова, *Множества в $\mathbb{R}^n$, монотонно линейно связные в некоторой норме*, Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем., мех. (1), 53–55 (2023).
DOI: <https://doi.org/10.55959/MSU0579-9368-1-2023-1-53-55>
- [17] П.А. Бородин, Е.А. Савинова, *Всякая чебышевская кривая без самопересечений монотонна*, Матем. заметки (принята к печати).
- [18] A.R. Alimov, *Monotone path-connectedness of strict suns*, Lobachevskii J. Math. **43** (2), 519–527 (2022).
DOI: <http://doi.org/10.1134/S1995080222060038>
- [19] A.R. Alimov, I.G. Tsar'kov, *Solarity and proximality in generalized rational approximation in spaces $C(Q)$ and L^p* , Russian J. Math. Physics **29** (3), 291–305 (2022).
DOI: <https://doi.org/10.1134/S1061920822030013>

Алексей Ростиславович Алимов

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова,
Ленинские горы, д. 1, г. Москва, 119991, Россия,
E-mail: alexey.alimov-msu@yandex.ru

Игорь Германович Царьков

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова,
Ленинские горы, д. 1, г. Москва, 119991, Россия,
Московский Центр фундаментальной и прикладной математики,
E-mail: tsar@mech.math.msu.su

Monotone path-connected sets in geometric approximation theory and their applications

A.R. Alimov, I.G. Tsar'kov

Abstract. Monotone sets have been quite actively studied in recent years in geometric approximation theory. The concept of monotone path-connected sets has proved especially useful. The purpose of the present paper is to give a short but comprehensive survey on this topic; we also illustrate relations with key properties of approximating sets, of which we consider characterizations of best approximants, and properties of uniqueness and stability.

Keywords: monotone path-connected set, Chebyshev set, sun, best approximation, stability of best approximation, associated norm.

DOI: 10.26907/2949-3919.2024.2.30-46

References

- [1] A.R. Alimov, I.G. Tsar'kov, *Geometric approximation theory*, Springer Monographs in Mathematics, Springer, Cham, 2021.
DOI: <https://doi.org/10.1007/978-3-030-90951-2>
- [2] D. Braess, *Nonlinear approximation theory*, Springer Ser. Comput. Math., vol. 7, Springer, Berlin, 1986.
DOI: <http://doi.org/10.1007/978-3-642-61609-9>
- [3] A.R. Alimov, K.S. Ryutin, I.G. Tsar'kov, *Existence, uniqueness, and stability of best and near-best approximations*, Russ. Math. Surv. **78** (3), 399–442 (2023).
DOI: <https://doi.org/10.4213/rm10113e>
- [4] L. P. Vlasov, *Approximative properties of sets in normed linear spaces*, Russ. Math. Surv. **28** (6), 1–66 (1973).
DOI: <https://doi.org/10.1070/rm1973v028n06abeh001624>
- [5] A.L. Brown, *Suns in normed linear spaces which are finite dimensional*, Math. Ann. **279** (1), 87–101 (1987).
DOI: <https://doi.org/10.1007/BF01456192>

Acknowledgements. The work was carried at M.V. Lomonosov Moscow State University at the expense of a grant by the Russian Science Foundation (project No. 22-11-00129).

Received: 08 April 2024. Accepted: 04 June 2024. Published: 16 July 2024.

- [6] A. R. Alimov, I. G. Tsar'kov, *Modern geometric approximation theory*, OntoPrint, Moscow, 2023 (in Russian).
- [7] M. Fabian, P. Habala, P. Hájek, V. Montesinos, V. Zizler, *Banach space theory. The basis for linear and nonlinear analysis*, Springer, New York, 2011.
DOI: <https://doi.org/10.1007/978-1-4419-7515-7>
- [8] A.R. Alimov, *The Rainwater–Simons weak convergence theorem for the Brown associated norm*, Eurasian Math. J. **5** (2), 126–131 (2014).
URL: <http://mi.mathnet.ru/rus/emj159>
- [9] A.R. Alimov, *Monotone path-connectedness and solarly of Menger-connected sets in Banach spaces*, Izv. Math. **78** (4), 641–655 (2014).
DOI: <https://doi.org/10.1070/IM2014v078n04ABEH002702>
- [10] I.G. Tsar'kov, *Properties of monotone connected sets*, Math. Notes **109** (5), 819–827 (2021).
DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm12890>
- [11] D. Braess, *Geometrical characterizations for nonlinear uniform approximation*, J. Approx. Theory **11** (3), 260–274 (1974).
DOI: [https://doi.org/10.1016/0021-9045\(74\)90018-5](https://doi.org/10.1016/0021-9045(74)90018-5)
- [12] H. Berens, L. Hetzelt, *Die metrische Struktur der Sonnen in $\ell^\infty(n)$* , Aequat. Math. **27** (3), 274–287 (1984).
DOI: <https://doi.org/10.1007/BF02192677>
- [13] A.R. Alimov, B.B. Bednov, *Monotone path-connectedness of Chebyshev sets in three-dimensional spaces*, Sb. Math. **212** (5), 636–654 (2021).
DOI: <https://doi.org/10.1070/SM9325>
- [14] B.B. Bednov, *Finite-dimensional spaces where the class of Chebyshev sets coincides with the class of closed and monotone path-connected sets*, Math. Notes **111** (4), 505–514 (2022).
DOI: <https://doi.org/10.1134/S000143462203018X>
- [15] B.B. Bednov, *Three-dimensional spaces where all bounded Chebyshev sets are monotone path connected*, Math. Notes **114** (3), 283–295 (2023).
DOI: <https://doi.org/10.1134/S0001434623090018>
- [16] E.A. Savinova, *Sets in $\mathbb{R}^n$ monotone path-connected with respect to some norm*, Moscow Univ. Math. Bull. **78** (1), 49–51 (2023).
DOI: <https://doi.org/10.3103/S0027132223010084>
- [17] P.A. Borodin, E.A. Savinova, *Each Chebyshev curve without self-intersections is monotone*, Math. Notes (to appear).
- [18] A.R. Alimov, *Monotone path-connectedness of strict suns*, Lobachevskii J. Math. **43** (2), 519–527 (2022).
DOI: <http://doi.org/10.1134/S1995080222060038>

- [19] A.R. Alimov, I.G. Tsar'kov, *Solarity and proximality in generalized rational approximation in spaces $C(Q)$ and L^p* , Russian J. Math. Physics **29** (3), 291–305 (2022).

DOI: <https://doi.org/10.1134/S1061920822030013>

Alexey Rostislavovich Alimov

Lomonosov Moscow State University,
1 Leninskie Gory, Moscow, 119991, Russia,
E-mail: alexey.alimov-msu@yandex.ru

Igor' Germanovich Tsar'kov

Lomonosov Moscow State University,
1 Leninskie Gory, Moscow, 119991, Russia,
Moscow Center for Fundamental and Applied Mathematics
E-mail: tsar@mech.math.msu.su