

Пунктуальная категоричность и операция скачка в примитивно рекурсивных степенях

И.Ш. Калимуллин, А.А. Курмачева

Аннотация. Статья посвящена изучению пунктуальных структур, для которых изоморфизмы между различными пунктуальными копиями примитивно рекурсивно сводятся к фиксированной 0, 1-значной оракульной функции. Для изучения сложности таких пунктуальных структур и изоморфизмов между ними вводится и исследуется операция слабого (0, 1-значного) скачка. В работе установлено существование жестких пунктуальных структур, для которых все изоморфизмы являются низкими относительно слабого скачка и, при этом, не все из этих изоморфизмов примитивно рекурсивны. Кроме того, построена жесткая пунктуальная структура, для которой все изоморфизмы примитивно рекурсивно сводятся к слабому скачку нулевой функции, а один из них имеет высокую степень.

Ключевые слова: примитивно рекурсивная сводимость, пунктуальная категоричность, операция скачка.

DOI: 10.26907/2949-3919.2024.2.47-69

Введение

Алгебраическая структура, элементами которой являются натуральные числа, называется *примитивно рекурсивной*, если ее универсум, а также отношения и операции, являются примитивно рекурсивными. Исследование примитивно рекурсивных структур, определенных на всем множестве натуральных чисел (т. е. универсум которых есть $\mathbb{N}$), проводилось в некоторых работах Цензера, Реммеля и других авторов (см., например, [1] и [2]) без введения специального термина для таких примитивно рекурсивных структур. В работе [3] такие структуры были исследованы под названием *вполне примитивно рекурсивных* (*fully primitive recursive*). Начиная с обзорной работы [4], для данного понятия общепринятым стал термин *пунктуальной* структуры.

В рамках данной терминологии будем называть пунктуальную структуру $\mathcal{A}$ *пунктуально категоричной*, если для каждой пунктуальной копии $\mathcal{A} \cong \mathcal{B}$ существует изоморфизм

Благодарности. Работа поддержана грантом Фонда развития теоретической физики и математики «БАЗИС». Кроме того, результаты первого параграфа выполнены в рамках реализации программы развития Научно-образовательного математического центра Приволжского федерального округа (соглашение 075-02-2024-1438).

$p : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ такой, что p и p^{-1} являются примитивно рекурсивными функциями. Данное понятие является полным аналогом понятия *вычислимо категоричной* структуры, для которой существуют вычисляемые изоморфизмы в любую ее вычисляемую копию.

Тривиальным примером пунктуально категоричных структур является любая пунктуальная копия бесконечной прямой суммы $\oplus_{\omega} \mathbb{Z}_p$, рассматриваемая как абелева p -группа, или как бесконечномерное векторное пространство над конечным простым полем $\mathbb{Z}_p$. Однако менее тривиальные примеры вычислимо категоричных структур, такие, как натуральные числа с функцией следования, или их плотное линейное упорядочение, уже не являются пунктуально категоричными.

В работе [3] был разработан так называемый метод (стратегия) “прессинга”, позволяющий строить нетривиальные примеры пунктуально категоричных структур. В частности, был построен пример конечно-порожденной пунктуально категоричной структуры, а также пример пунктуально категоричной структуры, не являющейся вычислимо категоричной.

Как и в случае с вычисляемой категоричностью, понятие пунктуальной категоричности может быть обобщено на произвольные оракулы.

Определение 1. Пусть $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ – произвольная функция. Пунктуальная структура $\mathcal{A}$ называется *f -пунктуально категоричной*, если для каждой пунктуальной копии $\mathcal{A} \cong \mathcal{B}$ существует изоморфизм $p : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ такой, что p и p^{-1} примитивно рекурсивно сводятся к f . Формальное определение примитивно рекурсивной сводимости $\leq_{pr}$ будет дано в параграфе 1 (определение 5).

В работе [5] удалось применить стратегию “прессинга” для кодирования примитивно рекурсивной сложности некоторых функций в сложность построения изоморфизмов между пунктуальными копиями.

Теорема 2 ([5]). Пусть f – вычисляемая функция с примитивно рекурсивным графиком. Тогда существует f -пунктуальная структура $\mathcal{A}$ такая, что для любой функции $g : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ структура $\mathcal{A}$ будет g -пунктуально категоричной тогда и только тогда, когда f примитивно рекурсивно сводится к g .

Таким образом, для некоторых пунктуальных структур можно говорить о *точной степени пунктуальной категоричности*, как наименьшей примитивно рекурсивной степени, относительно которой структура пунктуально категорична, что будет полностью соответствовать понятию тьюринговой степени вычисляемой категоричности структур [6].

Возникает вопрос о возможности кодирования функций, не имеющих примитивно рекурсивный график, в сложность пунктуальной категоричности. Данная проблема была исследована в работе [7]. При этом выяснилось, что конечно-порожденные структуры могут иметь в качестве точных степеней пунктуальной категоричности лишь примитивно рекурсивные степени функций с примитивно рекурсивными графиками. Если же пунктуальная структура имеет какую-либо другую степень пунктуальной категоричности в

классе степеней вычислимых функций, то эта структура должна быть *локально конечной* (т.е. каждое ее конечное подмножество порождает лишь конечную подструктуру). Более того, если f – вычислима, то f -пунктуальные структуры могут быть либо конечно-порожденными, либо локально конечными. Также был получен следующий результат.

Теорема 3 ([7]). *Для некоторой 0,1-значной вычислимой функции f существует локально конечная жесткая f -пунктуальная структура, не являющаяся пунктуально категоричной.*

Настоящая работа дает оценки 0,1-значных функций f с указанным выше свойством и изоморфизмов между пунктуальными копиями соответствующих структур в терминах примитивно рекурсивной сводимости и операции скачка. Полученные результаты могут говорить в пользу предположения о том, что ненулевые степени 0,1-значных функций не являются точными степенями пунктуальной категоричности.

В [первом параграфе](#) будет развита теория примитивно рекурсивной сводимости, необходимая для доказательства основных результатов о пунктуальной категоричности из [второго параграфа](#). Результаты [первого параграфа](#) легко переносятся и на другие субрекурсивные сводимости (например, элементарную сводимость), однако полученные таким образом утверждения и методы по-видимому трудно будет применить к субрекурсивным аналогам пунктуальной категоричности. Например, упомянутая выше стратегия “прессинга” [3] существенно использует замкнутость класса примитивно рекурсивных функций относительно неограниченных итераций, что делает актуальным вопрос о существовании нетривиальных примеров субрекурсивно категоричных структур. Например, авторам неизвестно, существует ли элементарная конечно-порожденная алгебраическая структура, у которой любые две элементарные копии, определенные на всем множестве натуральных чисел, элементарно изоморфны.

Терминология, обозначения и подходы в данной работе будут в основном следовать классической для теории вычислимости монографии [8]. Всюду далее будем считать языки структур конечными, поскольку в противном случае понятие пунктуальной структуры требует уточнения.

1. Примитивно рекурсивные степени и скачки

Ввиду наличия примитивно рекурсивных биекций между множеством натуральных чисел $\mathbb{N}$ и множеством $\mathbb{N}^n$ мы далее отождествляем наборы

$$\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$$

с соответствующими натуральными числами. Поэтому в определении, данного ниже, считаем рассматриваемые операторы действующими только на множестве унарных функций.

Определение 4. Примитивно рекурсивные операторы $\Phi : \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \rightarrow \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ определены по индукции.

- Тожественный оператор

$$\Phi^f = f$$

примитивно рекурсивен.

- Операторы, возвращающие базисные примитивно рекурсивные функции,

$$\Phi^f = o, \text{ где } o(x) = 0;$$

$$\Phi^f = s, \text{ где } s(x) = x + 1;$$

$$\Phi^f = I_m^n, \text{ где } m \leq n, I_m^n(x_1, \dots, x_n) = x_m$$

примитивно рекурсивны.

- Если $\Psi, \Theta_1, \dots, \Theta_m$ – примитивно рекурсивные операторы, то оператор Φ , определенный равенством

$$\Phi^f(x) = \Psi^f(\Theta_1^f(x), \dots, \Theta_m^f(x)) \quad [\text{суперпозиция функций}],$$

также примитивно рекурсивен.

- Если Ψ, Θ – примитивно рекурсивные операторы, то оператор Φ , определенный равенствами

$$\Phi^f(x, 0) = \Theta^f(x),$$

$$\Phi^f(x, y + 1) = \Psi^f(x, y, \Phi^f(x, y)) \quad [\text{примитивная рекурсия}],$$

также примитивно рекурсивен.

Здесь везде $x, y \in \mathbb{N}$ – произвольные натуральные числа, а $f \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ – произвольная функция.

Ясно, что каждую примитивно рекурсивную функцию g можно выразить в виде $g = \Phi^o$ для некоторого примитивно рекурсивного оператора Φ , и наоборот.

Определение 5 (Клини [9]). Будем говорить, что функция g примитивно рекурсивно сводится к f ($g \leq_{pr} f$), если $g = \Phi^f$ для некоторого примитивно рекурсивного оператора Φ . Будем говорить, что g примитивно рекурсивно эквивалентна f ($g \equiv_{pr} f$), если $g \leq_{pr} f$ и $f \leq_{pr} g$. Классы эквивалентности относительно $\equiv_{pr}$ будем называть pr -степенями.

При этом $o \leq_{pr} g$ для всех g , а также $g \equiv_{pr} o$ имеет место тогда и только тогда, когда g примитивно рекурсивна. Нетрудно проверить существование наименьшей верхней грани в классе pr -степеней посредством оператора $\oplus$, определенного следующим образом:

$$f \oplus g(x) = \begin{cases} f(y), & \text{если } x = 2y; \\ g(y), & \text{если } x = 2y + 1. \end{cases}$$

Таким образом, pr -степени функций образуют верхнюю полурешетку.

Фиксируем естественную (гёделеву) нумерацию $\Phi_0, \Phi_1, \Phi_2, \dots$ всех примитивно рекурсивных операторов. Тогда должны существовать примитивно рекурсивные функции Fs, Fp, Pm, Os такие, что

$$\begin{aligned}\Phi_{Fs(n,m,k_1,\dots,k_m)}^f(x) &= \Phi_n^f(\Phi_{k_1}^f(x), \dots, \Phi_{k_m}^f(x)) \quad [\text{суперпозиция функций}]; \\ \Phi_{Fp(n,m)}^f(x, 0) &= \Phi_n^f(x), \\ \Phi_{Fp(n,m)}^f(x, y+1) &= \Phi_m^f(x, y, \Phi_{Fp(n,m)}^f(x, y)) \quad [\text{примитивная рекурсия}]; \\ \Phi_{Pm(n,x)}^f(y) &= \Phi_n^f(x, y) \quad [\text{параметризация}]; \\ \Phi_{Os(n,m)}^f(x) &= \Phi_n^{\Phi_m^f}(x) \quad [\text{суперпозиция операторов}]\end{aligned}$$

для всех $x, y, n, m, k_1, \dots, k_m \in \mathbb{N}$ и $f \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$.

Определение 6 (Клини [9]). Определим скачок f'_s (называемый в дальнейшем сильным скачком) функции f следующим образом:

$$f'_s(x) = \Phi_x^f(0),$$

где $x \in \mathbb{N}$.

Нетрудно установить, что в силу свойств выбранной нумерации $\Phi_0, \Phi_1, \Phi_2, \dots$ имеют место следующие pr -эквивалентности:

$$f'_s = \lambda x. \Phi_x^f(0) \equiv_{pr} \lambda x. \Phi_x^f(x) \equiv_{pr} \lambda x. 1 + \Phi_x^f(x) \equiv_{pr} \lambda x, y. \Phi_x^f(y).$$

Кроме того, pr -степень функции f'_s можно определить независимо от выбора нумерации $\Phi_0, \Phi_1, \Phi_2, \dots$ как наибольшую pr -степень функций из класса $\mathcal{R}^f$, содержащую все функции g , для которых существует примитивно рекурсивный оператор Φ такой, что $\lambda x. g(x, 0) = f$ и $\lambda x. g(x, y+1) = \Phi^{\lambda x. g(x, y)}$ для всех $y \in \mathbb{N}$. Нетрудно также проверить, что для случая нулевой функции $f = o$ функция o'_s будет pr -эквивалентна известной функции Аккермана, имеющей примитивно рекурсивный график.

Следующее утверждение доказывается стандартным для теории вычислимости образом.

Утверждение 7. Для всех функций f, g имеет место:

- (1) $f \leq_{pr} f'_s$;
- (2) $f'_s \not\leq_{pr} f$;
- (3) $g \leq_{pr} f \implies g'_s \leq_{pr} f'_s$.

Ниже будет установлено, что обратная импликация в (3) вообще говоря не имеет места. Более того, для 0, 1-значных функций $g \leq_{pr} o'_s$ будет иметь место $g'_s \equiv_{pr} o'_s$.

Пусть далее

$$sg(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x > 0; \\ 0, & \text{если } x = 0, \end{cases}$$

– характеристическая функция множества положительных натуральных чисел.

Определение 8. Определим слабый скачок f'_w функции f следующим образом:

$$f'_w(x) = sg(\Phi_x^f(0)),$$

где $x \in \mathbb{N}$.

Как и ранее, имеем:

$$f'_w = \lambda x. sg(\Phi_x^f(0)) \equiv_{pr} \lambda x. sg(\Phi_x^f(x)) \equiv_{pr} \lambda x. 1 \dot{-} \Phi_x^f(x) \equiv_{pr} \lambda x, y. sg(\Phi_x^f(y)).$$

Кроме того, pr -степень функции f'_w можно определить независимо от выбора нумерации $\Phi_0, \Phi_1, \Phi_2, \dots$ как наибольшую pr -степень функций вида $sg(g(x))$, где g – произвольная функция из введенного ранее класса $\mathcal{R}^f$. Отметим также, что в терминах обобщенной иерархии Гжегорчика 0, 1-значная функция o'_w является $\mathbf{F}_\omega$ -полной проблемой разрешимости, эквивалентной ряду алгоритмических проблем, возникающих в теоретических компьютерных науках и математической логике (см., например, [10–13]). Также отметим, что в силу результата Кристиансена ([14, теорема 4.1]), адаптированного с элементарной на примитивно рекурсивную сводимость, для функций f и g , имеющих примитивно рекурсивный график, имеет место эквивалентность

$$g'_w \leq_{pr} f \iff g'_s \leq_{pr} f.$$

Утверждение 9. Для всех функций f, g имеет место:

- (1) f – 0, 1-значна $\implies f \leq_{pr} f'_w$;
- (2) $f'_w \not\leq_{pr} f$;
- (3) $g \leq_{pr} f \implies g'_w \leq_{pr} f'_w$;
- (4) $f'_w \leq_{pr} f'_s$;
- (5) $f'_s \not\leq_{pr} f'_w$.

Здесь утверждение (5) следует из того соображения, что если $f \leq_{pr} g$ и g – 0, 1-значна, то рост функции $f(x)$ оценивается сверху примитивно рекурсивной функцией. За счет этого мы также не можем распространить утверждение (1) на произвольные функции f .

Всюду далее 0, 1-значные функции на множестве $\mathbb{N}$ будем отождествлять с подмножествами $\mathbb{N}$, характеристическими функциями которых они являются. В частности, нулевая функция отождествляется с пустым множеством $\emptyset$. Заглавными латинскими буквами $A, B, \dots$ далее будут обозначаться только подмножества $\mathbb{N}$, понимаемые также как 0, 1-значные функции.

Утверждение 10. Для всех множеств A имеет место $A'_s \equiv_{pr} A \oplus \emptyset'_s$. Следовательно, если $A \leq_{pr} \emptyset'_s$, то $A'_s \equiv_{pr} \emptyset'_s$ и, тем более, $A'_w \leq_{pr} \emptyset'_s$.

Доказательство. За счет наличия только 2^x различных начальных отрезков 0, 1-значных функций длины x , по данному n можем фиксировать такое число h_n , что значение $\Phi_n^X(0)$ зависит только от значений $X(x)$ при $x \leq h_n$. При этом сложность вычисления h_n зависит от сложности индукционного построения Φ_n , точнее имеет место $h_n = \Phi_{u(n)}^\emptyset(0) = \emptyset'_s(u(n))$ для некоторой примитивно рекурсивной функции u . В силу свойств выбранной нумерации (суперпозиция операторов) имеем

$$A'_s(n) = \Phi_n^A(0) = \Phi_{v(n)}^\emptyset(A(0), A(1), \dots, A(\emptyset'_s(u(n))))$$

для некоторой примитивно рекурсивной функции v . В этом равенстве длина набора

$$A(0), A(1), \dots, A(\emptyset'_s(u(n)))$$

является переменной величиной, поэтому здесь следует понимать под аргументом в $\Phi_{v(n)}$ канонический номер этого набора, учитывающий также и его длину, поэтому при построении оператора $\Phi_{v(n)}$ длина $\emptyset'_s(u(n)) + 1$ не требует вычисления. Оператор $\Phi_{v(n)}$ всего лишь реализует подстановку в Φ_n значений оракула $A(x)$ соответствующими элементами данного ему в качестве аргумента набора. Пусть w – примитивно рекурсивная функция, полученная применением свойства параметризации:

$$\Phi_{v(n)}^\emptyset(x) = \Phi_{w(n,x)}^\emptyset(0) = \emptyset'_s(w(n, x)).$$

Тогда для любого $n \in \mathbb{N}$ имеем

$$A'_s(n) = \emptyset'_s(w(n, A(0), A(1), \dots, A(\emptyset'_s(u(n))))),$$

откуда немедленно следует $A'_s \leq_{pr} A \oplus \emptyset'_s$. Обратная сводимость следует из [утверждения 7](#). $\square$

Из доказанного утверждения немедленно следует, что $(\emptyset'_w)'_s \equiv_{pr} \emptyset'_s$ при $\emptyset'_w \not\equiv_{pr} \emptyset$, так что операция сильного скачка не является инъективной в pr -степенях. Кроме того, в pr -степенях имеется возрастающая иерархия слабых скачков:

$$\emptyset <_{pr} \emptyset'_w <_{pr} \emptyset''_w = (\emptyset'_w)'_w <_{pr} \emptyset'''_w = (\emptyset''_w)'_w <_{pr} \dots <_{pr} \emptyset^{(n)}_w <_{pr} \dots <_{pr} \emptyset'_s,$$

которая в силу равномерности возникающих pr -сводимостей к $\emptyset'_s$, может быть продолжена на ω -уровень посредством множества $\emptyset^{(\omega)}_w(x, y) = \emptyset^{(x)}_w(y)$. Укажем некоторые описательные результаты, которые при $A = \emptyset$ имеют отношение к начальным уровням этой иерархии.

Утверждение 11.

- (1) $B \leq_{pr} A'_w$ имеет место тогда и только тогда, когда существует примитивно рекурсивная функция a такая, что для всех $n \in \mathbb{N}$ выполнено

$$B(n) = \Phi_{a(n)}^A(0).$$

(2) $B \leq_{pr} A''_w = (A'_w)'_w$ имеет место тогда и только тогда, когда существует примитивно рекурсивная функция a такая, что для всех $n \in \mathbb{N}$ выполнено

$$B(n) = \Phi_{\Phi_{a(n)}^A(0)}^A(0).$$

Доказательство. Пункт (1). Импликация “тогда” следует из

$$B(n) = \Phi_{a(n)}^A(0) = A'_w(a(n)).$$

Пункт (1). Импликация “только тогда”. Пусть дано произвольное $k \in \mathbb{N}$. Как и при доказательстве предыдущего утверждения можем фиксировать такую границу $h_k(n)$, что $\Phi_k^X(n)$ зависит только от значений $X(x)$ при $x \leq h_k(n)$. При этом для каждого $k \in \mathbb{N}$ функция $h_k(n)$ примитивно рекурсивна, и ее можно записать в виде $h_k(n) = \Phi_{u(k)}^\emptyset(n)$ для некоторой примитивно рекурсивной функции u . Тогда, учитывая $A'_w(x) = sg(\Phi_x^A(0))$, получаем аналогично предыдущему утверждению

$$\Phi_k^{A'_w}(n) = \Phi_{v(n)}^\emptyset(n, sg(\Phi_0^A(0)), sg(\Phi_1^A(0)), \dots, sg(\Phi_{h_k(n)}^A(0)))$$

для некоторой примитивно рекурсивной функции v . Применим свойство суперпозиции (вместе со свойством примитивной рекурсии), чтобы получить примитивно рекурсивные функции b и d , для которых при всех $n, m \in \mathbb{N}$ выполнено

$$\begin{aligned} \Phi_{v(n)}^\emptyset(n, sg(\Phi_0^A(0)), sg(\Phi_1^A(0)), \dots, sg(\Phi_m^A(0))) &= \Phi_{b(n,m)}^A(0), \\ b(n, \Phi_{u(k)}^\emptyset(n)) &= \Phi_{d(k)}^\emptyset(n). \end{aligned}$$

Тогда для всех $n \in \mathbb{N}$ имеем

$$\Phi_{\Phi_{d(k)}^\emptyset(n)}^A(0) = \Phi_{b(n, \Phi_{u(k)}^\emptyset(n))}^A(0) = \Phi_{b(n, h_k(n))}^A(0) = \Phi_k^{A'_w}(n).$$

Поэтому, если $B \leq_{pr} A'_w$, то $B(n) = \Phi_{a(n)}^A(0)$ для примитивно рекурсивной функции $a(n) = \Phi_{d(k)}^\emptyset(n)$, где $k \in \mathbb{N}$ такое, что $B = \Phi_k^{A'_w}$.

Пункт (2). Импликация “тогда”. Зафиксируем примитивно рекурсивные функции b и c такие, что для всех $n, x \in \mathbb{N}$ и $X \in 2^{\mathbb{N}}$ имеет место

$$\Phi_{b(n)}^X(x) = X(\Phi_n^X(x)) \quad \text{и} \quad \Phi_{c(n)}^{X'_w}(x) = \Phi_n^X(x).$$

Тогда $B(n) = \Phi_{\Phi_{a(n)}^A(0)}^A(0) = A'_w(\Phi_{a(n)}^A(0)) = A'_w(\Phi_{c(a(n))}^{A'_w}(0)) = \Phi_{b(c(a(n)))}^{A'_w}(0) = A''_w(b(c(a(n))))$, откуда немедленно следует $B \leq_{pr} A''_w$.

Пункт (2). Импликация “только тогда”. Аналогично пункту (1) из $B \leq_{pr} A'_w$ следует существование примитивно рекурсивных функций h и v таких, что для всех $n \in \mathbb{N}$ имеет место

$$B(n) = \Phi_{v(n)}^\emptyset(n, sg(\Phi_0^{A'_w}(0)), sg(\Phi_1^{A'_w}(0)), \dots, sg(\Phi_{h(n)}^{A'_w}(0))).$$

Далее, применяя импликацию “только тогда” пункта (1) к каждому $B_k = sg(\Phi_k^{A'_w})$, получим примитивно рекурсивную функцию a_k такую, что $B_k(x) = \Phi_{a_k(x)}^A(0)$. При этом равномерность доказательства (1) позволяет записать $a_k(x)$ в виде $a_k(x) = \Phi_{d(k)}^\emptyset(x)$ для некоторой примитивно рекурсивной функции d .

Итак, имеем

$$B(n) = \Phi_{v(n)}^\emptyset(n, \Phi_{\Phi_{d(0)}^\emptyset(0)}^A(0), \Phi_{\Phi_{d(1)}^\emptyset(0)}^A(0), \dots, \Phi_{\Phi_{d(h(n))}^\emptyset(0)}^A(0))$$

для всех $n \in \mathbb{N}$. Рассмотрим теперь примитивно рекурсивную функцию e , для которой имеет место

$$\Phi_{v(n)}^\emptyset(n, \Phi_{x_0}^A(0), \Phi_{x_1}^A(0), \dots, \Phi_{x_{h(n)}}^A(0)) = \Phi_{e(n, x_0, x_1, \dots, x_{h(n)})}^A(0).$$

Тогда применяем свойства суперпозиции последний раз, чтобы получить примитивно рекурсивную функцию a такую, что

$$e(n, \Phi_{d(0)}^\emptyset(0), \Phi_{d(1)}^\emptyset(0), \dots, \Phi_{d(h(n))}^\emptyset(0)) = \Phi_{a(n)}^X(0)$$

для всех $n \in \mathbb{N}$ и $X \in 2^{\mathbb{N}}$. Откуда немедленно следует

$$B(n) = \Phi_{\Phi_{a(n)}^A(0)}^A(0) = \Phi_{\Phi_{a(n)}^A(0)}^A(0)$$

для всех $n \in \mathbb{N}$. □

Из следующего результата следует, что область значений операции слабого скачка в pr -степенях состоит в точности из pr -степеней, больших или равных pr -степени $\emptyset'_w$.

Теорема 12. *Для каждого множества B существует множество A такое, что*

$$B \oplus \emptyset'_w \equiv_{pr} A'_w.$$

Доказательство. Пусть u – примитивно рекурсивная функция из доказательств предыдущих утверждений такая, что каждое $\Phi_k^X(0)$ зависит только от значений $X(x)$ при $x \leq h_k = \Phi_{u(k)}^\emptyset(0)$. При этом без ущерба для примитивной рекурсивности функции u можем считать последовательность $h_0, h_1, h_2, \dots$ строго возрастающей.

Определим теперь множество

$$A(x) = \begin{cases} B(k), & \text{если } x = h_k \text{ для некоторого } k \in \mathbb{N}; \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Чтобы убедиться в $A'_w \leq_{pr} B \oplus \emptyset'_w$, рассмотрим конечные для каждого $n \in \mathbb{N}$ множества

$$A_n(x) = \begin{cases} B(k), & \text{если } x = h_k \text{ для некоторого } k \leq n; \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Так как $h_n < h_{n+1} < h_{n+2} < \dots$ имеем $\Phi_n^A(0) = \Phi_n^{A_n}(0)$ для любого $n \in \mathbb{N}$. Кроме того, из

$$\exists k [x = h_k] \iff \exists k \leq x [x = h_k] \iff \exists k \leq x [x = \Phi_{u(k)}^\emptyset(0)]$$

следует существование функций $f \leq_{pr} B$ и $g \leq_{pr} B$ таких, что

$$\Phi_{f(n)}^\emptyset = A_n \text{ и } \Phi_{g(n)}^\emptyset = \Phi_n^{\Phi_{f(n)}^\emptyset} = \Phi_n^{A_n}$$

для любого $n \in \mathbb{N}$. Теперь сводимость $A'_w \leq_{pr} B \oplus \emptyset'_w$ имеет место ввиду

$$A'_w(n) = sg(\Phi_n^A(0)) = sg(\Phi_n^{A_n}(0)) = sg(\Phi_{g(n)}^\emptyset(0)) = \emptyset'_w(g(n)).$$

С другой стороны имеем

$$B(k) = A(h_k) = A(\Phi_{u(k)}^\emptyset(0)) = \Phi_{w(k)}^A(0) = A'_w(w(k)),$$

где примитивно рекурсивная функция w выбрана такой, что

$$\Phi_{w(k)}^X(0) = X(\Phi_{u(k)}^\emptyset(0))$$

для всех $k \in \mathbb{N}$ и $X \in 2^{\mathbb{N}}$. Таким образом, $B \oplus \emptyset'_w \equiv_{pr} A'_w$. □

Доказательство теоремы позволяет установить, что операция слабого скачка в pr -степенях не инъективна.

Следствие 13. *Существует множество A , не являющееся примитивно рекурсивным, такое, что $A'_w \equiv_{pr} \emptyset'_w$.*

Доказательство. Полагая в доказательстве утверждения

$$B(k) = 1 \dot{-} \Phi_k^\emptyset(h_k) = 1 \dot{-} \Phi_k^\emptyset(\Phi_{u(k)}^\emptyset(0)),$$

будем иметь $B \leq_{pr} \emptyset'_w$ и, следовательно, $A'_w \equiv_{pr} \emptyset'_w$.

Однако $A(h_k) \neq \Phi_k^\emptyset(h_k)$ для всех $k \in \mathbb{N}$. Значит полученное множество A не примитивно рекурсивно. □

Замечание 14. Анализируя доказательство теоремы, можно прийти к выводу, что pr -эквивалентность $B \oplus \emptyset'_w \equiv_{pr} A'_w$ по прежнему будет иметь место, если в определении

множества A в доказательстве теоремы использовать произвольную возрастающую последовательность $\tilde{h}_0 < \tilde{h}_1 < \tilde{h}_2 < \dots$, для которой существуют примитивно рекурсивные функции $\tilde{u}$ и $\tilde{v}$ такие, что

$$\tilde{h}_k = \Phi_{\tilde{u}(k)}^\emptyset(0) \quad \text{и} \quad \Phi_k^\emptyset(0) \leq \tilde{h}_{\tilde{v}(k)}.$$

В частности, $A'_w \leq_{pr} B \oplus \emptyset'_w$ будет теперь следовать из

$$A'_w(n) = sg(\Phi_n^A(0)) = sg(\Phi_n^{A_{\tilde{v}(u(n))}}(0)).$$

Можно также установить, что полученные таким образом множества A при различных $B \leq_{pr} \emptyset'_w$ порождают неглавный идеал в pr -степенях, слабые скачки элементов которого равны $\emptyset'_w$.

Замечание 15. Построение оператора $\Phi_{f(n)}$, использованного в доказательстве теоремы, было осуществлено с помощью конечного числа операторов

$$\Phi_{u(0)}, \Phi_{u(1)}, \dots, \Phi_{u(n)}.$$

Однако имеется возможность, увеличив элементы последовательности h_k , добиться примитивной рекурсивности предиката “ $x = h_k$ ”, что упростит это и последующие построения операторов.

Для естественной (гёделевой) нумерации операторов $\Phi_0, \Phi_1, \Phi_2, \dots$ существует примитивно рекурсивная функция t такая, что значение $\Phi_{t(k)}^\emptyset(0)$ равно количеству шагов вычисления $\Phi_k^\emptyset(0) = \emptyset'_s(k)$ на некоторой фиксированной машине Тьюринга, вычисляющей $\emptyset'_s$. При этом предполагается выполнение неравенства $\Phi_k^\emptyset(0) \leq \Phi_{t(k)}^\emptyset(0)$. Тогда предикат “ $x = \Phi_{t(k)}^\emptyset(0)$ ” будет примитивно рекурсивным. То же самое будет верно и для предиката “ $x = \tilde{h}_k$ ”, где

$$\tilde{h}_k = k + \sum_{i=0}^k \Phi_{t(u(i))}^\emptyset(0).$$

При этом существование примитивно рекурсивной функции $\tilde{u}$, для которой справедливо $\tilde{h}_k = \Phi_{\tilde{u}(k)}$, вместе с неравенством $\tilde{h}_k \geq \Phi_{t(u(k))}^\emptyset(0) \geq \Phi_{u(k)}^\emptyset(0) = h_k$, позволяет при замене последовательности h_k на $\tilde{h}_k$ получить новое доказательство теоремы с более простым по сложности оператором $\Phi_{f(n)}$.

Доказательство следующего утверждения будет использовать вышеприведенный прием.

Теорема 16. Для каждого множества $B \leq_{pr} \emptyset''_w$ существует множество $A \leq_{pr} \emptyset'_w$ такое, что $B \oplus \emptyset'_w \equiv_{pr} A'_w$.

Доказательство. В силу утверждения 11 из $B \leq_{pr} \emptyset''_w$ следует существование примитивно рекурсивной функции a такой, что $B(k) = \Phi_{\Phi_a(k)}^\emptyset(0)$.

Пользуясь [замечанием 15](#) определим возрастающую последовательность

$$\tilde{h}_k = k + \sum_{i=0}^k \Phi_{t(u(i))}^{\emptyset}(0) + \sum_{i=0}^k \Phi_{t(a(i))}^{\emptyset}(0).$$

Как и ранее, будет существовать примитивно рекурсивная функция $\tilde{u}$, для которой справедливо $\tilde{h}_k = \Phi_{\tilde{u}(k)}^{\emptyset}(0)$, а также неравенство $\tilde{h}_k \geq \Phi_{t(u(k))}^{\emptyset}(0) \geq \Phi_{u(k)}^{\emptyset}(0) = h_k$. Примитивная рекурсивность предиката “ $x = \tilde{h}_k$ ” позволяет установить примитивную рекурсивность функции

$$\kappa(x) = \begin{cases} k, & \text{если } x = \tilde{h}_k \text{ для некоторого } k \in \mathbb{N}; \\ x + 1 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Тогда определение множеств A и A_n из доказательства теоремы при $h_k = \tilde{h}_k$ можно записать следующим образом:

$$A(x) = \begin{cases} B(\kappa(x)), & \text{если } \kappa(x) \leq x; \\ 0 & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

$$A_n(x) = \begin{cases} B(\kappa(x)), & \text{если } \kappa(x) \leq x \text{ и } \kappa(x) \leq n; \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Тогда $\Phi_n^A(0) = \Phi_n^{A_n}(0)$ следует непосредственно из $h_k \leq \tilde{h}_k$. Повторяя теперь те же рассуждения, получим pr -эквивалентность $B \oplus \emptyset'_w \equiv_{pr} A'_w$.

Остается установить сводимость $A \leq_{pr} \emptyset'_w$. Так как для количества шагов вычисления выражения $\Phi_{a(k)}^{\emptyset}(0)$ имеет место неравенство $\Phi_{t(a(k))}^{\emptyset}(0) \leq \tilde{h}_k$, существует примитивно рекурсивная функция c такая, что $\Phi_{a(k)}^{\emptyset}(0) = c(k, \tilde{h}_k)$ для всех $k \in \mathbb{N}$. Но тогда для всех $x \in \mathbb{N}$ имеем

$$A(x) = \begin{cases} \Phi_{c(\kappa(x), x)}^{\emptyset}(0), & \text{если } \kappa(x) \leq x; \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Отсюда следует $A \leq_{pr} \emptyset'_w$, так как $\Phi_{c(\kappa(x), x)}^{\emptyset}(0) = \emptyset'_w(c(\kappa(x), x))$. □

2. $\emptyset'_w$ -пунктуально категоричные структуры

Изложим схематично построение локально конечной пунктуально категоричной структуры из работы [3].

Язык структуры $\mathcal{A}$ состоит из четырех унарных операций: c, s, p и r . Структура $\mathcal{A}$ обладает следующими свойствами:

- 1) Структура состоит из не пересекающихся замкнутых относительно операций конечных компонент, каждая из которых определяется своим специальным элемен-

том – *корнем* компоненты.

- 2) Операция r предназначена для проекции любого элемента компоненты в ее корень. Другими словами, элементы a и b содержатся в одной компоненте тогда и только тогда, когда $r(a) = r(b)$, при этом всегда выполнено $r(r(a)) = r(a)$.
- 3) Каждая компонента C_x с корнем x содержит *цепь* H_x длины l_x , порожденную корнем x и операцией s :

$$H_x = \{s^n(x) \mid n \leq l_x\} \subseteq C_x,$$

при этом $s^{l_x+1}(x) = s^{l_x}(x)$, а операция p позволяет переходить к предыдущему элементу цепи:

$$p(s^{n+1}(x)) = p(s^n(x)), \quad p(x) = x.$$

- 4) Каждый элемент цепи $s^n(x)$ порождает относительно операции s конечные циклы Y_x^n , причем для каждого $z \in Y_x^n$ имеет место

$$s(z) = s^{n+1}(x), \quad p(z) = p(s^n(x)).$$

- 5) Каждая компонента порождается своим корнем с помощью операций s и p , другими словами каждая компонента C_x представляется в виде объединения непересекающихся циклов:

$$C_x = \bigcup_{n=0}^{l_x} Y_x^n.$$

- 6) Длина цикла Y_x^0 , соответствующего корню компоненты, называемая *меткой* компоненты, уникальна среди других компонент. Это условие делает структуру жесткой.

Длины циклов Y_x^n в структуре $\mathcal{A}$ определяются при выполнении требований пунктуальной категоричности:

$$R_k : \mathcal{A} \stackrel{p}{\cong} \mathcal{A}_k \implies p \text{ и } p^{-1} \text{ примитивно рекурсивны,}$$

где $\mathcal{A}_0, \mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2 \dots$ – естественная (гёделева нумерация) пунктуальных структур в нашем унарном языке, т. е.

$$k = (k_c, k_s, k_p, k_r) \implies \mathcal{A}_k = (\mathbb{N}, \Phi_{k_c}^\emptyset, \Phi_{k_s}^\emptyset, \Phi_{k_p}^\emptyset, \Phi_{k_r}^\emptyset).$$

При построении $\mathcal{A}$ в каждый момент растет, т. е. остается незамкнутой относительно операций, лишь одна компонента, называемой *активной*. Предыдущие компоненты при этом оказываются уже замкнутыми, таким образом элементы активной компоненты оказываются большими в упорядочении натуральных чисел, чем элементы предыдущих компонент. Размер k -й по счету компоненты зависит от стратегии “прессинга” выполнения ко-

нечного числа требований $R_0, R_1, \dots, R_k$ (остальные R -требования начнут учитываться в последующих компонентах). Детальное изложение стратегии “прессинга” можно найти в работе [3], однако здесь необходимо отметить лишь следующий факт: до того, как начнет строиться новая активная компонента, требуется, чтобы в каждой из структур $\mathcal{A}_n, n \leq k$, либо нашлась компонента, соответствующая активной компоненте в $\mathcal{A}$, либо удалось гарантировать $\mathcal{A} \not\cong \mathcal{A}_n$. Если под $\tilde{h}_k$ обозначить корень k -й компоненты, то с учетом “гёделевости” нумерации структур, это обеспечивает выполнение условий замечаний 14 и 15 из предыдущего параграфа для возрастающей последовательности $\tilde{h}_0 < \tilde{h}_1 < \tilde{h}_2 < \dots$. А именно, отношение “ $x = \tilde{h}_k$ ” будет примитивно рекурсивным, и должны существовать примитивно рекурсивные функции $\tilde{u}$ и $\tilde{v}$, для которых выполнено

$$\tilde{h}_k = \Phi_{\tilde{u}(k)}^\emptyset(0) \text{ и } \Phi_k^\emptyset(0) \leq \tilde{h}_{\tilde{v}(k)}.$$

Указанные выше свойства стратегии “прессинга” не изменяются при рассмотрении модифицированной жесткой структуры $\mathcal{A}$ из [7] (построенной для доказательства теоремы 3), удовлетворяющей для каждого $k \in \mathbb{N}$ требованию:

$$R_k : \mathcal{A} \stackrel{p}{\cong} \mathcal{A}_k \implies p \text{ и } p^{-1} \text{ примитивно рекурсивно ограничены,}$$

и имеющей пунктуальную копию $\mathcal{B} \stackrel{f}{\cong} \mathcal{A}$ такую, что

$$N_k : f \neq \Phi_k^\emptyset$$

для всех $k \in \mathbb{N}$. Теперь структура $\mathcal{A}$ имеет одну дополнительную унарную операцию i , являющуюся инволюцией ($i^2 = \text{id}$), и один унарный предикат D , так что в требовании R_k предполагается, что

$$\mathcal{A}_k = \mathcal{A}_{(k_c, k_s, k_p, k_r, k_i, k_D)} = \left(\mathbb{N}, \Phi_{k_c}^\emptyset, \Phi_{k_s}^\emptyset, \Phi_{k_p}^\emptyset, \Phi_{k_r}^\emptyset, \Phi_{k_i}^\emptyset, sg(\Phi_{k_D}^\emptyset) \right).$$

Основное отличие от предыдущего построения заключается в наличии у каждой компоненты C_x парной ей компоненты $C'_x = C_{i(x)}$, при этом инволюция i осуществляет изоморфизм между конечными подструктурами C_x и $C_{i(x)}$ в исходном языке $\{c, s, p, r\}$. Однако за счет дополнительного предиката D структура остается жесткой:

$$y = s^{l_{r(y)}}(r(y)) \iff D(y) \neq D(i(y))$$

для всех элементов y , т. е. D отличает C_x от $C_{i(x)}$ на последних элементах цепей H_x и $H_{i(x)}$.

Изоморфные структуры $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ строятся одновременно и практически идентично, если не учитывать унарный предикат D . В каждый момент построения

$$\mathcal{A} = (\mathbb{N}, c, s, p, r, i, D) \text{ и } \mathcal{B} = (\mathbb{N}, c, s, p, r, i, D^{\mathcal{B}})$$

теперь имеются две активные парные компоненты: C_x и $C_{i(x)}$ в каждой из $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$, пусть для определенности $x < i(x)$ относительно естественного порядка натуральных чисел. Такое изменение не влечет существенных изменений в стратегию “прессинга” для имеющих более слабый вид требований R_k : вместо изоморфизма между структурами $\mathcal{A}$ и $\mathcal{A}_k$ будет построен изоморфизм q для исходного языка $\{c, s, p, r\}$, являющийся, как и прежде, вместе обратным изоморфизмом q^{-1} примитивно рекурсивным. Но тогда для настоящего изоморфизма p будут справедливы примитивно рекурсивные оценки

$$p(z) \leq \max(q(z), q(i(z))) \quad \text{и} \quad p^{-1}(z) \leq \max(q^{-1}(z), i(q^{-1}(z))).$$

Наименьший корень k -й пары компонент в $\mathcal{A}$ будем обозначать через x_k . Также для сохранения связей с предыдущим параграфом будем считать $\tilde{h}_k = x_k$.

Основная цель построения активной k -й пары компонент – добиться выполнения требования N_k с учетом требований $R_k, n \leq k$. Для этого компоненты остаются активными до тех пор, пока не будет вычислено значение

$$\Phi_k^\emptyset(x_k) = \Phi_k^\emptyset(\tilde{h}_k) = \Phi_k^\emptyset(\Phi_{\tilde{u}(k)}^\emptyset(0)) = \Phi_{Fs(k, 1, \tilde{u}(k))}^\emptyset(0) = \emptyset'_s(Fs(k, 1, \tilde{u}(k)))$$

на фиксированной машине Тьюринга вычисления $\emptyset'_s$. При этом на всех новых элементах обоих компонент в обеих структурах $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ полагаем предикат D равным нулю. Если $\Phi_k^\emptyset(x_k)$ будет вычислено и, при этом, стратегии “прессинга” для требований $R_k, n \leq k$, найдут все необходимые соответствия между корнями компонент, то можем добавить в цепи компонент последний l -й элемент, определяя при этом

$$D(s^l(x_k)) = D^B(s^l(i(x_k))) \neq D(s^l(i(x_k))) = D^B(s^l(x_k)),$$

если $\Phi_k^\emptyset(x_k) = x_k$, и

$$D(s^l(x_k)) = D^B(s^l(x_k)) \neq D(s^l(i(x_k))) = D^B(s^l(i(x_k))),$$

в противном случае. Ясно, что такое определение обеспечит выполнение требования N_k .

Анализируя построение в целом, применяя примитивно рекурсивную функцию t из [замечания 15](#) к номерам примитивно рекурсивных функций, участвующих в требованиях N_k и $R_k, n \leq k$, можем для каждого $k \in \mathbb{N}$ примитивно рекурсивно указать номера $\tilde{u}(k)$ и $\tilde{l}(k)$ такие, что

$$\begin{aligned} \Phi_{\tilde{u}(k)}^\emptyset(0) &= \tilde{h}_k = x_k - \text{наименьший корень } k\text{-й пары компоненты,} \\ \Phi_{\tilde{l}(k)}^\emptyset(0) &= l - \text{длина цепей в } k\text{-й паре компонент.} \end{aligned}$$

При этом, как и ранее, для возрастающей последовательности $\tilde{h}_0 < \tilde{h}_1 < \tilde{h}_2 < \dots$ отношение “ $x = \tilde{h}_k$ ” будет примитивно рекурсивным.

Теперь мы можем сформулировать и доказать основные результаты этого параграфа.

Теорема 17. *Существует $\emptyset'_w$ -пунктуально категоричная, но не пунктуально категоричная локально конечная жесткая структура $\mathcal{A}$. При этом из того, что p – изоморфизм из $\mathcal{A}$ на пунктуальную структуру $\mathcal{C}$, следует $p'_w \equiv_{pr} \emptyset'_w$.*

Доказательство. Структура $\mathcal{A}$, описанная выше, не является пунктуально категоричной в силу выполнения всех требований N_k , $k \in \mathbb{N}$. Остается доказать $p_w \leq_{pr} \emptyset'_w$ для изоморфизма p из $\mathcal{A}$ на пунктуальную структуру

$$\mathcal{C} = (\mathbb{N}, c^c, s^c, p^c, r^c, i^c, D^c) = \mathcal{A}_n, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Из вышеизложенного следует, что тогда существует изоморфизм q из структуры $\mathcal{A}$, объединенной языком $\{c, s, p, r\}$, на объединение структуры $\mathcal{C}$, такой что q и q^{-1} – примитивно рекурсивны. При этом

$$p(z) \in \{q(z), q(i(z))\} \quad \text{и} \quad p^{-1}(z) \in \{q^{-1}(z), q^{-1}(i^c(z))\}$$

для всех $z \in \mathbb{N}$. Отсюда следует, что $p \equiv_{pr} p^{-1}$, так как имеем

$$p(z) = q(z) \iff p^{-1}(q(z)) = z,$$

и

$$p^{-1}(z) = q^{-1}(z) \iff p(q^{-1}(z)) = z.$$

Кроме того, в силу

$$p(z) = q(z) \iff p(r(z)) = q(r(z)) \iff p(i(r(z))) = q(i(r(z))),$$

значения $p(z)$ определяется примитивно рекурсивным образом через значения в $p(r(\tilde{h}_k))$ в наименьших корнях $\min(r(z), i(r(z))) = \tilde{h}_k$, $k \in \mathbb{N}$, соответствующих пар компонент. Тогда, полагая

$$B_p(k) = \begin{cases} 1, & \text{если } p(\tilde{h}_k) = q(\tilde{h}_k); \\ 0 & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

получим pr -эквивалентность $p \equiv_{pr} A_p$, где множество A_p имеет вид

$$A_p(z) = \begin{cases} B_p(k), & \text{если } z = \tilde{h}_k \text{ для некоторого } k \in \mathbb{N}; \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Учитывая доказательство [теоремы 12](#) вместе с замечаниями, остается убедиться в сводимости $B_p \leq_{pr} \emptyset'_w$. Действительно, по построению $\mathcal{A}$ имеем

$$B_p(k) = 1 \iff D(s^{l_k}(\tilde{h}_k)) = D^c((s^c)^{l_k}(q(\tilde{h}_k))),$$

где $l_k = \Phi_{l(k)}^\emptyset(0)$ – длина цепей в k -й паре компонент. Примитивная рекурсивность функций $\tilde{l}$ и $\tilde{u}$, $\Phi_{\tilde{u}(k)}^\emptyset(0) = \tilde{h}_k$, позволяет найти примитивно рекурсивную функцию $e(k)$, такую, что

$$B_p(k) = \Phi_{e(k)}^\emptyset(0) = \emptyset'_w(e(k))$$

для всех $k \in \mathbb{N}$. Таким образом, $p'_w \equiv_{pr} (A_p)'_w \equiv_{pr} B_p \oplus \emptyset'_w \equiv_{pr} \emptyset'_w$. $\square$

Замечание 14 к **теореме 12** позволяет предположить, что используемая в этом параграфе методика не может привести к структуре, имеющей точную степень пунктуальной категоричности $\emptyset'_w$. Мы можем лишь с помощью идеи доказательства **теоремы 16** сократить разрыв между верхней оценкой $\emptyset'_w$ и полученной оценкой $p'_w \equiv_{pr} \emptyset'_w$ каждого изоморфизма p между пунктуальными копиями структуры.

Теорема 18. *Существуют $\emptyset'_w$ -пунктуально категоричная локально конечная жесткая структура $\mathcal{A}$ и ее пунктуальная копия $\mathcal{B} \cong \mathcal{A}$, такие, что для изоморфизма f из $\mathcal{A}$ на $\mathcal{B}$ выполнено $f'_w \equiv_{pr} \emptyset''_w$.*

Доказательство. По **утверждению 11** из предыдущего параграфа имеется примитивно рекурсивная функция a такая, что $\emptyset''_w(k) = \Phi_{\Phi_{a(k)}^\emptyset(0)}^\emptyset(0)$ для всех $k \in \mathbb{N}$.

Модифицируем следующим образом рассмотренную ранее алгебраическую структуру $\mathcal{A}$.

- 1) Унарный предикат D заменяется на бинарный предикат D , при этом жесткость структуры достигается условием

$$\forall z \exists y [D(r(z), y) = D(r(z), i(y)) \neq D(r(i(z)), y) = D(r(i(z)), i(y))].$$

При построении структур $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ мы по умолчанию полагаем

$$D(z, y) = D(z, i(y)) = D^{\mathcal{B}}(z, y) = D^{\mathcal{B}}(z, i(y)) = 0,$$

если не оговорено противное.

- 2) При построении активной компоненты вместо вычисления значения $\Phi_k^\emptyset(x_k)$ совершается вычисление $\Phi_{a(k+1)}^\emptyset(0)$. Компонента перестает быть активной только если это значение уже вычислено. Данное условие дает оценку $\Phi_{t(a(k))}^\emptyset(0) \leq \tilde{h}_k$ при $k > 0$, где как и ранее $\Phi_{t(a(k))}^\emptyset(0)$ – количество шагов вычисления $\Phi_{a(k)}^\emptyset(0)$, а $\tilde{h}_k$ – наименьший корень k -й пары компонент.
- 3) Для каждого нового корня $\tilde{h}_k$ начинается вычисление $\emptyset''_w(k) = \Phi_{\Phi_{a(k)}^\emptyset(0)}^\emptyset(0)$, совершающееся параллельно со всеми другими вычислениями и построениями. Как только это вычисление завершается, мы начинаем определять

$$D(\tilde{h}_k, y) = D(\tilde{h}_k, i(y)) = 1, \quad D(i(\tilde{h}_k), y) = D(i(\tilde{h}_k), i(y)) = 0, \\ D^{\mathcal{B}}(\tilde{h}_k, y) = D^{\mathcal{B}}(\tilde{h}_k, i(y)) = \emptyset''_w(k), \quad D^{\mathcal{B}}(i(\tilde{h}_k), y) = D^{\mathcal{B}}(i(\tilde{h}_k), i(y)) = 1 \dot{-} \emptyset''_w(k)$$

для всех новых аргументов, на которых указанные значения D и $D^{\mathcal{B}}$ еще не определены. Тогда для изоморфизма f из $\mathcal{A}$ на $\mathcal{B}$ будем иметь

$$\emptyset''_w(k) = 1 \iff f(\tilde{h}_k) = \tilde{h}_k \iff f(\Phi_{\tilde{u}(k)}^{\emptyset}(0)) = \Phi_{\tilde{u}(k)}^{\emptyset}(0),$$

откуда немедленно получаем $\emptyset''_w \leq_{pr} f'_w$.

Остается проверить $p \leq_{pr} \emptyset'_w$ для изоморфизма p из $\mathcal{A}$ на произвольную пунктуальную структуру $\mathcal{C} = \mathcal{A}_n$. Исходя из предыдущего доказательства, будем иметь $p \equiv_{pr} A_p$, где множество A_p имеет вид

$$A_p(z) = \begin{cases} 1, & \text{если } z = \tilde{h}_k \text{ для некоторого } k \leq z \text{ и } p(z) = q(z); \\ 0 & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

где q – примитивно рекурсивный изоморфизм обедненных структур.

Аналогично доказательству [теоремы 16](#) из неравенства $\Phi_{t(a(k))}^{\emptyset}(0) \leq \tilde{h}_k$ при $k > 0$ следует существование примитивно рекурсивной функции c такой, что $\Phi_{a(k)}^{\emptyset}(0) = c(k, \tilde{h}_k)$ для всех $k \in \mathbb{N}$ (для случая $k = 0$ функцию c можно доопределить отдельно).

Если $z = \tilde{h}_k$, то можем считать что число $y_z = z + \Phi_{t(c(k,z))}^{\emptyset}(0)$ достаточно велико, чтобы наше построение не успело определить по умолчанию $D(z, y) = 0$ до момента вычисления $\Phi_{c(k,z)}^{\emptyset}(0) = \emptyset''_w(k)$. Тогда существует примитивно рекурсивная функция e такая, что

$$p(z) = q(z) \iff D(z, y_z) = D^{\mathcal{C}}(q(z), q(y_z)) \iff \emptyset'_w(e(z)) = 1,$$

откуда в силу примитивной рекурсивности отношения “ $z = \tilde{h}_k$ ” следует $p \equiv_{pr} A_p \leq_{pr} \emptyset'_w$. $\square$

Список литературы

- [1] D. Cenzer, J. Remmel, *Polynomial-time abelian groups*, Ann. Pure Appl. Log. **56** (1–3), 313–363 (1992).
DOI: [https://doi.org/10.1016/0168-0072\(92\)90076-C](https://doi.org/10.1016/0168-0072(92)90076-C)
- [2] D. Cenzer, R.G. Downey, J.B. Remmel, Z. Uddin, *Space complexity of Abelian groups*, Arch. Math. Log. **48** (1), 115–140 (2009).
DOI: <https://doi.org/10.1007/s00153-008-0113-3>

-
- [3] I.Sh. Kalimullin, A.G. Melnikov, K.M. Ng, *Algebraic structures computable without delay*, Theoret. Comput. Sci. **674**, 73–98 (2017).
DOI: <https://doi.org/10.1016/j.tcs.2017.01.029>
- [4] N.A. Bazhenov, R.G. Downey, A.G. Melnikov, I.Sh. Kalimullin, *Foundations of online structure theory*, Bull. Symb. Log. **25** (2), 141–181 (2019).
DOI: <https://doi.org/10.1017/bsl.2019.20>
- [5] И.Ш. Калимуллин, А.Г. Мельников, К.М. Нг, *Различные версии категоричности без задержек*, Алгебра и логика **56** (2), 256–256 (2017).
DOI: <https://doi.org/10.17377/alglog.2017.56.207>
- [6] E.B. Fokina, I. Kalimullin, R. Miller, *Degrees of categoricity of computable structures*, Arch. Math. Log. **49** (1), 51–67 (2010).
DOI: <https://doi.org/10.1007/s00153-009-0160-4>
- [7] I.Sh. Kalimullin, A.G. Melnikov, *Punctual categoricity relative to a computable oracle*, Lobachevskii J. Math. **42** (4), 735–742 (2021).
DOI: <https://doi.org/10.1134/S1995080221040107>
- [8] Р.И. Соар, *Вычислимо перечислимые множества и степени*, Казан. матем. о-во, Казань, 2000.
- [9] S.C. Kleene, *Extension of an effectively generated class of functions by enumeration*, Colloq. Math. **6** (1), 68–78 (1958).
- [10] A. Urquhart, *The complexity of decision procedures in relevance logic II*, J. Symb. Log. **64** (4), 1774–1802 (1999).
DOI: <https://doi.org/10.2307/2586811>
- [11] S. Schmitz, *Complexity hierarchies beyond elementary*, ACM Trans. Comput. Theory, **8** (1), Article 3, 1–36 (2016).
DOI: <https://doi.org/10.1145/2858784>
- [12] W. Czerwiński, Ł. Orlikowski, *Reachability in vector addition systems is Ackermann-complete*, 2021 IEEE 62nd Annual symposium on foundations of computer science (FOCS), Denver, CO, USA, 1229–1240 (2022).
DOI: <https://doi.org/10.1109/FOCS52979.2021.00120>
- [13] J. Leroux, *The Reachability problem for Petri nets is not primitive recursive*, 2021 IEEE 62nd Annual symposium on foundations of computer science (FOCS), Denver, CO, USA, 1241–1252 (2022).
DOI: <https://doi.org/10.1109/FOCS52979.2021.00121>
- [14] L. Kristiansen, *Information content and computational complexity of recursive sets*, Gödel '96: Logical foundations of mathematics, computer science and physics – Kurt Gödel's legacy. Lecture Notes in Logic, 235–246 (1996).
DOI: <https://doi.org/10.1017/9781316716939.018>

Искандер Шагитович Калимуллин

Казанский (Приволжский) федеральный университет,
Кафедра алгебры и математической логики,
ул. Кремлевская, д. 18, г. Казань, 420008, Россия,
e-mail: Iskander.Kalimullin@kpfu.ru

Александра Алексеевна Курмачева

Казанский (Приволжский) федеральный университет,
Кафедра алгебры и математической логики,
ул. Кремлевская, д. 18, г. Казань, 420008, Россия,
e-mail: xsanca@mail.ru

Punctual categoricity and a jump operation in the primitive recursive degrees

I.Sh. Kalimullin, A.A. Kurmacheva

Abstract. The paper is devoted to the study of punctual structures such that any isomorphism between any of its punctual copies is primitive recursively reducible to a fixed 0, 1-valued oracle function. To estimate the complexity of such punctual structures and isomorphisms between them we introduce and investigate the weak (0, 1-valued) jump operation. In the paper we establish that there is a rigid punctual structure for which all isomorphisms are low under the weak jump, and at least one of them is not primitive recursive. Also we construct a rigid punctual structure with every isomorphism reducible to the weak jump of the zero function, and with at least one having a high degree.

Keywords: primitive recursive reducibility, punctual categoricity, jump operation.

DOI: 10.26907/2949-3919.2024.2.47-69

References

- [1] D. Cenzer, J. Remmel, *Polynomial-time abelian groups*, Ann. Pure Appl. Log. **56** (1–3), 313–363 (1992).
DOI: [https://doi.org/10.1016/0168-0072\(92\)90076-C](https://doi.org/10.1016/0168-0072(92)90076-C)
- [2] D. Cenzer, R.G. Downey, J.B. Remmel, Z. Uddin, *Space complexity of Abelian groups*, Arch. Math. Log. **48** (1), 115–140 (2009).
DOI: <https://doi.org/10.1007/s00153-008-0113-3>
- [3] I.Sh. Kalimullin, A.G. Melnikov, K.M. Ng, *Algebraic structures computable without delay*, Theoret. Comput. Sci. **674**, 73–98 (2017).
DOI: <https://doi.org/10.1016/j.tcs.2017.01.029>
- [4] N.A. Bazhenov, R.G. Downey, A.G. Melnikov, I.Sh. Kalimullin, *Foundations of online structure theory*, Bull. Symb. Log. **25** (2), 141–181 (2019).
DOI: <https://doi.org/10.1017/bsl.2019.20>

Acknowledgements. The work is supported by the grant of the «BASIS» Foundation. Also the results of the first paragraph were performed under the development program of Volga Region Mathematical Center (agreement no. 075-02-2024-1438).

Received: 07 June 2024. Accepted: 02 July 2024. Published: 16 July 2024.

-
- [5] I.S. Kalimullin, A.G. Melnikov, K.M. Ng, *The diversity of categoricity without delay*, Algebra Logic **56** (2), 171–177 (2017).
DOI: <https://doi.org/10.1007/s10469-017-9437-6>
- [6] E.B. Fokina, I. Kalimullin, R. Miller, *Degrees of categoricity of computable structures*, Arch. Math. Log. **49** (1), 51–67 (2010).
DOI: <https://doi.org/10.1007/s00153-009-0160-4>
- [7] I.Sh. Kalimullin, A.G. Melnikov, *Punctual categoricity relative to a computable oracle*, Lobachevskii J. Math. **42** (4), 735–742 (2021).
DOI: <https://doi.org/10.1134/S1995080221040107>
- [8] R.I. Soare, *Recursively enumerable sets and degrees. A study of computable functions and computably generated sets*, Perspectives in mathematical logic. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, etc., 1987.
URL: <https://link.springer.com/book/9783540666813>
- [9] S.C. Kleene, *Extension of an effectively generated class of functions by enumeration*, Colloq. Math. **6** (1), 68–78 (1958).
- [10] A. Urquhart, *The complexity of decision procedures in relevance logic II*, J. Symb. Log. **64** (4), 1774–1802 (1999).
DOI: <https://doi.org/10.2307/2586811>
- [11] S. Schmitz, *Complexity hierarchies beyond elementary*, ACM Trans. Comput. Theory, **8** (1), Article 3, 1–36 (2016).
DOI: <https://doi.org/10.1145/2858784>
- [12] W. Czerwiński, Ł. Orlikowski, *Reachability in vector addition systems is Ackermann-complete*, 2021 IEEE 62nd Annual symposium on foundations of computer science (FOCS), Denver, CO, USA, 1229–1240 (2022).
DOI: <https://doi.org/10.1109/FOCS52979.2021.00120>
- [13] J. Leroux, *The Reachability problem for Petri nets is not primitive recursive*, 2021 IEEE 62nd Annual symposium on foundations of computer science (FOCS), Denver, CO, USA, 1241–1252 (2022).
DOI: <https://doi.org/10.1109/FOCS52979.2021.00121>
- [14] L. Kristiansen, *Information content and computational complexity of recursive sets*, Gödel '96: Logical foundations of mathematics, computer science and physics – Kurt Gödel's legacy. Lecture Notes in Logic, 235–246 (1996).
DOI: <https://doi.org/10.1017/9781316716939.018>

Iskander Shagitovich Kalimullin

Kazan Federal University,
Department of Algebra and Mathematical Logic,
18 Kremlyovskaya str., Kazan 420008, Russia,
e-mail: Iskander.Kalimullin@kpfu.ru

Alexandra Alekseevna Kurmacheva

Kazan Federal University,
Department of Algebra and Mathematical Logic,
18 Kremlyovskaya str., Kazan 420008, Russia,
e-mail: xsanca@mail.ru