Начально-краевая задача для одного псевдогиперболического уравнения с ненулевыми граничными условиями

В.В. Шеметова

Аннотация. Рассматривается смешанная краевая задача в четверти плоскости для одного псевдогиперболического уравнения. Указываются условия на граничные условия, при которых смешанная задача однозначно разрешима в соболевских пространствах с экспоненциальным весом.

Ключевые слова: псевдогиперболическое уравнение, условие Лопатинского, пространство Соболева.

DOI: 10.26907/2949-3919.2024.2.107-121

Введение

В работе продолжается исследование корректности смешанных краевых задач в четверти плоскости $\mathbb{R}_{++}^2 = \{t > 0, x > 0\}$ для псевдогиперболического уравнения

$$(I - D_x^2)D_t^2 u + D_x^4 u - a^2 D_x^2 u = f(t, x), \quad (1)$$

здесь I – тождественный оператор, $a \in \mathbb{R}$. Подобное уравнение (1) возникает при математическом описании крутильных колебаний стержня [1, 2], а также при моделировании продольных колебаний стержня [3, 4]. Данное уравнение является уравнением, не разрешенным относительно старшей производной по времени. Такие уравнения часто называют уравнениями соболевского типа, именно с работы С.Л. Соболева (см., например, [5], с. 333–447) началось интенсивное развитие этого направления в теории уравнений с частными производными.

В монографии Г.В. Демиденко и С.В. Успенского [6] была введена классификация линейных уравнений, не разрешенных относительно старшей производной, вида

$$L_0(D_x)D_t^l u + \sum_{k=0}^{l-1} L_{l-k}(D_x)D_t^k u = f(t, x),$$

Благодарности. Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 24-21-00370, <https://rscf.ru/project/24-21-00370>.

где $L_0(D_x)$ является квазиэллиптическим оператором и построена теория краевых задач для некоторых классов. В [6] был введён класс псевдогиперболических дифференциальных уравнений и для них была изучена задача Коши. Задача Коши для некоторых нелинейных псевдогиперболических уравнений изучена в [7]. В целом теория краевых задач для псевдогиперболических уравнений на данный момент еще не построена. Существуют некоторые результаты по отдельным начально-краевым задачам (см., например, [8–10]).

Работа посвящена рассмотрению следующей смешанной задачи

$$\begin{aligned} (I - D_x^2)D_t^2 u + D_x^4 u - a^2 D_x^2 u &= 0, \quad x > 0, \quad t > 0, \\ u|_{t=0} &= 0, \quad D_t u|_{t=0} = 0, \\ (b_{11} + b_{12}D_x)u|_{x=0} &= \varphi_1(t), \\ (b_{21} + b_{22}D_x)u|_{x=0} &= \varphi_2(t), \end{aligned} \tag{2}$$

здесь $b_{ij} \in \mathbb{R}$, $i = 1, 2$ и $j = 1, 2$. Будем предполагать, что задача (2) удовлетворяет условию Лопатинского (см., например, [6]). В случае, если правая часть уравнения ненулевая, а $\varphi_1 = \varphi_2 = 0$, результат опубликован в [11].

Цель работы состоит в том, чтобы доказать однозначную разрешимость задачи (2) в анизотропном весовом соболевском пространстве $W_{2,\gamma}^{2,4}(\mathbb{R}_{++}^2)$.

1. Полученный результат

Перед тем как сформулировать основной результат, напомним определение анизотропного весового соболевского пространства (см., например, [12, 13]).

Определение 1. Функция $u(t, x)$ принадлежит анизотропному соболевскому пространству $W_2^{l_1, l_2}(G)$, $l_1 > 0$, $l_2 > 0$, $G \subseteq \mathbb{R}^2$, если существуют обобщенные производные $D_t^{\alpha_1} D_x^{\alpha_2} u(t, x)$ в области G при $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)$ такие, что

$$\frac{\alpha_1}{l_1} + \frac{\alpha_2}{l_2} \leq 1,$$

при этом $D_t^{\alpha_1} D_x^{\alpha_2} u(t, x) \in L_2(G)$. Норма в $W_2^{l_1, l_2}(G)$ имеет вид

$$\|u(t, x), W_2^{l_1, l_2}(G)\| = \sum_{\alpha: \alpha_1/l_1 + \alpha_2/l_2 \leq 1} \|D_t^{\alpha_1} D_x^{\alpha_2} u(t, x), L_2(G)\|.$$

Определение 2. Функция $u(t, x)$ принадлежит анизотропному соболевскому пространству с экспоненциальным весом $W_{2,\gamma}^{l_1, l_2}(G)$, $l_1 > 0$, $l_2 > 0$, $G \subseteq \mathbb{R}^2$, если функция $e^{-\gamma t} u(t, x)$ принадлежит $W_2^{l_1, l_2}(G)$. Норма в этом пространстве задается следующим образом

$$\|u(t, x), W_{2,\gamma}^{l_1, l_2}(G)\| = \|e^{-\gamma t} u(t, x), W_2^{l_1, l_2}(G)\|.$$

Далее перейдем к формулировке условия Лопатинского для задачи (2). Рассмотрим

рим краевую задачу на полупрямой для обыкновенного дифференциального уравнения с параметром $\tau \in \mathbb{C}_\gamma^+ = \{\tau \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} \tau > \gamma\}$, $\gamma > 0$

$$\begin{aligned} \tau^2(I - D_x^2)v + D_x^4v - a^2D_x^2v &= 0, \quad x > 0, \\ (b_{11} + b_{12}D_x)v|_{x=0} &= \psi_1, \\ (b_{12} + b_{22}D_x)v|_{x=0} &= \psi_2, \\ \sup_{x>0} |v| &< \infty. \end{aligned} \quad (3)$$

Определение 3. Смешанная задача (2) удовлетворяет условию Лопатинского, если краевая задача (3) однозначно разрешима при любых ψ_1, ψ_2 .

Очевидно, что при $\tau \in \mathbb{C}_\gamma^+$, $\gamma > 0$, характеристическое уравнение для дифференциального уравнения в задаче (3)

$$L(\tau, \lambda) = \lambda^4 - (\tau^2 + a^2)\lambda^2 + \tau^2 = 0 \quad (4)$$

не имеет чисто мнимых корней. Более того, два корня характеристического уравнения (4) λ_1^-, λ_2^- лежат в левой полуплоскости, а два корня λ_1^+, λ_2^+ находятся в правой.

Характеристические многочлены граничных операторов рассматриваемой задачи можно представить в виде

$$\begin{aligned} b_1(\lambda) &= b_{11} + b_{12}\lambda, \\ b_2(\lambda) &= b_{21} + b_{22}\lambda. \end{aligned}$$

Матрицу Лопатинского можно записать следующим образом

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}.$$

Согласно [6] краевая задача (3) однозначно разрешима, если

$$\det B \neq 0.$$

Справедливо следующее утверждение.

Теорема 4. Пусть выполнено условие Лопатинского для краевой задачи (2) и существует $\gamma_0 > 0$ такое, что для любых

$$\begin{aligned} \varphi_1(t) \in W_{2,\gamma}^3(\mathbb{R}_+), \quad \gamma > \gamma_0, \quad \varphi_1(t)|_{t=0} = D_t\varphi_1(t)|_{t=0} = D_t^2\varphi_1(t)|_{t=0} = 0, \\ \varphi_2(t) \in W_{2,\gamma}^3(\mathbb{R}_+), \quad \gamma > \gamma_0, \quad \varphi_2(t)|_{t=0} = D_t\varphi_2(t)|_{t=0} = D_t^2\varphi_2(t)|_{t=0} = 0. \end{aligned}$$

Тогда краевая задача (2) однозначно разрешима в классе функций из соболевского пространства $W_{2,\gamma}^{2,4}(\mathbb{R}_{++}^2)$ таких, что $D_t^2D_x^2u \in L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_{++}^2)$ и $\gamma > \gamma_0$, для решения $u(t, x)$ имеет

место оценки

$$\|u(t, x), W_{2,\gamma}^{2,4}(\mathbb{R}_{++}^2)\| \leq c(\gamma_0) (\|\varphi_1(t), W_{2,\gamma}^3(\mathbb{R}_+)\| + \|\varphi_2(t), W_{2,\gamma}^3(\mathbb{R}_+)\|),$$

где константа $c(\gamma_0)$ не зависит от функций $\varphi_1(t)$ и $\varphi_2(t)$.

При доказательстве теоремы имеет большое значение обобщенная теорема Пэли–Винера [6, 14]). Напомним ее формулировку.

Рассмотрим функции $v(\tau, x)$, $\tau = i\eta + \sigma$, принадлежащие для почти всех $x \in \mathbb{R}_+$ пространству $\tilde{L}_2(\mathbb{C}_\gamma^+)$, т. е.

- а) для почти всех $x \in \mathbb{R}_+$ функция $v(\tau, x)$ – аналитическая в $\mathbb{C}_\gamma^+$;
 б) $\sup_{\sigma > \gamma} \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} |v(i\eta + \sigma, x)|^2 dx d\eta < \infty$.

Введем норму

$$\sup_{\sigma > \gamma} \left(\int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} |v(i\eta + \sigma, x)|^2 dx d\eta \right)^{1/2}.$$

Полученное таким образом линейное нормированное пространство будем обозначать $\tilde{L}_2(\mathbb{C}_\gamma^+ \times \mathbb{R}_+)$. Для описания образа интегрального оператора Лапласа $\mathfrak{L}$ пространства

$$W_{2,\gamma}^{l_1, l_2}(\mathbb{R}_{++}^2), \quad l_1 \geq 0, \quad l_2 \geq 0,$$

рассмотрим множество функций $v(\tau, x)$, принадлежащих $\tilde{L}_2(\mathbb{C}_\gamma^+ \times \mathbb{R}_+)$, таких, что при $l_1, l_2 > 0$

$$\sup_{\sigma > \gamma} \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} |\tau|^{2\alpha_1} |D_x^{\alpha_2} v(i\eta + \sigma, x)|^2 dx d\eta < \infty, \quad 0 \leq \frac{\alpha_1}{l_1} + \frac{\alpha_2}{l_2} \leq 1,$$

при $l_1 = 0$

$$\sup_{\sigma > \gamma} \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} |D_x^{\alpha_2} v(i\eta + \sigma, x)|^2 dx d\eta < \infty, \quad 0 \leq \alpha_2 \leq l_2,$$

при $l_2 = 0$

$$\sup_{\sigma > \gamma} \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} |\tau|^{2\alpha_1} |v(i\eta + \sigma, x)|^2 dx d\eta < \infty, \quad 0 \leq \alpha_1 \leq l_1,$$

Введем на нем норму

$$\sum_{\alpha} \sup_{\sigma > \gamma} \left(\int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} |i\eta + \sigma|^{2\alpha_1} |D_x^{\alpha_2} v(i\eta + \sigma, x)|^2 dx d\eta \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Полученное линейное нормированное пространство будем обозначать через $\tilde{W}_2^{l_1, l_2}(\mathbb{C}_\gamma^+ \times \mathbb{R}_+)$.

Теорема 5 (обобщенная теорема Пэли–Винера). *Интегральный оператор Лапласа $\mathfrak{L}$ отображает пространство функций из $W_{2,\gamma}^{l_1,l_2}(\mathbb{R}_{++}^2)$ таких, что*

$$D_t^k u|_{t=0} = 0, \quad k = 0, \dots, l_1 - 1,$$

на пространство $\widetilde{W}_2^{l_1,l_2}(\mathbb{C}_\gamma^+ \times \mathbb{R}_+)$ взаимно однозначно и взаимно непрерывно.

2. Доказательство разрешимости краевой задачи

Для доказательства [теоремы 4](#) воспользуемся схемой, предложенной в [\[6\]](#).

Рассмотрим вспомогательную краевую задачу на полупрямой $x > 0$ с параметром $\tau \in \mathbb{C}_\gamma^+$, где $\tau = \sigma + i\eta$ и $\sigma > \gamma > 0$, для обыкновенного дифференциального уравнения, которая получается после применения оператора Лапласа по t к задаче [\(2\)](#)

$$\begin{aligned} D_x^4 v - (\tau^2 + a^2) D_x^2 v + \tau^2 v &= 0, \quad x > 0, \\ (b_{11} + b_{12} D_x) v|_{x=0} &= \tilde{\varphi}_1(\tau), \\ (b_{21} + b_{22} D_x) v|_{x=0} &= \tilde{\varphi}_2(\tau), \\ \sup_{x>0} |v| &< \infty, \end{aligned} \tag{5}$$

здесь $\tilde{\varphi}_1(\tau)$ и $\tilde{\varphi}_2(\tau)$ – преобразования Лапласа по переменной t функций $\varphi_1(t)$ и $\varphi_2(t)$ соответственно. Дальнейшая проверка состоит в доказательстве того, что задача [\(5\)](#) имеет единственное решение в соболевском пространстве $W_2^4(\mathbb{R}_+)$ при $\tau \in \mathbb{C}_\gamma^+$.

Так как для задачи [\(2\)](#) справедливо условие Лопатинского, то краевая задача [\(5\)](#) однозначно разрешима. Решение последней можно записать следующим образом

$$\begin{aligned} v(\tau, x) &= \frac{b_{21}(e^{-\lambda_1^+ x} - e^{-\lambda_2^+ x}) + b_{22}(e^{-\lambda_2^+ x} \lambda_1^+ - e^{-\lambda_1^+ x} \lambda_2^+)}{(\lambda_1^+ - \lambda_2^+)(b_{11} b_{22} - b_{21} b_{12})} \tilde{\varphi}_1(\tau) \\ &\quad - \frac{b_{11}(e^{-\lambda_1^+ x} - e^{-\lambda_2^+ x}) + b_{12}(e^{-\lambda_2^+ x} \lambda_1^+ - e^{-\lambda_1^+ x} \lambda_2^+)}{(\lambda_1^+ - \lambda_2^+)(b_{11} b_{22} - b_{21} b_{12})} \tilde{\varphi}_2(\tau) = v_1(\tau, x) - v_2(\tau, x), \end{aligned} \tag{6}$$

где λ_1^+ и λ_2^+ – корни характеристического уравнения [\(4\)](#), расположенные в правой полуплоскости. Сформулируем утверждения о корнях, которые понадобятся при получении оценок [\(6\)](#). Подробные доказательства приведены в работе [\[11\]](#).

Лемма 6. *Для корней характеристического уравнения [\(4\)](#) имеют место соотношения:*

$$\begin{aligned} \lambda_j^+(\tau) &= -\lambda_j^-(\tau), \quad j = 1, 2, \\ \lambda_1^+(\tau) \lambda_2^+(\tau) &= \tau, \quad (\lambda_1^+(\tau))^2 + (\lambda_2^+(\tau))^2 = \tau^2 + a^2, \\ \frac{|\tau|}{2} &\leq |\lambda_1^+(\tau)| \leq 2|\tau|, \quad \frac{1}{2} \leq |\lambda_2^+(\tau)| \leq 2. \end{aligned}$$

Лемма 7. *Существуют константы $c_1, c_2 > 0$, что при $\sigma > \gamma > \gamma_0 > 0$, $\eta \in \mathbb{R}$ имеют место оценки*

$$\operatorname{Re} \lambda_1^+(\tau) |\lambda_1^+(\tau)| \geq c_1 \sigma |\tau|, \quad \operatorname{Re} \lambda_2^+(\tau) |\lambda_2^+(\tau)| \geq c_2 \sigma,$$

где $\lambda_j^+(\tau)$, $j = 1, 2$ – корни уравнения (4), $\operatorname{Re} \lambda_j^+(\tau) > 0$, $j = 1, 2$.

Лемма 8. *Пусть функции $\varphi_1(t)$ и $\varphi_2(t)$ удовлетворяют условиям теоремы 4, тогда при $\operatorname{Re} \tau > \gamma > \gamma_0 > 0$ справедливы оценки:*

$$\begin{aligned} \|v(\tau, x), L_2(\mathbb{R}_+)\| &\leq c(\gamma_0) (|\tilde{\varphi}_1(\tau)| + |\tilde{\varphi}_2(\tau)|), \\ \|D_x^k v(\tau, x), L_2(\mathbb{R}_+)\| &\leq c(\gamma_0) |\tau| (|\tilde{\varphi}_1(\tau)| + |\tilde{\varphi}_2(\tau)|), \quad k = 1, 2, \\ \|D_x^k v(\tau, x), L_2(\mathbb{R}_+)\| &\leq c(\gamma_0) |\tau|^{k-1} (|\tilde{\varphi}_1(\tau)| + |\tilde{\varphi}_2(\tau)|), \quad k = 3, 4, \end{aligned}$$

где константа c положительная и не зависит от $\varphi_1(t)$ и $\varphi_2(t)$.

Доказательство. Используя функцию Хевисайда $\theta(x)$, функцию $v(\tau, x)$ можно записать в виде

$$v(\tau, x)\theta(x) = v_1(\tau, x)\theta(x) - v_2(\tau, x)\theta(x).$$

Рассмотрим функцию $v_1(\tau, x)\theta(x)$, с учетом формулы преобразования Фурье получаем

$$F[v_1(\tau, x)\theta(x)](\xi) = \left[\frac{b_{21} + b_{22}\lambda_2^+}{(\lambda_1^+ + i\xi)(\lambda_2^+ + i\xi)} + \frac{b_{22}}{(\lambda_2^+ + i\xi)} \right] \cdot \frac{\tilde{\varphi}_1(\tau)}{b_{11}b_{22} - b_{21}b_{12}}.$$

Применяя равенство Парсеваля и неравенство Минковского, приходим к следующему

$$\begin{aligned} \|v_1(\tau, x), L_2(\mathbb{R}_+)\| &= \|F[v_1(\tau, x)\theta(x)](\xi), L_2(\mathbb{R})\| \\ &\leq \left[\left\| \frac{b_{21} + b_{22}\lambda_2^+}{(\lambda_1^+ + i\xi)(\lambda_2^+ + i\xi)}, L_2(\mathbb{R}) \right\| + \left\| \frac{b_{22}}{(\lambda_2^+ + i\xi)}, L_2(\mathbb{R}) \right\| \right] \cdot \frac{|\tilde{\varphi}_1(\tau)|}{|b_{11}b_{22} - b_{21}b_{12}|}. \end{aligned}$$

Используя оценки на λ_2^+ и λ_1^+ из леммы 7, имеем

$$\left| \frac{b_{21} + b_{22}\lambda_2^+}{(\lambda_1^+ + i\xi)(\lambda_2^+ + i\xi)} \right| \leq \frac{C}{\sqrt{1 + \xi^2}}, \quad \left| \frac{b_{22}}{(\lambda_2^+ + i\xi)} \right| \leq \frac{|b_{22}|}{\sqrt{1 + \xi^2}}.$$

Подставляя полученные выражения в рассматриваемую норму и непосредственно вычисляя интегралы, получаем

$$\|v_1(\tau, x), L_2(\mathbb{R}_+)\| \leq c_1 |\tilde{\varphi}_1(\tau)|.$$

Далее перейдем к анализу $D_x^k v_1(\tau, x)$, а именно выражения

$$\frac{b_{21}(e^{-\lambda_1^+ x}(-\lambda_1^+)^k - e^{-\lambda_2^+ x}(-\lambda_2^+)^k) + b_{22}(e^{-\lambda_2^+ x}(-\lambda_2^+)^k \lambda_1^+ - e^{-\lambda_1^+ x}(-\lambda_1^+)^k \lambda_2^+)}{(\lambda_1^+ - \lambda_2^+)(b_{11}b_{22} - b_{21}b_{12})} \tilde{\varphi}_1(\tau). \quad (7)$$

Рассмотрим выражение (7) при $k = 2$. Умножив на функцию Хевисайда $\theta(x)$ и применив

преобразование Фурье, получаем

$$F[D_x^2 v_1(\tau, x)\theta(x)](\xi) = \left[\frac{\lambda_1^+ \lambda_2^+ (b_{22}\lambda_2^+ - b_{21})}{(\lambda_1^+ + i\xi)(\lambda_2^+ + i\xi)} + \frac{b_{21}(\lambda_1^+ + \lambda_2^+)}{\lambda_2^+ + i\xi} - \frac{b_{22}\lambda_1^+ \lambda_2^+}{\lambda_1^+ + i\xi} \right] \cdot \frac{\tilde{\varphi}_1(\tau)}{b_{11}b_{22} - b_{21}b_{12}}.$$

Используя оценки из [леммы 7](#), имеем

$$\left| \frac{\lambda_1^+ \lambda_2^+ (b_{22}\lambda_2^+ - b_{21})}{(\lambda_1^+ + i\xi)(\lambda_2^+ + i\xi)} \right| \leq \frac{C_1 |\tau|}{\sqrt{1 + \xi^2}}, \quad \left| \frac{b_{21}(\lambda_1^+ + \lambda_2^+)}{\lambda_2^+ + i\xi} \right| \leq \frac{C_2 |\tau|}{\sqrt{1 + \xi^2}}.$$

Тогда для $\|D_x^2 v_1(\tau, x), L_2(\mathbb{R}_+)\|$ применяя неравенство Минковского, вычисляя соответствующие интегралы, приходим к неравенству

$$\|D_x^2 v_1(\tau, x), L_2(\mathbb{R}_+)\| \leq c_{12}(\gamma) |\tau| |\tilde{\varphi}_1(\tau)|.$$

Рассмотрим выражение [\(7\)](#) при $k = 4$. Применяя преобразование Фурье, получаем

$$\begin{aligned} F[D_x^4 v_1(\tau, x)\theta(x)](\xi) = & \left[\frac{b_{21}\lambda_1^+ \lambda_2^+ ((\lambda_1^+)^2 + \lambda_1^+ \lambda_2^+ + (\lambda_2^+)^2) - b_{22}((\lambda_1^+)^2 + (\lambda_2^+)^2)(\lambda_1^+ + \lambda_2^+)}{(\lambda_1^+ + i\xi)(\lambda_2^+ + i\xi)} \right. \\ & + \frac{b_{21}((\lambda_1^+)^2 + (\lambda_2^+)^2)(\lambda_1^+ + \lambda_2^+) - b_{22}\lambda_1^+ \lambda_2^+ ((\lambda_1^+)^2 + \lambda_1^+ \lambda_2^+ + (\lambda_2^+)^2)}{(\lambda_1^+ + i\xi)} \\ & \left. + \frac{b_{22}\lambda_1^+ (\lambda_2^+)^2 ((\lambda_1^+)^2 + \lambda_1^+ \lambda_2^+ + (\lambda_2^+)^2) - b_{21}\lambda_2^+ ((\lambda_1^+)^2 + (\lambda_2^+)^2)(\lambda_1^+ + \lambda_2^+)}{(\lambda_1^+ + i\xi)(\lambda_2^+ + i\xi)} \right] \cdot \frac{\tilde{\varphi}_1(\tau)}{b_{11}b_{22} - b_{21}b_{12}}. \end{aligned}$$

С учетом [леммы 7](#) имеют место оценки

$$\begin{aligned} \left| \frac{b_{21}\lambda_1^+ \lambda_2^+ ((\lambda_1^+)^2 + \lambda_1^+ \lambda_2^+ + (\lambda_2^+)^2) - b_{22}((\lambda_1^+)^2 + (\lambda_2^+)^2)(\lambda_1^+ + \lambda_2^+)}{(\lambda_1^+ + i\xi)(\lambda_2^+ + i\xi)} \right| & \leq \frac{C_3 |\tau|^3}{\sqrt{1 + \xi^2}}, \\ \left| \frac{b_{21}((\lambda_1^+)^2 + (\lambda_2^+)^2)(\lambda_1^+ + \lambda_2^+) - b_{22}\lambda_1^+ \lambda_2^+ ((\lambda_1^+)^2 + \lambda_1^+ \lambda_2^+ + (\lambda_2^+)^2)}{(\lambda_1^+ + i\xi)} \right| & \leq \frac{C_3 |\tau|^3}{|\lambda_1^+ + i\xi|}, \\ \left| \frac{b_{22}\lambda_1^+ (\lambda_2^+)^2 ((\lambda_1^+)^2 + \lambda_1^+ \lambda_2^+ + (\lambda_2^+)^2) - b_{21}\lambda_2^+ ((\lambda_1^+)^2 + (\lambda_2^+)^2)(\lambda_1^+ + \lambda_2^+)}{(\lambda_1^+ + i\xi)(\lambda_2^+ + i\xi)} \right| & \leq \frac{C_3 |\tau|^3}{\sqrt{1 + \xi^2}}. \end{aligned}$$

Рассмотрим норму

$$\|D_x^4 v_1(\tau, x), L_2(\mathbb{R}_+)\| = \|F[D_x^4 v_1(\tau, x)\theta(x)](\xi), L_2(\mathbb{R})\|.$$

Применив неравенство Минковского и оценки, указанные выше, и вычисляя соответствующие интегралы, приходим к неравенству

$$\|D_x^4 v_1(\tau, x), L_2(\mathbb{R}_+)\| \leq c_{14}(\gamma) |\tau|^3 |\tilde{\varphi}_1(\tau)|.$$

Повторим рассуждения для $v_2(\tau, x)$. Преобразования Фурье от $v_2(\tau, x)\theta(x)$ имеет вид

$$F[v_2(\tau, x)\theta(x)](\xi) = \left[\frac{b_{11} + b_{12}\lambda_2^+}{(\lambda_1^+ + i\xi)(\lambda_2^+ + i\xi)} + \frac{b_{12}}{\lambda_2^+ + i\xi} \right] \cdot \frac{\tilde{\varphi}_2(\tau)}{b_{11}b_{22} - b_{21}b_{12}}.$$

Применяя равенство Парсеваля и неравенство Минковского, приходим к следующему

$$\begin{aligned} \|v_2(\tau, x), L_2(\mathbb{R}_+)\| &= \|F[v_2(\tau, x)\theta(x)](\xi), L_2(\mathbb{R})\| \\ &\leq \left[\left\| \frac{b_{11} + b_{12}\lambda_2^+}{(\lambda_1^+ + i\xi)(\lambda_2^+ + i\xi)}, L_2(\mathbb{R}) \right\| + \left\| \frac{b_{12}}{\lambda_2^+ + i\xi}, L_2(\mathbb{R}) \right\| \right] \cdot \frac{|\tilde{\varphi}_2(\tau)|}{|b_{11}b_{22} - b_{21}b_{12}|}. \end{aligned}$$

Используя оценки на корень λ_2^+ из леммы 7, получаем

$$\left| \frac{b_{11} + b_{12}\lambda_2^+}{(\lambda_1^+ + i\xi)(\lambda_2^+ + i\xi)} \right| \leq \frac{C}{\sqrt{1 + \xi^2}}, \quad \left| \frac{b_{12}}{\lambda_2^+ + i\xi} \right| \leq \frac{|b_{22}|}{\sqrt{1 + \xi^2}}.$$

Подставляя полученные выражения в рассматриваемую норму и считая интегралы, имеем

$$\|v_2(\tau, x), L_2(\mathbb{R}_+)\| \leq c_2 |\tilde{\varphi}_2(\tau)|.$$

Далее перейдем к $D_x^k v_2(\tau, x)$, а именно

$$\frac{b_{11}(e^{-\lambda_1^+ x}(-\lambda_1^+)^k - e^{-\lambda_2^+ x}(-\lambda_2^+)^k) + b_{12}(e^{-\lambda_2^+ x}(-\lambda_2^+)^k \lambda_1^+ - e^{-\lambda_1^+ x}(-\lambda_1^+)^k \lambda_2^+)}{(\lambda_1^+ - \lambda_2^+)(b_{11}b_{22} - b_{21}b_{12})} \tilde{\varphi}_2(\tau). \quad (8)$$

Умножив на функцию Хевисайда $\theta(x)$ и применив преобразование Фурье к выражению (8) при $k = 2$, получаем

$$F[D_x^2 v_2(\tau, x)\theta(x)](\xi) = \left[\frac{\lambda_1^+ \lambda_2^+ (b_{12}\lambda_2^+ - b_{11})}{(\lambda_1^+ + i\xi)(\lambda_2^+ + i\xi)} + \frac{b_{11}(\lambda_1^+ + \lambda_2^+)}{\lambda_2^+ + i\xi} - \frac{b_{12}\lambda_1^+ \lambda_2^+}{\lambda_1^+ + i\xi} \right] \cdot \frac{\tilde{\varphi}_2(\tau)}{b_{11}b_{22} - b_{21}b_{12}},$$

используя оценки из леммы 7, имеем

$$\left| \frac{\lambda_1^+ \lambda_2^+ (b_{12}\lambda_2^+ - b_{11})}{(\lambda_1^+ + i\xi)(\lambda_2^+ + i\xi)} \right| \leq \frac{C_1 |\tau|}{\sqrt{1 + \xi^2}}, \quad \left| \frac{b_{11}(\lambda_1^+ + \lambda_2^+)}{\lambda_2^+ + i\xi} \right| \leq \frac{C_2 |\tau|}{\sqrt{1 + \xi^2}}.$$

Тогда для $\|D_x^2 v_2(\tau, x), L_2(\mathbb{R}_+)\|$ справедливо

$$\|D_x^2 v_2(\tau, x), L_2(\mathbb{R}_+)\| \leq c_{12}(\gamma) |\tau| |\tilde{\varphi}_2(\tau)|.$$

Рассмотрим выражение (8) при $k = 4$. Применяя преобразование Фурье, получаем

$$F[D_x^4 v_2(\tau, x)\theta(x)](\xi) = \left[\frac{b_{11}\lambda_1^+\lambda_2^+((\lambda_1^+)^2 + \lambda_1^+\lambda_2^+ + (\lambda_2^+)^2) - b_{12}((\lambda_1^+)^2 + (\lambda_2^+)^2)(\lambda_1^+ + \lambda_2^+)}{(\lambda_1^+ + i\xi)(\lambda_2^+ + i\xi)} + \frac{b_{11}((\lambda_1^+)^2 + (\lambda_2^+)^2)(\lambda_1^+ + \lambda_2^+) - b_{12}\lambda_1^+\lambda_2^+((\lambda_1^+)^2 + \lambda_1^+\lambda_2^+ + (\lambda_2^+)^2)}{(\lambda_1^+ + i\xi)} + \frac{b_{12}\lambda_1^+(\lambda_2^+)^2((\lambda_1^+)^2 + \lambda_1^+\lambda_2^+ + (\lambda_2^+)^2) - b_{11}\lambda_2^+((\lambda_1^+)^2 + (\lambda_2^+)^2)(\lambda_1^+ + \lambda_2^+)}{(\lambda_1^+ + i\xi)(\lambda_2^+ + i\xi)} \right] \cdot \frac{\tilde{\varphi}_2(\tau)}{b_{11}b_{22} - b_{21}b_{12}}.$$

Отсюда с учетом леммы 7 имеем оценку

$$\|D_x^4 v_2(\tau, x), L_2(\mathbb{R}_+)\| \leq c_{24}(\gamma)|\tau|^3|\tilde{\varphi}_2(\tau)|.$$

□

Доказательство теоремы 4. Функция $v(\tau, x)$ вида (6) – решение краевой задачи (5), принадлежит пространству $W_2^4(\mathbb{R}_+)$, и для него выполняются оценки из леммы 8. Поскольку константы $c > 0$ не зависят от τ , $\tilde{\varphi}_1(\tau)$ и $\tilde{\varphi}_2(\tau)$, то при $\gamma > \gamma_0 > 0$ справедливо

$$\begin{aligned} \|v(\tau, x), L_2(\mathbb{C}_\gamma^+ \times \mathbb{R}_+)\| &\leq c\|\tilde{\varphi}_1(\tau) + |\tilde{\varphi}_2(\tau)|, L_2(\mathbb{C}_\gamma^+)\|, \\ \|\tau^2 v(\tau, x), L_2(\mathbb{C}_\gamma^+ \times \mathbb{R}_+)\| + \|\tau^2 D_x^2 v(\tau, x), L_2(\mathbb{C}_\gamma^+ \times \mathbb{R}_+)\| \\ + \|D_x^4 v(\tau, x), L_2(\mathbb{C}_\gamma^+ \times \mathbb{R}_+)\| &\leq c\|\tau^3(|\tilde{\varphi}_1(\tau)| + |\tilde{\varphi}_2(\tau)|), L_2(\mathbb{C}_\gamma^+)\|. \end{aligned}$$

Чтобы воспользоваться обобщенной теоремой Пэли–Винера, нужно проверить аналитичность функции $v(\tau, x)$ из (6) в $\mathbb{C}_\gamma^+$ при $x > 0$. Однако, это очевидно, поскольку функции $\varphi_1(t)$ и $\varphi_2(t)$ из $L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+)$, $\gamma > \gamma_0$, поэтому $\tilde{\varphi}_1(\tau)$ и $\tilde{\varphi}_2(\tau)$ аналитические в $\mathbb{C}_\gamma^+$. Принимая во внимание явное выражение (6) и выполнение условия Лопатинского, видим, что функция $v(\tau, x)$ является также аналитической в $\mathbb{C}_\gamma^+$ при $x > 0$.

Применяя обобщенную теорему Пэли–Винера получаем, что функция

$$u(t, x) = \mathfrak{L}_{\tau \rightarrow t}^{-1}(v(\tau, x)),$$

принадлежит пространству $W_{2,\gamma}^{2,4}(\mathbb{R}_{++}^2)$, $\gamma > \gamma_0$, $\gamma_0 > 0$, при этом $D_t^2 D_x^2 u(t, x) \in L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_{++}^2)$. Она является решением задачи (2), и справедлива оценка

$$\|u(t, x), W_{2,\gamma}^{2,4}(\mathbb{R}_{++}^2)\| \leq c(\gamma)(\|\varphi_1(t), W_{2,\gamma}^3(\mathbb{R}_+)\| + \|\varphi_2(t), W_{2,\gamma}^3(\mathbb{R}_+)\|).$$

Таким образом, краевая задача (2) имеет решение. Далее покажем, что оно единственно. Для этого нужно убедиться, что изучаемое уравнение с нулевыми граничными условиями имеет нулевое решение.

Предположим, что $u(t, x)$ из $W_{2,\gamma}^{2,4}(\mathbb{R}_{++}^2)$, $\gamma > \gamma_0 > 0$, является решением задачи (2) при $\varphi_1(t) \equiv 0$ и $\varphi_2(t) \equiv 0$. Следовательно, ее преобразование Лапласа по t представляет

собой решение краевой задачи

$$\begin{aligned} D_x^4 v - (\tau^2 + a^2) D_x^2 v + \tau^2 v &= 0, \quad x > 0, \\ (b_{11} + b_{12} D_x) v|_{x=0} &= 0, \\ (b_{21} + b_{22} D_x) v|_{x=0} &= 0, \end{aligned} \quad (9)$$

принадлежащее $W_2^4(\mathbb{R}_+)$. Тогда по теореме вложения $\sup_{x \geq 0} |v| < \infty$. Но поскольку краевая задача (9) с условием ограниченности решения удовлетворяет условию Лопатинского, то $v(\tau, x) = 0$. Следовательно, $u(t, x) = 0$ почти всюду. $\square$

Пример 9. Рассмотрим смешанную задачу

$$\begin{aligned} (I - D_x^2) D_t^2 u + D_x^4 u &= 0, \quad x > 0, \quad t > 0, \\ u|_{t=0} = 0, \quad D_t u|_{t=0} &= 0, \\ u|_{x=0} = \varphi_1(t), \quad D_x u|_{x=0} &= 0, \end{aligned}$$

будем искать решение в соболевском пространстве с экспоненциальным весом $W_{2,\gamma}^{2,4}(\mathbb{R}_{++}^2)$. Покажем, что если потребовать от $\varphi_1(t)$ меньше условий гладкости, чем указано в теореме, то решение не будет принадлежать указанному классу.

Предположим, что для любой функции $\varphi_1(t)$ из пространства $W_{2,\gamma}^2(\mathbb{R}_+)$, $\gamma > \gamma_0 > 0$ и $\varphi_1(t)|_{t=0} = D_t \varphi_1(t)|_{t=0} = 0$ существует решение задачи. Пусть

$$\varphi_1(t) = \begin{cases} -3t^3 + 4t^2, & t \in [0, 1], \\ e^{-t+1}, & t > 1, \\ 0, & t < 0. \end{cases}$$

Преобразование Лапласа для нее имеет вид

$$\tilde{\varphi}_1(\tau) = \frac{8 + 11e^{-\tau}}{\tau^3 + \tau^2} + \frac{e^{-\tau}(28\tau + 18) - (10\tau + 18)}{\tau^5 + \tau^4}, \quad \tau = \sigma + i\eta.$$

По предположению

$$\|D_t^2 D_x^2 u(t, x), L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_{++}^2)\| \leq \|u(t, x), W_{2,\gamma}^{2,4}(\mathbb{R}_{++}^2)\| \leq c < \infty.$$

Обозначим через $v(\tau, x)$, $\tau = \sigma + i\eta$ – преобразование Лапласа функции $u(t, x)$ по переменной t . Обратимся к $\tau^2 D_x^2 v(x, \tau) \in L_2(\mathbb{C}_\gamma^+ \times \mathbb{R}_+)$

$$\begin{aligned} \tau^2 D_x^2 v(x, \tau) &= \left[\frac{8 + 11e^{-\tau}}{\tau^3 + \tau^2} + \frac{e^{-\tau}(28\tau + 18) - (10\tau + 18)}{\tau^5 + \tau^4} \right] \cdot F^{-1} \left[\frac{\tau^2 \lambda_1 \lambda_2 i \xi}{(\lambda_1 + i \xi)(\lambda_2 + i \xi)} \right] (x) \\ &= [k_1(\tau) + k_2(\tau)] [w(x, \tau)], \end{aligned}$$

здесь F^{-1} – обратное преобразование Фурье. Таким образом

$$\|\tau^2 D_x^2 v(\tau, x) - k_2(\tau)w(x, \tau), L_2(\mathbb{C}_\gamma^+ \times \mathbb{R}_+)\| = \|k_1(\tau)w(x, \tau), L_2(\mathbb{C}_\gamma^+ \times \mathbb{R}_+)\| < \infty.$$

Рассмотрим подробнее правую часть равенства. С учетом [леммы 7](#) и [леммы 6](#) имеем

$$\begin{aligned} & \left(\sup_{\sigma > \gamma} \iint_{\mathbb{R}^2} \left| \frac{8 + 11e^{-\tau}}{(\tau + 1)} \cdot \frac{\lambda_1 \lambda_2 i \xi}{(\lambda_1 + i\xi)(\lambda_2 + i\xi)} \right|^2 d\xi d\eta \right)^{1/2} \\ & \geq \left(\sup_{\sigma > \gamma} \iint_{\mathbb{R}^2} \left| \frac{c_1}{(\tau + 1)} \cdot \frac{\tau \xi}{(\lambda_1 + i\xi)(\lambda_2 + i\xi)} \right|^2 d\xi d\eta \right)^{1/2} \\ & = \left(\sup_{\sigma > \gamma} \iint_{\mathbb{R}^2 \setminus B_1(0)} \left| \frac{c_1}{(\tau + 1)} \cdot \frac{\tau \xi}{(\lambda_1 + i\xi)(\lambda_2 + i\xi)} \right|^2 d\xi d\eta \right. \\ & \quad \left. + \sup_{\sigma > \gamma} \iint_{B_1(0)} \left| \frac{c_1}{(\tau + 1)} \cdot \frac{\tau \xi}{(\lambda_1 + i\xi)(\lambda_2 + i\xi)} \right|^2 d\xi d\eta \right)^{1/2}, \end{aligned}$$

здесь $B_1(0)$ – шар в $\mathbb{R}^2$ с радиусом 1. Тогда интеграл по компактному множеству сходится, так как подынтегральное выражение не имеет особенностей. Остается

$$\left(\sup_{\sigma > \gamma} \iint_{\mathbb{R}^2 \setminus B_1(0)} \left| \frac{c_1}{(\tau + 1)} \cdot \frac{\tau \xi}{(\lambda_1 + i\xi)(\lambda_2 + i\xi)} \right|^2 d\xi d\eta \right)^{1/2} \geq C \left(\sup_{\sigma > \gamma} \iint_{\mathbb{R}^2 \setminus B_1(0)} \frac{1}{|\lambda_1 + i\xi|^2} d\xi d\eta \right)^{1/2}.$$

Учитывая оценку $|\lambda_1 + i\xi|^2 \leq \sigma^2 + \eta^2 + \xi^2$, применим полярную замену. Тогда

$$\sup_{\sigma > \gamma} \int_0^{2\pi} \int_1^{+\infty} \frac{r dr dy}{\sigma^2 + r^2} \geq \pi \lim_{l \rightarrow \infty} (\ln(\gamma^2 + l^2)) - \ln(\gamma^2 + 1) = +\infty.$$

Следовательно

$$\infty \leq \|\tau^2 D_x^2 v(\tau, x) - k_2(\tau)w(x, \tau), L_2(\mathbb{C}_\gamma^+ \times \mathbb{R})\| = \|k_1(\tau)w(x, \tau), L_2(\mathbb{C}_\gamma^+ \times \mathbb{R})\| < \infty,$$

противоречие. Отсюда $\varphi_1(t) \in W_{2,\gamma}^3(\mathbb{R}_+)$. Подобный пример можно построить и для функции $\varphi_2(t)$, который будет показывать, что если уменьшить требование на существование производных, то решение не будет принадлежать пространству $W_{2,\gamma}^{2,4}(\mathbb{R}_{++}^2)$.

Сформулируем утверждение для краевой задачи

$$\begin{aligned}(I - D_x^2)D_t^2 u + D_x^4 u - a^2 D_x^2 u &= f(t, x), \quad x > 0, \quad t > 0, \\ u|_{t=0} &= 0, \quad D_t u|_{t=0} = 0, \\ (b_{11} + b_{12} D_x)u|_{x=0} &= \varphi_1(t), \\ (b_{21} + b_{22} D_x)u|_{x=0} &= \varphi_2(t),\end{aligned}\tag{10}$$

которое является следствием доказанной выше теоремы и результата, опубликованного в работе [11].

Теорема 10. Пусть выполнено условие Лопатинского для краевой задачи (10) и существует $\gamma_0 > 0$ такое, что для любых

$$\begin{aligned}f(t, x) &\in W_{2,\gamma}^{1,0}(\mathbb{R}_{++}^2), \quad \gamma > \gamma_0, \quad f(t, x)|_{t=0} = 0, \\ \varphi_1(t) &\in W_{2,\gamma}^3(\mathbb{R}_+), \quad \gamma > \gamma_0, \quad \varphi_1(t)|_{t=0} = D_t \varphi_1(t)|_{t=0} = D_t^2 \varphi_1(t)|_{t=0} = 0, \\ \varphi_2(t) &\in W_{2,\gamma}^3(\mathbb{R}_+), \quad \gamma > \gamma_0, \quad \varphi_2(t)|_{t=0} = D_t \varphi_2(t)|_{t=0} = D_t^2 \varphi_2(t)|_{t=0} = 0.\end{aligned}$$

Тогда краевая задача (2) однозначно разрешима в классе функций из соболевского пространства $W_{2,\gamma}^{2,4}(\mathbb{R}_{++}^2)$ таких, что $D_t^2 D_x^2 u \in L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_{++}^2)$ и $\gamma > \gamma_0$, для решения $u(t, x)$ имеет место оценка

$$\|u(t, x), W_{2,\gamma}^{2,4}(\mathbb{R}_{++}^2)\| \leq c(\gamma_0) (\|f(t, x), W_{2,\gamma}^{1,0}(\mathbb{R}_{++}^2)\| + \|\varphi_1(t), W_{2,\gamma}^3(\mathbb{R}_+)\| + \|\varphi_2(t), W_{2,\gamma}^3(\mathbb{R}_+)\|),$$

где константа $c(\gamma_0)$ не зависит от функций $f(t, x)$, $\varphi_1(t)$ и $\varphi_2(t)$.

Автор выражает глубокую благодарность д.ф.-м.н. Г.В. Демиденко и к.ф.-м.н. Л.Н. Бондарь за внимание к работе и ценные советы.

Список литературы

- [1] В.З. Власов, *Тонкостенные упругие стержни*, Стройиздат, Москва–Ленинград, 1940.
- [2] С.И. Герасимов, В.И. Ерофеев, *Задачи волновой динамики элементов конструкций*, ФГУП “РФЯЦ-ВНИИЭФ”, Саров, 2014.
- [3] J.S. Rao, *Advanced theory of vibration*, Wiley Eastern, New Delhi, 1992.
- [4] R.E.D. Bishop, *Longitudinal waves in beams*, *Aeronautical Quarterly* **3** (4), 280–293 (1952). DOI: <https://doi.org/10.1017/S0001925900000706>
- [5] С.Л. Соболев, *Избранные труды. Т.1. Уравнения математической физики. Вычислительная математика и кубатурные формулы (ред. Г.В. Демиденко, В.Л. Васкевич)*, Изд-во Ин-та математики, Филиал “Гео” Изд-ва СО РАН, Новосибирск, 2003.

- [6] Г.В. Демиденко, С.В. Успенский, *Уравнения и системы, не разрешенные относительно старшей производной*, Научн. кн., Новосибирск, 1998.
- [7] Х.Г. Умаров, *Разрушение и глобальная разрешимость задачи Коши для псевдогиперболического уравнения, связанного с обобщенным уравнением Буссинеска*, Сиб. матем. журн. **63** (3), 672–689 (2022).
DOI: <https://doi.org/10.33048/smzh.2022.63.315>
- [8] Л.Н. Бондарь, Г.В. Демиденко, *Краевые задачи для одного псевдогиперболического уравнения в четверти плоскости*, Матем. труды **24** (2), 3–23 (2021).
DOI: <https://doi.org/10.33048/mattrudy.2021.24.201>
- [9] Л.Н. Бондарь, В.В. Шеметова, *О краевых задачах в четверти плоскости для одного псевдогиперболического уравнения*, Матем. труды **25** (2), 3–30 (2022).
DOI: <https://doi.org/10.33048/mattrudy.2022.25.201>
- [10] Л.Н. Бондарь, Г.В. Демиденко, В.С. Нурмахматов, *Краевая задача в цилиндре для одного псевдогиперболического уравнения*, Челяб. физ.-матем. журн. **8** (4), 469–482 (2023).
DOI: <https://doi.org/10.47475/2500-0101-2023-8-4-469-482>
- [11] Г.В. Демиденко, А.А. Кудрявцев, *Краевые задачи в четверти плоскости для уравнения Рэлея–Бишопа*, Матем. заметки СВФУ **28** (3), 5–18 (2021).
DOI: <https://doi.org/10.25587/SVFU.2021.81.22.001>
- [12] О.В. Бесов, В.П. Ильин, С.М. Никольский, *Интегральные представления функций и теоремы вложения*, Наука, М., 1975.
- [13] С.В. Успенский, Г.В. Демиденко, В.Г. Перепелкин, *Теоремы вложения и приложения к дифференциальным уравнениям*, Наука, Новосибирск, 1984.
- [14] Г.В. Демиденко, *Пространства Соболева и обобщенные решения: учеб. пособие*, РИЦ НГУ, Новосибирск, 2015.

Валентина Владимировна Шеметова

Новосибирский государственный университет,
ул. Пирогова, д. 1, г. Новосибирск, 630090, Россия,
e-mail: valentina501@mail.ru

An initial-boundary value problem for a pseudohyperbolic equation with nonzero boundary conditions

V.V. Shemetova

Abstract. An initial-boundary value problem in a quarter-plane for one pseudohyperbolic equation is considered. We establish conditions for boundary functions under which the initial-boundary value problem is uniquely solvable in Sobolev spaces with an exponential weight.

Keywords: pseudohyperbolic equation, Lopatinskii condition, Sobolev space.

DOI: 10.26907/2949-3919.2024.2.107-121

References

- [1] V.Z. Vlasov, *Thin-walled elastic beams*, National Science Foundation, Washington, D.C., 1961.
- [2] S.I. Gerasimov, V.I. Erofeev, *Problems of wave dynamics of structural elements*, RFNC-VNIIEF, Sarov, 2014 [in Russian].
- [3] J.S. Rao, *Advanced theory of vibration*, Wiley Eastern, New Delhi, 1992.
- [4] R.E.D. Bishop, *Longitudinal waves in beams*, *Aeronautical Quarterly* **3** (4), 280–293 (1952).
DOI: <https://doi.org/10.1017/S0001925900000706>
- [5] S.L. Sobolev, *Selected works, vol. I: Equations of mathematical physics, computational mathematics, and cubature formulas (eds G.V. Demidenko and V.L. Vaskevich)*, Springer, New York, 2006.
DOI: <https://doi.org/10.1007/978-0-387-34149-1>
- [6] G.V. Demidenko, S.V. Uspenskii, *Partial differential equations and systems not solvable with respect to the highest-order derivative*, Marcel Dekker Inc., New York, 2003.
DOI: <https://doi.org/10.1201/9780203911433>
- [7] K.G. Umarov, *Blow-up and global solvability of the Cauchy problem for a pseudohyperbolic equation related to the generalized Boussinesq equation*, *Sib. Math. J.* **63** (3), 559–574 (2022).
DOI: <https://doi.org/10.1134/S0037446622030156>

Acknowledgements. The research is supported by the Russian Science Foundation (grant no.24-21-00370), <https://rscf.ru/project/24-21-00370>.

Received: 31 January 2024. Accepted: 04 June 2024. Published: 16 July 2024.

- [8] L.N. Bondar, G.V. Demidenko, *Boundary value problems for one pseudohyperbolic equation in a quarter-plane*, Sib. Adv. Math. **32** (1), 13–28 (2022).
DOI: <https://doi.org/10.1134/S1055134422010023>
- [9] L.N. Bondar, V.V. Shemetova, *On boundary value problems in a quarter-plane for a pseudohyperbolic equation*, Sib. Adv. Math. **33** (2), 87–106 (2023).
DOI: <https://doi.org/10.1134/S1055134423020013>
- [10] L.N. Bondar, G.V. Demidenko, V.S. Nurmakhmatov *Boundary value problem in a cylinder for a pseudohyperbolic equation*, Chelyab. Phys. Math. J. **8** (4), 469–482 (2023) [in Russian].
DOI: <https://doi.org/10.47475/2500-0101-2023-8-4-469-482>
- [11] G.V. Demidenko, A.A. Kudryavtsev, *Boundary value problems for the Rayleigh–Bishop equation in a quarter plane*, Mathematical notes of NEFU **28** (3), 5–18 (2021) [in Russian].
DOI: <https://doi.org/10.25587/SVFU.2021.81.22.001>
- [12] O.V. Besov, V.P. Il'in, S.M. Nikol'skii, *Integral representations of functions and embedding theorems, vol. I, II*, John Wiley & Sons, New York-Toronto-London, 1978, 1979.
- [13] S.V. Uspenskii, G.V. Demidenko, V.G. Perepelkin, *Embedding theorems and applications to differential equations*, Nauka, Novosibirsk, 1984 [in Russian].
- [14] G.V. Demidenko, *Sobolev spaces and generalized solutions*, Izdat. Novosib. Gos. Univ., Novosibirsk, 2015 [in Russian].

Valentina Vladimirovna Shemetova

Novosibirsk State University,
1 Pirogov str., Novosibirsk 630090, Russia,
e-mail: valentina501@mail.ru