Том 2, Выпуск 2 УДК 517.55
Стр. 84–106 (2024) MSC 32C15

Хаотические и часто-гиперциклические операторы в весовом пространстве целых функций

А.И. Рахимова

Аннотация. Изучаются вопросы хаотичности и часто-гиперцикличности различных операторов в весовом пространстве $\mathcal{F}_\varphi(\mathbb{C}^n)$, определенном как проективный предел банаховых пространств. В теоремах 8–13 рассматриваются случаи операторов дифференцирования и сдвига, а также их композиций в $\mathcal{F}_\varphi(\mathbb{C}^n)$. Для линейных непрерывных операторов, коммутирующих с дифференцированием, в теореме 14 показана хаотичность в $\mathcal{F}_\varphi(\mathbb{C}^n)$. В теореме 15 для таких операторов доказана часто-гиперцикличность в $\mathcal{F}_\varphi(\mathbb{C}^n)$, а также указаны наиболее важные следствия из этих утверждений.

Ключевые слова: весовое пространство, целые функции, хаотический оператор, часто-гиперциклический оператор, оператор дифференцирования, оператор сдвига.

DOI: 10.26907/2949-3919.2024.2.84-106

Введение

0.1. Обзор литературы. В топологическом пространстве X для любого линейного непрерывного оператора $T: X \to X$ можно построить дискретную динамическую систему $\{T^n\}_{n\in\mathbb{N}\cup\{0\}}$. При изучении вопроса об описании поведения этой системы были введены такие характеристики для операторов, как цикличность, гиперцикличность, хаотичность, часто-гиперцикличность и многие другие.

Понятие хаотического оператора было определено Р.Л. Девани в 1989 г. в работе [1]. Далее в статье [2] 1992 г. Дж. Бэнкс, Дж. Брукс и другие изучили условия хаотичности Девани и доказали, что свойство существенной зависимости оператора от начальных условий следует из его топологической транзитивности и наличия плотного множества периодических точек. В 1991 г. в работе Г. Годефруа и Дж. Шапиро [3] было показано, что по теореме Годефруа–Шапиро любой оператор свертки, характеристическая функция которого непостоянна, хаотический в $H(\mathbb{C})$. В 2000 г. Р.М. Кроновер написал книгу [4] с подробными сведениями по хаотическим операторам в динамических системах. В работе [5] 2005 г. Дж.Дж. Бетанкур и другие авторы изучили гиперцикличность и хаотичность операторов свертки в $H(\mathbb{C})$.

Поступила: 23.04.2024. Принята: 02.07.2024. Опубликована: 16.07.2024.

Основы теории часто-гиперциклических операторов были положены Ф. Баярт и С. Гривакс в 2006 г. в статье [6] в $H(\mathbb{C})$. А. Бонилла и К.-Г. Гроссе-Эрдманн в работе [7] 2006 г. доказали, что непрерывные операторы, коммутирующие со сдвигом, часто-гиперциклические в пространстве $H(\mathbb{C}^n)$. В 2007 г. они опубликовали работу [8] по часто-гиперциклическим операторам и векторам в $H(\mathbb{C})$.

В книгах Ф. Баярт, Э. Матерон [9] 2009 г., К.-Г. Гроссе-Эрдманн, А. Пэрис [10] 2011 г. и М.В. Хирш, С. Смэйл, Р.Л. Девани [11] 2013 г. изложены основные положения теории динамических систем, в том числе по хаотическим и часто-гиперциклическим операторам. В статье С. Гривакс [12] 2011 г. приведены примеры различных часто-гиперциклических операторов в $H(\mathbb{C})$. В 2009 г. Дж. Бонет [13] изучил динамические свойства дифференциального оператора в весовом пространстве целых функций. В статьях А.В. Абанина, Т.И. Абаниной, Ф.Ч. Тиен [14, 15] 2017 г. были рассмотрены динамические свойства классических операторов и операторов композиции в весовых пространствах голоморфных функций. В.Э. Ким в статьях [16] 2008 г. и [17] 2010 г. показал, что все операторы обобщенной свертки гиперциклические и хаотические в $H(\mathbb{C})$.

0.2. Цель работы. В данной работе будем изучать свойства хаотичности и часто-гиперцикличности классических линейных непрерывных операторов в $\mathcal{F}_\varphi(\mathbb{C}^n)$. Пространства вида $\mathcal{F}_\varphi(\mathbb{C}^n)$ в связи с различными задачами комплексного анализа встречались в работах многих математиков [18,19]. Определим весовое пространство $\mathcal{F}_\varphi(\mathbb{C}^n)$ целых функций комплексных переменных следующим образом.

Пусть $\varphi = \{\varphi_m\}_{m=1}^{\infty}$ – семейство выпуклых неотрицательных функций $\varphi_m:\ \mathbb{C}^n \to \mathbb{R}_+$ таких, что для любого $m \in \mathbb{N}$:

$i_1)$ $\lim\limits_{z\to\infty} \frac{\varphi_m(z)}{\|z\|} = +\infty$;

$i_2)$ $\lim\limits_{z\to\infty} (\varphi_m(z) - \varphi_{m+1}(z)) = +\infty$.

Тогда для каждого $m \in \mathbb{N}$ определим пространство

$$\mathcal{F}_m(\mathbb{C}^n) = \left\{ f \in H(\mathbb{C}^n),\ f:\ \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}: \quad p_m(f) = \sup_{z\in\mathbb{C}^n} (|f(z)|e^{-\varphi_m(z)}) < \infty \right\}.$$

Отметим, что $\mathcal{F}_m(\mathbb{C}^n)$ – банахово пространство. В силу условия $i_2)$ при всех $m \in \mathbb{N}$ вложения $\mathcal{F}_{m+1}(\mathbb{C}^n) \subset \mathcal{F}_m(\mathbb{C}^n)$ вполне непрерывны. Положим $\mathcal{F}_\varphi(\mathbb{C}^n) = \bigcap\limits_{m=1}^{\infty} \mathcal{F}_m(\mathbb{C}^n)$. С обычными операциями сложения элементов и умножения на комплексные числа $\mathcal{F}_\varphi(\mathbb{C}^n)$ образует линейное пространство. Снабдим его топологией проективного предела пространств $\mathcal{F}_m(\mathbb{C}^n)$. Поскольку оно является проективным пределом компактной последовательности банаховых пространств $\mathcal{F}_m(\mathbb{C}^n)$, то $\mathcal{F}_\varphi(\mathbb{C}^n)$ – пространство Фреше–Шварца.

Далее на семейство φ также будем накладывать дополнительные условия вида:

$i_3)$ существуют постоянные $a_m > 0$ и $b_m > 0$ такие, что

$$\varphi_{m+1}(z+t) \le \varphi_m(z) + b_m,$$

где $z \in \mathbb{C}^n$ и $t \in \mathbb{C}^n: |t| \le a_m$;

или более жесткое:

i_4) для любого $R > 0$ существует постоянная $b_m(R,m) > 0$ такая, что

$$\varphi_{m+1}(z+t) \le \varphi_m(z) + b_m,$$

где $z \in \mathbb{C}^n$ и $t \in \mathbb{C}^n: |t| \le R$.

Отметим, что при выполнении условия i_3) пространство $\mathcal{F}_\varphi(\mathbb{C}^n)$ инвариантно относительно дифференцирования (см. [20, лемма 5]). В случае справедливости требования i_4) $\mathcal{F}_\varphi(\mathbb{C}^n)$ является инвариантным относительно как дифференцирования, так и сдвига (см. [20, теорема 4]).

Цель данной работы – изучение задач о хаотичности и часто-гиперцикличности в $\mathcal{F}_\varphi(\mathbb{C}^n)$ операторов дифференцирования, сдвига, их различных композиций и линейных непрерывных операторов, коммутирующих с дифференцированием. Во введении даны основные определения и необходимые в дальнейшем утверждения. Раздел 1 посвящен изучению свойств различных операторов: теорема 8 утверждает о хаотичности композиции дифференцирования и сдвига, теорема 9 – о хаотичности и часто-гиперцикличности оператора дифференцирования, теорема 11 – о хаотичности и часто-гиперцикличности оператора сдвига, теорема 12 – об условии хаотичности и часто-гиперцикличности композиции дифференцирования, сдвига и умножения переменной на константу, теорема 13 – об условии не хаотичности и не часто-гиперцикличности композиции дифференцирования, сдвига и умножения переменной на константу. В разделе 2 изучены линейные непрерывные операторы, коммутирующие с дифференцированием: в теореме 14 доказана хаотичность таких операторов, в теореме 15 – их часто-гиперцикличность, в следствиях 16–22 приведены примеры по этим утверждениям.

0.3. Обозначения. Для точек $u = (u_1, \dots, u_n)$, $v = (v_1, \dots, v_n)$ из $\mathbb{C}^n$ определим $\langle u, v\rangle = u_1v_1 + \dots + u_nv_n$, где $\|u\|$ – евклидова норма в $\mathbb{C}^n$. Для мультииндекса $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{Z}_+^n$ и точек $z = (z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n$ полагаем $|\alpha| = \alpha_1 + \ldots + \alpha_n$, $D_j = \frac{\partial}{\partial z_j}$, $j = 1, \dots n$, $D_z^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial z_1^{\alpha_1} \dots \partial z_n^{\alpha_n}}$.

Для произвольной вещественнозначной функции φ в $\mathbb{C}^n$ такой, что $\lim\limits_{\|z\|\to+\infty} \dfrac{\varphi(z)}{\|z\|} = +\infty$, определим преобразование Юнга–Фенхеля $\widetilde{\varphi}(z) = \sup\limits_{t\in\mathbb{C}^n}(\operatorname{Re}\langle z, t\rangle - \varphi(t))$, $z \in \mathbb{C}^n$. Отметим, что из условия i_1) следует, что для функций φ_m, $m \in \mathbb{N}$, их преобразования Юнга–Фенхеля $\widetilde{\varphi}_m$ принимают конечные значения в $\mathbb{C}^n$.

0.4. Основные определения. Обозначим через X топологическое векторное пространство над полем $\mathbb{C}$. *Орбитой* элемента x оператора $T: X \to X$ [9] называется множество

$$\operatorname{Orb}(T, x) = \{T^n x\}_{n=0}^{\infty}.$$

Элемент $x \in X$ является *периодической точкой* оператора T [9, определение 6.5], если найдется натуральное число $n \geq 2$ такое, что $T^n x = x$. Оператор $T: X \to X$ *нетривиальный*, если он не совпадает с оператором умножения на отличную от нуля константу.

Линейный непрерывный оператор $T: X \to X$ называется *гиперциклическим* [9] в пространстве X, если существует элемент $x \in X$, орбита которого плотна в X. Данный элемент $x \in X$ является *гиперциклическим вектором* оператора T в X.

Непрерывный оператор $T: X \to X$ *топологически транзитивный* в X [9, теорема 1.2], если для любой пары непустых открытых множеств $A, B \subset X$ существует такое число $n \in \mathbb{N}$, что $T^n(A) \cap B \neq \varnothing$. Линейный топологически транзитивный оператор и гиперциклический оператор являются эквивалентными понятиями в пространстве Фреше [9, теорема 1.2].

Непрерывный оператор $\Phi: Y \to Y$ в метрическом пространстве (Y, d) называется *хаотическим* (по Девани), если выполнены следующие условия Девани [1, определение 8.5]:

(A) оператор Φ обладает существенной зависимостью от начальных условий: существует $\delta > 0$ такое, что для произвольного элемента $x \in Y$ и его любой окрестности U найдутся точка $y \in U$ и число $n \in \mathbb{N}$, для которых $d(\Phi^n x, \Phi^n y) > \delta$;

(B) оператор Φ является топологически транзитивным;

(C) множество периодических точек оператора Φ плотно в пространстве Y.

Для произвольного множества $A \subset \mathbb{N}$ *нижняя плотность* множества A [9, § 6.3.1] $\underline{\mathrm{dens}} A$ определяется в виде

$$\underline{\mathrm{dens}} A = \liminf_{N \to \infty} \frac{\#\{n \in A: \ n \leq N\}}{N}.$$

Линейный непрерывный оператор $T: X \to X$ в топологическом векторном пространстве X называется *часто-гиперциклическим* [10, определение 9.2], если найдется такой элемент $x \in X$, что для любого непустого открытого подмножества $U \subset X$ выполняется условие

$$\underline{\mathrm{dens}} \big\{ n \in \mathbb{N}: \ T^n x \in U \big\} > 0.$$

Данный элемент $x \in X$ является *часто-гиперциклическим вектором* оператора T в X. Заметим, что класс часто-гиперциклических операторов содержится в множестве гиперциклических операторов [10, определение 9.2].

В дальнейшем нам понадобятся следующие утверждения.

Теорема 1 (**теорема о хаотичности и часто-гиперцикличности**, [9, теорема 6.10, теорема 6.18], [10, теорема 9.9, предложение 9.11])**.** *Пусть $T: X \to X$ – линейный непрерывный оператор в сепарабельном пространстве Фреше X и существуют плотное подмножество $X_0 \subset X$ и отображение $S: X_0 \to X_0$ такие, что*:

1) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} T^n x$ *– ряд сходится безусловно для всех $x \in X_0$*;

2) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} S^n x$ – *ряд сходится безусловно для всех* $x \in X_0$;

3) $TSx = x \quad \forall x \in X_0$.

Тогда T – *хаотический и часто-гиперциклический оператор в* X.

В работах [2] и [4] доказаны следующие факты:

Лемма 2 ([2, теорема]). *Если в метрическом пространстве* X *непрерывный оператор* $T: X \to X$ *топологически транзитивный и множество его периодических точек плотно в* X, *то оператор* T *обладает существенной зависимостью от начальных условий.*

Лемма 3 (**теорема Биркгофа о транзитивности**, [9, теорема 1.2]). *Если* X – *пространство Фреше, то для линейного непрерывного оператора* $T: X \to X$ *топологическая транзитивность и гиперцикличность равносильны.*

В силу леммы 2 условие (A) в определении хаотичности следует из условий (B) и (C), а по лемме 3 условие (B) в пространстве Фреше равносильно гиперцикличности оператора. Поэтому для доказательства хаотичности гиперциклического оператора в пространстве Фреше достаточно проверить, что множество его периодических точек плотно в этом пространстве.

Теорема 4 ([10, теорема 2.33]). *Пусть* T – *линейный оператор в комплексном векторном пространстве* X. *Тогда множество периодических точек оператора* T *образует линейное подпространство в* X, *которое задается в виде*

$$\operatorname{Per}(T) = \operatorname{span}\{x \in X: \exists\, \alpha \in \mathbb{Q}: \; Tx = e^{\alpha\pi\mathrm{i}}x\}.$$

Пусть X – комплексное пространство Фреше, $T: X \to X$ – линейный непрерывный оператор в X, $J \subset \mathbb{N}$ – множество индексов, $\mathbb{T}$ – единичная окружность. Тогда множество функций $\{E_j\}_{j\in J}$ таких, что $E_j : \mathbb{T} \to X$ при всех $j \in J$, каждая из которых для любого $\lambda \in \mathbb{T}$ является либо собственным вектором для собственного значения λ, либо 0, называется *охватывающим полем собственных векторов, соответствующих собственным значениям с единичным модулем*, если $E_j(\lambda) \in \ker(\lambda I - T)$ для любых $\lambda \in \mathbb{T}$ и $j \in J$ и множество $\operatorname{span}\{E_j(\lambda)\}_{\lambda\in\mathbb{T},\, j\in J}$ плотно в X [10, определение 9.21]. Векторное поле называется *непрерывным* или C^2-*гладким*, если функции E_j при всех $j \in J$ соответственно непрерывны или дважды непрерывно дифференцируемы на $\mathbb{T}$ [10, определение 9.21].

Теорема 5 ([10, теорема 9.22]). *Пусть* T – *линейный непрерывный оператор в комплексном сепарабельном пространстве Фреше* X. *Тогда справедливы следующие утверждения*:

a) *если оператор* T *имеет в* X *непрерывное охватывающее поле собственных векторов, соответствующих собственным значениям с единичным модулем, то он хаотический*;

b) *если оператор* T *имеет в* X C^2-*гладкое охватывающее поле собственных векторов, соответствующих собственным значениям с единичным модулем, то он часто-гиперциклический.*

1. Операторы дифференцирования и сдвига

Приведем следующие необходимые в дальнейшем утверждения.

Лемма 6 ([20, лемма 3])**.** *Пусть S – линейный непрерывный функционал на $\mathcal{F}_\varphi(\mathbb{C}^n)$ при выполнении условия i_3). Тогда его преобразование Фурье–Лапласа $\widehat{S}(\xi) = S_z(e^{\langle \xi, z\rangle})$ – целая функция, причем для любого $\alpha \in \mathbb{Z}_+^n$ выполняется равенство $D_\xi^\alpha \widehat{S}(\xi) = S_z(z^\alpha e^{\langle \xi, z\rangle})$, $\xi \in \mathbb{C}^n$.*

Лемма 7. *Пусть $r = (r_1, \dots, r_n)$, где при всех $i = 1, \dots, n$ $r_i > 0$ – постоянные величины,*

$$D_r = \{z = (z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n : \ |z_i| < r_i, \ i = 1, \dots, n\},$$

φ – непостоянная целая функция в $\mathbb{C}^n$ и $B \subset \mathbb{C}$ – некоторое непустое множество. Тогда если существует точка $\lambda_0 \in D_r$ такая, что $\varphi(\lambda_0)$ – предельная точка множества B, то система экспонент

$$\left\{e^{\langle \xi, z\rangle}\right\}_{\xi \in D_r: \, \varphi(\xi) \in B}$$

полна в пространстве $\mathcal{F}_\varphi(\mathbb{C}^n)$ при выполнении условия i_3).

Доказательство. В силу условия i_1) для любого фиксированного значения $\xi \in \mathbb{C}^n$ функция $e^{\langle \xi, z\rangle}$ лежит в $\mathcal{F}_\varphi(\mathbb{C}^n)$. Возьмем произвольный линейный непрерывный функционал $S \in \mathcal{F}_\varphi^*(\mathbb{C}^n)$ такой, что $S_z(e^{\langle \xi, z\rangle}) = 0$ для всех $\xi \in D_r \cap \varphi^{-1}(B)$. Покажем, что функционал S нулевой.

По условию леммы существует точка $\lambda_0 \in D_r$, для которой $\varphi(\lambda_0)$ – предельная точка множества B. Тогда найдется последовательность точек $\{w_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset B$ таких, что $w_k \xrightarrow[k\to\infty]{} \varphi(\lambda_0)$. Поскольку $\varphi : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$ – непостоянная целая функция в $\mathbb{C}^n$, то по [22, приложение B, теорема 6] она является открытым отображением в $\mathbb{C}$. Из этого получим, что при всех $k \in \mathbb{N}$ точкам $w_k \in B$ соответствуют $\lambda_k \in \mathbb{C}^n$, определенные в виде $\lambda_k = \varphi^{-1}(w_k)$. Следовательно, имеется последовательность точек $\{\lambda_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{C}^n$ таких, что $\varphi(\lambda_k) \in B$ при всех $k \in \mathbb{N}$ и $\varphi(\lambda_k) \xrightarrow[k\to\infty]{} \varphi(\lambda_0)$. Так как φ – открытое отображение, то $\lambda_k \xrightarrow[k\to\infty]{} \lambda_0$.

Для каждого $k \in \mathbb{N}$ построим прямую L_k в $\mathbb{C}^n$, проходящую через точки λ_0 и λ_k, причем если несколько точек λ_k совпадают, то берем только одну из них. Теперь перенумеруем эту последовательность $\{L_k\}_{k\in\mathbb{N}}$, выкинув все прямые, на которых функция φ постоянна. Поскольку φ – непостоянная целая функция в $\mathbb{C}^n$, то для любого w_k, кроме, может быть, одного значения, существует подпространство размерности $n-1$ соответствующих ему точек λ_k. Тогда совокупность прямых $\{L_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ охватывает все направления в $\mathbb{C}^n$, значит, множество $\bigcup\limits_{k\in\mathbb{N}} L_k$ плотно в $\mathbb{C}^n$.

Возьмем произвольное число $k \in \mathbb{N}$. Поскольку φ – непостоянная аналитическая функция на прямой L_k, то $\varphi|_{D_r \cap L_k}$ является открытым отображением. Отсюда и из того, что $\varphi(\lambda_0)$ – предельная точка множества B, получим, что λ_0 – предельная точка множества $D_r \cap L_k \cap \varphi^{-1}(B)$. Так как по условию теоремы $S_z(e^{\langle \xi, z\rangle}) = 0$ для всех $\xi \in D_r \cap \varphi^{-1}(B)$, то по следствию из теоремы единственности $S_z(e^{\langle \xi, z\rangle}) = 0$ при всех $\xi \in D_r \cap L_k$. Множество $\bigcup\limits_{k\in\mathbb{N}} L_k$ плотно в $\mathbb{C}^n$, поэтому $S_z(e^{\langle \xi, z\rangle}) = 0$ при всех $\xi \in D_r$.

По лемме 6 $\widehat{S}(\xi)$ – целая функция и $S_z(e^{\langle\xi,z\rangle}) = 0$ при всех $\xi \in D_r$, поэтому по теореме единственности получим $S_z(e^{\langle\xi,z\rangle}) = 0$ для всех $\xi \in \mathbb{C}^n$. Поскольку при всех $\alpha \in \mathbb{Z}_+^n$ и $\xi \in \mathbb{C}^n$ справедлива формула $D_\xi^\alpha \widehat{S}(\xi) = S_z(z^\alpha e^{\langle\xi,z\rangle})$, то выполняется равенство $D_\xi^\alpha \widehat{S}(\xi) = S_z(z^\alpha e^{\langle\xi,z\rangle}) = 0$, где $\alpha \in \mathbb{Z}_+^n$ и $\xi \in \mathbb{C}^n$. Значит, при всех $\alpha \in \mathbb{Z}_+^n$ следует, что $S_z(z^\alpha) = 0$. Тогда для любых полиномов $p \in \mathcal{F}_\varphi(\mathbb{C}^n)$ $S(p) = 0$. Ввиду плотности полиномов по [20, лемма 1] в $\mathcal{F}_\varphi(\mathbb{C}^n)$ получим $S(f) = 0$ для всех $f \in \mathcal{F}_\varphi(\mathbb{C}^n)$, поэтому S – нулевой функционал. Следовательно, система экспонент $\{e^{\langle\xi,z\rangle}\}_{\xi\in D_r:\, \varphi(\xi)\in B}$ полна в $\mathcal{F}_\varphi(\mathbb{C}^n)$. $\square$

Приведем пример по лемме 7. Пусть $D_r = \{z \in \mathbb{C}^n : \ |z_i| < r_i,\ i = 1, \dots, n\}$, где $r_i > 0$, $i = 1, \dots, n$ – постоянные величины, $\varphi = z_1 z_2 \dots z_n$ и $B = \{z \in \mathbb{C} : \ |z| < r_1 r_2 \dots r_n\}$. Тогда множество $\left\{e^{\langle\xi,z\rangle}\right\}_{\{\xi\in\mathbb{C}^n:\ |\xi_i|<r_i,\ i=1,\dots,n\}}$ полно в $\mathcal{F}_\varphi(\mathbb{C}^n)$ при выполнении условия i_3) в силу [20, лемма 4].

Докажем следующее утверждение, используя определение хаотичности.

Теорема 8. *Пусть $N \in \mathbb{N}$, заданы точки $c_\alpha \in \mathbb{C}$ и $a_\alpha \in \mathbb{C}^n$, где $\alpha \in \mathbb{Z}_+^n$. Тогда при выполнении условия i_4) оператор*

$$Tf(z) = \sum_{\alpha:\ |\alpha|=0}^{N} c_\alpha (D^\alpha f)(z + a_\alpha),$$

не кратный тождественному, является хаотическим в $\mathcal{F}_\varphi(\mathbb{C}^n)$.

Доказательство. В [20, следствие 2] установлена гиперцикличность оператора T в $\mathcal{F}_\varphi(\mathbb{C}^n)$. Тогда по леммам 2 и 3 следует, что требования (A) и (B) из определения хаотичности выполнены. Далее покажем выполнение условия (C).

По теореме 4 линейное подпространство периодических точек оператора T имеет вид

$$V = \mathrm{span}\Big\{f \in \mathcal{F}_\varphi(\mathbb{C}^n) : \quad \exists\ \alpha \in \mathbb{Q} : \ Tf(z) = e^{\alpha\pi \mathrm{i}} f(z)\Big\}.$$

Рассмотрим следующее подмножество V:

$$V_0 = \mathrm{span}\Big\{e^{\langle\lambda,z\rangle}\Big\}_{\lambda\in W},$$

где $W = \left\{\lambda \in \mathbb{C}^n : \quad \exists\ \alpha \in \mathbb{Q} : \ \sum\limits_{\beta:\ |\beta|=0}^{N} c_\beta \lambda^\beta e^{\langle\lambda,\, a_\beta\rangle} = e^{\alpha\pi \mathrm{i}}\right\}$.

Введем обозначение $\varphi(\lambda) = \sum\limits_{\beta:\ |\beta|=0}^{N} c_\beta \lambda^\beta e^{\langle\lambda,\, a_\beta\rangle}$. Поскольку $\varphi : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$ – непостоянная целая функция в $\mathbb{C}^n$, то по [22, приложение B, теорема 6] она является открытым отображением в $\mathbb{C}$. Значит, пересечение ее образа $\varphi(\mathbb{C}^n)$ с единичной окружностью $\mathbb{T}$ всюду совпадает с $\mathbb{T}$, кроме, может быть, одной точки. Отметим, что на $\mathbb{T}$ лежит бесконечно много точек $e^{\alpha\pi \mathrm{i}}$, $\alpha \in \mathbb{Q}$, причем каждая из них является предельной на $\mathbb{T}$. В силу того, что φ – открытое отображение и $\mathbb{T}$ ограничено, бесконечно много точек вида $\lambda = \varphi^{-1}(e^{\alpha\pi \mathrm{i}})$, где $\alpha \in \mathbb{Q}$, лежат в некотором поликруге D_r в $\mathbb{C}^n$. Поэтому существует хотя бы одна точка $\lambda_0 \in D_r$, для которой $\varphi(\lambda_0)$ – предельная точка множества $\mathbb{T}$. По лемме 7 V_0 плотно в $\mathcal{F}_\varphi(\mathbb{C}^n)$. Следовательно, оператор T хаотический в $\mathcal{F}_\varphi(\mathbb{C}^n)$. □

Докажем свойства некоторых операторов в $\mathcal{F}_\varphi(\mathbb{C}^n)$, используя теорему 1.

Теорема 9. *При выполнении условия i_3) оператор дифференцирования*

$$Tf(z) = D^\alpha f(z) = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial z_1^{\alpha_1} \dots \partial z_n^{\alpha_n}} f(z),$$

где $\alpha \in \mathbb{Z}_+^n$, хаотический и часто-гиперциклический в $\mathcal{F}_\varphi(\mathbb{C}^n)$.

Доказательство. Непрерывность оператора $T : \mathcal{F}_\varphi(\mathbb{C}^n) \to \mathcal{F}_\varphi(\mathbb{C}^n)$ доказана в [20, лемма 5]. Докажем с помощью теоремы 1 хаотичность и часто-гиперцикличность T в $\mathcal{F}_\varphi(\mathbb{C}^n)$. В качестве множества W определим линейную оболочку множества мономов $z^\beta = z_1^{\beta_1} \cdot \ldots \cdot z_n^{\beta_n}$, где $\beta \in \mathbb{Z}_+^n$. По [20, лемма 1] W плотно в $\mathcal{F}_\varphi(\mathbb{C}^n)$.

Действие оператора T на мономы имеет вид

$$T^k z^\beta = \begin{cases} \frac{\beta!}{(\beta - k\alpha)!} z^{\beta - k\alpha} & \text{при } k \le k_0, \\ 0 & \text{при } k > k_0, \end{cases}$$

где k_0 – минимальное из чисел $\left[\frac{\beta_j}{\alpha_j}\right]$, $j = 1, \dots, n$. Отсюда получим равенство

$$\sum_{k=0}^{\infty} T^k z^\beta = \sum_{k=0}^{k_0} \frac{\beta!}{(\beta - k\alpha)!} z^{\beta - k\alpha}.$$

Очевидно, условие 1) теоремы 1 выполнено.

Определим оператор $S : W \to W$ в виде

$$S^k z^\beta = \frac{\beta!}{(\beta + k\alpha)!} z^{\beta + k\alpha} \quad \forall\ k \in \mathbb{N}_0.$$

Условие 3) теоремы 1 справедливо при любых $z^\beta \in W$:

$$TSz^\beta = \frac{(\beta+\alpha)!}{\beta!} \frac{\beta!}{(\beta+\alpha)!} z^{\beta+\alpha-\alpha} = z^\beta.$$

Проверим выполнение условия 2) теоремы 1 на W. Рассмотрим ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty} S^k z^\beta = \beta! z^\beta \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(\beta + k\alpha)!} z^{k\alpha}.$$

По условию i_1) для любого сколь угодно большого $M \in \mathbb{R}_+$ существует постоянная

$C_M \in \mathbb{R}_+$ такая, что при произвольном $z = (z_1, \ldots, z_n) \in \mathbb{C}^n$

$$\varphi_m(z_1, \ldots, z_n) \geq M(|z_1| + \ldots + |z_n|) - C_M,$$

поэтому справедлива оценка

$$e^{\sup\limits_{z\in\mathbb{C}^n}\left((\beta_1+k\alpha_1)\ln|z_1|+\ldots+(\beta_n+k\alpha_n)\ln|z_n|-\varphi_m(z_1,\ldots,z_n)\right)} \leq e^{C_M}\frac{(\beta+k\alpha)^{\beta+k\alpha}}{(Me)^{|\beta|+k|\alpha|}}.$$

Ряд сходится в $\mathcal{F}_m(\mathbb{C}^n)$ при всех $m \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} p_m\left(\sum_{k=0}^{\infty} S^k z^\beta\right) &\leq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\beta!}{(\beta+k\alpha)!} e^{\sup\limits_{z\in\mathbb{C}^n}\left((\beta_1+k\alpha_1)\ln|z_1|+\ldots+(\beta_n+k\alpha_n)\ln|z_n|-\varphi_m(z)\right)} \\ &\leq \frac{e^{C_M}\beta!}{M^{|\beta|}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k^{n/2}M^{k|\alpha|}} < \infty. \end{aligned}$$

Итак, условие 2) теоремы 1 выполнено, поскольку по условию i_1) число M можно взять сколь угодно большим. Следовательно, T хаотический и часто-гиперциклический в $\mathcal{F}_\varphi(\mathbb{C}^n)$. □

Лемма 10. *При выполнении условия i_4) для любого $\alpha \in \mathbb{Z}_+^n$ последовательность*

$$f_{\alpha k}(z) = z^\alpha \prod_{j=1}^{n} \left(\frac{\sin(z_j/k)}{z_j/k}\right)^{\alpha_j+2} \rightrightarrows z^\alpha$$

равномерно сходится при $k \to \infty$ в $\mathcal{F}_\varphi(\mathbb{C}^n)$. Система функций $\{f_{\alpha k}\}_{\alpha\in\mathbb{Z}_+^n}$ полна в $\mathcal{F}_\varphi(\mathbb{C}^n)$ при любом $k > k_0$, где $k_0 \in \mathbb{N}$ – номер, начиная с которого функции $f_{\alpha k}(z)$ и z^α сколь угодно близки в $\mathcal{F}_\varphi(\mathbb{C}^n)$.

Доказательство. Из того, что $f_{\alpha k}(z) \in H(\mathbb{C}^n)$ и $p_m(f_{\alpha k}) < \infty$ для любого $m \in \mathbb{N}$, получается $f_{\alpha k}(z) \in \mathcal{F}_\varphi(\mathbb{C}^n)$. Покажем сходимость $f_{\alpha k}(z) \rightrightarrows z^\alpha$ при $k \to \infty$ в $\mathcal{F}_m(\mathbb{C}^n)$ при произвольном $m \in \mathbb{N}$.

В силу i_1) для любого сколь угодно большого $M \in \mathbb{R}_+$ существует постоянная $C_M \in \mathbb{R}_+$ такая, что при всех $z = (z_1, \ldots, z_n) \in \mathbb{C}^n$ $\varphi_m(z_1, \ldots, z_n) \geq M(|z_1|+\ldots+|z_n|)-C_M$, поэтому для произвольного $\alpha \in \mathbb{Z}_+^n$ получим следующие оценки:

$$\sup_{z\in\mathbb{C}^n}\left(|z|^\alpha e^{-\varphi_m(z_1,\ldots,z_n)}\right) \leq e^{C_M}\frac{\alpha^\alpha}{(Me)^{|\alpha|}} < \infty,$$

$$\sup_{z\in\mathbb{C}^n}\left(|z|^\alpha e^{\|z\|} e^{-\varphi_m(z_1,\ldots,z_n)}\right) \leq e^{C_{M-1}}\frac{\alpha^\alpha}{\left((M-1)e\right)^{|\alpha|}} < \infty.$$

Известно, что $f_{\alpha k}(z)$ равномерно на компактах из $\mathbb{C}^n$ стремится при $k \to \infty$ к z^α. Пусть $B_R \subset \mathbb{C}^n$ – замкнутый шар с центром в 0 конечного радиуса R. Тогда в силу условия

i_1) для любого $\varepsilon > 0$ число R можно выбрать настолько большим, что

$$\sup_{z\in\mathbb{C}^n\setminus B_R}\left(|z|^\alpha e^{\|z\|}e^{-\varphi_m(z)}\right) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Возьмем номер k_0 таким, что для всех $k > k_0$

$$\prod_{j=1}^n\left(\frac{|\sin(z_j/k)|}{|z_j|/k}\right)^{\alpha_j+2} \le e^{\|z\|}.$$

Оценим норму разности функций вне шара B_R при любых $k > k_0$ и $m \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} p_{m,\mathbb{C}^n\setminus B_R}(f_{\alpha k}(z) - z^\alpha) &= \sup_{z\in\mathbb{C}^n\setminus B_R}\left(|z|^\alpha\left|\prod_{j=1}^n\left(\frac{\sin(z_j/k)}{z_j/k}\right)^{\alpha_j+2} - 1\right|e^{-\varphi_m(z)}\right)\\ &\le \sup_{z\in\mathbb{C}^n\setminus B_R}\left(|z|^\alpha e^{-\varphi_m(z)}\right) + \sup_{z\in\mathbb{C}^n\setminus B_R}\left(|z|^\alpha e^{\|z\|}e^{-\varphi_m(z)}\right)\\ &\le 2\sup_{z\in\mathbb{C}^n\setminus B_R}\left(|z|^\alpha e^{\|z\|}e^{-\varphi_m(z)}\right) < \varepsilon. \end{aligned}$$

Таким образом, выполняется сходимость $f_{\alpha k}(z) \rightrightarrows z^\alpha$ при $k \to \infty$ в $\mathcal{F}_\varphi(\mathbb{C}^n)$.

По [20, лемма 1] множество мономов $\{z^\alpha\}_{\alpha\in\mathbb{Z}_+^n}$ полно в $\mathcal{F}_\varphi(\mathbb{C}^n)$. Следовательно, система $\{f_{\alpha k}(z)\}_{\alpha\in\mathbb{Z}_+^n}$ полна в $\mathcal{F}_\varphi(\mathbb{C}^n)$. □

Теорема 11. *При выполнении условия i_4) оператор сдвига*

$$Tf(z) = f(z+a),$$

где $a \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, хаотический и часто-гиперциклический в $\mathcal{F}_\varphi(\mathbb{C}^n)$.

Доказательство. Непрерывность оператора $T : \mathcal{F}_\varphi(\mathbb{C}^n) \to \mathcal{F}_\varphi(\mathbb{C}^n)$ показана в [20, теорема 4]. Докажем по теореме 1 хаотичность и часто-гиперцикличность T в $\mathcal{F}_\varphi(\mathbb{C}^n)$.

Возьмем множество W для любого фиксированного номера $k > k_0$ в виде

$$W = \operatorname{span}\left\{f_{\alpha k}(z) = z^\alpha\prod_{j=1}^n\left(\frac{\sin(z_j/k)}{z_j/k}\right)^{\alpha_j+2}\right\}_{\alpha\in\mathbb{Z}_+^n}.$$

По лемме 10 W плотно в $\mathcal{F}_\varphi(\mathbb{C}^n)$.

Определим оператор $S : W \to W$ в виде

$$Sf(z) = f(z-a).$$

Очевидно, справедливо условие 3) теоремы 1. Проверим выполнение условия 1) на

W. Действие оператора T любой степени $s \in \mathbb{N}$ имеет вид

$$T^s f_{\alpha k}(z) = k^{|\alpha|+2} \prod_{j=1}^{n} \frac{1}{(z_j + sa_j)^2} \sin^{\alpha_j+2}\left(\frac{z_j + sa_j}{k}\right).$$

Отсюда, используя полученную в теореме 9 в силу условия i_1) оценку для экспоненты, получим формулу

$$\sum_{s=1}^{\infty} \sup_{z\in\mathbb{C}^n} \left(\left|T^s f_{\alpha k}(z)\right| e^{-\varphi_m(z)}\right)$$
$$\leq k^{|\alpha|+2} \frac{e^{C_M}}{a^2} \sum_{s=1}^{\infty} \prod_{j=1}^{n} \sup_{z\in\mathbb{C}^n} \left(\frac{1}{s^2} e^{\frac{(\alpha_j+2)}{k}|\operatorname{Im} z_j| - M|z_j|}\right) \leq k^{|\alpha|+2} \frac{e^{C_M}}{a^2} \sum_{s=1}^{\infty} \frac{1}{s^2} < \infty.$$

Условие 1) теоремы 1 выполнено. Условие 2) проверяется аналогично условию 1). Таким образом, T хаотический и часто-гиперциклический в $\mathcal{F}_\varphi(\mathbb{C}^n)$. $\square$

Наложим на семейство φ дополнительное условие:

i_5) при фиксированном $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ для любых $R > 0$ существует постоянная $b_m = b_m(R, m) > 0$ такая, что $\varphi_{m+1}(\lambda z + t) \leq \varphi_m(z) + b_m$, где $z \in \mathbb{C}^n$ и $t \in \mathbb{C}^n : |t| \leq R$.

Теорема 12. *При выполнении условия i_5) оператор $Tf(z) = \left(\frac{\partial}{\partial z_j} f\right)(\lambda z + b)$, где $j = 1, \ldots, n$, а числа $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ и $b \in \mathbb{C}^n$ фиксированные, хаотический и часто-гиперциклический в $\mathcal{F}_\varphi(\mathbb{C}^n)$ в случае $|\lambda| \geq 1$.*

Доказательство. Сначала проверим, что оператор T линейный для произвольных α, $\beta \in \mathbb{C}$ и f, $g \in \mathcal{F}_\varphi(\mathbb{C}^n)$:

$$T(\alpha f + \beta g) = \left(\alpha \frac{\partial}{\partial z_j} f + \beta \frac{\partial}{\partial z_j} g\right)(\lambda z + b) = \alpha \left(\frac{\partial}{\partial z_j} f\right)(\lambda z + b) + \beta \left(\frac{\partial}{\partial z_j} g\right)(\lambda z + b)$$
$$= \alpha Tf + \beta Tg.$$

Теперь докажем его непрерывность в $\mathcal{F}_\varphi(\mathbb{C}^n)$. Введем обозначение $\widetilde{z} = \lambda z + b$. Возьмем некоторую функцию $f \in \mathcal{F}_\varphi(\mathbb{C}^n)$. В силу аналитичности f в $\mathbb{C}^n$ следует, что $Tf \in H(\mathbb{C}^n)$. Используя интегральную формулу Коши, получим следующее равенство:

$$\left(\frac{\partial}{\partial z_j} f\right)(\widetilde{z}) = \frac{1}{(2\pi \mathrm{i})^n} \int\limits_{\Pi_{\widetilde{z}}} \frac{f(\xi_1, \ldots, \xi_n)\, d\xi_1 \ldots d\xi_n}{(\xi_1 - \widetilde{z}_1) \cdot \ldots \cdot (\xi_{j-1} - \widetilde{z}_{j-1})(\xi_j - \widetilde{z}_j)^2 (\xi_{j+1} - \widetilde{z}_{j+1}) \cdot \ldots \cdot (\xi_n - \widetilde{z}_n)},$$

где R и r_j, $j = 1, \ldots, n$ – положительные константы, точка $\widetilde{z}$ лежит в некотором шаре $B(0, R) = \{z \in \mathbb{C}^n : \ |z_j| \leq R, \ j = 1, \ldots, n\}$, а ξ – точка из границы поликруга

$$\Pi_{\widetilde{z}} = \{\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n) : \ |\xi_j - \widetilde{z}_j| = r_j, \ r_j > 0, \ j = 1, \ldots, n\}.$$

Далее введем обозначения $k_1 = \max\limits_{j=1,\dots,n} \{r_j\}$, $k_2 = \min\limits_{j=1,\dots,n} \{r_j\}$ и найдем оценку сверху:

$$\left|\left(\frac{\partial}{\partial z_j} f\right)(\widetilde{z})\right| \le \frac{(R+k_1)^n}{k_2^{n+1}} \max_{\xi\in\Pi_{\widetilde{z}}} |f(\xi)| \le \frac{(R+k_1)^n}{k_2^{n+1}} \max_{\xi\in\Pi_z} |f(\lambda\xi+b)|,$$

где $\Pi_z = \{\xi = (\xi_1,\dots,\xi_n):\ |\xi_j - z_j| = \widetilde{r}_j,\, \widetilde{r}_j > 0,\ j = 1,\dots,n\}$.

Из определения нормы для любых $m \in \mathbb{N}$ и $\xi \in \mathbb{C}^n$ получим формулу

$$|f(\lambda\xi+b)| \le p_{m+1}(f)\, e^{\varphi_{m+1}(\lambda\xi+b)}.$$

Тогда следует, что

$$|Tf| = \left|\left(\frac{\partial}{\partial z_j} f\right)(\lambda z+b)\right| \le \frac{(R+k_1)^n}{k_2^{n+1}}\, p_{m+1}(f)\, \exp\left(\max_{\xi\in\Pi_z} \varphi_{m+1}(\lambda\xi+b)\right).$$

В силу i_5) при всех $m \in \mathbb{N}$ справедливо неравенство

$$\sup_{z\in\mathbb{C}^n} \Big(\exp\big(\max_{\xi\in\Pi_z}\varphi_{m+1}(\lambda\xi+b)\big)\exp\big(-\varphi_m(z)\big)\Big) \le \exp\left(\sup_{z\in\mathbb{C}^n}\big(\varphi_{m+1}(\lambda z+b)-\varphi_m(z)\big)\right) \le e^{b_m}.$$

Оценим норму действия оператора при произвольном $m \in \mathbb{N}$:

$$p_m(Tf) \le \frac{e^{b_m}(R+k_1)^n}{k_2^{n+1}} p_{m+1}(f) < \infty.$$

Таким образом, T действует из $\mathcal{F}_{m+1}(\mathbb{C}^n)$ в $\mathcal{F}_m(\mathbb{C}^n)$ для любых $m \in \mathbb{N}$, значит, он непрерывен и $T:\ \mathcal{F}_\varphi(\mathbb{C}^n) \to \mathcal{F}_\varphi(\mathbb{C}^n)$.

Действие оператора k раз на функцию $f \in \mathcal{F}_\varphi(\mathbb{C}^n)$ имеет вид

$$T^k f(z) = \lambda^{\frac{k(k-1)}{2}} \left(\frac{\partial^k}{\partial z_j^k} f\right)\left(\lambda^k z + b\left(\frac{1-\lambda^k}{1-\lambda}\right)\right).$$

Докажем по теореме 1 хаотичность и часто-гиперцикличность T в $\mathcal{F}_\varphi(\mathbb{C}^n)$.

Определим множество W как линейную оболочку всех мономов вида $z^\beta = z_1^{\beta_1}\cdot\ldots\cdot z_n^{\beta_n}$, где $\beta \in \mathbb{Z}_+^n$. В силу [20, лемма 1] W плотно в $\mathcal{F}_\varphi(\mathbb{C}^n)$.

Вычислим действие T на моном z^β для любых $k \in \mathbb{N}$ и $\beta \in \mathbb{Z}_+^n$:

$$T^k z^\beta = \begin{cases} \lambda^k \frac{\beta_j!}{(\beta_j-k)!} z_j^{-k} z^\beta + b & \text{при } k \le \beta_j, \\ 0 & \text{при } k > \beta_j. \end{cases}$$

Введем оператор S для монома z^β в виде

$$Sz^\beta = \frac{1}{\lambda\beta_j} z_j(z^\beta - b).$$

Тогда действие S на моном z^β для любых $k \in \mathbb{N}$ и $\beta \in \mathbb{Z}_+^n$ определяется по формуле

$$S^k z^\beta = \frac{(\beta_j - k)!}{\lambda^k \beta_j!} z_j^k (z^\beta - b).$$

Условие 3) теоремы 1 на множестве W выполнено:

$$TSz^\beta = \lambda \beta_j z_j^{-1} \frac{z_j}{\lambda \beta_j}(z^\beta - b) + b = z^\beta.$$

По условию i_1) для любого сколь угодно большого $M \in \mathbb{R}_+$ существует постоянная $C_M \in \mathbb{R}_+$ такая, что при всех $z = (z_1, \ldots, z_n) \in \mathbb{C}^n$ $\varphi_m(z_1, \ldots, z_n) \geq M(|z_1| + \ldots + |z_n|) - C_M$, значит, выполняется соотношение

$$e^{\sup\limits_{z \in \mathbb{C}^n} \left(\beta_1 \ln|z_1| + \ldots + \beta_n \ln|z_n| - \varphi_m(z_1, \ldots, z_n)\right)} \leq e^{C_M} \frac{\beta^\beta}{(Me)^{|\beta|}}.$$

Проверим условие 1) теоремы 1 на W. Справедлива следующая оценка для всех фиксированных значений $z \in \mathbb{C}^n$ при условии $|\lambda| \geq 1$:

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{\infty} \sup_{z \in \mathbb{C}^n} \left(|T^k z^\beta| e^{-\varphi_m(z)}\right) &= \sum_{k=0}^{\beta_j} \sup_{z \in \mathbb{C}^n} \left(\left|\lambda^k \frac{\beta_j!}{(\beta_j - k)!} z_j^{-k} z^\beta + b\right| e^{-\varphi_m(z)}\right) \\ &\leq \sum_{k=0}^{\beta_j} |\lambda|^k \beta_j(\beta_j - 1) \ldots (\beta_j - k + 1) e^{C_M} \frac{\beta^\beta}{(Me)^{|\beta|}} < \infty.\end{aligned}$$

Условие 1) выполнено.

Проверим условие 2) теоремы 1 на W. Для всех фиксированных значений $z \in \mathbb{C}^n$, где $k_0 = (k, k, \ldots, k) \in \mathbb{Z}^n$, при условии $|\lambda| \geq 1$ выполняется соотношение:

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{\infty} \sup_{z \in \mathbb{C}^n} \left(|S^k z^\beta| e^{-\varphi_m(z)}\right) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\beta_j - k)!}{\beta_j!} \sup_{z \in \mathbb{C}^n} \left(\left|\frac{1}{\lambda^k} z_j^k (z^\beta - b)\right| e^{-\varphi_m(z)}\right) \\ &\leq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{|\lambda|^k \beta_j(\beta_j - 1) \ldots (\beta_j - k + 1)} e^{C_M} \frac{(\beta + k_0)^{\beta + k_0}}{(Me)^{|\beta| + nk}} < \infty.\end{aligned}$$

Условие 2) выполнено. Следовательно, в случае $|\lambda| \geq 1$ оператор T хаотический и часто-гиперциклический в $\mathcal{F}_\varphi(\mathbb{C}^n)$. □

Из теоремы 12 следует, что при выполнении условия i_5) оператор

$$Tf(z) = \left(D^\alpha f\right)(\lambda z + b),$$

где $\alpha \in \mathbb{Z}_+^n$, а числа $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ и $b \in \mathbb{C}^n$ фиксированные, хаотический и часто-гиперциклический в $\mathcal{F}_\varphi(\mathbb{C}^n)$ в случае $|\lambda| \geq 1$.

Приведем пример не хаотического и не часто-гиперциклического, а также не гиперциклического оператора в $\mathcal{F}_\varphi(\mathbb{C}^n)$.

Теорема 13. *При выполнении условия* i_5) *оператор* $Tf(z) = \left(\frac{\partial}{\partial z_j} f\right)(\lambda z+b)$, *где* $j = 1, \ldots, n$, *а числа* $\lambda \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$ *и* $b \in \mathbb{C}^n$ *фиксированные, не хаотический и не часто-гиперциклический в* $\mathcal{F}_\varphi(\mathbb{C}^n)$ *в случае* $|\lambda| < 1$.

Доказательство. В теореме 12 показано, что оператор T линейный и непрерывно отображает $\mathcal{F}_\varphi(\mathbb{C}^n)$ в $\mathcal{F}_\varphi(\mathbb{C}^n)$. Действие T на функцию $f \in \mathcal{F}_\varphi(\mathbb{C}^n)$ для любых $k \in \mathbb{N}$ имеет вид

$$T^k f(z) = \lambda^{\frac{k(k-1)}{2}} \left(\frac{\partial^k}{\partial z_j^k} f\right) \left(\lambda^k z + b\left(\frac{1-\lambda^k}{1-\lambda}\right)\right).$$

Определим множество W как линейную оболочку всех мономов вида $z^\beta = z_1^{\beta_1} \cdot \ldots \cdot z_n^{\beta_n}$, где $\beta \in \mathbb{Z}_+^n$. В силу [20, лемма 1] W плотно в $\mathcal{F}_\varphi(\mathbb{C}^n)$.

Вычислим действие оператора на степенную функцию для любых $k \in \mathbb{N}$ и $\beta \in \mathbb{Z}_+^n$:

$$T^k z^\beta = \begin{cases} \lambda^k \frac{\beta_j!}{(\beta_j-k)!} z_j^{-k} z^\beta + b & \text{при } k \le \beta_j, \\ 0 & \text{при } k > \beta_j. \end{cases}$$

Тогда с помощью оценки для экспоненты, полученной в теореме 12 в силу i_1), для всех фиксированных значений $z \in \mathbb{C}^n$ при условии $|\lambda| < 1$ получим формулу:

$$\begin{aligned} p_m(T^k z^\beta) &\le \sup_{z\in\mathbb{C}^n} \left(\left|\lambda^k \frac{\beta_j!}{(\beta_j-k)!} z_j^{-k} z^\beta + b\right| e^{-M(|z_1|+\ldots+|z_n|)+C_M}\right) \\ &\le |\lambda|^k e^{C_M} \beta_j(\beta_j-1)\ldots(\beta_j-k+1)\frac{\beta^\beta}{(Me)^{|\beta|}} + |b|e^{C_M} \xrightarrow[k\to\infty]{} |b|e^{C_M}. \end{aligned}$$

Таким образом, $T^k f \to |b|e^{C_M}$ при $k \to \infty$ в $\mathcal{F}_\varphi(\mathbb{C}^n)$. Поэтому не существует функции $f \in \mathcal{F}_\varphi(\mathbb{C}^n)$ такой, что

$$\overline{\operatorname{span}\{T^k f\}_{k=0}^\infty} = \mathcal{F}_\varphi(\mathbb{C}^n).$$

Итак, в случае $|\lambda| < 1$ оператор T не хаотический и не часто-гиперциклический в $\mathcal{F}_\varphi(\mathbb{C}^n)$. $\square$

2. Операторы, коммутирующие с дифференцированием

Для операторов, коммутирующих с дифференцированием, справедливы следующие утверждения.

Теорема 14. *Пусть при выполнении условия* i_3) *линейный непрерывный оператор* T *в пространстве* $\mathcal{F}_\varphi(\mathbb{C}^n)$ *коммутирует с оператором дифференцирования и не является скалярным кратным тождественного отображения. Тогда* T *– хаотический оператор в* $\mathcal{F}_\varphi(\mathbb{C}^n)$.

Доказательство. В [20, теорема 5] было показано, что T – гиперциклический оператор в пространстве Фреше $\mathcal{F}_\varphi(\mathbb{C}^n)$. Отсюда по леммам 2 и 3 следует, что условия хаотичности (A) и (B) выполнены. Докажем выполнение условия (C).

При доказательстве [20, теорема 5] получили, что действие оператора T на экспоненты определяется по формуле

$$T\left(e^{\langle\lambda,z\rangle}\right) = a_T(\lambda)e^{\langle\lambda,z\rangle},$$

где $a_T(\lambda)$ – непостоянная целая функция. Введем обозначение $\varphi(\lambda) = a_T(\lambda)$.

По теореме 4 совокупность периодических точек оператора T задается в виде

$$V = \operatorname{span}\Big\{f \in \mathcal{F}_\varphi(\mathbb{C}^n) : \ \exists\, \alpha \in \mathbb{Q} : \ Tf(z) = e^{\alpha\pi \mathrm{i}}f(z)\Big\}.$$

Возьмем подмножество V:

$$V_0 = \operatorname{span}\Big\{e^{\langle\lambda,z\rangle}\Big\}_{\lambda\in W},$$

где $W = \Big\{\lambda \in \mathbb{C}^n : \ \exists\, \alpha \in \mathbb{Q} : \ \varphi(\lambda) = e^{\alpha\pi\mathrm{i}}\Big\}$.

Поскольку $\varphi : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$ – непостоянная целая функция в $\mathbb{C}^n$, то по [22, приложение B, теорема 6] она является открытым отображением в $\mathbb{C}$. Значит, пересечение ее образа $\varphi(\mathbb{C}^n)$ с единичной окружностью $\mathbb{T}$ всюду совпадает с $\mathbb{T}$, кроме, может быть, одной точки. Отметим, что на $\mathbb{T}$ лежит бесконечно много точек $e^{\alpha\pi\mathrm{i}}$, $\alpha \in \mathbb{Q}$, причем каждая из них является предельной на $\mathbb{T}$. В силу того, что φ – открытое отображение и $\mathbb{T}$ ограничено, бесконечно много точек вида $\lambda = \varphi^{-1}(e^{\alpha\pi\mathrm{i}})$, где $\alpha \in \mathbb{Q}$, лежат в некотором поликруге D_r в $\mathbb{C}^n$. Поэтому существует хотя бы одна точка $\lambda_0 \in D_r$, для которой $\varphi(\lambda_0)$ – предельная точка множества $\mathbb{T}$. По лемме 7 V_0 плотно в $\mathcal{F}_\varphi(\mathbb{C}^n)$. Следовательно, оператор T хаотический в $\mathcal{F}_\varphi(\mathbb{C}^n)$. $\square$

Теорема 15. *Пусть при выполнении условия i_3) линейный непрерывный оператор T в пространстве $\mathcal{F}_\varphi(\mathbb{C}^n)$ коммутирует с оператором дифференцирования и не является скалярным кратным тождественного отображения. Тогда T – часто-гиперциклический оператор в $\mathcal{F}_\varphi(\mathbb{C}^n)$.*

Доказательство. Согласно [20, теорема 5] оператор T гиперциклический в пространстве Фреше $\mathcal{F}_\varphi(\mathbb{C}^n)$. Как показано в ее доказательстве, действие оператора T на экспоненты имеет вид

$$T\left(e^{\langle\lambda,z\rangle}\right) = a_T(\lambda)e^{\langle\lambda,z\rangle},$$

где $a_T(\lambda)$ – непостоянная целая функция. Обозначим $\varphi(\lambda) = a_T(\lambda)$. Из теоремы 14 видно, что числа $\varphi(\lambda)$ входят в множество собственных значений T, а экспоненты $e^{\langle\lambda,z\rangle}$ – в совокупность его собственных функций. Докажем теорему по схеме из утверждения [7, теорема 1.3].

Возьмем некоторую точку $\lambda_0 \in \mathbb{C}^n$ такую, что $w_0 = \varphi(\lambda_0) \in \mathbb{T}$. Любая точка w_0 на окружности $\mathbb{T}$ предельная, поэтому найдется последовательность точек $\{w_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset B$ таких, что $w_k \xrightarrow[k\to\infty]{} \varphi(\lambda_0)$. Поскольку $\varphi : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$ – непостоянная целая функция в $\mathbb{C}^n$, то по [22, приложение B, теорема 6] она является открытым отображением в $\mathbb{C}$. Из этого получим, что при всех $k \in \mathbb{N}$ точкам $w_k \in B$ соответствуют $\lambda_k \in \mathbb{C}^n$, определенные в виде $\lambda_k = \varphi^{-1}(w_k)$. Значит, имеется последовательность точек $\{\lambda_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{C}^n$ таких, что $\varphi(\lambda_k) \in B$ при всех $k \in \mathbb{N}$ и $\varphi(\lambda_k) \xrightarrow[k\to\infty]{} \varphi(\lambda_0)$. Так как φ – открытое отображение, то следует, что $\lambda_k \xrightarrow[k\to\infty]{} \lambda_0$. По схеме из леммы 7 построим последовательность прямых $\{L_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ в $\mathbb{C}^n$.

В силу того, что непостоянная аналитическая функция $\varphi|_{L_k}$ для каждого $k \in \mathbb{N}$ является открытым отображением, при любом $k \in \mathbb{N}$ можно взять некоторое собственное значение $w_k \in \mathbb{T}$ и содержащую его непустую открытую дугу $\gamma_k \subset \mathbb{T}$. Построим аналитическую на $\mathbb{T}$ функцию $\psi_k : \gamma_k \to L_k$ так, что $\varphi(\psi_k(w_k)) = w_k$. Теперь построим не тождественную нулю C^2–гладкую функцию $f_k : \mathbb{T} \to \mathbb{C}$ такую, что $f_k(w_k) \neq 0$, f_k не тождественна нулю на γ_k и $f_k \equiv 0$ вне γ_k. Определим функцию $E_k : \mathbb{T} \to \mathcal{F}_\varphi(\mathbb{C}^n)$ в виде $E_k(w) = f_k(w)e^{\langle\psi_k(w),z\rangle}$, $z \in \mathbb{C}^n$ при $w \in \gamma_k$ и $E_k(w) = 0$ при $w \notin \gamma_k$. Поскольку функция f_k C^2-гладкая на $\mathbb{T}$ и $e^{\langle\psi_k(w),z\rangle}$ бесконечно дифференцируемая по w на $\mathbb{T}$, то E_k – C^2-гладкая по w на $\mathbb{T}$ функция.

E_k при всех $k \in \mathbb{N}$ являются собственными функциями оператора T, соответствующими изолированным собственным значениям $w_k = \varphi(\lambda_k)$, где $w_k \in \mathbb{T}$, $k \in \mathbb{N}$. Тогда множество

$$\widetilde{E} = \operatorname{span}\bigl\{f_k(w)e^{\langle\psi_k(w),z\rangle} :\ w \in \gamma_k\bigr\}_{k\in\mathbb{N}} = \operatorname{span}\bigl\{f_k(\varphi_k(\lambda))e^{\langle\lambda,z\rangle} :\ \lambda \in W\bigr\}_{k\in\mathbb{N}},$$

где

$$W = \bigl\{\lambda \in \mathbb{C}^n :\ \lambda \in \psi_k(\gamma_k)\bigr\}_{k\in\mathbb{N}},$$

определяет поле собственных функций T, соответствующих собственным значениям с единичным модулем. Из того, что для всех $k \in \mathbb{N}$ E_k являются C^2-гладкими по w функциями, следует, что $\widetilde{E}$ – C^2-гладкое поле собственных функций оператора T, соответствующих собственным значениям с единичным модулем.

Заметим, что $\widetilde{E}$ содержит подмножество

$$V_0 = \operatorname{span}\Bigl\{e^{\langle\lambda,z\rangle}\Bigr\}_{\lambda\in W},$$

где $W = \Bigl\{\lambda \in \mathbb{C}^n :\quad \exists\ \alpha \in \mathbb{Q} :\ \varphi(\lambda) = e^{\alpha\pi \mathrm{i}}\Bigr\}$. Как показано в теореме 14, V_0 плотно в $\mathcal{F}_\varphi(\mathbb{C}^n)$. Следовательно, $\widetilde{E}$ также плотно в $\mathcal{F}_\varphi(\mathbb{C}^n)$.

Таким образом, T имеет в $\mathcal{F}_\varphi(\mathbb{C}^n)$ C^2-гладкое охватывающее поле собственных функций, соответствующих собственным значениям с единичным модулем. Тогда по теореме 5 оператор T часто-гиперциклический в $\mathcal{F}_\varphi(\mathbb{C}^n)$. □

Из теорем 14 и 15 вытекают следующие утверждения.

Следствие 16. *Пусть полином* $P(z) = \sum\limits_{\alpha:\,|\alpha|=0}^{m} a_\alpha z^\alpha$, *где* $m \in \mathbb{N}$ *и* $a_\alpha \in \mathbb{C}$ *при любых* $\alpha \in \mathbb{Z}_+^n$, *отличен от постоянной. Тогда при выполнении условия i_3) оператор* $T = \sum\limits_{\alpha:\ |\alpha|=0}^{m} a_\alpha D_z^\alpha$ *хаотический и часто-гиперциклический в* $\mathcal{F}_\varphi(\mathbb{C}^n)$.

Очевидно, что оператор коммутирует с дифференцированием. В [20, теорема 2] показаны его линейность и непрерывность в $\mathcal{F}_\varphi(\mathbb{C}^n)$.

Следствие 17. *Пусть заданы числа* $m \in \mathbb{N}$ *и точки* $a_\alpha \in \mathbb{C}^n$, $c_\alpha \in \mathbb{C}$, *где* $\alpha \in \mathbb{Z}_+^n$. *Тогда при выполнении условия* i_4) *оператор* $Tf(z) = \sum\limits_{\alpha:\ |\alpha|=1}^{m} c_\alpha f(z + a_\alpha)$, *не кратный тождественному, хаотичен и часто-гиперцикличен в* $\mathcal{F}_\varphi(\mathbb{C}^n)$.

В силу [20, следствие 1] оператор линейный и непрерывный. Поскольку очевидно, что он коммутирует с дифференцированием, то утверждение верно.

Следствие 18. *Пусть* $N \in \mathbb{N}$ *и* $m \in \mathbb{N}$, *заданы точки* $c_{\alpha\beta} \in \mathbb{C}$ *и* $a_\alpha \in \mathbb{R}^n$, *где* $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}_+^n$. *Тогда при выполнении условия* i_4) *оператор* $Tf(z) = \sum\limits_{\alpha:\ |\alpha|=0}^{N} \sum\limits_{\beta:\ |\beta|=1}^{m} c_{\alpha\beta}(D^\alpha f)(z + a_\alpha)$, *не кратный тождественному, хаотический и часто-гиперциклический в* $\mathcal{F}_\varphi(\mathbb{C}^n)$.

По [20, следствие 2] для оператора выполняются линейность и непрерывность, а свойство коммутирования с дифференцированием очевидно.

Следствие 19. *Пусть* $\Phi(z) = \sum\limits_{\alpha:\ |\alpha|=0}^{\infty} c_\alpha z^\alpha$ *– непостоянная целая функция в пространстве* $\mathcal{F}_\varphi(\mathbb{C}^n)$, *где* $c_\alpha \in \mathbb{C}$ *при любых* $\alpha \in \mathbb{Z}_+^n$, *определим оператор*

$$T:\ f(z) \in \mathcal{F}_\varphi(\mathbb{C}^n) \xrightarrow{\Phi(D)} \sum_{\alpha:\ |\alpha|=0}^{\infty} c_\alpha D_z^\alpha f(z).$$

Тогда если $\Phi(z)$ *– функция экспоненциального типа, то при выполнении условия* i_3) *оператор* T *хаотический и часто-гиперциклический в* $\mathcal{F}_\varphi(\mathbb{C}^n)$.

В [20, теорема 3] показано, что оператор линейный и непрерывный. Поскольку он коммутирует с дифференцированием, то справедливо данное следствие.

Если $\Lambda = (\lambda_\alpha)_{\alpha:\ |\alpha|=1}^\infty$ – заданная последовательность точек $\lambda_\alpha \in \mathbb{C}^n$, где $\alpha \in \mathbb{Z}_+^n$, то для семейства функций φ в силу условия i_4) при всех $m \in \mathbb{N}$ и $\alpha \in \mathbb{Z}_+^n$ существует зависящая от нее совокупность чисел $b_{\alpha,m}(\Lambda) = \sup\limits_{z\in\mathbb{C}^n}(\varphi_{m+1}(z + \lambda_\alpha) - \varphi_m(z))$.

Следствие 20. *Пусть для семейства* φ *заданы последовательность* $(d_\alpha)_{\alpha:\ |\alpha|=1}^\infty$ *чисел* $d_\alpha \in \mathbb{C}$, *где* $\alpha \in \mathbb{Z}_+^n$, *и последовательность* $\Lambda = (\lambda_\alpha)_{\alpha:\ |\alpha|=1}^\infty$ *точек* $\lambda_\alpha \in \mathbb{C}^n$, *где* $\alpha \in \mathbb{Z}_+^n$, *таких, что* $\lim\limits_{\alpha\to\infty} |\lambda_\alpha| = \infty$ *и* $\sum\limits_{\alpha:\ |\alpha|=1}^{\infty} |d_\alpha| e^{b_{\alpha,m}(\Lambda)} < \infty$ *для любого* $m \in \mathbb{N}$. *Определим при выполнении условия* i_4) *на* $\mathcal{F}_\varphi(\mathbb{C}^n)$ *оператор* $T:\ f(z) \in \mathcal{F}_\varphi(\mathbb{C}^n) \to \sum\limits_{\alpha:\ |\alpha|=1}^{\infty} d_\alpha f(z + \lambda_\alpha)$. *Тогда* T *хаотичен и часто-гиперцикличен в* $\mathcal{F}_\varphi(\mathbb{C}^n)$.

Как показано в [20, следствие 3], для оператора выполнены свойства линейности и непрерывности. Его свойство коммутирования с дифференцированием очевидно.

Следствие 21. *Пусть в пространстве $\mathcal{F}_\varphi(\mathbb{C}^n)$ S – обобщенная функция с компактным носителем, причем ее преобразование Фурье–Лапласа $\widehat{S}(z) = S_\xi(e^{\langle \xi, z\rangle})$ не является константой. Тогда при выполнении условия i_4) оператор свертки вида $M_S[f](z) = S_t(f(z+t))$ хаотический и часто-гиперциклический в $\mathcal{F}_\varphi(\mathbb{C}^n)$.*

По [20, следствие 4] оператор линейный и непрерывный. В [21, теорема 17.3] доказано, что он коммутирует с дифференцированием.

Следствие 22. *Пусть для семейства функций φ выполняется условие*

$$\forall\, m,\, k \in \mathbb{N} \quad \exists\, l = l_{m,k} \in \mathbb{N},\ r = r_{m,k} > 0: \ \forall\, z,\, t \in \mathbb{C}^n \ \ \varphi_l(z+t) \le \varphi_m(z) + \varphi_k(t) + r,$$

а S определен как линейный непрерывный функционал на $\mathcal{F}_\varphi(\mathbb{C}^n)$, преобразование Фурье–Лапласа которого $\widehat{S}(z) = S_\xi(e^{\langle \xi, z\rangle})$ не является константой. Тогда при выполнении условия i_4) оператор свертки $M_S[f](z) = S_t(f(z+t))$ хаотичен и часто-гиперцикличен в $\mathcal{F}_\varphi(\mathbb{C}^n)$.

В [20, лемма 7] были доказаны линейность и непрерывность оператора. В [20, лемма 6] показано, что он коммутирует с дифференцированием.

Список литературы

[1] R.L. Devaney, *An introduction to chaotic dynamical systems*, Addison-Wesley Publ., Redwood City, CA, 1989.
DOI: http://doi.org/10.1201/9780429280801

[2] J. Banks, J. Brooks, G. Cairns, G. Davis, P. Stacey, *On Devaney's definition of chaos*, Amer. Math. Monthly **99** (4), 332–334 (1992).
DOI: https://doi.org/10.2307/2324899

[3] G. Godefroy, J.H. Shapiro, *Operators with dense, invariant, cyclic vector manifolds*, J. Funct. Anal. **98** (2), 229–269 (1991).
DOI: https://doi.org/10.1016/0022-1236(91)90078-J

[4] Р.М. Кроновер, *Фракталы и хаос в динамических системах. Основы теории*, Постмаркет, М., 2000.

[5] J.J. Betancor, M. Sifi, K. Trimeche, *Hypercyclic and chaotic convolution operators associated with Dunkl operators on C*, Acta Math. Hung. **106** (1–2), 101–116 (2005).
DOI: https://doi.org/10.1007/s10474-005-0009-1

[6] F. Bayart, S. Grivaux, *Frequently hypercyclic operators*, Trans. Amer. Math. Soc. **358** (11), 5083–5117 (2006).

DOI: https://doi.org/10.1090/S0002-9947-06-04019-0

[7] A. Bonilla, K.-G. Grosse-Erdmann, *On a theorem of Godefroy and Shapiro*, Integral Equ. Oper. Theory **56** (2), 151–162 (2006).
DOI: https://doi.org/10.1007/s00020-006-1423-7

[8] A. Bonilla, K.-G. Grosse-Erdmann, *Frequently hypercyclic operators and vectors*, Ergodic Th. & Dynam. Systems **27** (2), 383–404 (2007).
DOI: https://doi.org/10.1017/S014338570600085X

[9] F. Bayart, E. Matheron, *Dynamics of linear operators*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2009.
DOI: https://doi.org/10.1017/CBO9780511581113

[10] K.-G. Grosse-Erdmann, A.M. Peris, *Linear chaos*, Springer, London, 2011.
DOI: https://doi.org/10.1007/978-1-4471-2170-1

[11] M.W. Hirsch, S. Smale, R.L. Devaney, *Differential equations, dynamical systems, and an introduction to chaos*, Elsevier/Academic Press, Amsterdam, 2013.
DOI: https://doi.org/10.1016/C2009-0-61160-0

[12] S. Grivaux, *A new class of frequently hypercyclic operators*, Indiana Univ. Math. J. **60** (4), 1177–1202 (2011).
URL: https://doi.org/10.1512/iumj.2011.60.4350

[13] J. Bonet, *Dynamics of the differentiation operator on weighted spaces of entire functions*, Math. Z. **261** (3), 649–657 (2009).
DOI: https://doi.org/10.1007/s00209-008-0347-0

[14] А.В. Абанин, Ф.Ч. Тиен, *Классические операторы в весовых банаховых пространствах голоморфных функций*, Итоги науки и техн. Соврем. матем. и ее прил. Темат. обз. **142**, 3–13 (2017).
URL: https://www.mathnet.ru/rus/into249

[15] А.В. Абанин, Т.И. Абанина, *О композиционных операторах в гильбертовых пространствах целых функций*, Изв. вузов. Матем. (10), 3–7 (2017).
URL: https://www.mathnet.ru/rus/ivm9284

[16] В.Э. Ким, *Гиперциклические и хаотические операторы на пространстве целых функций*, Тр. Института математики с ВЦ УНЦ РАН **1**, 126–130 (2008).

[17] В.Э. Ким, *Полнота систем производных функций Эйри и гиперциклические операторы*, Уфимск. матем. журн. **2** (4), 52–57 (2010).
URL: https://www.mathnet.ru/rus/ufa71

[18] B.A. Taylor, *On weighted polynomial approximation of entire functions*, Pacific J. Math. **36** (2), 523–539 (1971).
DOI: http://doi.org/10.2140/pjm.1971.36.523

[19] F. Haslinger, *Weighted spaces of entire functions*, Indiana Univ. Math. J. **35** (1), 193–208 (1986).
URL: https://doi.org/10.1512/iumj.1986.35.35011

[20] А.И. Рахимова, *О гиперциклических операторах в весовых пространствах целых функций*, Таврический вестник информатики и математики (1), 88–110 (2023).
URL: https://www.mathnet.ru/rus/tvim162

[21] В.В. Напалков, *Уравнения свертки в многомерных пространствах*, Наука, М., 1982.

[22] Р. Ганнинг, Х. Росси, *Аналитические функции многих комплексных переменных*, Мир, М., 1969.

Алсу Ильдаровна Рахимова
Институт математики с ВЦ УФИЦ РАН,
ул. Чернышевского, д. 112, г. Уфа, 450008, Россия,
E-mail: alsu1405@mail.ru

Volume 2, Issue 2 UDC 517.55
pp. 84–106 (2024) MSC 32C15

Chaotic and frequently hypercyclic operators in the weighted space of entire functions

A.I. Rakhimova

Abstract. We study the issues of chaoticity and frequently hypercyclicity of various operators in the weighted space $\mathcal{F}_\varphi(\mathbb{C}^n)$, defined as the projective limit of Banach spaces. Theorems 8–13 consider the cases of differentiation and shift operators, as well as their compositions in $\mathcal{F}_\varphi(\mathbb{C}^n)$. For linear continuous operators commuting with differentiation, Theorem 14 shows that they are chaotic in $\mathcal{F}_\varphi(\mathbb{C}^n)$. In Theorem 15, such operators are proved to be frequently hypercyclic in $\mathcal{F}_\varphi(\mathbb{C}^n)$, and also are the most important consequences of these statements are indicated.

Keywords: weight space, entire functions, chaotic operator, frequently hypercyclic operator, differentiation operator, shift operator.

DOI: 10.26907/2949-3919.2024.2.84-106

References

[1] R.L. Devaney, *An introduction to chaotic dynamical systems*, Addison-Wesley Publ., Redwood City, CA, 1989.
DOI: http://doi.org/10.1201/9780429280801

[2] J. Banks, J. Brooks, G. Cairns, G. Davis, P. Stacey, *On Devaney's definition of chaos*, Amer. Math. Monthly **99** (4), 332–334 (1992).
DOI: https://doi.org/10.2307/2324899

[3] G. Godefroy, J.H. Shapiro, *Operators with dense, invariant, cyclic vector manifolds*, J. Funct. Anal. **98** (2), 229–269 (1991).
DOI: https://doi.org/10.1016/0022-1236(91)90078-J

[4] R.M. Crownover, *Introduction to fractals and chaos*, Jones and Bartlet, Boston, 1995.

[5] J.J. Betancor, M. Sifi, K. Trimeche, *Hypercyclic and chaotic convolution operators associated with Dunkl operators on C*, Acta Math. Hung. **106** (1–2), 101–116 (2005).
DOI: https://doi.org/10.1007/s10474-005-0009-1

[6] F. Bayart, S. Grivaux, *Frequently hypercyclic operators*, Trans. Amer. Math. Soc. **358** (11), 5083–5117 (2006).
DOI: https://doi.org/10.1090/S0002-9947-06-04019-0

Received: 23 April 2024. Accepted: 02 July 2024. Published: 16 July 2024.

[7] A. Bonilla, K.-G. Grosse-Erdmann, *On a theorem of Godefroy and Shapiro*, Integral Equ. Oper. Theory **56** (2), 151–162 (2006).
DOI: https://doi.org/10.1007/s00020-006-1423-7

[8] A. Bonilla, K.-G. Grosse-Erdmann, *Frequently hypercyclic operators and vectors*, Ergodic Th. & Dynam. Systems **27** (2), 383–404 (2007).
DOI: https://doi.org/10.1017/S014338570600085X

[9] F. Bayart, E. Matheron, *Dynamics of linear operators*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2009.
DOI: https://doi.org/10.1017/CBO9780511581113

[10] K.-G. Grosse-Erdmann, A.M. Peris, *Linear chaos*, Springer, London, 2011.
DOI: https://doi.org/10.1007/978-1-4471-2170-1

[11] M.W. Hirsch, S. Smale, R.L. Devaney, *Differential equations, dynamical systems, and an introduction to chaos*, Elsevier/Academic Press, Amsterdam, 2013.
DOI: https://doi.org/10.1016/C2009-0-61160-0

[12] S. Grivaux, *A new class of frequently hypercyclic operators*, Indiana Univ. Math. J. **60** (4), 1177–1202 (2011).
URL: https://doi.org/10.1512/iumj.2011.60.4350

[13] J. Bonet, *Dynamics of the differentiation operator on weighted spaces of entire functions*, Math. Z. **261** (3), 649–657 (2009).
DOI: https://doi.org/10.1007/s00209-008-0347-0

[14] A.V. Abanin, Ph.T. Tien, *Classical operators in weighted Banach spaces of holomorphic functions*, J. Math. Sci. **241** (6), 647–657 (2019).
DOI: https://doi.org/10.1007/s10958-019-04452-1

[15] A.V. Abanin, T.I. Abanina, *On composition operators on Hilbert spaces of entire functions*, Russian Math. (Iz. VUZ) **61** (10), 1–4 (2017).
DOI: https://doi.org/10.3103/S1066369X17100012

[16] V. E. Kim, *Hypercyclic and chaotic operators on the space of entire functions*, Proc. of the Institute of Mathematics with Computing Centre, Ufa Federal Research Centre of Russian Academy of Science **1**, 126–130 (2008) [in Russian].

[17] V.E. Kim, *Completeness of systems of derivatives of Airy functions and hypercyclic operators*, Ufimsk. Mat. Zh. **2** (4), 52–57 (2010) [in Russian].
URL: https://www.mathnet.ru/eng/ufa71

[18] B.A. Taylor, *On weighted polynomial approximation of entire functions*, Pacific J. Math. **36** (2), 523–539 (1971).
DOI: http://doi.org/10.2140/pjm.1971.36.523

[19] F. Haslinger, *Weighted spaces of entire functions*, Indiana Univ. Math. J. **35** (1), 193–208 (1986).
URL: https://doi.org/10.1512/iumj.1986.35.35011

[20] A.I. Rakhimova, *On hypercyclic operators in weighted spaces of entire functions*, Taurida Journal of Computer Science Theory and Mathematics (1), 88–110 (2023) [in Russian].
URL: https://www.mathnet.ru/eng/tvim162

[21] V. V. Napalkov, *Convolution equations in multidimensional spaces*, Nauka, Moscow, 1982 [in Russian].

[22] R. C. Gunning, H. Rossi, *Analytic functions of several complex variables*, Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, NJ, 1965.

Alsu Il'darovna Rakhimova
Subdivision of the Ufa Federal Research Centre of Russian Academy of Science,
Ufa Federal Research Centre of Russian Academy of Science,
112 Chernyshevsky str., Ufa 450008, Russia,
E-mail: alsu1405@mail.ru