Том 2, Выпуск 3
Стр. 4–28 (2024)

УДК 512.55
MSC 18G05

Мало квазипроективные модули

А.Н. Абызов, Т.Д. Буй

Аннотация. Исследованы мало квазипроективные модули и близкие к ним классы модулей. Понятие мало квазипроективного модуля двойственно к понятию существенно квазиинъективного модуля, которое в последнее время было изучено в ряде работ. Показано, что над совершенными справа кольцами класс мало квазипроективных правых модулей совпадает с рядом классов правых модулей, близких к проективным, исследованных в статье. В качестве следствия полученных результатов приведена хорошо известная теорема А.А. Туганбаева о совпадении классов квазипроективных правых модулей и эндоморфизм-поднимаемых правых модулей над совершенными справа кольцами. Также получены характеризации модулей M, для которых в категории $\sigma[M]$ каждый (конечнопорожденный, циклический, полупростой, простой) модуль является малопроективным в $\sigma[M]$.

Ключевые слова: существенно инъективные модули, мало проективные модули, мало эндоморфизм поднимаемые модули, совершенные кольца.

DOI: 10.26907/2949-3919.2024.3.4-28

Введение

В последние десятилетия были систематически изучены модули инвариантные относительно специальных эндоморфизмов своих инъективных оболочек и их двойственные аналоги. Модули инвариантные относительно всех эндоморфизмов своих инъективных оболочек под названием квазиинъективных модулей впервые были введены и исследованы в работе [1]. С квазиинъективными модулями тесно связаны эндоморфизм-продолжаемые модули. Модуль M называется эндоморфизм-продолжаемым, если для любого подмодуля X модуля M каждый эндоморфизм модуля X продолжается до эндоморфизма модуля M. В [2, предложение 10.22] было доказано, что каждый эндоморфизм продолжаемый полуартиновый модуль является квазиинъективным. Двойственным аналогом квазиинъективных модулей являются квазипроективные модули, с которыми тесно связаны эндоморфизм-поднимаемые модули. Модуль M называется эндоморфизм-поднимаемым, если эндоморфизм каждого фактор-модуля модуля M поднимается до эндоморфизма M.

Благодарности. Работа А.Н. Абызова поддержана грантом Российского научного фонда и Кабинета министров Республики Татарстан (проект № 23-21-10086).

Поступила: 07.05.2024. Принята: 10.08.2024. Опубликована: 17.10.2024.

В 1979 году в работе А.А. Туганбаева [3] было показано, что над совершенным справа кольцом R правый R-модуль M является квазипроективным в точности тогда, когда M – эндоморфизм-поднимаемый модуль.

Важным обобщением квазиинъективных модулей являются автоморфизм-инвариантные модули, т. е. модули инвариантные относительно автоморфизмов своих инъективных оболочек. Автоморфизм-инвариантные модули были введены в [4] и в последнее время были изучены во многих работах. Двойственным аналогом автоморфизм-инвариантных модулей являются автоморфизм-коинвариантные модули, введенные и исследованные в работе [5]. С автоморфизм-коинвариантными модулями тесно связаны автоморфизм-поднимаемые модули, которые впервые были изучены в работе [6] и являются естественным расширением класса эндоморфизм-поднимаемых модулей.

Модуль M называется существенно квазиинъективным, если M инвариантен относительно всех эндоморфизмов своей инъективной оболочки, у которых ядра существенны. Примерами существенно квазиинъективных модулей являются автоморфизм-инвариантные модули. Существенно квазиинъективные модули были изучены в работах [7, 8]. В работе [8] были введены существенно эндоморфизм-продолжаемые модули. Модуль M называется существенно эндоморфизм-продолжаемым, если для любого подмодуля X модуля M каждый эндоморфизм X с существенным ядром продолжается до эндоморфизма модуля M. В [8] было показано, что над такими классами колец, как нетеровы кольца и полуартиновы кольца, классы существенно квазиинъективных модулей и существенно эндоморфизм-продолжаемых модулей совпадают.

Двойственным аналогом к понятию существенно квазиинъективного модуля является понятие мало квазипроективного модуля. В нашей работе исследуются мало квазиинъективные модули и близкие к ним классы модулей. В первом параграфе изучаются мало проективные модули и приводятся характеризации модулей M, для которых в категории $\sigma[M]$ каждый (конечнопорожденный, циклический, полупростой, простой) модуль является малопроективным в $\sigma[M]$. Второй параграф посвящен мало квазипроективным модулям и близким к ним классам модулей. В третьем параграфе вводится и изучается понятие мало эндоморфизм поднимаемого модуля. Доказывается основной результат статьи, согласно которому над совершенным справа кольцом совпадают следующие классы правых модулей: мало квазипроективные модули, мало квазипроективные модули$^{\#}$, мало эндоморфизм-поднимаемые модули, мало эндоморфизм-поднимаемые$^{\#}$ модули (теорема 42). В качестве следствия полученных в работе результатов приведен расширенный вариант упомянутого выше утверждения А.А. Туганбаева, согласно которому над совершенным справа кольцом совпадают следующие классы правых модулей: квазипроективные модули, эндоморфизм-поднимаемые модули, квазипроективные$^{\#}$ модули, эндоморфизм-поднимаемые$^{\#}$ модули, сильно эндоморфизм-поднимаемые модули, сильно эндоморфизм-поднимаемые$^{\#}$ модули (теорема 43).

Пусть M – правый R-модуль и A – подмодуль модуля M. Через $\sigma_M^A : M \to M/A$ будем обозначать естественный гомоморфизм. Тот факт, что N является подмодулем (соответственно, существенным подмодулем, малым подмодулем) модуля M будем обозначать через $N \leq M$ (соответственно, через $N \leq_e M$, $N \ll M$). Инъективная оболочка модуля M обозначается $E(M)$. В работе используются стандартные понятия и факты теории модулей и теории абелевых групп (см., например, [9–11]).

1. Мало проективные модули

Определение 1. Пусть M, N – правые R-модули. Модуль N называется *мало M-проективным* (соответственно, *мало M-проективным$^{\#}$*), если для любого подмодуля (соответственно, малого подмодуля) A модуля M каждый гомоморфизм $f : N \to M/A$, у которого $\operatorname{Im} f \ll M/A$, можно поднять до гомоморфизма $f' : N \to M$. Если модуль M мало проективен (соответственно, мало проективен$^{\#}$) относительного каждого правого R-модуля, то такой модуль M называется *мало проективным* (соответственно, *мало проективным$^{\#}$*).

Замечание 2. Понятие мало M-проективного (соответственно, мало M-проективного$^{\#}$) модуля под названием Im-мало M-проективеного (соответственно, мало Im-мало M-проективного) модуля введены в [12, 4.33]. Отметим, что термин "мало проективный модуль" в литературе встречается в разных значениях. Например, в работе [3] под малым проективным модулем подразумевается эндоморфизм-поднимаемый модуль, а в монографии [12] M-проективный$^{\#}$ модуль называется мало M-проективным.

При доказательстве следующего утверждения используется способ рассуждения из доказательства теоремы 3.10 работы [7].

Теорема 3. *Пусть M и N – правые R-модули, а $\alpha_M : P_M \to M$ и $\alpha_N : P_N \to N$ – проективные накрытия. Следующие условия эквивалентны*:

1) *модуль N является мало M-проективным$^{\#}$*;
2) *для любого гомоморфизма $f : P_N \to P_M$, у которого $f(P_N) \ll P_M$, выполнено условие $f(\operatorname{Ker} \alpha_N) \leq \operatorname{Ker} \alpha_M$.*

Доказательство. 1) $\Rightarrow$ 2) Предположим, что имеет место гомоморфизм $f : P_N \to P_M$ правых R-модулей, для которого $\operatorname{Im} f \ll P_M$. Пусть $K = \operatorname{Ker} \alpha_M + f(\operatorname{Ker} \alpha_N)$. Ясно, что $K \ll P_M$. Без ограничения общности можем предположить, что $M = P_M / \operatorname{Ker} \alpha_M$. Пусть $\sigma : P_M / \operatorname{Ker} \alpha_M \to P_M/K$ – естественная проекция, тогда $\operatorname{Ker} \sigma = K / \operatorname{Ker} \alpha_M \ll M$.

Поскольку $\sigma \circ \alpha_M \circ f(\operatorname{Ker} \alpha_N) = 0$, существует гомоморфизм $g : N \to P_M/K$ такой, что $\sigma \circ \alpha_M \circ f = g \circ \alpha_N$. Так как модуль N мало M-проективен$^{\#}$, то существует гомоморфизм $g' : N \to M$ такой, что $\sigma \circ g' = g$. Поскольку P_N – проективный модуль, существует гомоморфизм $f' : P_N \to P_M$ такой, что $\alpha_M \circ f' = g' \circ \alpha_N$. Таким образом,

$$\sigma \circ \alpha_M \circ f = g \circ \alpha_N = \sigma \circ g' \circ \alpha_N = \sigma \circ \alpha_M \circ f'.$$

Тогда $(f - f')(P_N) \leq K$. Для любого $p \in P_N$ существуют $p_1 \in \operatorname{Ker} \alpha_M$ и $p_2 \in \operatorname{Ker} \alpha_N$ такие, что $(f - f')(p) = p_1 + f(p_2)$. Тогда $(f - f')(p - p_2) = f'(p_2) + p_1 \in \operatorname{Ker} \alpha_M$. Следовательно,

$\alpha_M \circ (f - f')(p - p_2) = 0$ и $\operatorname{Ker}(\alpha_M \circ (f - f')) + \operatorname{Ker}\alpha_N = P_N$. Так как $\operatorname{Ker}\alpha_N \ll P_N$, то $\operatorname{Ker}(\alpha_M \circ (f - f')) = P_N$. Тогда $(f - f')(P_N) \leq \operatorname{Ker}\alpha_M$. Поскольку $f'(\operatorname{Ker}\alpha_N) \leq \operatorname{Ker}\alpha_M$, имеем

$$f(\operatorname{Ker}\alpha_N) \leq (f - f')(\operatorname{Ker}\alpha_N) + f'(\operatorname{Ker}\alpha_N) \leq \operatorname{Ker}\alpha_M.$$

2) $\Rightarrow$ 1) Пусть $A \ll M$ и $f : N \to M/A$ – гомоморфизм, у которого $\operatorname{Im} f \ll M/A$. Так как P_N – проективный модуль, то найдется гомоморфизм $g : P_N \to P_M$ такой, что $f \circ \alpha_N = \sigma_M^A \circ \alpha_M \circ g$. Поскольку $\operatorname{Im} f \ll M/A$, то $\operatorname{Im} g \ll P_M$. Согласно п. 2), получаем $g(\operatorname{Ker}\alpha_N) \leq \operatorname{Ker}\alpha_M$. Следовательно, найдется гомоморфизм $f' : N \to M$ такой, что $f' \circ \alpha_N = \alpha_M \circ g$. Таким образом, $\sigma_M^A \circ f' \circ \alpha_N = \sigma_M^A \circ \alpha_M \circ g = f \circ \alpha_N$ и, следовательно, $\sigma_M^A \circ f' = f$. □

Из предыдущей теоремы и [7, теорема 3.10] вытекает

Следствие 4. *Если R – совершенное справа кольцо и M – правый R-модуль, то следующие утверждения эквивалентны*:

1) *модуль N является мало M-проективным*;
2) *модуль N является мало M-проективным$^{\#}$*;
3) *для любого гомоморфизма $f : P_N \to P_M$, у которого $f(P_N) \ll P_M$, выполнено условие $f(\operatorname{Ker}\alpha_N) \leq \operatorname{Ker}\alpha_M$.*

Модуль M называется *слабо дополняемым*, если для каждого его подмодуля A существует такой подмодуль B модуля M, что $A + B = M$ и $A \cap B \ll M$.

Теорема 5 ([12, 17.14])**.** *Пусть M и L – правые R-модули. Если M является слабо дополняемым модулем, то имеют место утверждения*:

1) *модуль L M-проективен в точности тогда, когда L – M-проективен$^{\#}$*;
2) *модуль L мало M-проективен в точности тогда, когда L – мало M-проективен$^{\#}$.*

Следствие 6. *Пусть R – совершенное справа кольцо. Тогда модуль M является мало проективным в точности тогда, когда M является мало проективным$^{\#}$ модулем.*

Следующее утверждение доказывается с помощью стандартных рассуждений.

Лемма 7. *Пусть M – правый R-модуль и $\{L_i\}_{i\in I}$ – семейство правых R-модулей. Тогда*

1) *прямая сумма $\oplus_{i\in I} L_i$ является мало M-проективной в точности тогда, когда модуль L_i мало M-проективен для любого $i \in I$*;
2) *прямая сумма $\oplus_{i\in I} L_i$ является мало M-проективной$^{\#}$ в точности тогда, когда модуль L_i мало M-проективен$^{\#}$ для любого $i \in I$.*

Следствие 8. *Пусть $\{L_i\}_{i\in I}$ – семейство правых R-модулей. Тогда*

1) *прямая сумма $\oplus_{i\in I} L_i$ является мало проективной в точности тогда, когда L_i мало проективен для любого $i \in I$*;
2) *прямая сумма $\oplus_{i\in I} L_i$ является мало проективной$^{\#}$ в точности тогда, когда L_i мало проективен$^{\#}$ для любого $i \in I$.*

Правый R-модуль M называется *V-модулем*, если каждый собственный подмодуль модуля M является пересечением его максимальных подмодулей. Если R_R (соответственно, ${}_RR$) – V-модуль, то кольцо R называется *правым V-кольцом* (соответственно, *левым V-кольцом*).

Модуль, изоморфный подмодулю гомоморфного образа прямых сумм копий правого R-модуля M, называется M-подпорожденным модулем. Полная подкатегория категории всех правых R-модулей, состоящая из всех M-подпорожденных модулей, обозначается через $\sigma[M]$.

Модуль из категории $\sigma[M]$, существенно инъективный относительно любого модуля из $\sigma[M]$, называется *существенно инъективным в* $\sigma[M]$. Модуль из категории $\sigma[M]$, мало проективный относительно любого модуля из $\sigma[M]$, называется *мало проективным в* $\sigma[M]$. Модуль N называется *M-сингулярным*, если $N \cong A/B$ для некоторого правого R-модуля A в $\sigma[M]$ и $B \leq_e A$.

Теорема 9. *Следующие условия эквивалентны для правого R-модуля M:*

1) *$M/\operatorname{Soc}(M)$ является V-модулем;*
2) *для каждого модуля N из категории $\sigma[M]$ фактор-модуль $N/\operatorname{Soc}(N)$ является V-модулем;*
3) *каждый M-сингулярный модуль является V-модулем;*
4) *каждый M-сингулярный модуль является полупримитивным;*
5) *$J(M/A) = 0$ для каждого существенного подмодуля A модуля M;*
6) *каждый конечно-копорожденный M-сингулярный модуль является полупростым модулем;*
7) *для каждого существенного подмодуля A модуля M, для которого M/A конечно-копорожден, фактор-модуль M/A является полупростым;*
8) *каждый простой правый R-модуль из $\sigma[M]$ является существенно инъективным в категории $\sigma[M]$;*
9) *каждый правый R-модуль из $\sigma[M]$ является мало проективным в $\sigma[M]$;*
10) *каждый циклический (конечно порожденный, конечно копорожденный, полупростой) модуль из $\sigma[M]$ является мало проективным в $\sigma[M]$;*
11) *каждый простой модуль из $\sigma[M]$ является мало проективным в $\sigma[M]$.*

Доказательство. Импликации 3) $\Rightarrow$ 4), 4) $\Rightarrow$ 5), 6) $\Rightarrow$ 7), 9) $\Rightarrow$ 10) и 10) $\Rightarrow$ 11) очевидны.

1) $\Rightarrow$ 2) Пусть $N \in \sigma[M]$. Тогда для некоторого множества индексов I модуль $\oplus_{i\in I} M_i$, где $M_i \cong M$ для каждого $i \in I$, обладает такими подмодулями A и B, что $B \leq A$ и $N \cong A/B$. Пусть $f : A \to A/B$ – естественный гомоморфизм. Этот гомоморфизм индуцирует эпиморфизм $f' : A/\operatorname{Soc}(A) \to (A/B)/(\operatorname{Soc}(A/B))$. Так как $\operatorname{Soc}(A) = \operatorname{Soc}(\oplus_{i\in I} M_i) \cap A$, то

$$A/\operatorname{Soc}(A) \cong (A+\operatorname{Soc}(\oplus_{i\in I} M_i))/\operatorname{Soc}(\oplus_{i\in I} M_i) \leq (\oplus_{i\in I} M_i)/\operatorname{Soc}(\oplus_{i\in I} M_i) \cong \oplus_{i\in I}(M_i/\operatorname{Soc}(M_i)).$$

Тогда согласно [10, 23.4] $A/\operatorname{Soc}(A)$ является V-модулем и, следовательно, модуль $N/\operatorname{Soc}(N)$ также является V-модулем.

2) $\Rightarrow$ 3) Предположим, что $N \cong A/B$ где $B \leq_e A \in \sigma[M]$. Тогда $\operatorname{Soc}(A) \leq B$. Поскольку $A/\operatorname{Soc}(A)$ является V-модулем, A/B – V-модуль.

4) $\Rightarrow$ 6) Следует из того факта, что всякий конечно-копорожденный полупримитивный модуль является полупростым.

5) $\Rightarrow$ 7) Доказательство аналогично импликации 4) $\Rightarrow$ 6).

7) $\Rightarrow$ 8) Пусть $A \leq_e M$, S – простой модуль и $f : A \to S$ – гомоморфизм, у которого $\operatorname{Ker} f \leq_e A$. Рассмотрим инъективную оболочку $E_M(S)$ модуля S в $\sigma[M]$. Тогда для некоторого гомоморфизма $g : M \to E_M(S)$ следующая диаграмма коммутативна

$$\begin{array}{ccccc} 0 & \longrightarrow & A & \xrightarrow{i} & M \\ & & \downarrow{\scriptstyle f} & & \downarrow{\scriptstyle g} \\ 0 & \longrightarrow & S & \xrightarrow{i'} & E_M(S), \end{array}$$

где i, i' – вложения. Поскольку $\operatorname{Ker} f \leq \operatorname{Ker} g$, имеем $\operatorname{Ker} g \leq_e M$. Так как $\operatorname{Im} g \leq E_M(S)$, то $\operatorname{Im} g$ – конечно-копорожденный модуль. Согласно пункту 7), $\operatorname{Im} g$ – полупростой модуль, и, следовательно, $\operatorname{Im} g = S$. Таким образом, модуль S существенно M-инъективен.

8) $\Rightarrow$ 1) Пусть $A/\operatorname{Soc}(M) \leq M/\operatorname{Soc}(M)$, S – простой правый R-модуль и задан гомоморфизм правых R-модулей $f : A/\operatorname{Soc}(M) \to S$. Рассмотрим естественные гомоморфизмы $\pi : A \to A/\operatorname{Soc}(M)$, $\pi' : M \to M/\operatorname{Soc}(M)$ и естественные вложения $\iota_1 : A \to M$, $\iota_2 : A/\operatorname{Soc}(M) \to M/\operatorname{Soc}(M)$. Покажем, что $\operatorname{Ker}(f \circ \pi) \leq_e A$. Если $aR \cap \operatorname{Ker}(f \circ \pi) = 0$ для некоторого ненулевого элемента $a \in A$, то $f(aR) = S$ и, следовательно, $aR \cong S$. Получили противоречие с тем фактом, что $\operatorname{Soc}(M) \leq \operatorname{Ker}(f \circ \pi)$. Таким образом, $\operatorname{Ker}(f \circ \pi) \leq_e A$ и из существенной M-инъективности модуля S следует, что для некоторого гомоморфизма $g : M \to S$ имеет место равенство $f \circ \pi = g \circ \iota_1$. Так как $g(\operatorname{Soc}(M)) = 0$, то для некоторого гомоморфизма $f' : M/\operatorname{Soc}(M) \to S$ имеем $f' \circ \pi' = g$. Тогда

$$f \circ \pi = g \circ \iota_1 = f' \circ \pi' \circ \iota_1 = f' \circ \iota_2 \circ \pi.$$

Следовательно, $f = f' \circ \iota_2$.

2) $\Rightarrow$ 9) Пусть $f : N \to N_1$ – эпиморфизм и $g : K \to N_1$ – гомоморфизм правых R-модулей такой, что $\operatorname{Im} g \ll N_1$, где N – модуль из $\sigma[M]$. Поскольку $J(N_1/\operatorname{Soc}(N_1)) = 0$, имеем $J(N_1) \leq \operatorname{Soc}(N_1)$. Следовательно, $\operatorname{Im} g$ является полупростым модулем. Гомоморфизм f индуцирует эпиморфизм $f' : N/\operatorname{Soc}(N) \to N_1/f(\operatorname{Soc}(N))$. Так как $N/\operatorname{Soc}(N)$ – V-модуль, то $N_1/f(\operatorname{Soc}(N))$ также является V-модулем. Поскольку $\operatorname{Im} g \ll N_1$, то $\operatorname{Im} g \leq f(\operatorname{Soc}(N))$. Таким образом, существует гомоморфизм $h : K \to N$ такой, что $f \circ h = g$.

11) $\Rightarrow$ 1) Пусть модуль M удовлетворяет условию п. 11). Предположим, что $M/\operatorname{Soc}(M)$ не является V-модулем. Тогда существует подмодуль $L \leq M$, содержащий $\operatorname{Soc}(M)$ такой, что M/L – однородный не простой модуль, у которого цоколь является простым модулем. Пусть $S = \operatorname{Soc}(M/L)$ и $g : S \to M/L$ – вложение. Так как $\operatorname{Im} g \ll M/L$, то

существует гомоморфизм $f : S \to M$ такой, что $\sigma_M^L \circ f = g$. Поскольку $\mathrm{Soc}(M) \leq L$, имеем $\sigma_M^L \circ f = 0$. Получили противоречие. Таким образом, $M/\mathrm{Soc}(M)$ является V-модулем. $\square$

Следствие 10 ([7, теорема 3.14]). *Следующие условия эквивалентны для кольца R:*

1) $R/\mathrm{Soc}(R_R)$ *– правое V-кольцо;*
2) *каждый правый R-модуль мало проективен;*
3) *каждый конечно порожденный правый R-модуль является мало проективным;*
4) *каждый циклический правый R-модуль является мало проективным;*
5) *каждый полупростой правый R-модуль является мало проективным;*
6) *каждый простой правый R-модуль является мало проективным;*
7) *каждый простой правый R-модуль является существенно инъективным.*

Теорема 11. *Для правого R-модуля M следующие условия эквивалентны:*

1) $J(N) \leq \mathrm{Soc}(N)$ *для любого модуля N из $\sigma[M]$;*
2) *каждый модуль из $\sigma[M]$ является мало проективным$^{\#}$ в $\sigma[M]$;*
3) *каждый простой модуль из $\sigma[M]$ является мало проективным$^{\#}$ в $\sigma[M]$.*

Доказательство. 2) $\Rightarrow$ 3) Очевидно.

1) $\Rightarrow$ 2) Пусть N, K – модули из категории $\sigma[M]$, $f : N \to N_1$ – малый эпиморфизм и $g : K \to N_1$ – гомоморфизм, у которого $\mathrm{Im}\, g \ll N_1$. Так как $J(N_1) \leq \mathrm{Soc}(N_1)$, то модуль $\mathrm{Im}\, g$ полупрост. Согласно [11, следствие 9.1.5] $f(J(N)) = J(N_1)$. Поскольку $J(N) \leq \mathrm{Soc}(N)$, имеем $J(N_1) \leq f(\mathrm{Soc}(N))$ и, следовательно, $\mathrm{Im}\, g \leq f(\mathrm{Soc}(N))$. Таким образом, существует такой гомоморфизм $h : K \to N$, что $f \circ h = g$.

3) $\Rightarrow$ 1) Пусть $N \in \sigma[M]$. Предположим, что $J(N) \nleq \mathrm{Soc}(N)$. Тогда существует такой элемент $x \in J(N)$, что $x \notin \mathrm{Soc}(N)$. Отсюда $xR \ll N$ и xR не является полупростым. Тогда xR содержит максимальный существенный подмодуль K. Ясно, что $K \ll N$. Так как $xR \ll N$, то $xR/K \ll N/K$. Поскольку xR/K – простой модуль, то согласно п. 3) существует такой гомоморфизм $f : xR/K \to N$, что $\sigma_N^K \circ f = \iota$, где $\iota : xR/K \to N/K$ – вложение. Тогда $f(xR/K) \oplus K = xR$. Получили противоречие с тем, что $K \leq_e xR$. $\square$

2. Мало квазипроективные модули

Определение 12. Пусть M – правый R-модуль. Если M является мало M-проективным (соответственно, мало M-проективным$^{\#}$), то M называется *мало квазипроективным* (соответственно, *мало квазипроективным$^{\#}$*) модулем. Ясно, что каждый мало проективный модуль является мало квазипроективным и каждый мало проективный$^{\#}$ модуль является мало квазипроективным$^{\#}$ модулем.

Очевидно, что каждый модуль с нулевым радикалом является малым квазипроективным$^{\#}$ модулем.

Замечание 13. Двойственный аналог к понятию мало квазипроективного$^{\#}$ модуля ввиду существования дополнения по пересечению для каждого подмодуля в произвольном модуле, очевидно, совпадает с понятием существенно квазиинъективного модуля. Аналогичная ситуация имеет место для других вводимых ниже понятий модулей, близких к проективным.

Из теоремы 3 непосредственно следует

Теорема 14. *Пусть M – правый R-модуль, и $\alpha : P \to M$ – проективное накрытие. Следующие условия эквивалентны*:

1) *модуль M является мало квазипроективным$^{\#}$*;
2) *для любого эндоморфизма f модуля P с малым образом, выполняется условие $f(\operatorname{Ker}\alpha) \leq \operatorname{Ker}\alpha$.*

Следствие 15. *Пусть правый R-модуль M обладает проективным накрытием $\alpha : P \to M$. Тогда если M – автоморфизм-инвариантный модуль, то M является мало квазипроективным$^{\#}$ модулем.*

Доказательство. Пусть f – эндоморфизм модуля P, у которого $f(P) \ll P$. Тогда $f \in J(\operatorname{End}(P))$. Так как модуль M – автоморфизм-инвариантный модуль, то имеет место включение $(1 + f)(\operatorname{Ker}(\alpha)) \leq \operatorname{Ker}(\alpha)$ и, следовательно, $f(\operatorname{Ker}(\alpha)) \leq \operatorname{Ker}(\alpha)$. Таким образом, согласно теореме 14 M – мало квазипроективный$^{\#}$ модуль. □

Следующее утверждение вытекает из следствия 4. Также это утверждение следует из п. 2) теоремы 5.

Теорема 16. *Пусть R – совершенное справа кольцо и M – правый R-модуль. Тогда модуль M является мало квазипроективным в точности тогда, когда M является мало квазипроективным$^{\#}$ модулем.*

Следующее утверждение непосредственно вытекает из [13, лемма 3.3] и [12, 4.37].

Лемма 17. *Модуль L мало $M \oplus H$-проективен$^{\#}$ в точности тогда, когда L мало M-проективен$^{\#}$ и L мало H-проективен$^{\#}$.*

Лемма 18. *Модуль $M = M_1 \oplus M_2$ является мало квазипроективным$^{\#}$ в точности тогда, когда M_1 и M_2 являются мало квазипроективными$^{\#}$, а M_1 и M_2 являются взаимно мало проективными$^{\#}$.*

Доказательство. Следует из леммы 7 и леммы 17. □

Если для любого подмодуля (соответственно малого подмодуля) A модуля N, эпиморфизм $f : M \to N/A$ может быть поднят до гомоморфизма $f' : M \to N$, то M называется *псевдо N-проективным.* Если M является псевдо M-проективным, то M называется *псевдопроективным* модулем. Псевдопроективные модули были изучены в ряде работ, в частности, в [14] был доказан важный результат, согласно которому над произвольным совершенным справа кольцом R классы псевдопроективных и дуально автоморфизм-инвариантных правых R-модулей совпадают.

Предложение 19. *Пусть M – правый R-модуль. Тогда если M – псевдопроективный модуль, то M является мало квазипроективным модулем.*

Доказательство. Пусть M – псевдопроективный модуль, а A – подмодуль модуля M. Рассмотрим гомоморфизм $f : M \to M/A$, у которого $\operatorname{Im} f \ll M/A$. Пусть $g : M \to M/A$ – гомоморфизм, действующий согласно правилу $x \mapsto f(x) + \sigma_M^A(x)$ для любого $x \in M$. Так как $\operatorname{Im} g + \operatorname{Im} f = M/A$, то $\operatorname{Im} g = M/A$. Поскольку модуль M является псевдопроективным модулем, существует эндоморфизм g' модуля M такой, что $\sigma_M^A \circ g' = g$. Положим $f' := g' - 1_M$, тогда $\sigma_M^A \circ f' = \sigma_M^A \circ g' - \sigma_M^A = g - \sigma_M^A = f$. □

Следующее утверждение непосредственно следует из [12, 4.34(1)], а также из [13, лемма 3.3] и [13, лемма 3.13].

Лемма 20. *Пусть M – правый R-модуль и N – прямое слагаемое M. Тогда*

1) *если M является мало квазипроективным модулем, то N также является мало квазипроективным модулем;*
2) *если M является мало квазипроективным$^\#$ модулем, то N также является мало квазипроективным$^\#$ модулем.*

Лемма 21. *Пусть M – правый R-модуль и A является вполне инвариантным подмодулем модуля M. Тогда*

1) *если M является мало квазипроективным модулем, то M/A также является мало квазипроективным модулем;*
2) *если M является мало квазипроективным$^\#$ модулем и $A \ll M$, то M/A также является мало квазипроективным$^\#$ модулем.*

Доказательство. 1) Пусть M является мало квазипроективным модулем и L – подмодуль модуля M, причем $A \leq L$. Пусть $f : M/A \to M/L$ – гомоморфизм правых R-модулей, у которого $\operatorname{Im} f \ll M/L$. Поскольку M является мало квазипроективным модулем, существует эндоморфизм g модуля M такой, что $\sigma_M^L \circ g = f \circ \sigma_M^A$. Так как $g(A) \leq A$, то существует эндоморфизм f' модуля M/A такой, что $f' \circ \sigma_M^A = \sigma_M^A \circ g$. Таким образом,

$$\sigma_{M/A}^{L/A} \circ f' \circ \sigma_M^A = \sigma_{M/A}^{L/A} \circ \sigma_M^A \circ g = \sigma_M^L \circ g = f \circ \sigma_M^A.$$

Так как σ_M^A – эпиморфизм, то $\sigma_{M/A}^{L/A} \circ f' = f$.

2) Доказательство аналогично доказательству пункта 1). □

Для подмодулей $K \leq L$ модуля M, включение $K \leq L$ называется *комалым* в M, если $L/K \ll M/K$. В этом случае L называется *комалым расширением* подмодуля K в M.

Определение 22. Модуль M называется *сильно эндоморфизм-поднимаемым* (соответственно, *сильно эндоморфизм-поднимаемым$^\#$*), если для каждого $A \leq M$ (соответственно, $A \ll M$) каждый гомоморфизм $f : M \to M/A$, для которого существует такой подмодуль L модуля M, что L – комалое расширение A в M и $f(L) \leq L/A$, может быть поднят до некоторого эндоморфизма f' модуля M.

Определение 23. Правый R-модуль M называется *эндоморфизм-поднимаемым*$^{\#}$, если для каждого $A \ll M$ и каждый эндоморфизм $f : M/A \to M/A$ может быть поднят до некоторого эндоморфизма f' модуля M.

Легко видеть, что любой квазипроективный (соответственно, квазипроективный$^{\#}$) модуль является сильно эндоморфизм-поднимаемым (соответственно, сильно эндоморфизм-поднимаемым$^{\#}$) модулем, а любой сильно эндоморфизм-поднимаемый (соответственно, сильно эндоморфизм-поднимаемый$^{\#}$) модуль является эндоморфизм-поднимаемым (соответственно, эндоморфизм-поднимаемым$^{\#}$) модулем.

Теорема 24. *Пусть M – правый R-модуль. Следующие условия эквивалентны*:

1) *M является сильно эндоморфизм-поднимаемым модулем*;
2) *M является одновременно мало квазипроективным модулем и эндоморфизм-поднимаемым модулем.*

Доказательство. 1) $\Rightarrow$ 2) Пусть M – сильно эндоморфизм-поднимаемый модуль, $A \leq M$ и $f : M \to M/A$ – гомоморфизм правых R-модулей, у которого $\operatorname{Im} f \ll M/A$. Положим $L := (\sigma_M^A)^{-1}(\operatorname{Im} f)$. Тогда $L/A = \operatorname{Im} f \ll M/A$ и $f(L) \leq \operatorname{Im} f = L/A$. Поскольку M – сильно эндоморфизм-поднимаемый модуль, f может быть поднят до некоторого эндоморфизма f' модуля M, т. е. M является мало квазипроективным.

2) $\Rightarrow$ 1) Пусть M является мало квазипроективным и эндоморфизм-поднимаемым модулем, A – подмодуль модуля M и $f : M \to M/A$ – гомоморфизм, для которого существует подмодуль L модуля M такой, что L – комалое расширение A в M и $f(L) \leq L/A$. Существует естественный гомоморфизм $\sigma : M/A \to M/L$. Поскольку $f(L) \leq L/A$, имеем $\sigma \circ f(L) = 0$. Тогда найдется такой эндоморфизм g модуля M/L, что $g \circ \sigma_M^L = \sigma \circ f$. Так как M является эндоморфизм-поднимаемым модулем, то существует эндоморфизм g' модуля M такой, что $g \circ \sigma_M^L = \sigma_M^L \circ g'$. Пусть $f' = \sigma_M^A \circ g'$. Тогда

$$\sigma \circ f' = \sigma \circ \sigma_M^A \circ g' = \sigma_M^L \circ g' = g \circ \sigma_M^L = \sigma \circ f.$$

Отсюда $(f - f')(M) \leq \operatorname{Ker}(\sigma) = L/A \ll M/A$. Поскольку M – мало квазипроективный, существует эндоморфизм g'' модуля M такой, что $\sigma_M^A \circ g'' = f - f'$. Таким образом,

$$\sigma_M^A \circ (g' + g'') = f' + (f - f') = f.$$

Следовательно, M является сильно эндоморфизм-поднимаемым модулем. $\square$

Теорема 25. *Для правого R-модуль M следующие условия эквивалентны*:

1) *M является сильно эндоморфизм-поднимаемым$^{\#}$ модулем*;
2) *M является одновременно мало квазипроективным$^{\#}$ и эндоморфизм-поднимаемым$^{\#}$ модулем.*

Доказательство. Проверка аналогична доказательству теоремы 24. $\square$

Теорема 26. *Пусть правый R-модуль M обладает проективным накрытием $\alpha : P \to M$. Тогда следующие условия эквивалентны:*

1) *M является сильно эндоморфизм-поднимаемым$^{\#}$ модулем;*
2) *для любого эндоморфизма f модуля P, для которого существует такой малый подмодуль C модуля P, что $\operatorname{Ker}\alpha \leq C$ и $f(C) \leq C$, выполнено условие $f(\operatorname{Ker}\alpha) \leq \operatorname{Ker}\alpha$.*

Доказательство. 1) $\Rightarrow$ 2) Пусть f – эндоморфизм модуля P, для которого существует такой малый подмодуль C модуля P, что $\operatorname{Ker}\alpha \leq C$ и $f(C) \leq C$. Положим $N = f(\operatorname{Ker}\alpha) + \operatorname{Ker}\alpha$ и $A = \alpha(N)$. Ясно, что $N \ll P$ и $A \ll M$. Так как $\sigma_M^A \circ \alpha \circ f(\operatorname{Ker}\alpha) = 0$, то $\operatorname{Ker}\alpha \leq \operatorname{Ker}(\sigma_M^A \circ \alpha \circ f)$. Тогда существует гомоморфизм $g : M \to M/A$ такой, что $g \circ \alpha = \sigma_M^A \circ \alpha \circ f$. Имеем $g \circ \alpha(C) = \sigma_M^A \circ \alpha \circ f(C) \leq \sigma_M^A \circ \alpha(C)$, где $\alpha(C) \ll M$. Поскольку M является сильно эндоморфизм-поднимаемым$^{\#}$ модулем, существует эндоморфизм g' модуля M такой, что $\sigma_M^A \circ g' = g$. Так как P – проективный модуль, то существует эндоморфизм f' модуля P такой, что $\alpha \circ f' = g' \circ \alpha$. Таким образом, имеем

$$\sigma_M^A \circ \alpha \circ (f - f') = \sigma_M^A \circ \alpha \circ f - \sigma_M^A \circ g' \circ \alpha = \sigma_M^A \circ \alpha \circ f - g \circ \alpha = 0.$$

Тогда $(f - f')(P) \leq \operatorname{Ker}(\sigma_M^A \circ \alpha) = N$. Для любого $p \in P$ существуют такие $p_1, p_2 \in \operatorname{Ker}\alpha$, что $(f - f')(p) = f(p_1) + p_2$. Тогда $(f - f')(p - p_1) = f'(p_1) + p_2 \in \operatorname{Ker}\alpha$. Следовательно, $\alpha \circ (f - f')(p - p_1) = \alpha \circ f'(p_1) + \alpha(p_2) = 0$ и $p - p_1 \in \operatorname{Ker}(\alpha \circ (f - f'))$. Поскольку $p \in \operatorname{Ker}(\alpha \circ (f - f')) + \operatorname{Ker}\alpha$, то $\operatorname{Ker}(\alpha \circ (f - f')) + \operatorname{Ker}\alpha = P$. Так как $\operatorname{Ker}\alpha \ll P$, имеем $\operatorname{Ker}(\alpha \circ (f - f')) = P$. Таким образом, $(f - f')(P) \leq \operatorname{Ker}\alpha$. Следовательно,

$$f(\operatorname{Ker}\alpha) \leq (f - f')(\operatorname{Ker}\alpha) + f'(\operatorname{Ker}\alpha) \leq \operatorname{Ker}\alpha.$$

2) $\Rightarrow$ 1) Пусть A – малый подмодуль модуля M и f – эндоморфизм модуля M/A. Поскольку P – проективный модуль, существует эндоморфизм g модуля P такой, что $\sigma_M^A \circ \alpha \circ g = f \circ \sigma_M^A \circ \alpha$. Пусть $C = \alpha^{-1}(A)$, тогда $g(C) \leq C$ и $C \ll P$. Согласно п. 2) $g(\operatorname{Ker}\alpha) \leq \operatorname{Ker}\alpha$. Тогда существует эндоморфизм f' модуля M такой, что $f' \circ \alpha = \alpha \circ g$. Следовательно, $\sigma_M^A \circ f' \circ \alpha = f \circ \sigma_M^A \circ \alpha$. Так как α – эпиморфизм, то $\sigma_M^A \circ f' = f \circ \sigma_M^A$ и, следовательно, M является эндоморфизм-поднимаемым$^{\#}$ модулем.

Пусть A – малый подмодуль модуля M и $f : M \to M/A$ – гомоморфизм, у которого $\operatorname{Im} f \ll M/A$. Так как P – проективный модуль, то существует эндоморфизм g модуля P такой, что $\sigma_M^A \circ \alpha \circ g = f \circ \alpha$. Пусть $C = (\sigma_M^A \circ \alpha)^{-1}(\operatorname{Im} f)$. Тогда $C \ll P$ и $g(C) \leq C$. Согласно условию п. 2) $g(\operatorname{Ker}\alpha) \leq \operatorname{Ker}\alpha$. Таким образом, существует эндоморфизм f' модуля M такой, что $f' \circ \alpha = \alpha \circ g$. Тогда $\sigma_M^A \circ f' \circ \alpha = \sigma_M^A \circ \alpha \circ g = f \circ \alpha$. Так как α – эпиморфизм, то $\sigma_M^A \circ f' = f$. Таким образом, M является одновременно мало квазипроективным$^{\#}$ модулем и эндоморфизм-поднимаемым$^{\#}$ модулем. Согласно теореме 25 M является сильно эндоморфизм-поднимаемым$^{\#}$ модулем. □

Первый пункт следующего утверждения следует из п. 1) теоремы 5. Его доказательство ниже приведено ради полноты изложения.

Предложение 27. *Пусть правый R-модуль M является слабо дополняемым модулем. Тогда имеют место следующие утверждения:*

1) *модуль M является квазипроективным в точности тогда, когда M является квазипроективным$^{\#}$ модулем;*
2) *модуль M является эндоморфизм-поднимаемым в точности тогда, когда M является эндоморфизм-поднимаемым$^{\#}$ модулем.*

Доказательство. 1) Пусть M – квазипроективный$^{\#}$ модуль, A – немалый подмодуль M и $f \in \mathrm{Hom}_R(M, M/A)$. Согласно условию существует такой подмодуль B модуля M, что $A+B = M$ и $A\cap B \ll M$. Рассмотрим естественные гомоморфизмы $\pi : M \to M/A, \pi' : M \to M/(A\cap B)$ и $\pi'' : M/(A\cap B) \to M/A$. Так как $M/(A\cap B) = A/(A\cap B) \oplus B/(A\cap B)$, то для некоторого гомоморфизма $\iota \in \mathrm{Hom}_R(M/A, M/(A\cap B))$ имеет место равенство $\pi''\circ\iota = \mathrm{id}_{M/A}$. Поскольку M – квазипроективный$^{\#}$ модуль, то для некоторого $g \in \mathrm{End}_R(M)$ имеет место равенство $\pi' \circ g = \iota \circ f$. Тогда $f = \pi'' \circ \iota \circ f = \pi'' \circ \pi' \circ g = \pi \circ g$.

2) Пусть M является эндоморфизм-поднимаемым$^{\#}$ модулем и $A \leq M$, причем A не является малым подмодулем модуля M. Пусть f – эндоморфизм модуля M/A. Поскольку M является слабо дополняемым модулем, существует $B \leq M$ такой, что $A + B = M$ и $A \cap B \ll M$. Имеет место изоморфизм $\varphi : M/A \to B/(A \cap B)$, действующий по правилу $\varphi(b + A) = b + (A \cap B)$ для любого $b \in B$. Ясно, что

$$M/(A \cap B) = A/(A \cap B) \oplus B/(A \cap B).$$

Через $i : B/(A \cap B) \to M/(A \cap B)$ обозначим естественное вложение. Тогда существует эндоморфизм g модуля $M/(A\cap B)$, действующий по правилу $g(a+b+A\cap B) = i\circ\varphi\circ f(b+A)$ для любого $a \in A$ и $b \in B$. Тогда $g\circ i\circ\varphi = i\circ\varphi\circ f$. Через $\sigma : M/(A\cap B) \to M/A$ обозначим естественный гомоморфизм. Заметим, что $\sigma \circ i \circ \varphi = 1_{M/A}$ и $g \circ i \circ \varphi \circ \sigma = g$. Тогда

$$\sigma \circ g = \sigma \circ g \circ i \circ \varphi \circ \sigma = \sigma \circ i \circ \varphi \circ f \circ \sigma = f \circ \sigma.$$

Так как M является эндоморфизм-поднимаемым$^{\#}$ модулем, существует эндоморфизм f' модуля M такой, что $\sigma_M^{A\cap B} \circ f' = g \circ \sigma_M^{A\cap B}$. Таким образом, имеет место коммутативная диаграмма

$$\begin{tikzcd}
M \arrow[r, "f'"] \arrow[d, "\sigma_M^{A\cap B}"] & M \arrow[d, "\sigma_M^{A\cap B}"] \\
M/(A\cap B) \arrow[r, "g"] \arrow[d, "\sigma"] & M/(A\cap B) \arrow[d, "\sigma"] \\
M/A \arrow[r, "f"] \arrow[u, bend left, "i\circ\varphi"] & M/A. \arrow[u, bend left, "i\circ\varphi"]
\end{tikzcd}$$

Следовательно,

$$\sigma_M^A \circ f' = \sigma \circ \sigma_M^{A\cap B} \circ f' = \sigma \circ g \circ \sigma_M^{A\cap B} = f \circ \sigma \circ \sigma_M^{A\cap B} = f \circ \sigma_M^A.$$

Таким образом, M является эндоморфизм-поднимаемым модулем. □

Следующее утверждение непосредственно вытекает из теоремы 16, теоремы 24, теоремы 25 и предложения 27.

Следствие 28. *Пусть R – совершенное справа кольцо и M – правый R-модуль. Тогда M является сильно эндоморфизм-поднимаемым модулем в точности тогда, когда M является сильно эндоморфизм-поднимаемым$^\#$ модулем.*

Лемма 29. *Пусть правый R-модуль M, у которого $J(M) \ll M$. Следующие условия эквивалентны*:

1) *M является квазипроективным$^\#$ модулем*;
2) *M является сильно эндоморфизм-поднимаемым$^\#$ модулем.*

Доказательство. 1) ⇒ 2) Очевидно.

2) ⇒ 1) Пусть $A \ll M$ и $f : M \to M/A$ – гомоморфизм. Тогда, согласно [11, предложение 9.1.5], $J(M)/A = J(M/A)$. Поскольку $J(M) \ll M$, имеем $f(J(M)) \ll M/A$, следовательно, $f(J(M)) \leq J(M/A) = J(M)/A$. Так как M является сильно эндоморфизм-поднимаемым$^\#$ модулем, f может быть поднят до некоторого эндоморфизма f' модуля M. Тогда M – квазипроективный$^\#$ модуль. □

В заключительной части этого параграфа приведем ряд несложных, но полезных утверждений, показывающие, что рассмотренные ранее классы модулей замкнуты относительно взятия прямых слагаемых и вполне инвариантных подмодулей.

Лемма 30. *Пусть N – прямое слагаемое модуля M. Тогда*

1) *если M является эндоморфизм-поднимаемым, то N также является эндоморфизм-поднимаемым модулем*;
2) *если M является эндоморфизм-поднимаемым$^\#$ модулем, то N также является эндоморфизм-поднимаемым$^\#$ модулем.*

Доказательство. 1) Предположим, что M является эндоморфизм-поднимаемым модулем. Пусть $M = N \oplus T$, где $T \leq M$, A – подмодуль модуля N и f – эндоморфизм модуля N/A. Рассмотрим эндоморфизм g модуля M/A, действующий по правилу $g(t+n) = f(n)$ для любого $t \in (T \oplus A)/A$ и $n \in N/A$. Тогда $g\mid_{N/A} = f$. Поскольку M является эндоморфизм-поднимаемым, существует эндоморфизм g' модуля M такой, что $\sigma_M^A \circ g' = g \circ \sigma_M^A$. Так как $\operatorname{Im}(g \circ \sigma_M^A \mid_N) \leq N/A$, то $\operatorname{Im}(g' \mid_N) \leq N$. Пусть $f' = g' \mid_N$. Тогда $f' \in \operatorname{End}(N)$ и

$$\sigma_N^A \circ f' = \sigma_M^A \circ g' \mid_N = g \circ \sigma_M^A \mid_N = f \circ \sigma_N^A.$$

2) Доказательство аналогично доказательству п. 1). □

Следующее утверждение непосредственно вытекает из теорем 20, 24, 25 и 30.

Следствие 31. *Пусть N – прямое слагаемое модуля M. Тогда*

1) *если M является сильно эндоморфизм-поднимаемым, то N также является сильно эндоморфизм-поднимаемым модулем*;
2) *если M является сильно эндоморфизм-поднимаемым$^{\#}$ модулем, то N также является сильно эндоморфизм-поднимаемым$^{\#}$ модулем.*

Лемма 32. *Пусть A – вполне инвариантный подмодуль правого R-модуля M. Тогда*

1) *если M является эндоморфизм-поднимаемым модулем, то M/A также является эндоморфизм-поднимаемым модулем*;
2) *если M является эндоморфизм-поднимаемым$^{\#}$ модулем и $A \ll M$, то M/A также является эндоморфизм-поднимаемым$^{\#}$ модулем.*

Доказательство. 1) Пусть M является эндоморфизм-поднимаемым модулем и L – подмодуль модуля M, причем $A \le L$. Рассмотрим эндоморфизм f модуля M/L. Поскольку M является эндоморфизм-поднимаемым модулем, существует эндоморфизм g модуля M такой, что $\sigma_M^L \circ g = f \circ \sigma_M^L$. Поскольку $g(A) \le A$, то существует эндоморфизм f' модуля M/A такой, что $f' \circ \sigma_M^A = \sigma_M^A \circ g$. Таким образом,

$$\sigma_{M/A}^{L/A} \circ f' \circ \sigma_M^A = \sigma_{M/A}^{L/A} \circ \sigma_M^A \circ g = \sigma_M^L \circ g = f \circ \sigma_M^L = f \circ \sigma_{M/A}^{L/A} \circ \sigma_M^A.$$

Так как σ_M^A – эпиморфизм, то $\sigma_{M/A}^{L/A} \circ f' = f \circ \sigma_{M/A}^{L/A}$.

2) Доказательство аналогично доказательству п. 1). □

Следующее утверждение непосредственно вытекает из теорем 21, 24, 25 и леммы 32.

Следствие 33. *Пусть A – вполне инвариантный подмодуль правого R-модуля M. Тогда*

1) *если M является сильно эндоморфизм-поднимаемым модулем, то M/A также является сильно эндоморфизм-поднимаемым модулем*;
2) *если M является сильно эндоморфизм-поднимаемым$^{\#}$ модулем и $A \ll M$, то M/A также является сильно эндоморфизм-поднимаемым$^{\#}$ модулем.*

3. Мало эндоморфизм-поднимаемые модули

Определение 34. Правый R-модуль M называется *мало эндоморфизм-поднимаемым* (соответственно, *мало эндоморфизм-поднимаемым$^{\#}$*), если для любого подмодуля (соответственно, малого подмодуля) A модуля M всякий эндоморфизм f модуля M/A, для которого $\operatorname{Im} f \ll M/A$, может быть поднят до некоторого эндоморфизма f' модуля M.

Легко видеть, что примерами мало эндоморфизм-поднимаемых модулей являются эндоморфизм-поднимаемые модули и мало квазипроективные модули. Каждый модуль с нулевым радикалом Джекобсона является мало эндоморфизм-поднимаемым$^{\#}$ модулем.

Лемма 35. *Пусть N – прямое слагаемое правого R-модуля M. Тогда*

1) *если M – мало эндоморфизм-поднимаемый модуль, то N также является мало эндоморфизм-поднимаемым модулем*;
2) *если M – мало эндоморфизм-поднимаемый$^{\#}$ модуль, то N также является мало эндоморфизм-поднимаемым$^{\#}$ модулем.*

Доказательство. 1) Пусть $M = N \oplus T$ – мало эндоморфизм-поднимаемый модуль, A – подмодуль модуля N и f – эндоморфизм модуля N/A, у которого $\operatorname{Im} f \ll N/A$. Рассмотрим эндоморфизм g модуля M/A, действующий по правилу $g(t+n) = f(n)$ для любого $t \in (T \oplus A)/A$ и $n \in N/A$. Тогда $\operatorname{Im} g \ll M/A$ и $g\mid_{N/A} = f$. Поскольку M является мало эндоморфизм-поднимаемым, существует эндоморфизм g' модуля M такой, что $\sigma_M^A \circ g' = g \circ \sigma_M^A$. Так как $\operatorname{Im}(g \circ \sigma_M^A\mid_N) \leq N/A$, то $\operatorname{Im}(g'\mid_N) \leq N$. Пусть $f' = g'\mid_N$. Тогда $f' \in \operatorname{End}(N)$ и $\sigma_N^A \circ f' = \sigma_M^A \circ g'\mid_N = g \circ \sigma_M^A\mid_N = f \circ \sigma_N^A$.

2) Доказательство аналогично доказательству п. 1). □

Лемма 36. *Пусть A – вполне инвариантный подмодуль правого R-модуля M. Тогда*

1) *если M является мало эндоморфизм-поднимаемым модулем, то M/A также является мало эндоморфизм-поднимаемым модулем*;
2) *если M является мало эндоморфизм-поднимаемым$^{\#}$ модулем и $A \ll M$, то M/A также является мало эндоморфизм-поднимаемым$^{\#}$ модулем.*

Доказательство. 1) Пусть M является мало эндоморфизм-поднимаемым модулем и L – подмодуль модуля M, причем $A \leq L$. Пусть f – эндоморфизм модуля M/L, у которого $\operatorname{Im} f \ll M/L$. Поскольку M является мало эндоморфизм-поднимаемым модулем, существует эндоморфизм g модуля M такой, что $\sigma_M^L \circ g = f \circ \sigma_M^L$. Так как $g(A) \leq A$, то существует эндоморфизм f' модуля M/A такой, что $f' \circ \sigma_M^A = \sigma_M^A \circ g$. Таким образом,

$$\sigma_{M/A}^{L/A} \circ f' \circ \sigma_M^A = \sigma_{M/A}^{L/A} \circ \sigma_M^A \circ g = \sigma_M^L \circ g = f \circ \sigma_M^L = f \circ \sigma_{M/A}^{L/A} \circ \sigma_M^A.$$

Так как σ_M^A – эпиморфизм, то $\sigma_{M/A}^{L/A} \circ f' = f \circ \sigma_{M/A}^{L/A}$.

2) Доказательство аналогично доказательству п. 1). □

Согласно [13], правый R-модуль M называется *мало дуально ADS-модулем* (соответственно, *мало ADS$^{\#}$-модулем*), если для каждого его разложения $M = A \oplus B$, где A, B – подмодули модуля M, A и B взаимно мало проективны (соответственно, взаимно мало проективны$^{\#}$).

Теорема 37. *Пусть M – правый R-модуль. Тогда*

1) *если M является мало эндоморфизм-поднимаемым модулем, то M является мало дуально-ADS модулем*;
2) *если M является мало эндоморфизм-поднимаемым$^{\#}$ модулем, то M является мало ADS$^{\#}$ модулем.*

Доказательство. Пусть M – мало эндоморфизм-поднимаемый модуль и $M = N \oplus T$, где $N, T \leq M$. Покажем, что модуль T является мало N-проективным. Пусть $A \leq N$. Рассмотрим гомоморфизм $f_0 : T \to N/A$, у которого $\operatorname{Im} f_0 \ll N/A$. Ясно, что $M = N/A \oplus (T+A)/A$ и $(T+A)/A \cong T$. Через $\varepsilon : T \to (T+A)/A$ обозначим изоморфизм, действующий по правилу $\varepsilon(t) = t + A$. Для однозначно определенного гомоморфизма $f : (T+A)/A \to N/A$ имеет место равенство $f \circ \varepsilon = f_0$. Пусть $\pi_1 : N \oplus T \to N$, $\pi_2 : N/A \oplus (T+A)/A \to N/A$, $\pi_3 : N/A \oplus (T+A)/A \to (T+A)/A$ – естественные проекции. Тогда $\pi_2 \circ \sigma_M^A = \sigma_N^A \circ \pi_1$.

Рассмотрим эндоморфизм g модуля M/A, действующий по правилу $g(n+t+A) = f(t+A)$ для любого $n \in N$ и $t \in T$. Тогда $\operatorname{Im} g = \operatorname{Im} f \ll M/A$ и $f \circ \pi_3 = \pi_2 \circ g$. Поскольку M – мало эндоморфизм-поднимаемый модуль, существует $g' : M \to M$ такой, что $\sigma_M^A \circ g' = g \circ \sigma_M^A$. Найдется такой гомоморфизм $f' : (T+A)/A \to N$, что $\pi_1 \circ g' \mid_T = f' \circ \pi_3 \circ \sigma_M^A \mid_T$. Таким образом, имеет место следующая коммутативная диаграмма

$$
\begin{tikzcd}
 & M/A \arrow[rr, "\pi_3"] \arrow[dr, "g"] & & (T+A)/A \arrow[dr, "f"] \arrow[dd, "f'"] & \\
M \arrow[ur, "\sigma_M^A"] \arrow[dr, "g'"'] & & M/A \arrow[rr, "\pi_2"] & & N/A. \\
 & M \arrow[rr, "\pi_1"] \arrow[ur, "\sigma_M^A"] & & N \arrow[ur, "\sigma_N^A"'] &
\end{tikzcd}
$$

Тогда

$$\sigma_N^A \circ f' \circ \pi_3 \circ \sigma_M^A \mid_T = \sigma_N^A \circ \pi_1 \circ g' \mid_T = \pi_2 \circ \sigma_M^A \circ g' \mid_T = \pi_2 \circ g \circ \sigma_M^A \mid_T = f \circ \pi_3 \circ \sigma_M^A \mid_T .$$

Следовательно, $\sigma_N^A \circ f' = f$ и $\sigma_N^A \circ f' \circ \varepsilon = f \circ \varepsilon = f_0$.

2) Доказательство аналогично доказательству п. 1). □

Замечание 38. Каждый мало квазипроективный модуль является мало квазипроективным$^\#$ модулем. Каждый мало эндоморфизм-поднимаемым модуль является мало эндоморфизм-поднимаемым$^\#$ модулем. Обратное утверждение неверно, например, для $\mathbb{Z}$-модуля $M = \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}$. Так как имеет место равенство $J(M) = 0$, то M является мало квазипроективным$^\#$ модулем и мало эндоморфизм-поднимаемым$^\#$ модулем. Поскольку M не является мало дуально-ADS модулем, то M не является мало квазипроективным модулем и также не является мало эндоморфизм-поднимаемым модулем.

Следующее утверждение непосредственно вытекает из следствия 10, теоремы 37 и [13, следствие 2.16].

Следствие 39. *Следующие утверждения эквивалентны для кольца* R:

1) $R/\operatorname{Soc}(R_R)$ *– правое* V*-кольцо*;

2) *каждый правый* R*-модуль является мало проективным модулем*;

3) *каждый правый* R*-модуль является мало квазипроективным модулем*;

4) *каждый правый* R*-модуль является мало эндоморфизм-поднимаемым модулем*;

5) *каждый правый R-модуль является мало дуально-ADS модулем.*

Напомним, что правый R-модуль M называется *полунетеровым*, если для каждого его ненулевого подмодуля U выполнено условие $J(U) \neq U$ [11]. Назовем правый R-модуль M *мало полунетеровым*, если для каждого его ненулевого малого подмодуля U выполнено условие $J(U) \neq U$.

Теорема 40. *Пусть M – мало полунетеров правый R-модуль. Если модуль M обладает проективным накрытием $\alpha : P \to M$, то следующие условия эквивалентны*:

1) *M является мало квазипроективным$^{\#}$ модулем*;

2) *M является мало эндоморфизм-поднимаемым$^{\#}$ модулем.*

Доказательство. 1) $\Rightarrow$ 2) Очевидно.

2) $\Rightarrow$ 1) Без ограничения общности можно считать, что $M = P/\operatorname{Ker}(\alpha)$. Пусть f – эндоморфизм модуля P, для которого выполнено условие $\operatorname{Im} f \ll P$, и пусть $C := \operatorname{Ker}\alpha + \sum_{i=1}^{\infty} f^i(\operatorname{Ker}\alpha)$. Предположим, что $f(\operatorname{Ker}\alpha) \nleq \operatorname{Ker}\alpha$. Тогда $C \neq \operatorname{Ker}\alpha$ и C является наименьшим подмодулем модуля P таким, что выполнены условия $f(C) \leq C$ и $\operatorname{Ker}\alpha \leq C$. Так как $\operatorname{Ker}\alpha \ll P$ и $f(C) \leq \operatorname{Im} f \ll P$, то $C = \operatorname{Ker}\alpha + f(C) \ll P$. Обозначим через $\sigma : M \to P/C$ естественный гомоморфизм. Поскольку $f(C) \leq C$, то существует эндоморфизм g' модуля P/C такой, что $g' \circ \sigma \circ \alpha = \sigma \circ \alpha \circ f$. Тогда $\operatorname{Im} g' = \sigma \circ \alpha(\operatorname{Im} f) \ll P/C$. Так как M является мало эндоморфизм-поднимаемым$^{\#}$ модулем, существует эндоморфизм f' модуля M такой, что $\sigma \circ f' = g' \circ \sigma$. Из проективности модуля P следует, что существует эндоморфизм g модуля P такой, что $\alpha \circ g = f' \circ \alpha$. Таким образом, имеет место диаграмма

$$\begin{tikzcd}
P \arrow[r, "f"] \arrow[r, bend right, "g"'] \arrow[d, "\alpha"] & P \arrow[d, "\alpha"] \\
M \arrow[r, "f'"] \arrow[d, "\sigma"] & M \arrow[d, "\sigma"] \\
P/C \arrow[r, "g'"] & P/C.
\end{tikzcd}$$

Тогда $\sigma \circ \alpha \circ (f - g) = 0$ и, следовательно, $(f-g)(P) \leq C$. Поскольку $\alpha(C) \ll M$, M является мало полунетеровым модулем и $\alpha(C) \neq 0$, то $J(\alpha(C)) \neq \alpha(C)$. Предположим, что $J(C) + \operatorname{Ker}\alpha = C$. Тогда $\alpha(J(C)) = \alpha(C)$. Так как $\alpha(J(C)) \leq J(\alpha(C))$, то $J(\alpha(C)) = \alpha(C)$. Получили противоречие. Таким образом, $J(C) + \operatorname{Ker}\alpha < C$. Поскольку $(f-g)(P) \leq C$ и $\operatorname{Ker}\alpha \leq J(P)$, имеем $(f-g)(\operatorname{Ker}\alpha) \leq (f-g)(J(P)) \leq J(C)$. Так как $g(\operatorname{Ker}\alpha) \leq \operatorname{Ker}\alpha$, то

$$f(\operatorname{Ker}\alpha) \leq (f-g)(\operatorname{Ker}\alpha) + g(\operatorname{Ker}\alpha) \leq J(C) + \operatorname{Ker}\alpha.$$

Поскольку $f(C) \leq C$, то $f(J(C)) \leq J(C)$. Следовательно, $f(\operatorname{Ker}\alpha + J(C)) \leq \operatorname{Ker}\alpha + J(C)$. Получили противоречие с тем, что C является наименьшим подмодулем модуля P, для которого выполнены условия $f(C) \leq C$ и $\operatorname{Ker}\alpha \leq C$. Таким образом, $f(\operatorname{Ker}\alpha) \leq \operatorname{Ker}\alpha$. Тогда согласно теореме 14 M является мало квазипроективным$^{\#}$ модулем. $\square$

Аналогично доказывается

Теорема 41. *Пусть M – мало полунетеров правый R-модуль. Если модуль M обладает проективным накрытием $\alpha : P \to M$, то следующие условия эквивалентны*:

1) *M является мало квазипроективным модулем*;
2) *M является мало эндоморфизм-поднимаемым модулем.*

Следующее утверждение вытекает из предыдущих двух теорем и теоремы 16.

Теорема 42. *Пусть M – правый модуль над совершенным справа кольцом. Тогда следующие условия эквивалентны*:

1) *M является мало квазипроективным модулем*;
2) *M является мало квазипроективным$^{\#}$ модулем*;
3) *M является мало эндоморфизм-поднимаемым модулем*;
4) *M является мало эндоморфизм-поднимаемым$^{\#}$ модулем.*

Эквивалентность п. п. 1) и 5) из следующего утверждения доказано в работе [3] (см. также [15, теорема 3.3.19]).

Теорема 43. *Пусть M – правый модуль над совершенным справа кольцом. Тогда следующие условия эквивалентны*:

1) *M является квазипроективным модулем*;
2) *M является квазипроективным$^{\#}$ модулем*;
3) *M является сильно эндоморфизм-поднимаемым модулем*;
4) *M является сильно эндоморфизм-поднимаемым$^{\#}$ модулем*;
5) *M является эндоморфизм-поднимаемым модулем*;
6) *M является эндоморфизм-поднимаемым$^{\#}$ модулем.*

Доказательство. Импликация 3) $\Rightarrow$ 5) очевидна. Эквивалентности 1) $\Leftrightarrow$ 2), 3) $\Leftrightarrow$ 4) и 5) $\Leftrightarrow$ 6) следуют соответственно из предложения 27 (1), следствия 28 и предложения 27 (2). Эквивалентность 2) $\Leftrightarrow$ 4) вытекает из леммы 29. Импликация 5) $\Rightarrow$ 3) следует из теоремы 24 и теоремы 42. □

Модуль M называется *автоморфизм-поднимаемым* [16], если для каждого подмодуля N модуля M каждый автоморфизм f модуля M/N может быть поднят до эндоморфизма f' модуля M. Если для каждого подмодуля N модуля M каждый автоморфизм f модуля M/N может быть поднят до автоморфизм f' модуля M, модуль M называется *строго автоморфизм-поднимаемым.* Автоморфизм-поднимаемые модули были изучены в [6] и [17].

Теорема 44. *Если правый R-модуля M обладает проективным накрытием $\alpha : P \to M$, то следующие условия эквивалентны*:

1) *M является автоморфизм-поднимаемым$^{\#}$ и мало квазипроективным$^{\#}$ модулем*;

2) *M является строго автоморфизм-поднимаемым$^{\#}$ и мало квазипроективным$^{\#}$ модулем;*
3) *каждый автоморфизм f модуля P, для которого существует такой малый подмодуль L модуля P, что $\operatorname{Ker}\alpha \leq L$ и $f(L) = L$, удовлетворяет условию $f(\operatorname{Ker}\alpha) \leq \operatorname{Ker}\alpha$;*
4) *каждый автоморфизм f модуля P, для которого существует такой малый подмодуль L модуля P, что $\operatorname{Ker}\alpha \leq L$ и $f(L) = L$, удовлетворяет условию $f(\operatorname{Ker}\alpha) = \operatorname{Ker}\alpha$.*

Доказательство. 2) $\Rightarrow$ 1) Очевидно.

1) $\Rightarrow$ 3) Пусть M является автоморфизм-поднимаемым$^{\#}$ и мало квазипроективным$^{\#}$ модулем с проективным накрытием $\alpha : P \to M$. Пусть L – малый подмодуль модуля P и f – автоморфизм модуля P такой, что $\operatorname{Ker}\alpha \leq L$ и $f(L) = L$. Без ограничения общности можно предположить, что $M = P/\operatorname{Ker}\alpha$. Имеет место естественный гомоморфизм $\sigma : P/\operatorname{Ker}\alpha \to P/L$. Так как $f(L) = L$, то существует автоморфизм g модуля P/L такой, что $g \circ \sigma \circ \alpha = \sigma \circ \alpha \circ f$. Поскольку модуль M является автоморфизм-поднимаемым$^{\#}$, существует эндоморфизм g' модуля M такой, что $\sigma \circ g' = g \circ \sigma$. Так как P – проективный модуль, существует гомоморфизм f' модуля P такой, что $g' \circ \alpha = \alpha \circ f'$. Тогда

$$\sigma \circ \alpha \circ f = g \circ \sigma \circ \alpha = \sigma \circ g' \circ \alpha = \sigma \circ \alpha \circ f'.$$

Отсюда $\sigma \circ \alpha \circ (f - f') = 0$ и, следовательно, $(f - f')(P) \leq L$. Поскольку M является мало квазипроективным$^{\#}$, согласно теореме 14, $(f - f')(\operatorname{Ker}\alpha) \leq \operatorname{Ker}\alpha$. Так как $f'(\operatorname{Ker}\alpha) \leq \operatorname{Ker}\alpha$, то $f(\operatorname{Ker}\alpha) \leq (f - f')(\operatorname{Ker}\alpha) + f'(\operatorname{Ker}\alpha) \leq \operatorname{Ker}\alpha$.

3) $\Rightarrow$ 4) Так как f^{-1} также является автоморфизмом модуля P и $f^{-1}(L) = L$, то $f^{-1}(\operatorname{Ker}\alpha) \leq \operatorname{Ker}\alpha$. Следовательно, $\operatorname{Ker}\alpha \leq f(\operatorname{Ker}\alpha)$. Поскольку $f(\operatorname{Ker}\alpha) \leq \operatorname{Ker}\alpha$ и $\operatorname{Ker}\alpha \leq f(\operatorname{Ker}\alpha)$, имеем $f(\operatorname{Ker}\alpha) = \operatorname{Ker}\alpha$.

4) $\Rightarrow$ 2) Предположим, что модуль M удовлетворяет условию п. 4). Покажем, что M является строго автоморфизм-поднимаемым$^{\#}$ модулем. Пусть A – малый подмодуль модуля M, f – автоморфизм модуля M/A и $\sigma : M \to M/A$ – естественная проекция. Тогда существует эндоморфизм g модуля P такой, что $\sigma\circ\alpha\circ g = f\circ\sigma\circ\alpha$. Пусть $L = \alpha^{-1}(A)$. Тогда $\operatorname{Im} g + L = P$. Поскольку $L \ll P$, имеем $\operatorname{Im} g = P$. Тогда $P \cong P/\operatorname{Ker} g$, где $\operatorname{Ker} g \leq L \ll P$. Так как P – проективный модуль, то $\operatorname{Ker} g = 0$. Следовательно, g – автоморфизм модуля P. Поскольку $\operatorname{Ker}(f \circ \sigma \circ \alpha) = \operatorname{Ker}(\sigma \circ \alpha) = L$ и $\operatorname{Ker}(\sigma \circ \alpha \circ g) = g^{-1}(L)$, то $g^{-1}(L) = L$. Тогда $g(L) = L$. Согласно п. 4), $g(\operatorname{Ker}\alpha) = \operatorname{Ker}\alpha$. Значит, существует автоморфизм f' модуля M такой, что $f' \circ \alpha = \alpha \circ g$. Следовательно, $f \circ \sigma \circ \alpha = \sigma \circ \alpha \circ g = \sigma \circ f' \circ \alpha$. Поскольку α – эпиморфизм, то $f \circ \sigma = \sigma \circ f'$. Таким образом, M является строго автоморфизм-поднимаемым$^{\#}$.

Покажем, что M является мало квазипроективным$^{\#}$ модулем. Пусть A – малый подмодуль модуля M и $v : M \to M/A$ – гомоморфизм, удовлетворяющий условию $\operatorname{Im} v \ll M/A$. Пусть $\sigma : M \to M/A$ – естественная проекция. Тогда существует эндоморфизм u модуля P такой, что $\sigma \circ \alpha \circ u = v \circ \alpha$. Поскольку $\operatorname{Im} v \ll M/A$, имеем $\operatorname{Im} u \ll P$. Так как $\operatorname{Im}(1_P + u) + \operatorname{Im} u = P$ и $\operatorname{Im} u \ll P$, то $\operatorname{Im}(1_P + u) = P$. Для любого $x \in \operatorname{Ker}(1_P + u)$ имеем $(1_P + u)(x) = 0$ и, следовательно, $x = -u(x) \in \operatorname{Im} u$. Поскольку $\operatorname{Im} u \ll P$, то $\operatorname{Ker}(1_P + u) \ll P$. Тогда из проективности модуля P следует, что $\operatorname{Ker}(1_P + u) = 0$. Следовательно, $(1_P + u)$ – автоморфизм. Так как $(1_P + u) \circ u(P) = u \circ (1_P + u)(P) = u(P)$, то $(1_P + u)(\operatorname{Im} u) = \operatorname{Im} u$. Пусть $L := \operatorname{Im} u + \operatorname{Ker} \alpha$. Тогда

$$(1_P + u)(L) \leq (1_P + u)(\operatorname{Im} u) + (1_P + u)(\operatorname{Ker} \alpha) \leq \operatorname{Im} u + \operatorname{Ker} \alpha = L.$$

Для любого $a \in L$ имеет место равенство $a = x + u(y)$, где $x \in \operatorname{Ker} \alpha$ и $y \in P$. Тогда $a = x + u(x) + u(y - x) = (1_P + u)(x) + u(y - x)$. Так как $(1_P + u)(\operatorname{Im} u) = \operatorname{Im} u$, то существует элемент $z \in \operatorname{Im} u$ такой, что $u(y - x) = (1_P + u)(z)$. Следовательно, $a = (1_P + u)(x + z)$. Таким образом, $(1_P + u)(L) = L$. Из условия п. 4) следует, что $(1_P + u)(\operatorname{Ker} \alpha) = \operatorname{Ker} \alpha$. Тогда существует эндоморфизм u' модуля M такой, что $u' \circ \alpha = \alpha \circ (1_P + u)$. Положим $v' = u' - 1_M$. Тогда

$$\sigma \circ v' \circ \alpha = \sigma \circ u' \circ \alpha - \sigma \circ \alpha = \sigma \circ \alpha \circ (1_P + u) - \sigma \circ \alpha = \sigma \circ \alpha \circ u = v \circ \alpha.$$

Поскольку α – эпиморфизм, то $\sigma \circ v' = v$. Таким образом, M – мало квазипроективный$^{\#}$ модуль. □

Следствие 45. *Пусть M – правый модуль над совершенным справа кольцом. Следующие условия эквивалентны*:

1) *M является автоморфизм-поднимаемым и мало квазипроективным модулем;*
2) *M является строго автоморфизм-поднимаемым и мало квазипроективным модулем.*

Из результатов нашей статьи и работ [3,6] вытекает следующая схема зависимостей понятий в случае модулей над совершенными справа кольцами:

Квазипроективные модули	$=$	*Эндоморфизм-поднимаемые модули*		
	$\Downarrow$			
Псевдопроективные модули	$=$	*Автоморфизм-коинвариантные модули*	$\Rightarrow$	*Автоморфизм-поднимаемые модули*
	$\Downarrow$			
Мало квазипроективные модули	$=$	*Мало эндоморфизм-поднимаемые модули*		

Из результатов, полученных в нашей работе, вытекает следующая схема зависимостей изученных понятий в общем случае:

$$
\begin{tikzcd}
 & \text{Псевдопроективные модули} \arrow[d, Rightarrow] \arrow[dr, Rightarrow] & \\
\text{Квазипроективные модули} \arrow[ur, Rightarrow] \arrow[d, Rightarrow] & \text{Автоморфизм-поднимаемые модули} & \text{Мало квазипроективные модули} \arrow[d, Rightarrow] \\
\text{Эндоморфизм-поднимаемые модули} \arrow[ur, Rightarrow] \arrow[rr, Rightarrow] & & \text{Мало эндоморфизм-поднимаемые модули}
\end{tikzcd}
$$

Список литературы

[1] R.E. Johnson, E.T. Wong, *Quasi-injective modules and irreducible rings*, J. London Math. Soc. **36**, 260–268 (1961).
DOI: https://doi.org/10.1112/jlms/s1-36.1.260

[2] A.A. Tuganbaev, *Semidistributive modules and rings*, Mathematics and its Applications **449**, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1998.
DOI: https://doi.org/10.1007/978-94-011-5086-6

[3] А.А. Туганбаев, *Характеризации колец, использующие малоинъективные и малопроективные модули*, Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Математика, механика (3), 48–51 (1979).

[4] S.E. Dickson, K.R. Fuller, *Algebras for which every indecomposable right module is invariant in its injective envelope*, Pac. J. Math. **31** (3), 655–658 (1969).
DOI: https://doi.org/10.2140/pjm.1969.31.655

[5] S. Singh, A.K. Srivastava, *Dual automorphism-invariant modules*, J. Algebra **371**, 262–275 (2012).
DOI: https://doi.org/10.1016/j.jalgebra.2012.08.012

[6] A.N. Abyzov, T.C. Quynh, *Lifting of automorphisms of factor modules*, Comm. Algebra **46** (11), 5073–5082 (2018).
DOI: https://doi.org/10.1080/00927872.2018.1461884

[7] A.N. Abyzov, T.C. Quynh, N.T.T. Ha, T. Yildirim, *Modules close to the automorphism invariant and coinvariant*, J. Algebra Appl. **18** (12), art. 1950235 (2019).
DOI: https://doi.org/10.1142/S0219498819502359

[8] А.Н. Абызов, Т.Д. Буй, *Существенно квазиинъективные модули и их прямые суммы*, Изв. вузов. Матем. (7), 9–23 (2024).
DOI: https://doi.org/10.26907/0021-3446-2024-7-9-23

[9] А.А. Туганбаев, *Теория колец. Арифметические модули и кольца*, МЦНМО, М., 2009.

[10] R. Wisbauer, *Foundations of module and ring theory. A handbook for study and research*, Gordon and Breach Science Publishers, Philadelphia, PA, 1991.
DOI: https://doi.org/10.1201/9780203755532

[11] Ф. Каш, *Модули и кольца*, Мир, М., 1981.

[12] J. Clark, C. Lomp, N. Vanaja, R. Wisbauer, *Lifting modules. Supplements and projectivity in module theory*, Birkhäuser Verlag, Basel, 2006.
DOI: https://doi.org/10.1007/3-7643-7573-6

[13] A.N. Abyzov, B.T. Dat, T.C. Quynh, *Small dual-ADS modules, small ADS# and small ADS* modules*, Lobachevskii J. Math. **44** (12), 5097–5115 (2023).
DOI: https://doi.org/10.1134/S1995080223120028

[14] P.A. Guil Asensio, D. Keskin Tütüncü, B. Kaleboğaz, A.K. Srivastava, *Modules which are coinvariant under automorphisms of their projective covers*, J. Algebra **466**, 147–152 (2016).
DOI: https://doi.org/10.1016/j.jalgebra.2016.08.004

[15] A.A. Tuganbaev, *Arithmetical rings and endomorphisms*, De Gruyter, Berlin, 2019.
DOI: https://doi.org/10.1515/9783110659825

[16] А.Н. Абызов, Ч.К. Куинь, А.А. Туганбаев, *Модули, инвариантные относительно автоморфизмов и идемпотентных эндоморфизмов своих оболочек и накрытий*, Итоги науки и техн. Соврем. мат. и ее прил. Темат. обз. **159**, 3–45 (2019).
URL: https://www.mathnet.ru/rus/into414

[17] A.A. Tuganbaev, *Automorphism-liftable modules*, J. Algebra Appl. **21** (6), art. 2250106 (2022).
DOI: https://doi.org/10.1142/S0219498822501067

Адель Наилевич Абызов
Казанский (Приволжский) федеральный университет,
ул. Кремлевская, д. 18, г. Казань, 420008, Россия,
e-mail: Adel.Abyzov@kpfu.ru

Буй Тиен Дат
Казанский (Приволжский) федеральный университет,
ул. Кремлевская, д. 18, г. Казань, 420008, Россия,
Факультет информационных технологий,
Технологический университет Кантхо,
ул. Нгуен Ван Ку, д. 256, г. Кантхо, Вьетнам,
e-mail: btdat@ctuet.edu.vn

Volume 2, Issue 3
pp. 4–28 (2024)

UDC 512.55
MSC 18G05

Small quasi-projective modules

A.N. Abyzov, T.D. Bui

Abstract. We study small quasi-projective modules and closely related classes of modules. The concept of a small quasi-projective module is dual to the concept of an essentially quasi-injective module, which has recently been studied in several works. It is shown that over right perfect rings, the class of small quasi-projective right modules coincides with a number of classes of right modules close to projective modules, which are studied in the article. As a consequence of the obtained results, the well-known A.A. Tuganbaev's theorem on the coincidence of the classes of quasi-projective right modules and endomorphism-lifting right modules over right perfect rings is presented. Also, characterizations are obtained for modules M, for which in the category $\sigma[M]$ every (finitely generated, cyclic, semisimple, simple) module is small projective in $\sigma[M]$.

Keywords: essentially injective modules, small projective modules, small endomorphism-liftable modules, perfect rings.

DOI: 10.26907/2949-3919.2024.3.4-28

References

[1] R.E. Johnson, E.T. Wong, *Quasi-injective modules and irreducible rings*, J. London Math. Soc. **36**, 260–268 (1961).
DOI: https://doi.org/10.1112/jlms/s1-36.1.260

[2] A.A. Tuganbaev, *Semidistributive modules and rings*, Mathematics and its Applications **449**, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1998.
DOI: https://doi.org/10.1007/978-94-011-5086-6

[3] A.A. Tuganbaev, *Characterizations of rings using skew-injective and skew-projective modules*, Moscow Univ. Math. Bull. (3), 48–51 (1979) [in Russian].

[4] S.E. Dickson, K.R. Fuller, *Algebras for which every indecomposable right module is invariant in its injective envelope*, Pac. J. Math. **31** (3), 655–658 (1969).
DOI: https://doi.org/10.2140/pjm.1969.31.655

Acknowledgements. The work is supported by the Russian Science Foundation (grant no. 22-21-00267).

Received: 07 May 2024. Accepted: 10 August 2024. Published: 17 October 2024.

[5] S. Singh, A.K. Srivastava, *Dual automorphism-invariant modules*, J. Algebra **371**, 262–275 (2012).
DOI: https://doi.org/10.1016/j.jalgebra.2012.08.012

[6] A.N. Abyzov, T.C. Quynh, *Lifting of automorphisms of factor modules*, Comm. Algebra **46** (11), 5073–5082 (2018).
DOI: https://doi.org/10.1080/00927872.2018.1461884

[7] A.N. Abyzov, T.C. Quynh, N.T.T. Ha, T. Yildirim, *Modules close to the automorphism invariant and coinvariant*, J. Algebra Appl. **18** (12), art. 1950235 (2019).
DOI: https://doi.org/10.1142/S0219498819502359

[8] A.N. Abyzov, T.D. Bui, *Essentially quasi-injective modules and their direct sums*, Russian Mathematics (Iz. VUZ) (7), 9–23 (2024) [in Russian].
DOI: https://doi.org/10.26907/0021-3446-2024-7-9-23

[9] A.A. Tuganbaev, *Ring theory. Arithmetic modules and rings*, MCCME, Moscow, 2009 [in Russian].

[10] R. Wisbauer, *Foundations of module and ring theory. A handbook for study and research*, Gordon and Breach Science Publishers, Philadelphia, PA, 1991.
DOI: https://doi.org/10.1201/9780203755532

[11] F. Kasch, *Modules and rings*, London Mathematical Society Monographs **17**, Academic Press, Inc., London–New York, 1982.

[12] J. Clark, C. Lomp, N. Vanaja, R. Wisbauer, *Lifting modules. Supplements and projectivity in module theory*, Birkhäuser Verlag, Basel, 2006.
DOI: https://doi.org/10.1007/3-7643-7573-6

[13] A.N. Abyzov, B.T. Dat, T.C. Quynh, *Small dual-ADS modules, small ADS$^{\#}$ and small ADS* modules*, Lobachevskii J. Math. **44** (12), 5097–5115 (2023).
DOI: https://doi.org/10.1134/S1995080223120028

[14] P.A. Guil Asensio, D. Keskin Tütüncü, B. Kaleboğaz, A.K. Srivastava, *Modules which are coinvariant under automorphisms of their projective covers*, J. Algebra **466**, 147–152 (2016).
DOI: https://doi.org/10.1016/j.jalgebra.2016.08.004

[15] A.A. Tuganbaev, *Arithmetical rings and endomorphisms*, De Gruyter, Berlin, 2019.
DOI: https://doi.org/10.1515/9783110659825

[16] A.N. Abyzov, T.C. Quynh, A.A. Tuganbaev, *Modules that are invariant with respect to automorphisms and idempotent endomorphisms of their hulls and covers*, J. Math. Sci. 256 (3), 235–277 (2021).
DOI: https://doi.org/10.1007/s10958-021-05427-x]

[17] A.A. Tuganbaev, *Automorphism-liftable modules*, J. Algebra Appl. **21** (6), art. 2250106 (2022).
DOI: https://doi.org/10.1142/S0219498822501067

Adel Nailevich Abyzov
Kazan Federal University,
18 Kremlyovskaya str., Kazan 420008, Russia,
e-mail: Adel.Abyzov@kpfu.ru

Bui Tien Dat
Kazan Federal University,
18 Kremlyovskaya str., Kazan 420008, Russia,
Faculty of Information Technology,
Can Tho University of Technology,
256 Nguyen Van Cu str., Can Tho, Vietnam,
e-mail: btdat@ctuet.edu.vn