

К теории H -собранных пространств. II

М.И. Кудряшова, М.В. Швидефски

Аннотация. Мы показываем, что обобщенные собриффикации аппроксимационных пространств гомеоморфны пространствам специальных базисных идеалов исходных пространств. Используя эту характеристику, мы обобщаем ряд известных результатов о собриффикациях аппроксимационных пространств.

Ключевые слова: аппроксимационное пространство, собранное пространство, T_0 -пространство.

DOI: 10.26907/2949-3919.2024.2.70-83

Введение

Понятие H -собранности было введено С. Сю в работе [1] как удобное обобщение многих широко известных понятий в теории топологических T_0 -пространств. Среди них можно отметить, например, так называемые направленно полные пространства или d -пространства, вполне фильтрованные пространства, собранные пространства и так далее, см. [2–4]. Это дало унифицированный подход к изучению всех подобных понятий.

Настоящая работа является продолжением работы [5]. В [5] были описаны H -собриффикации T_0 -пространств для I -систем H , а также были получены характеристики H -собранных пространств. Нашей главной целью здесь является описание строения H -собриффикаций α -пространств, см. [раздел 2](#). Мы делаем это, используя подход Ю.Л. Ершова, представленный в его недавней монографии [6]. В [7] Ю.Л. Ершов доказал, что так называемый d -ранг α -пространства не превосходит 1. Здесь, основываясь на характеристиках H -собриффикаций с использованием идеалов базисных подпространств, представленной в [теореме 8](#), мы даем обобщение этого утверждения для произвольной I -системы H в [теореме 10](#) и [следствии 13](#), см. также [следствие 12](#). Мы также даем обобщения для ряда результатов из глав 5 и 8 в монографии [6].

Наша терминология по T_0 -пространствам соответствует монографиям Ю.Л. Ершова [6], Г. Гирца и др. [2], а также Ж. Губоль-Ларрека [8]. За всеми понятиями и обозначениями, не определенными здесь, мы отсылаем читателя к [5, 6].

Благодарности. Работа была поддержана Российским научным фондом, проект № 24-11-00227.

© 2024 М.И. Кудряшова, М.В. Швидефски

Поступила: 10.06.2024. Принята: 02.07.2024. Опубликовано: 16.07.2024.

1. Понятие Н-собранности

Для топологического T_0 -пространства $\mathbb{X}$ рассмотрим следующие семейства подмножеств в X :

- $I(\mathbb{X})$, множество всех непустых неприводимых подмножеств в X ;
- $S(\mathbb{X})$, множество всех одноэлементных подмножеств в X ;
- $D(\mathbb{X})$, множество всех непустых направленных вверх подмножеств в X ;
- $WF(\mathbb{X})$, множество всех непустых вполне фильтрованных подмножеств в X ;
- $R(\mathbb{X})$, множество всех непустых подмножеств Рудина в X ;
- $I^b(\mathbb{X})$, множество всех непустых ограниченных неприводимых подмножеств в X ;
- $D^b(\mathbb{X})$, множество всех непустых ограниченных направленных вверх подмножеств в X ;
- $WF^b(\mathbb{X})$, множество всех непустых ограниченных вполне фильтрованных подмножеств в X ;
- $R^b(\mathbb{X})$, множество всех непустых ограниченных подмножеств Рудина в X .

Определение 1 ([1]). Ковариантный функтор $\mathbf{H}: \mathbf{Top}_0 \rightarrow \mathbf{Set}$ называется *системой подмножеств*, если $S(\mathbb{X}) \subseteq \mathbf{H}(\mathbb{X}) \subseteq 2^X$ и для любого пространства $\mathbb{Y} \in \mathbf{Top}_0$ и любого непрерывного отображения $f: \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{Y}$ имеет место равенство $\mathbf{H}(f)(A) = f(A) \in \mathbf{H}(\mathbb{Y})$ для всех $A \in \mathbf{H}(\mathbb{X})$.

Система подмножеств $\mathbf{H}$ называется *неприводимой системой* или просто *I-системой*, если $\mathbf{H}(\mathbb{X}) \subseteq I(\mathbb{X})$ для всех $\mathbb{X} \in \mathbf{Top}_0$.

Из [определения 1](#) непосредственно вытекает

Следствие 2. Если $\mathbb{X} \in \{D, D^b, WF, WF^b, R, R^b, I, I^b\}$, то $\mathbb{X}$ является I-системой.

Для системы подмножеств $\mathbf{H}$ полагаем $\mathbf{H}_c(\mathbb{X}) = \{\text{cl}_{\mathbb{X}} A \mid A \in \mathbf{H}(\mathbb{X})\}$.

Определение 3 ([1]). Пусть $\mathbf{H}$ – система подмножеств. T_0 -пространство $\mathbb{X}$ называется *Н-собранным*, если $\mathbf{H}_c(\mathbb{X}) = S_c(\mathbb{X})$.

Непосредственно видно, что класс всех S-собранных пространств совпадает с классом всех T_0 -пространств, а класс всех I-собранных пространств совпадает с классом всех собранных пространств.

Определение 4. Пусть $\mathbf{H}$ – система подмножеств. Следуя Ю.Л. Ершову [9], назовем *Н-рангом* топологического пространства $\mathbb{X}$ наименьший ординал κ такой, что пространство $\mathbb{X}_\kappa$, построенное в доказательстве [5, теорема 17], является Н-собранным.

2. Н-собрификации α -пространств

Для расширения $\mathbb{Y} \leq \mathbb{X}$ T_0 -пространств и для элемента $x \in X$ полагаем

$$\downarrow x = \{y \in X \mid y \prec_{\mathbb{X}} x\} \quad \text{и} \quad \downarrow_{\mathbb{Y}} x = \{y \in Y \mid y \prec_{\mathbb{X}} x\}.$$

Лемма 5. Пусть $\mathbb{Y}$ является базисным подпространством в $\mathbb{X}$. Пусть также $\mathbb{Z} - T_0$ -пространство и пусть отображение $f: \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{Z}$ непрерывно. Тогда $\text{cl}_{\mathbb{Z}} f(\downarrow_{\mathbb{Y}} x) = \downarrow f(x)$. В частности, если $\mathbb{H}$ является I -системой, то $\downarrow_{\mathbb{Y}} x \in \mathbb{H}^d(\mathbb{X})$.

Доказательство. Так как $f(\downarrow x) \subseteq \downarrow f(x)$, мы заключаем, что $\text{cl}_{\mathbb{Z}} f(\downarrow_{\mathbb{Y}} x) \subseteq \downarrow f(x)$. Для доказательства обратного включения достаточно показать, что $f(x)$ является предельной точкой множества $f(\downarrow_{\mathbb{Y}} x)$. Действительно, пусть $f(x) \in U \in \mathcal{T}(\mathbb{Z})$. Тогда $x \in f^{-1}(U) \in \mathcal{T}(\mathbb{X})$. Так как $\mathbb{Y}$ является базисным подпространством в $\mathbb{X}$, существует элемент $y \in Y$ такой, что $y \in \downarrow_{\mathbb{Y}} x \cap f^{-1}(U)$. Следовательно, $f(y) \in U$, откуда и следует требуемое заключение.

Последнее утверждение непосредственно следует из первого. $\square$

Определение 6. Пусть $\mathbb{Y}$ является базисным подпространством в $\mathbb{X}$. Множество $J \subseteq Y$ называется $\mathbb{Y}$ -идеалом в $\mathbb{X}$, если следующие свойства выполняются для всех $y_0, y_1 \in Y$:

- (1) если $y_0 \leq y_1 \in J$, то $y_0 \in J$;
- (2) если $y_0, y_1 \in J$, то существует $y \in J$ такой, что $y_0 \prec y$ и $y_1 \prec y$.

Через $I(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$ мы обозначаем множество всех $\mathbb{Y}$ -идеалов в $\mathbb{X}$. Если $\mathbb{H}$ является I -системой, то через $I_H(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$ мы обозначаем множество всех $\mathbb{Y}$ -идеалов в $\mathbb{X}$, которые принадлежат семейству $\mathbb{H}^d(\mathbb{X})$.

Определим на множестве $I(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$ топологию $\mathcal{T}^\sharp$ базисом открытых множеств вида

$$V_F = \{J \in I(\mathbb{X}, \mathbb{Y}) \mid F \subseteq J\}, \quad \text{где множество } F \subseteq Y \text{ конечно.}$$

Пусть $\mathcal{T}_H^\sharp$ обозначает ограничение $\mathcal{T}^\sharp$ на $I_H(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$. Обозначим полученные топологические пространства через $\mathbb{I}(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$ и $\mathbb{I}_H(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$ соответственно.

Пусть $\mathbb{Y}$ является базисным подпространством в $\mathbb{X}$ и пусть $\mathbb{H}$ является I -системой. Рассмотрим следующее отображение:

$$\iota_{\mathbb{X}, \mathbb{Y}}: \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{I}_H(\mathbb{X}, \mathbb{Y}); \quad \iota_{\mathbb{X}, \mathbb{Y}}: x \mapsto \downarrow_{\mathbb{Y}} x.$$

Ввиду [леммы 5](#) отображение $\iota_{\mathbb{X}, \mathbb{Y}}$ определено корректно.

Следующее утверждение обобщает [\[6, теорема 5.7.2\]](#).

Теорема 7. Пусть $\mathbb{Y}$ является базисным подпространством в $\mathbb{X}$ и пусть $\mathbb{H}$ является I -системой. Тогда

- (1) $\iota_{\mathbb{X}, \mathbb{Y}}$ является гомеоморфным вложением $\mathbb{X}$ в $\mathbb{I}_H(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$;
- (2) $\iota_{\mathbb{X}, \mathbb{Y}}(\mathbb{Y})$ является базисным подпространством в $\mathbb{I}_H(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$.
- (3) $\iota_{\mathbb{X}, \mathbb{Y}}(\mathbb{X})$ является $\mathbb{H}^d$ -базисом для $\mathbb{I}_H(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$.

Доказательство. Для краткости мы используем в этом доказательстве обозначение ι вместо $\iota_{\mathbb{X}, \mathbb{Y}}$ и $\mathbb{I} = \langle I, \mathcal{T}_H^\sharp \rangle$ вместо $\mathbb{I}_H(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$. Тот факт, что отображение $\iota: \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{I}$ определено корректно, вытекает из [леммы 5](#).

(1) Пусть $x_0 \not\leq x_1$ в $\mathbb{X}$, т. е. существует $U \in \mathcal{T}(\mathbb{X})$ такое, что $x_0 \in U$ и $x_1 \notin U$. Так как $\mathbb{Y}$ является базисным подпространством в $\mathbb{X}$, найдется $x'_0 \in Y \cap U \cap \downarrow x_0$. Отсюда следует,

что $x'_0 \not\leq x_1$, поэтому $x'_0 \notin \downarrow x_1$. Таким образом, отображение ι взаимно-однозначно. Покажем, что ι непрерывно. Для этого достаточно доказать, что прообраз каждого базисного открытого множества из $\mathcal{T}_H^\sharp$ открыт в пространстве $\mathbb{X}$. Рассмотрим произвольное конечное множество $F \subseteq Y$. Тогда

$$\iota^{-1}(V_F) = \{x \in X \mid F \subseteq \downarrow_{\mathbb{Y}} x\} = \bigcap_{f \in F} \text{int } \uparrow f \in \mathcal{T}(\mathbb{X}),$$

поскольку множество F конечно. Заметим, что $U = \bigcup_{u \in U \cap Y} \text{int } \uparrow u$ для каждого $U \in \mathcal{T}(\mathbb{X})$. Действительно, если $x \in U$, то существует $u \in U \cap Y \cap \downarrow x$, поскольку $\mathbb{Y}$ является базисным подпространством в $\mathbb{X}$, откуда $x \in \text{int } \uparrow u$. Обратное включение очевидно. Таким образом, имеем

$$\begin{aligned} \iota(U) &= \bigcup_{u \in U \cap Y} \iota(\text{int } \uparrow u) = \bigcup_{u \in U \cap Y} \{\downarrow_{\mathbb{Y}} x \mid x \in \text{int } \uparrow u\} = \bigcup_{u \in U \cap Y} \{\downarrow_{\mathbb{Y}} x \mid u \in \downarrow_{\mathbb{Y}} x\} \\ &= \bigcup_{u \in U \cap Y} \iota(X) \cap V_{\{u\}} \in \mathcal{T}_H^\sharp \cap \iota(X). \end{aligned}$$

Поэтому получаем, что ι является гомеоморфным вложением.

(2) Докажем сначала, что $\iota(j) \prec_{\mathbb{I}} J$ для всех $J \in I_H(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$ и всех $j \in J$. Действительно, непосредственно видно, что $J \in V_{\{j\}} \in \mathcal{T}_H^\sharp$. Более того, $j \in J'$ для каждого $J' \in V_{\{j\}}$, поэтому $\iota(j) \subseteq J'$. Это означает, что $J \in V_{\{j\}} \subseteq \uparrow \iota(j)$, что и доказывает требуемое утверждение.

Далее, пусть F является конечным подмножеством в Y и пусть $J \in V_F \in \mathcal{T}_H^\sharp$ для некоторого $J \in I_H(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$. Это означает, что $F \subseteq J$. Если $F = \emptyset$, то $\iota(j) \prec_{\mathbb{I}} J$ и $\iota(j) \in V_F = I_H(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$ для всех $j \in J$. Если $F \neq \emptyset$, то существует $j \in J$ такой, что $f \prec_{\mathbb{X}} j$ для всех $f \in F$, так как J является $\mathbb{Y}$ -идеалом. Как и выше, мы заключаем, что $\iota(j) \prec_{\mathbb{I}} J$. Более того, $F \subseteq \iota(j)$, откуда $\iota(j) \in V_F$.

(3) Возьмем произвольный $\mathbb{Y}$ -идеал $J \in I$ и рассмотрим множество $A = \{\downarrow_{\mathbb{Y}} y \mid y \in J\}$; тогда $A \subseteq \downarrow_{\mathbb{I}} J$. Пусть $\mathbb{Z}$ – $\mathbb{H}$ -собранный пространство и пусть отображение $f: \iota(\mathbb{X}) \rightarrow \mathbb{Z}$ непрерывно. Рассмотрим отображение $f': \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{Z}$, $f': x \mapsto f\iota(x)$. Тогда f' также непрерывно. Так как $J \in \mathbb{H}^d(\mathbb{X})$, существует $z \in Z$ такой, что $\downarrow z = \text{cl}_{\mathbb{Z}} f'(J) = \text{cl}_{\mathbb{Z}} f(A)$, так как ι является гомеоморфным вложением согласно утверждению (1). Следовательно, $A \in \mathbb{H}^d(\iota(\mathbb{X}))$. Наконец, пусть $J \in V_F$ для некоторого конечного множества $F \subseteq Y$, т. е. $F \subseteq J$. Поскольку множество F конечно, мы получаем по определению $\mathbb{Y}$ -идеала, что существует $a \in J$ такой, что $F \subseteq \downarrow_{\mathbb{X}} a$, поэтому $\downarrow_{\mathbb{X}} a \in A \cap V_F$ и, следовательно, $J \in \text{cl}_{\mathbb{I}} A$. Это влечет равенство $\downarrow_{\mathbb{I}} J = \text{cl}_{\mathbb{I}} A$. Доказательство утверждения (3) завершено. $\square$

Следующая теорема обобщает [6, предложение 5.7.3].

Теорема 8. Пусть $\mathbb{Y}$ является базисным подпространством в $\mathbb{X}$ и пусть $\mathbb{H}$ является I -системой. Тогда $\mathbb{I}_H(\mathbb{X}, \mathbb{Y}) \cong \mathbb{S}_H(\mathbb{X})$.

Доказательство. Рассмотрим два отображения

$$\begin{aligned}\varphi: \mathbb{I}_H(\mathbb{X}, \mathbb{Y}) &\rightarrow \mathbb{S}_H(\mathbb{X}); & \varphi: I &\mapsto \text{cl}_{\mathbb{X}} I; \\ \psi: \mathbb{S}_H(\mathbb{X}) &\rightarrow \mathbb{I}_H(\mathbb{X}, \mathbb{Y}); & \psi: A &\mapsto \bigcup_{a \in A} \downarrow_{\mathbb{X}} a \cap Y.\end{aligned}$$

Покажем, что φ и ψ являются взаимно обратными гомеоморфизмами.

Утверждение 1. *Отображения φ и ψ определены корректно.*

Доказательство утверждения. Покажем, что $\text{cl}_{\mathbb{X}} I \in \mathbf{H}^d(\mathbb{X})$ для каждого $I \in \mathbb{I}_H(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$. Действительно, рассмотрим произвольное $\mathbf{H}$ -собрание пространство $\mathbb{Z}$ и непрерывное отображение $f: \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{Z}$. Так как $I \in \mathbf{H}^d(\mathbb{X})$, то $\text{cl}_{\mathbb{Z}} f(I) = \downarrow z$ для некоторого $z \in \mathbb{Z}$. В силу [6, лемма 1.5.1(iii)] имеем $f(\text{cl}_{\mathbb{X}} I) \subseteq \text{cl}_{\mathbb{Z}} f(I)$, поэтому $\text{cl}_{\mathbb{Z}} f(\text{cl}_{\mathbb{X}} I) \subseteq \text{cl}_{\mathbb{Z}} f(I)$. С другой стороны, очевидно, что $\text{cl}_{\mathbb{Z}} f(I) \subseteq \text{cl}_{\mathbb{Z}} f(\text{cl}_{\mathbb{X}} I)$, поэтому $\downarrow z = \text{cl}_{\mathbb{Z}} f(I) = \text{cl}_{\mathbb{Z}} f(\text{cl}_{\mathbb{X}} I)$. Это означает, что $\text{cl}_{\mathbb{X}} I \in \mathbf{H}^d(\mathbb{X})$, т.е. отображение φ определено корректно.

Докажем теперь, что ψ также корректно определено. Для этого рассмотрим произвольное множество $A \in \mathbb{S}_H(\mathbb{X})$. Если $y \leq x \in \psi(A)$ для некоторого $y \in Y$, то существует $a \in A$ такой, что $y \leq x \prec a$, т.е. $y \prec a$ и $y \in \psi(A)$. Если $y_0, y_1 \in \psi(A)$, то найдутся элементы $a_i \in \text{int } \uparrow y_i \cap A$, $i < 2$. Согласно [5, лемма 4], $\mathbf{H}^d(\mathbb{X})$ является I -системой. Таким образом, A является неприводимым множеством, поэтому существует $a \in \text{int } \uparrow y_0 \cap \text{int } \uparrow y_1 \cap A$. Так как $\mathbb{Y}$ является базисным подпространством в $\mathbb{X}$, существует $b \in Y$ такой, что $b \in \text{int } \uparrow y_0 \cap \text{int } \uparrow y_1 \cap \downarrow_{\mathbb{X}} a$. Отсюда следует, что $b \in \psi(A)$ и $y_0 \prec b$, $y_1 \prec b$. Поэтому $\psi(A)$ является $\mathbb{Y}$ -идеалом.

Наконец, остается показать, что $\psi(A) \in \mathbf{H}^d(\mathbb{X})$. Мы докажем сначала равенство $\text{cl}_{\mathbb{X}} \psi(A) = \text{cl}_{\mathbb{X}} A$. Так как $\psi(A) \subseteq \downarrow A$, мы получаем, что $\psi(A) \subseteq \text{cl}_{\mathbb{X}} A$ и $\text{cl}_{\mathbb{X}} \psi(A) \subseteq \text{cl}_{\mathbb{X}} A$. Для доказательства обратного включения рассмотрим произвольный элемент $x \in \text{cl}_{\mathbb{X}} A$ и предположим, что $x \in U \in \mathcal{T}(\mathbb{X})$. Тогда найдется $a \in A \cap U$. Поскольку $\mathbb{Y}$ является базисным подпространством в $\mathbb{X}$, существует $y \in Y \cap U \cap \downarrow_{\mathbb{X}} a$. Но тогда $y \in \psi(A)$ и $x \in \text{cl}_{\mathbb{X}} \psi(A)$. Следовательно, $\text{cl}_{\mathbb{X}} A \subseteq \text{cl}_{\mathbb{X}} \psi(A)$, и справедливо искомое равенство $\text{cl}_{\mathbb{X}} \psi(A) = \text{cl}_{\mathbb{X}} A$. Принимая во внимание включение $A \in \mathbf{H}^d(\mathbb{X})$, мы получаем, что $\psi(A) \in \mathbf{H}^d(\mathbb{X})$ в силу [5, лемма 5]. Таким образом, $\psi(A) \in \mathbb{I}_H(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$, что и требовалось. $\square$

Утверждение 2. *Отображение φ непрерывно.*

Доказательство утверждения. Для каждого $U \in \mathcal{T}(\mathbb{X})$ имеем

$$\begin{aligned}\varphi^{-1}(U^*) &= \{J \in \mathbb{I}_H(\mathbb{X}, \mathbb{Y}) \mid \varphi(J) \cap U \neq \emptyset\} = \{J \in \mathbb{I}_H(\mathbb{X}, \mathbb{Y}) \mid \text{cl}_{\mathbb{X}} J \cap U \neq \emptyset\} \\ &= \{J \in \mathbb{I}_H(\mathbb{X}, \mathbb{Y}) \mid J \cap U \neq \emptyset\} = \bigcup_{y \in U \cap Y} V_{\{y\}} \in \mathcal{T}_H^\#, \end{aligned}$$

что и является требуемым заключением. $\square$

Утверждение 3. *Отображение ψ непрерывно.*

Доказательство утверждения. Достаточно показать, что прообраз каждого базисного открытого множества из $\mathcal{T}_H^\sharp$ открыт в $\mathbb{S}_H(\mathbb{X})$. Действительно, пусть множество $F \subseteq Y$ конечно. Тогда мы имеем:

$$\begin{aligned}\psi^{-1}(V_F) &= \{A \in S_H(X) \mid \psi(A) \in V_F\} = \{A \in S_H(X) \mid F \subseteq \psi(A)\} \\ &= \bigcap_{f \in F} \{A \in S_H(X) \mid f \in \psi(A)\} = \bigcap_{f \in F} \{A \in S_H(X) \mid A \cap \text{int} \uparrow f \neq \emptyset\} \\ &= \bigcap_{f \in F} (\text{int} \uparrow f)^* \in \mathcal{T}_H^*(\mathbb{X}),\end{aligned}$$

откуда и следует требуемое заключение. $\square$

Утверждение 4. *Отображения φ и ψ взаимно обратны.*

Доказательство утверждения. Для произвольного $A \in S_H(X)$ в силу доказательства утверждения 1 имеем

$$\varphi\psi(A) = \text{cl}_{\mathbb{X}} \psi(A) = \text{cl}_{\mathbb{X}} A = A,$$

откуда $\varphi\psi = \text{id}_{\mathbb{S}_H(\mathbb{X})}$.

Далее, пусть $J \in I_H(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$ и пусть $y \in \cap \psi\varphi(J)$. Тогда существует $a \in \varphi(J) = \text{cl}_{\mathbb{X}} J$ такой, что $a \in \text{int}_{\mathbb{X}} \uparrow y \in \mathcal{T}(\mathbb{X})$. Поскольку a является предельной точкой для J , существует $b \in J \cap \text{int}_{\mathbb{X}} \uparrow y$, откуда получаем, что $y \prec b \in J$ и, следовательно, $y \in J$. Таким образом, мы установили, что $\psi\varphi(J) \subseteq J$. Более того, $J \subseteq \psi\varphi(J)$ по определению отображений φ и ψ . Поэтому $\psi\varphi = \text{id}_{I_H(\mathbb{X}, \mathbb{Y})}$. $\square$

Доказательство теоремы 8 завершено. $\square$

Так как $\mathbb{D}$ является I -системой, $\mathbb{D}^d$ также является I -системой ввиду [5, лемма 4]. Таким образом, $\mathbb{D}^d(\mathbb{X})$ является топологическим T_0 -пространством по утверждению 1 из доказательства теоремы 17 в [5] для каждого топологического T_0 -пространства $\mathbb{X}$. Более того, $\mathbb{D}_S(\mathbb{X}) \cong \mathbb{D}_S^d(\mathbb{X})$ по теореме 23 и лемме 16 в [5].

Определение 9. Пусть $\mathbb{D}_H$ обозначает I -систему такую, что $\mathbb{D}_H(\mathbb{X})$ состоит из всех направленных вверх (относительно порядка специализации) подмножеств в X , которые принадлежат $\mathbb{H}^d(\mathbb{X})$. Другими словами, $\mathbb{D}_H = \mathbb{D} \cap \mathbb{H}^d$.

Следующая теорема обобщает [6, теорема 8.1.7].

Теорема 10. *Пусть $\mathbb{Y}$ является базисным подпространством в $\mathbb{X}$ и пусть $\mathbb{H}$ является I -системой. Тогда*

$$I_H(\mathbb{X}, \mathbb{Y}) \cong \mathbb{H}_S(\mathbb{X}) \cong \mathbb{H}^d(\mathbb{X}) \cong \mathbb{D}_H(\mathbb{X}) \cong \mathbb{D}_{HS}(\mathbb{X}).$$

Доказательство. Как и в доказательстве [6, теорема 8.1.7] рассмотрим следующее отображение:

$$\xi_H: \mathbb{D}_H(\mathbb{X}) \rightarrow \mathbb{I}_H(\mathbb{X}, \mathbb{Y}); \quad \xi_H: [S] \mapsto \bigcup_{s \in S} \{y \in Y \mid y \prec s\}.$$

Утверждение 1. *Отображение ξ_H определено корректно.*

Доказательство утверждения. В силу [6, лемма 8.1.4] имеем

$$\bigcup_{s \in S} \{y \in Y \mid y \prec s\} = \bigcup_{s \in S'} \{y \in Y \mid y \prec s\},$$

если $S, S' \in \mathbb{D}_H(\mathbb{X})$ таковы, что $S' \in [S]$. Ввиду [6, лемма 8.1.2] $\xi_H([S])$ является $\mathbb{Y}$ -идеалом в $\mathbb{X}$. Остается показать, что $\xi_H([S]) \in \mathbb{H}^d(\mathbb{X})$ для всех $S \in \mathbb{D}_H(\mathbb{X})$.

Действительно, пусть $\mathbb{Z}$ – $\mathbb{H}$ -собранное пространство и пусть отображение $f: \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{Z}$ непрерывно. Поскольку $S \in \mathbb{H}^d(\mathbb{X})$, существует $z \in Z$ такой, что $\text{cl}_{\mathbb{Z}} f(S) = \downarrow_{\mathbb{Z}} z$. Покажем, что $\text{cl}_{\mathbb{Z}} f(\xi_H([S])) = \downarrow_{\mathbb{Z}} z$. Действительно, пусть $a \in \text{cl}_{\mathbb{Z}} f(\xi_H([S]))$ и пусть $a \in U \in \mathcal{T}(\mathbb{Z})$. Так как a является предельной точкой для множества $f(\xi_H([S]))$, найдется $a' \in \xi_H([S])$ такой, что $f(a') \in U$, т. е. $a' \in f^{-1}(U) \in \mathcal{T}(\mathbb{X})$. Включение $a' \in \xi_H([S])$ означает, что $a' \prec s$ для некоторого $s \in S$. Поэтому $s \in f^{-1}(U) \cap S$. Из того, что $\text{cl}_{\mathbb{Z}} f(S) = \downarrow_{\mathbb{Z}} z$, мы получаем неравенства $f(a') \leq f(s) \leq z$. Следовательно $z \in U$. Таким образом, $a \leq z$ по определению порядка специализации и $\text{cl}_{\mathbb{Z}} f(\xi_H([S])) \subseteq \downarrow_{\mathbb{Z}} z$.

Обратно, пусть $z \in U \in \mathcal{T}(\mathbb{Z})$. Так как z является предельной точкой для множества $\text{cl}_{\mathbb{Z}} f(S)$, мы заключаем, что существует $s \in S$ такой, что $f(s) \in U$. Следовательно $s \in f^{-1}(U) \in \mathcal{T}(\mathbb{X})$. Из того, что $\mathbb{Y}$ является базисным подпространством, существует $y \in Y \cap f^{-1}(U)$ в $\mathbb{X}$ с условием $y \prec s$. Таким образом, $y \in \xi_H([S])$ и $f(y) \in f(\xi_H([S])) \cap U$. Это доказывает, что z является предельной точкой для множества $f(\xi_H([S]))$. Поэтому $\downarrow_{\mathbb{Z}} z \subseteq \text{cl}_{\mathbb{Z}} f(\xi_H([S]))$, откуда и следует требуемое утверждение. $\square$

Заметим, что отображение ξ_H взаимно-однозначно в силу [6, лемма 8.1.4]. Более того, $\xi_H([I]) = I$ для всех $I \in I_H(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$ ввиду [6, лемма 8.1.5]. Поэтому ξ_H является отображением “на”.

Утверждение 2. *Отображение ξ_H является гомеоморфизмом.*

Доказательство утверждения. Мы используем обозначения из доказательства [5, теорема 17] и [теоремы 8](#). Для произвольного открытого множества $U \in \mathcal{T}(\mathbb{X})$ имеем

$$\xi_H(U^*) = \{\xi_H([S]) \mid S \cap U \neq \emptyset\} = \{I \in I_H(\mathbb{X}, \mathbb{Y}) \mid I \cap U \neq \emptyset\} = \bigcup_{y \in U \cap Y} V_{\{y\}} \in \mathcal{T}_H^\#.$$

Отсюда следует, что отображение ξ_H открыто. Далее, покажем, что прообраз любого предбазисного открытого множества топологии $\mathcal{T}_H^\#$ открыт в $\mathcal{T}^*$. Для произвольного $a \in Y$

имеем

$$\begin{aligned}
 \xi_H^{-1}(V_{\{a\}}) &= \{[S] \in D_H(\mathbb{X}) \mid \xi_H([S]) \in V_{\{a\}}\} \\
 &= \{[S] \in D_H(\mathbb{X}) \mid a \in \xi_H([S])\} \\
 &= \{[S] \in D_H(\mathbb{X}) \mid a \prec s \text{ для некоторого } s \in S\} \\
 &= \{[S] \in D_H(\mathbb{X}) \mid \text{int } \uparrow a \cap S \neq \emptyset\} = (\text{int } \uparrow a)^* \in \mathcal{T}^*,
 \end{aligned}$$

поэтому отображение ξ_H непрерывно. $\square$

Таким образом, по [теореме 8](#) мы имеем $\mathbb{D}_H(\mathbb{X}) \cong \mathbb{I}_H(\mathbb{X}, \mathbb{Y}) \cong \mathbb{H}_S(\mathbb{X})$. Это означает, что $\mathbb{D}_H(\mathbb{X})$ является Н-собранием пространства $\mathbb{X}$ (с точностью до гомеоморфизма). В силу [\[5, теорема 23\]](#) мы получаем, что $\mathbb{D}_H(\mathbb{X})$ является наименьшим расширением пространства $\mathbb{X}$, которое является $\mathbf{H}^d$ -собранным. Так как $D_H \subseteq \mathbf{H}^d$, заключаем, что пространство $\mathbb{D}_H(\mathbb{X})$ также D_H -собранным. Согласно построению из доказательства [\[5, теорема 17\]](#), без ограничения общности мы можем предполагать, что $\mathbb{X} \leq \mathbb{D}_H(\mathbb{X}) \leq \mathbb{D}_{HS}(\mathbb{X})$. Применяя утверждение (iv) из [\[5, теорема 23\]](#), имеем $\mathbb{D}_H(\mathbb{X}) \cong \mathbb{D}_{HS}(\mathbb{X})$. Наконец,

$$\mathbb{H}_S(\mathbb{X}) \cong \mathbb{D}_H(\mathbb{X}) \leq \mathbb{H}^d(\mathbb{X}) \leq \mathbb{H}_S^d(\mathbb{X}) \cong \mathbb{H}_S(\mathbb{X})$$

ввиду [\[5, теорема 23\]](#). Следовательно, $\mathbb{H}^d(\mathbb{X}) \cong \mathbb{H}_S(\mathbb{X})$. Доказательство завершено. $\square$

Для α -пространства $\mathbb{X}$ мы полагаем для краткости $\mathbb{I}_H(\mathbb{X}, \mathbb{X}) = \mathbb{I}_H(\mathbb{X})$. Более того, пишем просто $\iota_{\mathbb{X}}$ вместо $\iota_{\mathbb{X}, \mathbb{X}}$. Следующее утверждение обобщает [\[6, следствие 8.1.9\]](#).

Следствие 11. *Если $\mathbb{X}$ и $\mathbb{Y}$ являются α -пространствами, а отображение $f: \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{Y}$ непрерывно, то существует единственное непрерывное отображение*

$$\mathbb{I}_H(f): \mathbb{I}_H(\mathbb{X}) \rightarrow \mathbb{I}_H(\mathbb{Y})$$

такое, что диаграмма

$$\begin{array}{ccc}
 \mathbb{X} & \xrightarrow{f} & \mathbb{Y} \\
 \downarrow \iota_{\mathbb{X}} & & \downarrow \iota_{\mathbb{Y}} \\
 \mathbb{I}_H(\mathbb{X}) & \xrightarrow{\mathbb{I}_H(f)} & \mathbb{I}_H(\mathbb{Y})
 \end{array}$$

коммутативна.

Доказательство. Как и в доказательстве [\[6, следствие 8.1.9\]](#), см. [\[6, замечание 8.1.10\]](#), мы полагаем:

$$\mathbb{I}_H(f): \mathbb{I}_H(\mathbb{X}) \rightarrow \mathbb{I}_H(\mathbb{Y}); \quad \mathbb{I}_H(f): I \mapsto \xi_H f(I).$$

Пусть G – конечное подмножество в Y . Тогда

$$\begin{aligned}
 \mathbb{I}_H(f)^{-1}(V_G) &= \{I \in I_H(\mathbb{X}) \mid G \subseteq \xi_H f(I)\} \\
 &= \bigcap_{g \in G} \{I \in I_H(\mathbb{X}) \mid f(I) \cap \text{int } \uparrow g \neq \emptyset\} \\
 &= \bigcap_{g \in G} \{I \in I_H(\mathbb{X}) \mid I \cap f^{-1}(\text{int } \uparrow g) \neq \emptyset\} \\
 &= \bigcap_{g \in G} \bigcup_{x \in f^{-1}(\text{int } \uparrow g)} \{I \in I_H(\mathbb{X}) \mid x \in I\} \\
 &= \bigcap_{g \in G} \bigcup_{x \in f^{-1}(\text{int } \uparrow g)} V_{\{x\}} \in \mathcal{T}_{\mathbb{X}}^{\sharp},
 \end{aligned}$$

поэтому отображение $\mathbb{I}_H(f)$ непрерывно. Ясно, что для всех $x \in X$ имеем

$$\iota_Y f(x) = \downarrow f(x) = \xi_H f(x) = \xi_H f(\downarrow x) = \mathbb{I}_H(f)\iota_X(x),$$

т. е. диаграмма коммутативна.

Наконец, предположим, что непрерывное отображение $f': \mathbb{I}_H(\mathbb{X}) \rightarrow \mathbb{I}_H(Y)$ таково, что $f'\iota_X(x) = \iota_Y f(x) = \mathbb{I}_H(f)\iota_X(x)$ для всех $x \in X$. Тогда отображения f' и $\mathbb{I}_H(f)$ совпадают на $\iota_X(\mathbb{X})$. По [теореме 7 \(3\)](#) $\iota_X(\mathbb{X})$ является $\mathbf{H}^d$ -базисом для $\mathbb{I}_H(\mathbb{X})$. По предложению 7 и лемме 8 из работы [5] $\iota_X(\mathbb{X}) \leq \mathbb{I}_H(\mathbb{X})$ является u -расширением. Таким образом, $f' = \mathbb{I}_H(f)$. $\square$

Следствие 12. Пусть $\mathbf{H}$ является I -системой такой, что $\mathbf{D} \subseteq \mathbf{H}$, и пусть Y является базисным подпространством в $\mathbb{X}$. Тогда

$$\mathbf{D}(\mathbb{X}) \cong \mathbf{H}(\mathbb{X}) \cong \mathbf{D}_S(\mathbb{X}) \cong \mathbb{I}_H(\mathbb{X}, Y) \cong \mathbf{H}_S(\mathbb{X}) \cong \mathbf{S}(\mathbb{X}) \cong \mathbb{I}(\mathbb{X}, Y).$$

В частности,

$$\mathbf{D}(\mathbb{X}) \cong \mathbf{WF}(\mathbb{X}) \cong \mathbf{D}_S(\mathbb{X}) \cong \mathbf{WF}_S(\mathbb{X}) \cong \mathbf{S}(\mathbb{X}).$$

Доказательство. Напомним, что $\mathbf{S}(\mathbb{X}) = \mathbb{I}_S(\mathbb{X})$ обозначает в [6] собриффикацию пространства $\mathbb{X}$. Поскольку каждый идеал из $I(\mathbb{X}, Y)$ является направленным вверх множеством, мы заключаем, что $I(\mathbb{X}, Y) \subseteq \mathbf{D}(\mathbb{X}) \subseteq \mathbf{H}(\mathbb{X}) \subseteq \mathbf{H}^d(\mathbb{X})$, т. е. $I(\mathbb{X}, Y) = I_H(\mathbb{X}, Y)$. Согласно [теореме 8](#) и доказательству [теоремы 10](#), имеем

$$\mathbf{S}(\mathbb{X}) \cong \mathbf{D}_S(\mathbb{X}) \cong \mathbf{D}(\mathbb{X}) \leq \mathbf{H}(\mathbb{X}) \leq \mathbf{H}_S(\mathbb{X}) \cong \mathbb{I}_H(\mathbb{X}, Y) = \mathbb{I}(\mathbb{X}, Y) \cong \mathbf{S}(\mathbb{X}).$$

Следовательно, требуемое утверждение вытекает из [5, теорема 23]. $\square$

В следующем утверждении, которое является прямым следствием [теоремы 10](#) и [следствия 12](#), мы ссылаемся на [определение 4](#).

Следствие 13. Пусть $\mathbb{X}$ является α -пространством и пусть $\mathbf{H}$ является I -системой.

- (1) D_H -ранг и H -ранг пространства X совпадают и не превосходят 1. Более того, $\mathbb{D}_H(X)$ является H -собрификацией пространства X .
- (2) Если $D \subseteq H$, то D -ранг и H -ранг пространства X совпадают и не превосходят 1. Более того, $\mathbb{D}(X)$ является H -собрификацией пространства X .

Следствие 13 обобщает [6, следствие 8.3.2], см. также Ю.Л. Ершов [7]. Из [6, предложение 5.7.5] и **теоремы 8** получаем

Следствие 14. Для T_0 -пространства X равносильны следующие утверждения.

- (1) X является α -пространством [φ -пространством].
- (2) $\mathbb{S}_H(X)$ является α -пространством [φ -пространством соответственно] для каждой I -системы H .
- (3) $\mathbb{S}_H(X)$ является α -пространством [φ -пространством соответственно] для некоторой I -системы H .

Доказательство. Очевидно, что (2) влечет (3). Пусть выполнено (1) и пусть H – произвольная I -система. По **теореме 8** имеем $\mathbb{S}_H(X) \cong \mathbb{I}_H(X, Y)$. По **теореме 7** (3) $\iota_{X,Y}(X)$ является H^d -базисом для $\mathbb{I}_H(X, Y)$. По предложению 7 и лемме 8 из работы [5] $\iota_{X,Y}(X) \leq \mathbb{I}_H(X, Y)$ является u -расширением. Из [6, следствие 5.6.5(v)–(vi)] вытекает, что (1) влечет (2) и (3) влечет (1). $\square$

Следствие 15. Пусть H является I -системой такой, что $D \subseteq H$, и пусть X является T_0 -пространством. Если X является A -пространством, то $\mathbb{S}_H(X)$ является A_d -пространством.

Доказательство. По **следствию 12** имеем $\mathbb{S}_H(X) \cong \mathbb{S}(X)$. В силу [6, предложение 5.7.5] $\mathbb{S}(X)$ является A -пространством. Так как каждое собранное пространство является d -пространством, мы заключаем, что $\mathbb{S}_H(X) \cong \mathbb{S}(X)$ является A_d -пространством. $\square$

За определением b -пространства мы отсылаем читателя к работе Ю.Л. Ершова [10]. Подмножество $F \subseteq X$ в T_0 -пространстве X называется *совершенным*, если выполнено следующее условие. Если $x \in X$ является верхней границей для непустого подмножества $F' \subseteq F$, то существует $f \in F$ такой, что f является верхней границей для F' и $f \leq x$. Тогда φ -пространство X называется *b -пространством*, если каждое конечное непустое множество, состоящее из компактных элементов, содержится в некотором конечном совершенном подмножестве множества всех компактных элементов.

Следующее утверждение обобщает [6, следствие 5.7.6].

Следствие 16. Для T_0 -пространства X равносильны следующие утверждения.

- (1) X является f -пространством [b -пространством соответственно].
- (2) $\mathbb{S}_H(X)$ является f -пространством [b -пространством соответственно] для каждой I -системы H .
- (3) $\mathbb{S}_H(X)$ является f -пространством [b -пространством соответственно] для некоторой I -системы H .

Доказательство. Предположим сначала, что $\mathbb{X}$ является f -пространством. Пусть $\mathbb{C}$ обозначает его f -базисное подпространство (т. е. множество всех его компактных элементов). Рассмотрим произвольную I -систему $\mathbb{H}$. По [теореме 7 \(3\)](#) $\mathbb{C}' = \iota_{\mathbb{X}, \mathbb{C}}(\mathbb{X})$ является $\mathbb{H}^d$ -базисом для $\mathbb{I}_H(\mathbb{X}, \mathbb{C})$. По предложению 7 и лемме 8 из [\[5\]](#) $\mathbb{C}' \leq \mathbb{I}_H(\mathbb{X}, \mathbb{C})$ является u -расширением. Согласно [\[6, следствие 5.6.5\(iv\)\]](#), $\mathbb{C}'$ является φ -базисным подпространством в $\mathbb{I}_H(\mathbb{X}, \mathbb{C})$. Покажем, что $\mathbb{C}'$ является парусом. Пусть $a, b \in \mathbb{C}'$ и $J \in I_H(\mathbb{X}, \mathbb{C})$ таковы, что $\downarrow_{\mathbb{C}'} a, \downarrow_{\mathbb{C}'} b \subseteq J$. Это означает, что $a, b \in J$. Так как J является $\mathbb{C}$ -идеалом, существует $c \in J$ такой, что $a, b \leq_{\mathbb{X}} c$. Так как $\mathbb{X}$ является f -пространством, мы заключаем, что существует $a \vee b \in \mathbb{C}$. Отсюда следует, что $\iota_{\mathbb{X}, \mathbb{C}}(a \vee b) = \iota_{\mathbb{X}, \mathbb{C}}(a) \vee \iota_{\mathbb{X}, \mathbb{C}}(b)$ в $\mathbb{I}_H(\mathbb{X}, \mathbb{C})$, поэтому $\mathbb{I}_H(\mathbb{X}, \mathbb{C})$ является f -пространством. По [теореме 8](#) имеем $\mathbb{S}_H(\mathbb{X}) \cong \mathbb{I}_H(\mathbb{X}, \mathbb{C})$. Таким образом, (1) влечет (2).

Утверждение (2) очевидным образом влечет утверждение (3). Покажем теперь, что (3) влечет (1). Действительно, пусть I -система $\mathbb{H}$ такова, что $\mathbb{S}_H(\mathbb{X})$ является f -пространством. В частности, $\mathbb{S}_H(\mathbb{X})$ является φ -пространством. По [следствию 14](#) $\mathbb{X}$ является φ -пространством. Пусть $\mathbb{C}$ обозначает его φ -базисное подпространство. По [теореме 8](#) $\mathbb{I}_H(\mathbb{X}, \mathbb{C}) \cong \mathbb{S}_H(\mathbb{X})$ является f -пространством. В силу [теоремы 7 \(2\)](#) и [\[6, следствие 5.6.5\(iv\)\]](#) $\mathbb{C}' = \iota_{\mathbb{X}, \mathbb{C}}(\mathbb{C})$ является φ -базисным подпространством в $\mathbb{I}_H(\mathbb{X}, \mathbb{C})$. Поскольку $\mathbb{I}_H(\mathbb{X}, \mathbb{C})$ является f -пространством, $\mathbb{C}'$ является парусом. Покажем, что $\mathbb{C}$ также является парусом. Действительно, пусть элементы $a, b \in \mathbb{C}$ таковы, что $a, b \leq x$ для некоторого $x \in \mathbb{X}$. По [теореме 7 \(1\)](#) отображение $\iota_{\mathbb{X}, \mathbb{C}}: \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{I}_H(\mathbb{X}, \mathbb{C})$ является гомеоморфным вложением, поэтому $\iota_{\mathbb{X}, \mathbb{C}}(a), \iota_{\mathbb{X}, \mathbb{C}}(b) \subseteq \iota_{\mathbb{X}, \mathbb{C}}(x)$. Так как $\mathbb{C}'$ является парусом, существует $\mathbb{C}$ -идеал $J \in I_H(\mathbb{X}, \mathbb{C})$ такой, что $\iota_{\mathbb{X}, \mathbb{C}}(a) \vee \iota_{\mathbb{X}, \mathbb{C}}(b) = J$. Как и выше, это означает, что $a, b \in J$ и $a, b \leq_{\mathbb{X}} c$ для некоторого $c \in J$. Это дает включения $\iota_{\mathbb{X}, \mathbb{C}}(a), \iota_{\mathbb{X}, \mathbb{C}}(b) \subseteq \iota_{\mathbb{X}, \mathbb{C}}(c) \subseteq J$. Поскольку J является наименьшей верхней границей для $\iota_{\mathbb{X}, \mathbb{C}}(a), \iota_{\mathbb{X}, \mathbb{C}}(b)$, мы заключаем, что $J = \iota_{\mathbb{X}, \mathbb{C}}(c)$, поэтому $a \vee b = c$ в $\mathbb{X}$. Следовательно, $\mathbb{C}$ является f -базисным подпространством в $\mathbb{X}$, и утверждение (3) выполнено.

В случае b -пространств доказательство аналогично доказательству выше, но оно проще, поэтому мы не приводим его здесь. $\square$

Список литературы

- [1] X. Xu, *On H -sober spaces and H -sobrifications of T_0 -spaces*, Topology Appl. **289**, article no. 107548, 37 pp. (2021).
DOI: <https://doi.org/10.1016/j.topol.2020.107548>
- [2] G. Gierz, K.H. Hofmann, K. Keimel, J.D. Lawson, M.W. Mislove, D.S. Scott, *Continuous lattices and domains*, Encyclopedia Math. Appl. **93**, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2003.
DOI: <https://doi.org/10.1017/CBO9780511542725>
- [3] Yu.L. Ershov, *On d -spaces*, Theoret. Comput. Sci. **224** (1–2), 59–72 (1999).
DOI: [https://doi.org/10.1016/S0304-3975\(98\)00307-7](https://doi.org/10.1016/S0304-3975(98)00307-7)

- [4] Ю.Л. Ершов, *Сопредельные точки и $\mathcal{H}$ -расширения*, Алгебра и логика **56** (4), 443–452 (2017).
DOI: <https://doi.org/10.1007/s10469-017-9450-9>
- [5] М.И. Кудряшова, М.В. Швидефски, *К теории Н-собранных пространств*, Сиб. матем. журн. **65** (4) (2024).
- [6] Ю.Л. Ершов, *Топология для дискретной математики*, Изд-во СО РАН, Новосибирск, 2020.
- [7] Ю.Л. Ершов, *d -ранг α -пространства не превосходит 1*, Алгебра и логика **58** (6), 706–713 (2019).
DOI: <https://doi.org/10.1007/s10469-020-09566-z>
- [8] J. Goubault-Larrecq, *Non-Hausdorff topology and domain theory: selected topics in point-set topology*, New Math. Monogr. **22**, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2013.
DOI: <https://doi.org/10.1017/CBO9781139524438>
- [9] Ю.Л. Ершов, *О d -ранге топологического пространства*, Алгебра и логика **56** (2), 150–163 (2017).
DOI: <https://doi.org/10.1007/s10469-017-9432-y>
- [10] Yu.L. Ershov, *Theory of domains and nearby*, in: “Formal methods in programming and their applications”, Lecture Notes in Computer Science **735**, 1–7 (2005).
DOI: <https://doi.org/10.1007/BFb0039696>

Мария Игоревна Кудряшова

Новосибирский национальный исследовательский государственный университет,
ул. Пирогова, д. 1, г. Новосибирск, 630090, Россия,
e-mail: m.kudryashova@g.nsu.ru

Марина Владимировна Швидефски

Казанский (Приволжский) федеральный университет,
ул. Кремлевская, д. 18, г. Казань, 420008, Россия,
Новосибирский национальный исследовательский государственный университет,
ул. Пирогова, д. 1, г. Новосибирск, 630090, Россия,
Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН,
пр. Акад. Коптюга, д. 4, г. Новосибирск, 630090, Россия,
e-mail: m.schwidefsky@g.nsu.ru

To the theory of H -sober spaces. II

M.I. Kudryashova, M.V. Schwidefsky

Abstract. We show that generalized sobrifications of approximation spaces are homeomorphic to spaces of special basic ideals of the given spaces. Using this characterization, we generalize a series of known results on sobrifications of approximation spaces.

Keywords: approximation space, sober space, T_0 -space.

DOI: 10.26907/2949-3919.2024.2.70-83

References

- [1] X. Xu, *On H -sober spaces and H -sobrifications of T_0 -spaces*, Topology Appl. **289**, article no. 107548, 37pp. (2021).
DOI: <https://doi.org/10.1016/j.topol.2020.107548>
- [2] G. Gierz, K.H. Hofmann, K. Keimel, J.D. Lawson, M.W. Mislove, D.S. Scott, *Continuous lattices and domains*, Encyclopedia Math. Appl. **93**, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2003.
DOI: <https://doi.org/10.1017/CBO9780511542725>
- [3] Yu.L. Ershov, *On d -spaces*, Theoret. Comput. Sci. **224** (1–2), 59–72 (1999).
DOI: [https://doi.org/10.1016/S0304-3975\(98\)00307-7](https://doi.org/10.1016/S0304-3975(98)00307-7)
- [4] Yu.L. Ershov, *Solimit points and u -extensions*, Algebra and Logic **56** (4), 295–301 (2017).
DOI: <https://doi.org/10.1007/s10469-017-9450-9>
- [5] M.I. Kudryashova, M.V. Schwidefsky, *To the theory of H -sober spaces*, Siberian Math. J. **65** (4) (2024).
- [6] Yu.L. Ershov, *Topology for discrete mathematics*, Publishing House SB RAS, Novosibirsk, 2020 [in Russian].
- [7] Yu.L. Ershov, *The d -rank of an α -space does not exceed 1*, Algebra and Logic **58** (6), 470–474 (2019).
DOI: <https://doi.org/10.1007/s10469-020-09566-z>
- [8] J. Goubault-Larrecq, *Non-Hausdorff topology and domain theory: selected topics in point-set topology*, New Math. Monogr. **22**, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2013.

Acknowledgements. The work is supported by the Russian Science Foundation, project no. 24-21-00227.

Received: 10 June 2024. Accepted: 02 July 2024. Published: 16 July 2024.

DOI: <https://doi.org/10.1017/CBO9781139524438>

- [9] Yu.L. Ershov, *The d-rank of a topological space*, Algebra and Logic **56** (2), 98–107 (2017).

DOI: <https://doi.org/10.1007/s10469-017-9432-y>

- [10] Yu.L. Ershov, *Theory of domains and nearby*, in: “Formal methods in programming and their applications”, Lecture Notes in Computer Science **735**, 1–7 (2005).

DOI: <https://doi.org/10.1007/BFb0039696>

Maria Igorevna Kudryashova

Novosibirsk State University,

1 Pirogov str., Novosibirsk 630090, Russia,

e-mail: m.kudryashova@g.nsu.ru

Marina Vladimirovna Schwidefsky

Kazan Federal University,

18 Kremlyovskaya str., Kazan 420008, Russia,

Novosibirsk State University,

1 Pirogov str., Novosibirsk 630090, Russia,

Sobolev Institute of Mathematics SB RAS,

4 Acad. Koptug Ave., Novosibirsk 630090, Russia,

e-mail: m.schwidefsky@g.nsu.ru