Том 2, Выпуск 3
Стр. 29–45 (2024)

УДК 510.54, 510.57
MSC 03D45, 03D30

Полугрупповая C^*-алгебра, порожденная свободным произведением абелевых полугрупп

С.А. Григорян, Т.А. Григорян

Аннотация. Исследуются полугрупповые C^*-алгебры, порожденные регулярным представлением свободных произведений абелевых полугрупп. Приведен критерий простоты таких алгебр, описаны характеры, градуировка и ряд других свойств.

Ключевые слова: свободная группа, свободная полугруппа, C^*-алгебра, спектр, идеал.

DOI: 10.26907/2949-3919.2024.3.29-45

Введение

Теория полугрупповых алгебр берет начало с работы Л.А. Кобурна [1], в которой было показано, что все C^*-алгебры, порожденные неунитарной изометрией, канонически изоморфны. С этой работой возник интерес к исследованию полугрупповых C^*-алгебр. Начальные статьи посвящались различным обобщениям теоремы Кобурна. В работах Р.Г. Дугласа [2], Ж. Мерфи [3] теорема Кобурна обобщена на положительные конусы упорядоченных абелевых групп.

Позже А. Ника [4] распространил теорему Кобурна на C^*-алгебры, порожденные ковариантными изометрическими представлениями квази-решетчатых упорядоченных полугрупп. Важным примером квази-решетчатых полугрупп является свободное произведение абелевых упорядоченных полугрупп, в частности, полугруппа $F_n^+ = \mathbb{Z}_+ * \mathbb{Z}_+ * \ldots * \mathbb{Z}_+$, образованная свободным произведением неотрицательных целых чисел. В дальнейшем были изучены и другие задачи, возникающие в полугрупповых C^*-алгебрах (см. [5–10]).

В данной статье исследуются свойства C^*-алгебр, порожденных регулярными представлениями свободных произведений абелевых полугрупп. Простейшими примерами таких алгебр являются алгебра Теплица–Кунца $\mathcal{TO}_n$, порожденная регулярным представлением свободной полугруппы F_n^+, а также C^*-алгебры, которые порождаются индуктивными пределами последовательности полугрупп F_n^+ (см. [11,12]). В нашей работе основное внимание уделяется описанию свойств инверсной полугруппы мономов порожденной изометрическими регулярными представлениями свободной полугруппы. Вводится понятие двух типов индексов монома, что позволяет получить расслоение Фелла как по локальной группе, так и по абелевой группе. Приводится критерий простоты C^*-алгебр, порожденных регулярным представлением свободного произведения абелевых полугрупп.

Поступила: 26.08.2024. Принята: 24.09.2024. Опубликована: 17.10.2024.

1. Свободное произведение абелевых групп

В данном параграфе приведем ряд необходимых сведений из теории групп, на которые будем ссылаться в дальнейшем.

Пусть $\Gamma_1, \dots, \Gamma_n$ $(n > 1)$ – дискретные абелевы группы, не содержащие подгрупп конечного порядка. Через $\mathcal{T} = \Gamma_1 * \dots * \Gamma_n$ обозначим свободное произведение групп Γ_i, $1 \le i \le n$. По определению, $\mathcal{T}$ состоит из набора $a = a_{i_1} * a_{i_2} * \dots * a_{i_m}$, $a_{i_k} \in \Gamma_{i_k}$, $i_k \ne i_{k+1}$. Каждый элемент $a_{i_k} \in \Gamma_{i_k}$ называется буквой, а произведение букв

$$\mathbf{a} = a_{i_1} * a_{i_2} * \dots * a_{i_m}, \quad a_{i_k} \in \Gamma_{i_k},\ i_k \ne i_{k+1},$$

называется словом. Произведением слова $\mathbf{a}$ на слово $\mathbf{b} = b_{j_1} * b_{j_2} * \dots * b_{j_r}$ называется слово:

$$\mathbf{a} * \mathbf{b} = \begin{cases} a_{i_1} * a_{i_2} * \dots * a_{i_m} * b_{j_1} * b_{j_2} * \dots * b_{j_r}, \text{ если } i_m \ne j_1; \\ a_{i_1} * a_{i_2} * \dots * (a_{i_m} \cdot b_{j_1}) * b_{j_2} * \dots * b_{j_r}, \text{ если } i_m = j_1. \end{cases}$$

Обратное к слову $\mathbf{a} = a_{i_1} * a_{i_2} * \dots * a_{i_m}$ есть слово $\mathbf{a^{-1}} = a_{i_m}^{-1} * a_{i_{m-1}}^{-1} * \dots * a_{i_1}^{-1}$. Единица e в группе $\mathcal{T}$ отождествляется с единицами e_i, $i = 1, \dots, n$, групп Γ_i.

Группа $\mathcal{T}$ является универсальным объектом в категории групп.

Пусть $l = (j_1, j_2, \dots, j_r)$ – подмножество множества $(1, 2, \dots, n)$.

Определим гомоморфизм $\omega_l : \mathcal{T} \to \mathcal{T}'$, где $\mathcal{T}' = \Gamma_{j_1} * \Gamma_{j_2} * \dots * \Gamma_{j_r}$, полагая для буквы $a_{i_k} \in \Gamma_{i_k}$

$$\omega_l(a_{i_k}) = \begin{cases} e, \text{ если } i_k \notin (j_1, j_2, \dots, j_r), \\ a_{i_k}, \text{ если } i_k \in (j_1, j_2, \dots, j_r). \end{cases}$$

Расширим отображение ω_l на $\mathcal{T}$:

$$\omega_l(\mathbf{a}) = \omega_l(a_{i_1}) * \omega_l(a_{i_2}) * \dots * \omega_l(a_{i_m}),$$

для $\mathbf{a} = a_{i_1} * a_{i_2} * \dots * a_{i_m}$. Очевидно, $\omega_l : \mathcal{T} \to \mathcal{T}'$ – гомоморфизм и $\mathcal{T} = \mathcal{T}' * \mathcal{T}''$, где $\mathcal{T}'' = \Gamma_{i_1} * \Gamma_{i_2} * \dots * \Gamma_{i_{n-r}}$ и $i_k \notin (j_1, j_2, \dots, j_r)$.

С помощью отображения $\omega_l : \mathcal{T} \to \mathcal{T}'$ определим отображение $\tilde{\omega}_l : \mathcal{T} \to \Gamma'$, где Γ' есть абелева группа – декартово произведение групп Γ_{j_i}, $i = 1, 2, \dots, r$. Для $\mathbf{a} \in \mathcal{T}$, полагаем:

$$\tilde{\omega}_l(\mathbf{a}) = \omega_l(a_{i_1}) \cdot \omega_l(a_{i_2}) \cdot \ldots \cdot \omega_l(a_{i_m}). \tag{1}$$

Таким образом определяется гомоморфизм $\nu : \mathcal{T} \to \Gamma$:

$$\nu(a_{i_1} * a_{i_2} * \dots * a_{i_m}) = (b_1, b_2, \dots, b_n),$$

где b_i – произведение тех букв в слове $\mathbf{a}$, которые принадлежат Γ_i.

Наделим группу $\Gamma = \Gamma_1 \times \Gamma_2 \times \ldots \times \Gamma_n$ дискретной топологией. Пусть G – группа характеров группы Γ, т. е. гомоморфизмов Γ в единичную окружность $\mathbb{T}$. По теореме Понтрягина, G – компактная абелева группа, группа ее характеров изоморфна Γ.

Группа G есть декартово произведение групп характеров $G = G_1 \times G_2 \times \ldots \times G_n$, где G_i есть группа характеров группы Γ_i. В дальнейшем через

$$\chi^{\mathbf{a}}(g) = \chi^{a_1}(g_1) \cdot \chi^{a_2}(g_2) \cdot \ldots \cdot \chi^{a_n}(g_n), \tag{2}$$

$g = (g_1, g_2, \ldots, g_n) \in G$, $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n) \in \Gamma$, будем обозначать характер группы G, соответствующий элементу $\mathbf{a}$.

Наделив группу $\mathcal{T}$ дискретной топологией, можно показать, что G также является группой характеров группы $\mathcal{T}$ и, если $\mathbf{a} = a_{i_1} * \ldots * a_{i_m}$, $m \in \mathbb{N}$, тогда

$$\chi^{\mathbf{a}}(g) = \chi^{a_{i_1}}(g_{i_1}) \cdot \chi^{a_{i_2}}(g_{i_2}) \cdot \ldots \cdot \chi^{a_{i_m}}(g_{i_m})$$

есть характер группы G, соответствующий элементу $\mathbf{a} = a_{i_1} * \ldots * a_{i_m} \in \mathcal{T}$.

Применяя теорему Понтрягина, получим следующее

Предложение 1. *Группа характеров дискретной группы $\mathcal{T}$ есть компактная группа G, а группа характеров группы G изоморфна группе Γ.*

Сравнивая (1) и (2), получим

$$\chi^{\mathbf{a}}(g) = \chi^{\nu(\mathbf{a})}(g), \quad \mathbf{a} \in \mathcal{T}.$$

Локальной группой называется набор $\mathbf{g} = (g, g^2, m, i)$, где g – дискретное множество, g^2 – подмножество в декартовом произведении $g \times g$, $m : g^2 \to g$ и $i : g \to g$ два отображения такие, что

1) если $(a, b), (b, c) \in g^2$ и $(m(a, b), c), (a, m(b, c)) \in g^2$, тогда $m(m(a, b), c) = m(a, m(b, c))$;

2) если $(a, b) \in g^2$, тогда $(i(a), i(b)) \in g^2$ и $m(i(a), i(b)) = i(m(b, a))$;

3) существует такой элемент $e \in g$, что $(e, a), (a, e) \in g^2$ и $m(a, e) = m(e, a) = a$;

4) $(a, i(a)), (i(a), a) \in g^2$ и $m(a, i(a)) = m(i(a), a) = e$.

Элемент e называется единицей $\mathbf{g}$, отображение $m : g^2 \to g$ – произведением, а $i : g \to g$ – взятием обратного.

Локальная группа называется глобализуемой, если она вкладывается в группу. Каждая симметричная окрестность группы является локальной группой.

Пусть $P = S_1 * S_2 * \ldots * S_n$ – подполугруппа группы $\mathcal{T}$, порожденная свободным произведением подполугрупп S_i группы Γ_i. Предположим, что каждая подполугруппа S_i, $1 \leq i \leq n$, не содержит нетривиальную группу и порождает группу Γ_i, т. е. $\Gamma_i = S_i \cdot S_i^{-1}$, $S_i \cap S_i^{-1} = \{e_i\}$, где e_i – единица в Γ_i, $S_i^{-1} = \{a_i^{-1} \in \Gamma_i : a_i \in S_i\}$. Полагая

$$P^{-1} = S_1^{-1} * S_2^{-1} * \ldots * S_n^{-1},$$

получим $\mathcal{T} = P * P^{-1}$.

Гомоморфизм полугруппы P в единичный диск $\mathcal{D}$ называется полухарактером. Полухарактер называется характером, если образ гомоморфизма есть единичная окружность $\mathbb{T}$. Группа характеров полугруппы P совпадает с $G = G_1 \times G_2 \times \ldots \times G_n$.

Каждая полугруппа S_i задает частичный порядок на Γ_i: $a_i \prec b_i$, если найдется $c_i \in S_i$ такой, что $c_i \cdot a_i = b_i$. Этот порядок распространяется и на $\mathcal{T}$: $\mathbf{a} \prec \mathbf{b}$, если найдется $\mathbf{c} \in P$ такой, что $\mathbf{a} * \mathbf{c} = \mathbf{b}$.

Полугруппа S_i называется конусом в Γ, если $\Gamma_i = S_i \cup S_i^{-1}$. В этом случает принято писать $S_i = \Gamma_i^+$. Свободную полугруппу P порожденную конусами Γ_i^+, $i = 1, \ldots, n$, будем обозначать $P^+ = \Gamma_1^+ * \ldots * \Gamma_n^+$.

Свободная группа F_n порожденная множеством мощности n изоморфна группе $\mathbb{Z} * \ldots * \mathbb{Z}$ – свободному произведению n экземпляров $\mathbb{Z}$. Группа характеров этой группы есть $\mathbb{T}^n$ – n-мерный тор. Полугруппа $F_n^+ = \mathbb{Z}_+ * \ldots * \mathbb{Z}_+$ порождает группу F_n. Поэтому ее группа характеров есть $\mathbb{T}^n$, а полугруппа полухарактеров изоморфна произведению дисков $\mathcal{D}^n$.

2. Инверсные полугруппы

Пусть $l^2(P)$ – гильбертово пространство квадратично суммируемых функций на P со скалярным произведением

$$(f, g) = \sum_{\mathbf{a} \in P} f(\mathbf{a})\overline{g(\mathbf{a})}, \quad f, g \in l^2(P).$$

Семейство функций $\{e_{\mathbf{a}}; \mathbf{a} \in P\}$, $e_{\mathbf{a}}(\mathbf{b}) = \sigma_{\mathbf{a},\mathbf{b}}$ – символ Кронекера, образуют ортонормированный базис на $l^2(P)$. Элемент базиса $\{e_{\mathbf{a}}; \mathbf{a} \in P\}$, соответствующий единице $e \in P$, будем обозначать e_0 и называть вакуумным, так как $T_{\mathbf{a}} e_0 = e_{\mathbf{a}}$, для любого $\mathbf{a} \in P$.

Регулярным представлением полугруппы P на $l^2(P)$ называется отображение $\mathbf{a} \to T_{\mathbf{a}}$, $\mathbf{a} \in P$, где $T_{\mathbf{a}}$ изометрически линейный оператор на $l^2(P)$ такой, что $T_{\mathbf{a}} e_{\mathbf{b}} = e_{\mathbf{a}*\mathbf{b}}$. Если $\mathbf{a} = a_{i_1} * a_{i_2} * \ldots * a_{i_m}$, тогда $T_{\mathbf{a}} = T_{a_{i_1}} \cdot T_{a_{i_2}} \cdot \ldots \cdot T_{a_{i_m}}$.

Конечное произведение операторов $T_{\mathbf{a}}$ и $T_{\mathbf{b}}^*$, $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in P$, где $T_{\mathbf{b}}^*$ – оператор сопряженный к $T_{\mathbf{b}}$, называется мономом. Заметим, что сопряженным к $T_{\mathbf{a}} = T_{a_{i_1}} \cdot T_{a_{i_2}} \cdot \ldots \cdot T_{a_{i_m}}$ является оператор $T_{\mathbf{a}}^* = T_{a_{i_m}}^* \cdot \ldots \cdot T_{a_{i_2}}^* \cdot T_{a_{i_1}}^*$. Пусть $M(P)$ множество ненулевых мономов. Это множество есть частичная инверсная полугруппа с единицей $T_e = E$. Это означает, что если $W_1, W_2 \in M(P)$ и $W_1 \cdot W_2 \neq 0$, тогда $W_1 \cdot W_2 \in M(P)$.

Инверсность $M(P)$ означает, что

$$W^* W W^* = W^* \quad \text{и} \quad W W^* W = W.$$

Множество $E(P) = \{W \in M(P) : W = W^*\}$ есть коммутативная подполугруппа в $M(P)$ (см. [9, с. 21]).

Пусть $M(S_i)$ – полугруппа мономов из $M(P)$, которые порождаются операторами $T_{a_i}, T^*_{b_i}$, $a_i, b_i \in S_i$, $i = 1, 2, \dots, n$. Мономы в $M(P)$ принадлежащие $M(S_i)$, $1 \le i \le n$, будем называть элементарными мономами.

Предложение 2. *Каждый моном $W \in M(P)$ однозначно раскладывается в произведения элементарных мономов:*

$$W = W_{i_1} \cdot W_{i_2} \cdot \ldots \cdot W_{i_n}, \quad W_{i_k} \in M(S_{i_k}).$$

Число r будем называть длиной монома $W = W_{i_1} \cdot W_{i_2} \cdot \ldots \cdot W_{i_r}$ и обозначать $d(W) = r$.

Отметим, если $S_i = \Gamma_i^+$ – конус в Γ_i, тогда каждый элементарный моном в $M(S_i)$ представим в виде $T_{a_i} T^*_{b_i}$, $a_i, b_i \in S_i$. Если S_i задает частичный порядок на Γ_i, тогда существуют a_i и $b_i \in \Gamma_i$ такие, что мономы $T^*_{a_i} T_{b_i}$ и $T^*_{b_i} T_{a_i}$ не являются изометриями.

Предложение 3.

1) *Предположим, для монома $W_i \in M(S_i)$ справедливо $W_i e_0 = e_{a_i}$, $a_i \in S_i$, где e_0 – вакуумный элемент. Тогда $W_i = T_{a_i}$. В частности, если $W_i T_{a_i} = E$, $W_i \in M(S_i)$, тогда $W_i = T^*_{a_i}$.*
2) *Пусть в мономе $W \in M(P)$, $W = W_{i_1} \cdot W_{i_2} \cdot \ldots \cdot W_{i_m}$, i_k-й элемент W_{i_k} равен $T_{a_{i_k}}$, $a_{i_k} \in S_{i_k}$. Тогда $W_{i_{k-1}} = T_{a_{i_{k-1}}}$, $a_{i_{k-1}} \in S_{i_{k-1}}$.*
3) *Пусть элементарный моном $W_{i_k} \in M(S_{i_k})$ не принадлежит полугруппе $\{T_{a_{i_k}}\}$, $a_{i_k} \in S_{i_k}$. Тогда $W_{i_{k+1}} = T^*_{a_{i_{k+1}}}$, $a_{i_{k+1}} \in S_{i_{k+1}}$.*
4) *Пусть в представлении $W = W_{i_1} \cdot W_{i_2} \cdot \ldots \cdot W_{i_m}$ элементарный моном $W_{i_k} \in M(S_{i_k})$ не принадлежит полугруппам $\{T_{a_{i_k}}\}$ и $\{T^*_{a_{i_k}}\}$, $a_{i_k} \in S_{i_k}$, $1 \le k \le m$. Тогда $W = T_{\mathbf{a}} W_{i_k} T^*_{\mathbf{b}}$, где $\mathbf{a} \in S_{i_1} * \ldots S_{i_{k-1}}$, $\mathbf{b} \in S_{i_{k+1}} * \ldots * S_{i_m}$.*
   Верно и обратное: для любых $\mathbf{a} \in S_{i_1} * \ldots S_{i_{k-1}}$, $\mathbf{b} \in S_{i_{k+1}} * \ldots * S_{i_m}$ и $W_{i_k} \in M(S_{i_k})$ моном $W = T_{\mathbf{a}} W_{i_k} T^*_{\mathbf{b}}$ принадлежит $M(P)$.

Доказательство. 1) Для простоты, предположим $W_i = T_{a_1} T^*_{b_1} T_{a_2} T^*_{b_2}$, $a_1, a_2, b_1, b_2 \in S_i$. Из равенства $T^*_{b_2} e_0 = 0$, когда b_2 не равно единице полугруппы S_i, следует $e_2 = b$ и $W_i = T_{a_1} T^*_{b_1} T_{a_2}$. Поэтому, $T^*_{b_1} T_{a_2} e_0 \ne 0$, т. е. $b_1 \prec a_2$. Следовательно, $W_i = T_{a_1} T_c$, где $cb_1 = a_2$, $a_1 c = a_0$.

2) Пусть $W_{i_{k-1}} = V T^*_{b_{i_{k-1}}} T_{a_{i_{k-1}}}$, $b_{i_{k-1}}$ и $a_{i_{k-1}}$ несравнимы, $V \in M(S_{i_{k-1}})$. Покажем, что $W_{i_{k-1}} T_{a_{i_k}} = 0$. Допустим противное, тогда найдется $e_b \in \{e_a\}_{a \in P}$ такое, что $W_{i_{k-1}} T_{a_{i_k}} e_b \ne 0$, т. е. $(b^{-1}_{i_{k-1}} a^{-1}_{i_{k-1}}) * a_{i_k} * b \in P$ или, что то же, $b^{-1}_{i_{k-1}} a^{-1}_{i_{k-1}} \in S_{i_{k-1}}$. Следовательно, $b_{i_{k-1}} \prec a_{i_{k-1}}$. Пришли к противоречию.

3) и 4) следуют из 2). □

Отметим, что если $S_i = \Gamma_i^+$ – конус в Γ_i, для всех i, то $W = T_{\mathbf{a}} T^*_{\mathbf{b}}$, $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in P$, $W \in M(P)$.

Пусть $P_k = S_1 * S_2 * \ldots * S_k$ подполугруппа полугруппы P. Обозначим через $M(P_k)$ частичную инверсную подполугруппу полугруппы $M(P)$ порожденную элементарными мономами W_i, $1 \le i \le k$.

Предложение 4. *Существует гомоморфизм* $\gamma_k : M(P) \to M(P_k)$.

Доказательство. Определим операцию сокращения элементарных мономов. Пусть задан моном

$$W = T_{\mathbf{a}} W_{i_k} T^*_{\mathbf{b}} = T_{a_{i_1}} T_{a_{i_2}} \dots T_{a_{i_{l-1}}} W_{i_l} T^*_{b_{i_{l+1}}} \dots T^*_{b_r}.$$

Операция сокращения заключается в следующем: в произведении элементарных мономов заменим на E те, которые не принадлежат $M(P_k)$. Получим ненулевой моном $W' = T_{\mathbf{a}'} W'_{i_l} T^*_{\mathbf{b}'}$, где $\mathbf{a}', \mathbf{b}' \in P_k$, $W'_{i_l} = W_{i_l}$, если $1 \le i_l \le k$.

Учитывая, что каждый моном $W \in M(P)$ имеет вид $W = T_{\mathbf{a}} W_{i_l} T^*_{\mathbf{b}}$, можно показать, что отображение $W \to W'$ из $M(P)$ в $M(P_k)$ есть гомоморфизм. □

В дальнейшем этот гомоморфизм будем называть операцией сокращения и обозначать $\gamma_k : M(P) \to M(P_k)$.

Определим отображение $\tau_i : M(S_i) \to \Gamma_i$, полагая

$$\tau_i(T_{a_1} \cdot T^*_{b_1} \cdot T_{a_2} \cdot T^*_{b_2} \cdot \ldots \cdot T_{a_k} \cdot T^*_{b_k}) = (a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_k)(b_1 \cdot b_2 \cdot \ldots \cdot b_k)^{-1}.$$

Это отображение есть гомоморфизм инверсной полугруппы на группу. Ядро этого гомоморфизма состоит из идемпотентов полугруппы $M(S_i)$.

Предложение 5. *Отображение* $\tau : M(P) \to \mathcal{T}$:

$$\tau(W_{i_1} \cdot \ldots \cdot W_{i_m}) = \tau_{i_1}(W_{i_1}) * \ldots * \tau_{i_m}(W_{i_m}),\ W_{i_k} \in M(S_{i_k})$$

есть гомоморфизм частичной инверсной полугруппы на локальную группу в $\mathcal{T}$.

Доказательство. Достаточно заметить, что слова $b^{-1} * a$, $b \in S_i$, $a \in S_j$, $i \neq j$, не принадлежат $\tau(M(P))$. □

Следствие 6. *Ядро* $\operatorname{Ker} \tau$ *гомоморфизма* $\tau : M(P) \to \mathcal{T}$ *состоит из идемпотентов.*

Отметим, что если $S_i = \Gamma_i^+$, тогда ядро состоит из операторов $T_{\mathbf{a}} \cdot T^*_{\mathbf{a}}$, $\mathbf{a} \in P$. В противном случае, из несравнимости a и b, $a, b \in S_i$, следует, что $T^*_b T_a T^*_a T_b$ – идемпотент в $M(S_i)$.

Суперпозиция

$$\nu \circ \tau : M(P) \to \Gamma,$$

где ν – гомоморфизм (1), определяет гомоморфизм из $M(P)$ на Γ.

Для монома $W \in M(P)$ можно определить два индекса. Слово $\tau(W)$ будем называть $\mathcal{T}$-индексом монома W, а элемент $\nu \circ \tau(W)$ – Γ-индексом.

Наделим $M(P)$ дискретной топологией. Характером полугруппы $M(P)$ назовем частичный гомоморфизм из $M(P)$ на единичную окружность $\mathbb{T}$. Сужение характера на полугруппу $M(S_i)$ является характером этой полугруппы. Группа характеров $M(S_i)$ есть

G_i – группа характеров Γ_i и $G = G_1 \times \ldots \times G_n$ – группа характеров полугруппы $M(P)$. Полагая для характеров

$$\chi^W(g) = \chi^{\nu\circ\tau(W)}(g), \quad W \in M(P),\ g \in G, \tag{3}$$

в дальнейшем будем писать

$$g(W) = \chi^W(g) = \chi^{\tau(W)}(g).$$

Пусть $\operatorname{Aut} M(P)$ – группа автоморфизмов полугруппы $M(P)$. Определим представление $\sigma : G \to \operatorname{Aut} M(P)$, полагая $\sigma_g(W) = \chi^W(g)W$.

Предложение 7. *Отображение $\sigma : G \to \operatorname{Aut} M(P)$ есть представление группы G в группу автоморфизмов $M(P)$.*

Доказательство. Пусть W_1, $W_2 \in M(P)$ такие, что $W_1 \cdot W_2 \in M(P)$. Тогда

$$\sigma_g(W_1 \cdot W_2) = \chi^{W_1 \cdot W_2}(g)W_1 \cdot W_2 = \chi^{W_1}(g)W_1 \cdot \chi^{W_2}(g)W_2 = \sigma_g(W_1) \cdot \sigma_g(W_2).$$

□

Пространство $M_0(P)$ неподвижных мономов для представления σ_g, $g \in G$, есть частичная инволютивная полугруппа, состоящая из тех мономов W, для которых $\chi^W \equiv 1$.

Замечание. Частично инверсная полугруппа $M(P)$ называется инверсной оболочкой полугруппы P ([9, с. 54]).

3. Алгебра $C_r^*(P)$

Пространство $\mathcal{L}(P)$ всех конечных линейных комбинаций мономов из $M(P)$ образует инволютивную подалгебру алгебры $B(l^2(P))$ всех ограниченных линейных операторов на $l^2(P)$. Замыкание $\mathcal{L}(P)$ в операторной норме есть приведенная полугрупповая C^*-алгебра $C_r^*(P)$ порожденная регулярным представлением полугруппы P.

Теорема 8. *Существует точное представление $\sigma : G \to \operatorname{Aut} C_r^*(P)$ компактной абелевой группы $G = G_1 \times \ldots \times G_n$ в группу автоморфизмов $\operatorname{Aut} C_r^*(P)$.*

Доказательство. Пусть $U(P)$ – группа унитарных операторов на $l^2(P)$. Определим представление $U : G \to U(P)$, полагая, на базисе $\{e_{\mathbf{a}}\}_{\mathbf{a}\in P}$:

$$U_g e_{\mathbf{a}} = \chi^{\mathbf{a}}(g)e_{\mathbf{a}}.$$

Покажем, что алгебра $C_r^*(P)$ инвариантна для внутреннего автоморфизма $\operatorname{Ad} U_g$ алгебры $B(l^2(P))$. Для этого достаточно показать, что операторы $T_{\mathbf{a}}$, $\mathbf{a} \in P$, собственные векторы автоморфизма $\operatorname{Ad} U_g$. Пусть $e_{\mathbf{b}} \in \{e_{\mathbf{a}}\}_{\mathbf{a}\in P}$. Тогда

$$\operatorname{Ad} U_g(T_{\mathbf{a}})(e_{\mathbf{b}}) = U_g T_{\mathbf{a}} U_{g^{-1}}(e_{\mathbf{b}}) = \chi^{\mathbf{b}}(g^{-1}) T U_g T_{\mathbf{a}} e_{\mathbf{b}} = \chi^{\mathbf{b}}(g^{-1})\chi^{\mathbf{a}*\mathbf{b}}(g) e_{\mathbf{a}*\mathbf{b}} = \chi^{\mathbf{a}}(g) T_{\mathbf{a}} e_{\mathbf{b}}.$$

Таким образом,

$$U_g T_{\mathbf{a}} U_{g^{-1}} = \chi^{\mathbf{a}}(g) T_{\mathbf{a}}.$$

Поэтому, см. (3),

$$U_g W U_{g^{-1}} = \chi^W(g) W, \quad W \in M(P)$$

и отображение $g \to \operatorname{Ad} U_g$ есть представление группы G в группу $\operatorname{Aut} C_r^*(P)$.

Для доказательства непрерывности достаточно показать, что $C_r^*(P)$-значная функция $A(g) = U_g A U_g^*$, $A \in C_r^*(P)$, равномерно непрерывна на G. Функция

$$W(g) = U_g W U_g^* = \chi^W(g) W, \quad W \in M(P),$$

равномерно непрерывна на G. Поэтому и функции $B(g) = U_g B U_g^*$, $B \in \mathcal{L}(P)$, равномерно непрерывны. Следовательно, $A(g)$, $A \in \overline{\mathcal{L}(P)} = C_r^*(P)$, равномерно непрерывна на G. □

Пусть $C(G; C_r^*(P))$ – алгебра всех равномерно непрерывных функций на G со значениями в $C_r^*(P)$. Из теоремы 8 следует, что отображение $A \to A(g) = U_g A U_g^*$ есть изоморфизм между алгеброй $C_r^*(P)$ и алгеброй $\mathcal{A} = \{A(g) \in C(G; C_r^*(P)) : A \in C_r^*(P)\}$. Каждая функция $A(g) \in \mathcal{A}$ раскладывается в ряд Фурье

$$A(g) \simeq \sum_{b\in\Gamma} A_b(g),$$

где $A_b(g) = \chi^b(g) A_b$, $A_b = \displaystyle\int_G A(g)\bar{\chi}^b(g)d\mu$.

Пусть $\mathcal{B}_b$ – замкнутое подпространство в $C_r^*(P)$ порожденное линейными комбинациями элементов A_b, $b \in \Gamma$. Заметим, $U_g A_b U_g^* = \chi^b(g) A_b$. По аналогии с классической теорией рядов Фурье:

1) $\mathcal{B}_a \cdot \mathcal{B}_b \subset \mathcal{B}_{a\cdot b}$;
2) $\mathcal{B}_b^* = \mathcal{B}_{b^{-1}}$;
3) $C_r^*(P) = \overline{\bigoplus \mathcal{B}_b}$;
4) для каждого $b \in \Gamma$ существует сжимающее отображение

$$F_b : C_r^*(P) \to \mathcal{B}_b;$$

5) $F_e : C_r^*(P) \to \mathcal{B}_e$ – условное ожидание.

Семейство $\{\mathcal{B}_b\}_{b\in\Gamma}$ называется расслоением Фелла над группой Γ, а представление $C_r^*(P) = \overline{\bigoplus \mathcal{B}_b}$ – градуировкой $C_r^*(P)$ по Γ. Из 1) следует, что $\mathcal{B}_b$, $b \in \Gamma$, есть $\mathcal{B}_e$-бимодуль. В работе [12] была построена градуировка алгебры $C_r^*(P)$ по локальной группе $\mathbf{g} = \tau(M(P))$.

Пусть $W_{\mathbf{a}} = \{W \in M(P) : \tau(W) = \mathbf{a}\}$, $\mathbf{a} \in \mathcal{T}$. Множество тех $\mathbf{a} \in \mathcal{T}$, для которых

$W_{\mathbf{a}} \neq \{\emptyset\}$, образует локальную группу $\mathbf{g} = \tau(M(P))$. Пусть $B_{\mathbf{a}}$ – замкнутое линейное подпространство в $C_r^*(S)$ порожденное мономами из $W_{\mathbf{a}}$.

Предложение 9 ([12]). *Семейство $\{B_{\mathbf{a}}\}_{\mathbf{a}\in\mathbf{g}}$ обладает следующими свойствами:*

1) $B_{\mathbf{a}} \cdot B_{\mathbf{b}} = 0$, *если* $\mathbf{a} * \mathbf{b} \notin \mathbf{g}$ *и* $B_{\mathbf{a}} \cdot B_{\mathbf{b}} \subset B_{\mathbf{a}*\mathbf{b}}$ *в противном случае;*
2) $B_{\mathbf{a}}^* = B_{\mathbf{a}^{-1}}$;
3) B_e *– коммутативная C^*-алгебра порожденная линейными комбинациями идемпотентов;*
4) $C_r^*(P) = \overline{\bigoplus_{\mathbf{a}\in\mathbf{g}} B_{\mathbf{a}}}$;
5) *для каждого* $\mathbf{a} \in \mathcal{T}$ *существует сжимающее отображение* $\Phi_{\mathbf{a}} : C_r^*(P) \to B_{\mathbf{a}}$;
6) $\Phi_e : C_r^*(P) \to B_e$, $e \in \mathcal{T}$, *является условным ожиданием.*

Установим связь между градуировками по Γ и локальной группой $\mathbf{g}$. Покажем, что среди приведенных расслоений расслоение по локальной группе более “мелкое”.

Предложение 10. *Пусть $\{B_b\}_{b\in\Gamma}$ и $\{B_{\mathbf{a}}\}_{\mathbf{a}\in\mathbf{g}}$ два расслоения над коммутативной группой Γ и свободной группой $\mathcal{T}$ порожденные алгеброй $C_r^*(P)$. Тогда*

1) $B_b = \overline{\bigoplus_{\mathbf{a}\in\tau_b} B_{\mathbf{a}}}$, *где* $\tau_b = \{\mathbf{a} \in \mathcal{T} : \nu(\tau(\mathbf{a})) = b\}$;
2) $B_b \cdot B_c = \overline{\bigoplus_{\mathbf{a}\in\tau_b*\tau_c}} B_{\mathbf{a}}$;
3) $B_b^* = \overline{\bigoplus_{\mathbf{a}\in\tau_b}} B_{\mathbf{a}}^*$;
4) *для каждого* $\mathbf{a} \in \tau_b$ *существует сжимающее отображение* $\Phi_{\mathbf{a}}^b : B_b \to B_{\mathbf{a}}$;
5) $\Phi : B_e \to B_e$ *– условное ожидание.*

Доказательство. Для доказательства достаточно определить $\Phi_{\mathbf{a}}^b = F_b \circ \Phi_{\mathbf{a}}$. □

Пусть $C_b(P)$ – алгебра всех ограниченных функций на полугруппе P. Так как B_e – коммутативная алгебра диагональная относительно базиса $\{e_b\}_{b\in\mathbb{R}}$, алгебра B_e есть подалгебра $C_b(P)$.

Приведенные градуировки алгебры $C_r^*(P)$ порождают коммутативную диаграмму:

$$\begin{tikzcd} C_r^*(P) \arrow[r, "\Phi_e"] \arrow[dr, "F_e"'] & B_e \arrow[d, "\Phi"] \\ & B_e \end{tikzcd}$$

с отображениями – условными ожиданиями.

Определим два индекса монома $W \in M(P)$: $\operatorname{ind}_{\mathcal{T}}(W) = \tau(W)$ и $\operatorname{ind}_\Gamma W = \nu(W) \in \Gamma$.

Из предложения 10 следует, что градуировка по локальной группе $\mathbf{g}$ алгебры $C_r^*(P)$ более “мелкая”, чем по группе Γ. Отметим, если $We_{\mathbf{b}} \neq 0$, тогда $We_{\mathbf{b}} = e_{\mathbf{a}*\mathbf{b}}$, где $\mathbf{a} = \operatorname{ind}_{\mathcal{T}} W$.

Пусть $C_r^*(P_k)$ – полугрупповая алгебра порожденная регулярным представлением полугруппы $P_k = S_{i_1} * S_{i_2} * \ldots * S_{i_k}$, $k < n$, на $l^2(P_k)$.

Теорема 11. *Существует вложение $h_k : C_r^*(P_k) \to C_r^*(P)$ и условное ожидание $j_k : C_r^*(P) \to C_r^*(P_k)$ такие, что $j_k \circ h_k = \mathrm{id}$ – тождественное отображение.*

Доказательство. Пусть Q – унитальная подполугруппа полугруппы P, состоящая из тех слов $\mathbf{a} = a_{i_1} * \ldots * a_{i_m}$, $m \in \mathbb{N}$, первая буква которых a_{i_1} не принадлежит $P_k \setminus \{e\}$, e – единица полугруппы P. Очевидно, $P = P_k * Q$. Полагая $Q_{\mathbf{b}} = \{\mathbf{a} * \mathbf{b} : \mathbf{a} \in P_k\}$, $\mathbf{b} \in Q_k$, представим $l^2(P)$ в виде прямой суммы гильбертовых пространств

$$l^2(P) = \bigoplus_{\mathbf{b} \in Q} l^2(Q_{\mathbf{b}}).$$

Заметим, что $l^2(Q_e) = l^2(P_k)$. Унитарный оператор $U^{\mathbf{b}}_{\mathbf{r}} : l^2(Q_{\mathbf{b}}) \to l^2(Q_{\mathbf{r}})$, $\mathbf{b}, \mathbf{r} \in Q$, $U^{\mathbf{b}}_{\mathbf{r}}(e_{\mathbf{a}*\mathbf{b}}) = e_{\mathbf{a}*\mathbf{r}}$ коммутирует с оператором $T_{\mathbf{d}}$, $\mathbf{d} \in P_k$, т. е. $T_{\mathbf{d}} U^{\mathbf{b}}_{\mathbf{r}} = U^{\mathbf{b}}_{\mathbf{r}} T_{\mathbf{d}}$. Поэтому оператор $T_{\mathbf{d}}$, $\mathbf{d} \in P_k$, есть сумма копий операторов $T_{\mathbf{d},\mathbf{b}} = T_{\mathbf{d}}|_{l^2(Q_{\mathbf{b}})}$, $T_{\mathbf{d}} = \bigoplus_{\mathbf{b} \in Q} T_{\mathbf{d},\mathbf{b}}$. Аналогично, $T^*_{\mathbf{d}} = \bigoplus_{\mathbf{b} \in Q} T^*_{\mathbf{d},\mathbf{b}}$. Следовательно, каждый моном $W \in M(P_k)$ можно представить в виде мономов

$$W = \bigoplus_{\mathbf{b} \in Q} W_{\mathbf{b}}, \quad W_{\mathbf{b}} = W|_{l^2(Q_{\mathbf{b}})}.$$

Таким образом, C^*-подалгебра алгебры $C^*_r(P)$ порожденная операторами $T_{\mathbf{d}}$, $\mathbf{d} \in P_k$, распадается на копии C^*-алгебр изоморфных алгебре $C^*_r(P_k)$ и отображение $h_k : C^*_r(P_k) \to C^*_r(P)$, $h_k(A) = \bigoplus_{\mathbf{b} \in Q} A_{\mathbf{b}}$, есть вложение, где $A_{\mathbf{b}} = A|_{l^2(Q_{\mathbf{b}})}$. Построим теперь условное ожидание. Для этого достаточно показать, что если моном W не принадлежит $M(P_k)$, тогда $j_k(W) = 0$. Действительно, из п. 4) предложения 3 следует, $W = T_{\mathbf{a}} W_{i_0} T^*_{\mathbf{b}}$. Поэтому

$$\operatorname{ind}_{\mathcal{T}} W = \mathbf{a} * \tau_{i_0}(W_{i_0}) * \mathbf{b}^{-1}$$

и, если $\mathbf{r}, \mathbf{d} \in P_k$ такие, что $W e_{\mathbf{r}} = e_{\mathbf{d}}$, то

$$\mathbf{d} = \mathbf{a} * \tau_{i_0}(W_{i_0}) * \mathbf{b}^{-1} * \mathbf{r}.$$

Отсюда $\mathbf{a} * \tau_{i_0}(W_{i_0}) * \mathbf{b}^{-1} \in P_k$ и $W \in M(P_k)$.

Таким образом, замкнутое подпространство в $C^*_r(P)$ порожденное мономами $W \notin M(P_k)$ образует $\operatorname{Ker} j_k$ – ядро отображения $j_k : C^*_r(P) \to C^*_r(P_k)$ и $C^*_r(P) = C^*_r(P_k) \bigoplus \operatorname{Ker} j_k$. Если $W_1 \in M(P_k)$, $W_2 \notin M(P_k)$, тогда $W_1 \cdot W_2 \notin M(P_k)$. Поэтому $\operatorname{Ker} j_k$ есть $C^*_r(P_k)$-бимодуль и j_k есть условное ожидание. Для завершения доказательства достаточно заметить, что $j_k \circ h_k = \mathrm{id}$. □

Пусть $\mathcal{T}_X$ – C^*-подалгебра $C^*_r(P)$ порожденная конечным множеством $X = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$, $a_i \in S_i \setminus \{e\}$. Из равенства $T^*_{a_i} T_{a_j} = 0$, если $i \neq j$, следует $\sum T_{a_i} T^*_{a_j} < I$. Поэтому алгебра $\mathcal{T}_X$ изоморфна алгебре Теплица–Кунца $\mathcal{TO}_n$ (см. [5]). Фактор алгебра $\mathcal{TO}_n$ по коммутаторному идеалу $K \subset \mathcal{TO}_n$ изоморфна алгебре Кунца $\mathcal{O}_n$.

Теорема 12.

1) *Существует вложение $\lambda : \mathcal{T}_X \to C^*_r(P)$ и условное ожидание $\beta : C^*_r(P) \to \mathcal{T}_X$ такие, что $\beta \circ \lambda = \mathrm{id}$.*
2) *Существует вполне положительное отображение $\phi : C^*_r(P) \to \mathcal{O}_n$.*

Доказательство. 1) проверяется также как и теорема 11. Для проверки 2) достаточно задать ϕ как композицию отображения β с фактор отображением $\mathcal{T}_X \simeq \mathcal{TO}_n$ по K. $\square$

4. Идеалы алгебры $C_r^*(P)$

В работе [13, с. 436] было показано, что если среди абелевых полугрупп S_i, $i = 1, \dots, n$, есть плотная в $\mathbb{R}_+$ полугруппа, то алгебра $C_r^*(P)$, $P = S_1 * \dots * S_n$, есть простая C^*-алгебра. Аналогичное утверждение верно и для индуктивного предела алгебры Теплица–Кунца $\mathcal{TO}_n$, хотя алгебра $\mathcal{TO}_n$ не проста [10]. В связи с этим возникает вопрос: описать те полугруппы $P = S_1 * \dots * S_n$, регулярные представления которых порождают простые C^*-алгебры. В данном разделе дается ответ на этот вопрос.

Семейство правых главных идеалов $\mathcal{J} = \{I_{\mathbf{a}}\}_{\mathbf{a} \in P}$, где $I_{\mathbf{a}} = \{\mathbf{a} * \mathbf{b} : \mathbf{b} \in P\}$, можно превратить в унитальную полугруппу, полагая $I_{\mathbf{a}} \cdot I_{\mathbf{b}} = I_{\mathbf{a}*\mathbf{b}}$, с единицей $I_e = P$. Если $\mathbf{a} \prec \mathbf{b}$, т. е. $\mathbf{b} = \mathbf{a} * \mathbf{c}$, тогда $I_{\mathbf{b}} \subset I_{\mathbf{a}}$. Элемент $\mathbf{a} \in P^0 = P \setminus \{e\}$ называется минимальным слева, если из условия $\mathbf{b} \prec \mathbf{a}$, $\mathbf{b} \in P^0$, следует $\mathbf{b} = \mathbf{a}$. Множество минимальных элементов L полугруппы P называется базисом, если для любого $\mathbf{b} \in P$ найдется $\mathbf{a} \in L$ такое, что $\mathbf{a} \prec \mathbf{b}$. Будем говорить, что P имеет конечный базис, если L – конечное множество.

Предложение 13. *Пусть L – базис в P. Тогда $L = \bigcup_{i=1}^{n} L_i$, где $L_i = L \cap S_i$ – базис в S_i, и обратно, если L_i – базис в S_i, тогда $L = \bigcup_{i=1}^{n} L_i$ – базис в P.*

Доказательство. Пусть $a \in P$ минимальный элемент. Тогда a – буква и, следовательно, принадлежит некоторому S_i, и является минимальным в S_i. Поэтому $L = \bigcup_{i=1}^{n} L_i$. Верно и обратное: объединение минимальных элементов полугруппы S_i, $i = 1, \dots, n$, есть множество минимальных элементов в P. $\square$

Не каждая полугруппа имеет базис. Если $S_i = \mathbb{Z}_+ \times \mathbb{Z}_+$, $i = 1, \dots, n$, то полугруппа P имеет конечный базис. В случае $S_i = (\mathbb{N} \times \mathbb{N}) \cup \{(0,0)\}$, $i = 1, \dots, n$, полугруппа P имеет счетный базис, а в случае $S_i = \mathbb{R}_+$ у полугруппы P нет базиса.

Лемма 14. *Пусть a и b такие элементы в S_1, что либо a и b несравнимы, либо $b \prec a$. Тогда, для любого $d \in S_j \setminus \{e\}$, $j \neq 1$, справедливо $T_d^* T_b^* T_a = 0$.*

Доказательство. Достаточно рассмотреть случай, когда $b \prec a$. Пусть $\mathbf{c} \in P$ такое слово, $\mathbf{c} = c_{i_1} * c_{i_2} * \dots * c_{i_m}$, что $T_b^* T_a e_{\mathbf{c}} \neq 0$. Это равносильно условию: $(b^{-1} \cdot a) * \mathbf{c} \in P$. Так как $b^{-1} \cdot a \in S_1$, получим, что первая буква c_{i_1} в слове $(b^{-1} \cdot a) * \mathbf{c}$ принадлежит S_1. Буква d не принадлежит S_1, поэтому $d^{-1} * b^{-1} \cdot a * \mathbf{c} \notin P$, т. е. $T_d^* T_b^* T_a = 0$. $\square$

Отметим, что $T_a^* T_b T_d = (T_d^* T_b^* T_a)^* = 0$.

Обозначим через I_W, $W \in M(P)$, множество тех букв a_i, b_j, c_l, которые участвуют в представлении монома $W = T_{a_1} T_{a_2} \dots T_{a_n} (T_{c_1} T_{c_2}^* \dots T_{c_l} T_{c_{2l}}^*) T_{b_1}^* T_{b_2}^* \dots T_{b_r}^*$.

Лемма 15. *Пусть* $\{W_i\}_1^n$ *такое семейство мономов, что для некоторого* $d \in S_1 \setminus \{e\}$ *каждая буква из* I_{W_i}, $i = 1, \ldots, m$, *либо несравнима с* d, *либо больше* d. *Тогда, для любого* $r \in S_j$, $j \neq 1$, *справедливо* $T_r^* T_d^* W_i T_d T_r = 0$, $i = 1, \ldots, n$.

Доказательство. Действительно, полагая $W_i = W$, имеем

$$T_r^* T_d^* \left(T_{a_1} T_{a_2} \ldots T_{a_n} \left(T_{c_1} T_{c_2}^* \ldots T_{c_l} T_{c_{2l}}^*\right) T_{b_1}^* T_{b_2}^* \ldots T_{b_n}^*\right) T_d T_r$$
$$= T_r^* T_d^* T_{a_1} \left(T_{a_2} \ldots T_{a_n} \left(T_{c_1} T_{c_2}^* \ldots T_{c_l} T_{c_{2l}}^*\right) T_{b_1}^* T_{b_2}^* \ldots T_{b_{n-1}}^*\right) \left(T_{b_n}^* T_d T_r\right) = 0,$$

так как $T_r^* T_d^* T_{a_1} = T_{b_n}^* T_d T_r = 0$. □

Пусть K – алгебра компактных операторов на $l^2(S)$.

Теорема 16. *Следующие условия эквивалентны*:

1) *полугруппа* P *имеет конечный базис*;

2) K *– подалгебра в* $C_r^*(P)$.

Доказательство. 1) ⇒ 2) Пусть L – конечный базис полугруппы P, $L = (a_1, a_2, \ldots, a_m)$. Тогда оператор $J = T_{a_1} T_{a_1}^* + T_{a_2} T_{a_2}^* + \ldots + T_{a_m} T_{a_m}^*$ является диагональным относительно базиса $\{e_a\}_{a \in P}$ и обладает следующим свойством: $Je_0 = 0$, $Je_a = k_a e_a$, где $1 \leq k_a \leq m$.

По теореме о функциональном исчислении, C^*-подалгебра алгебры $C_r^*(P)$, порожденная единицей и оператором J, содержит проектор на e_0.

Так как алгебра $C_r^*(P)$ неприводима на $l^2(P)$ и содержит проектор на e_0, то $K \subset C_r^*(P)$, см. [14, теорема 2.4.5].

2) ⇒ 1) Пусть $K \subset C_r^*(P)$. Тогда проектор $Q_0 e_0 = e_0$, $Q_0 e_a = 0$, $a \neq e$, так как принадлежит $C_r^*(P)$. Поэтому существует конечная комбинация мономов $\sum\limits_{i=1}^m \alpha_i W_i \in \mathcal{L}(P)$ такая, что $\left\| Q_0 - \sum\limits_{i=1}^m \alpha_i W_i \right\| < \dfrac{1}{2}$.

Тогда $\left\| \left(Q_0 - \sum\limits_{i=1}^m \alpha_i W_i \right) (e_0) \right\| < \dfrac{1}{2}$. Следовательно, найдется моном W_{i_0}, $1 \leq i_0 \leq m$, такой, что $W_{i_0}(e_0) = e_0$. Поэтому $W_{i_0} = E$, где E – единица алгебры $C_r^*(P)$ и

$$|I - \alpha_{i_0}| = \left| \left(\left(Q - \sum_{i=1}^m \alpha_i W_i \right) e_0, e_0 \right) \right| < \frac{1}{2}.$$

Допустим, у P нет конечного базиса. Тогда найдутся $a, b \in P$ такие, что $T_a^* T_b^* W_i T_a T_b = 0$, $i \neq i_0$, и

$$\left\| T_a^* T_b^* Q T_a T_b - \sum_{i=1}^m T_a^* T_b^* W_i T_a T_b \right\| = |\alpha_{i_0}| < \frac{1}{2}.$$

Пришли к противоречию. □

Покажем, что других идеалов в $C_r^*(P)$ нет.

Теорема 17. *Следующие условия эквивалентны*:

1) P *не имеет конечного базиса*;

2) $C^*_r(P)$ – *простая алгебра.*

Доказательство. 1) $\Rightarrow$ 2) Пусть $\mathcal{D} \neq 0$, принадлежит идеалу $J \subset C^*_r(P)$ и $(\mathcal{D}e_{\mathbf{c}}, e_{\mathbf{d}}) \neq 0$, для некоторых $\mathbf{c}, \mathbf{d} \in P$. Полагая

$$A = \frac{1}{(\mathcal{D}' e_0, e_0)} \mathcal{D}',$$

где $\mathcal{D}' = T^*_{\mathbf{d}} \mathcal{D} T_{\mathbf{c}}$, получим $(Ae_0, e_0) = 1$. Пусть $\{W_i\}_1^m$ такое семейство мономов, что

$$\left\| A - \sum_{i=1}^m \alpha_i W_i \right\| < \epsilon < 1, \ \alpha_i \in \mathbb{C}.$$

Из условия $(Ae_0, e_0) = 1$ следует, что $W_{i_0} e_0 = e_0$, для некоторого i_0, т. е. $W_{i_0} = E$. Поэтому

$$|1 - \alpha_{i_0}| = \left| \left(\left(A - \sum_{i=1}^m \alpha_i W_i \right) e_0, e_0 \right) \right| < \epsilon.$$

Пусть $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in P$ такие буквы, что

$$T^*_{\mathbf{a}} T^*_{\mathbf{b}} W_i T_{\mathbf{a}} T_{\mathbf{b}} = 0, \ i \neq i_0.$$

Тогда

$$\left\| T^*_{\mathbf{a}} T^*_{\mathbf{b}} \left(A - \sum_{i=1}^m \alpha_i W_i \right) T_{\mathbf{a}} T_{\mathbf{b}} \right\| = \| T^*_{\mathbf{a}} T^*_{\mathbf{b}} A T_{\mathbf{a}} T_{\mathbf{b}} - \alpha_{i_0} E \| < \epsilon.$$

Отсюда

$$\left\| \frac{1}{\alpha_{i_0}} (T^*_{\mathbf{a}} T^*_{\mathbf{b}} A T_{\mathbf{a}} T_{\mathbf{b}} - E) \right\| < \frac{\epsilon}{|\alpha_{i_0}|} < \frac{\epsilon}{1 - \epsilon},$$

и $\operatorname{dist}(E, J) < \dfrac{\epsilon}{1-\epsilon}$, для произвольного $\epsilon > 0$, т. е. $E \in J$. Следовательно, $C^*_r(P)$ простая C^*-алгебра.

2) $\Rightarrow$ 1) Тривиально. □

Воспользовавшись теоремами 16 и 17, получим, что если у полугруппы P есть конечный базис, то существует короткая точная последовательность

$$0 \longrightarrow K \xrightarrow{\text{id}} C^*_r(P) \xrightarrow{\pi} \mathcal{A} \longrightarrow 0,$$

где id – вложение, а π – фактор-отображение.

Авторы благодарят рецензента за внимательное отношение к работе и ценные замечания.

Список литературы

[1] L.A. Coburn, *The C^*-algebra generated by an isometry*, Bull. Amer. Math. Soc. **73** (5), 722–726 (1967).
DOI: https://doi.org/10.1090/S0002-9904-1967-11845-7

[2] R.G. Douglas, *On the C^*-algebra of a one-parameter semigroup of isometries*, Acta Math. **128** (3–4), 143–151 (1972).
DOI: https://doi.org/10.1007/BF02392163

[3] G.J. Murphy, *Ordered groups and Toeplitz algebras*, J. Operator Theory **18** (2), 303–326 (1987).
URL: http://www.jstor.org/stable/24714789

[4] A. Nica, *C^*-algebras generated by isometries and Wiener-Hopf operators*, J. Operator Theory **27** (1), 17–52 (1992).
URL: http://www.jstor.org/stable/24715075

[5] J. Cuntz, *Simple C^*-algebra generated by isometries*, Comm. Math. Phys. **57** (2), 173–185 (1977).
DOI: https://doi.org/10.1007/BF01625776

[6] J. Cuntz, *K-theory for certain C^*-algebras*, Ann. Math. **113** (1), 181–197 (1981).
DOI: https://doi.org/10.2307/1971137

[7] G.J. Murphy, *Crossed products of C^*-algebras by endomorphisms*, Integral Equations and Operator Theory **24** (3), 298–319 (1996).
DOI: https://doi.org/10.1007/BF01204603

[8] Е.В. Липачева, *О представлении полугрупповой C^*-алгебры в виде скрещенного произведения*, Изв. вузов. Матем. (8), 87–92 (2022).
DOI: https://doi.org/10.26907/0021-3446-2022-8-87-92

[9] А. Клиффорд, Г. Престон, *Алгебраическая теория полугрупп*, Т. 1, Мир, М., 1972.

[10] С.А. Григорян, Р.Н. Гумеров, Е.В. Липачева, *Пределы индуктивных последовательностей алгебр Теплица–Кунца*, Труды МИАН **313**, 67–77 (2021).
DOI: https://doi.org/10.4213/tm4170

[11] R.N. Gumerov, E.V. Lipacheva, *Automorphisms of the limits for the direct sequences of the Toeplitz–Cuntz algebras*, J. Math. Anal. Appl. **533** (2), art. 127991 (2024).
DOI: https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2023.127991

[12] С.А. Григорян, А.Ш. Шарафутдинов, *Градуировка полугрупповой C^*-алгебры по локальной группе*, Изв. вузов. Матем. (7), 85–90 (2023).
DOI: https://doi.org/10.26907/0021-3446-2023-7-85-90

[13] M. Laca, I. Raeburn, *Semigroup crossed products and the Toeplitz algebras of nonabelian groups*, J. Funct. Anal. **139** (2), 415–440 (1996).
DOI: https://doi.org/10.1006/jfan.1996.0091

[14] Дж. Мерфи, *C^*-алгебры и теория операторов*, Факториал, М., 1997.

Сурен Аршакович Григорян
Казанский государственный энергетический университет,
ул. Красносельская, д. 51, г. Казань, 420066, Россия,
e-mail: gsuren@inbox.ru

Тамара Анатольевна Григорян
Казанский государственный энергетический университет,
ул. Красносельская, д. 51, г. Казань, 420066, Россия,
e-mail: tkhorkova@gmail.com

Volume 2, Issue 3
pp. 29–45 (2024)

UDC 510.54, 510.57
MSC 03D45, 03D30

Semigroup C^*-algebras generated by a free product of abelian semigroups

S.A. Grigoryan, T.A. Grigoryan

Abstract. The article deals with semigroup $C*$-algebras generated by regular representations of free products of abelian semigroups. A criterion of the simplicity of this algebras is obtained, characters, grading and a number of other properties are described.

Keywords: free group, free semigroup, $C*$-algebra, spectrum, ideal.

DOI: 10.26907/2949-3919.2024.3.29-45

References

[1] L.A. Coburn, *The C^*-algebra generated by an isometry*, Bull. Amer. Math. Soc. **73** (5), 722–726 (1967).
DOI: https://doi.org/10.1090/S0002-9904-1967-11845-7

[2] R.G. Douglas, *On the C^*-algebra of a one-parameter semigroup of isometries*, Acta Math. **128** (3–4), 143–151 (1972).
DOI: https://doi.org/10.1007/BF02392163

[3] G.J. Murphy, *Ordered groups and Toeplitz algebras*, J. Operator Theory **18** (2), 303–326 (1987).
URL: http://www.jstor.org/stable/24714789

[4] A. Nica, *C^*-algebras generated by isometries and Wiener-Hopf operators*, J. Operator Theory **27** (1), 17–52 (1992).
URL: http://www.jstor.org/stable/24715075

[5] J. Cuntz, *Simple C^*-algebra generated by isometries*, Comm. Math. Phys. **57** (2), 173–185 (1977).
DOI: https://doi.org/10.1007/BF01625776

[6] J. Cuntz, *K-theory for certain C^*-algebras*, Ann. Math. **113** (1), 181–197 (1981).
DOI: https://doi.org/10.2307/1971137

[7] G.J. Murphy, *Crossed products of C^*-algebras by endomorphisms*, Integral Equations and Operator Theory **24** (3), 298–319 (1996).
DOI: https://doi.org/10.1007/BF01204603

Received: 26 August 2024. Accepted: 24 September 2024. Published: 17 October 2024.

[8] E.V. Lipacheva, *On the representation of semigroup C^*-algebra as a crossed product*, Russian Math. (Iz. VUZ) **66** (8), 71–75 (2022).
DOI: https://doi.org/10.3103/S1066369X22080059

[9] A.H. Clifford, G.B. Preston, *The algebraic theory of semigroups.* V. I. Math. Surveys Monogr. **7**, AMS, Providence, 1961.

[10] S.A. Grigoryan, R.N. Gumerov, E.V. Lipacheva, *Limits of inductive sequences of Toeplitz–Cuntz algebras*, Proc. Steklov Inst. Math. **313**, 60–69 (2021).
DOI: https://doi.org/10.1134/S0081543821020073

[11] R.N. Gumerov, E.V. Lipacheva, *Automorphisms of the limits for the direct sequences of the Toeplitz–Cuntz algebras*, J. Math. Anal. Appl. **533** (2), art. 127991 (2024).
DOI: https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2023.127991

[12] S.A. Grigoryan, A.Sh. Sharafutdinov, *Grading of a semigroup C^*-algebra by a local group*, Russian Math. (Iz. VUZ) **67** (7), 72–76 (2023).
DOI: https://doi.org/10.3103/S1066369X23070022

[13] M. Laca, I. Raeburn, *Semigroup crossed products and the Toeplitz algebras of nonabelian groups*, J. Funct. Anal. **139** (2), 415–440 (1996).
DOI: https://doi.org/10.1006/jfan.1996.0091

[14] G.J. Murphy, *C^*-algebras and operator theory*, Academic Press, Boston, 1990.

Suren Arshakovich Grigoryan
Kazan State Power-Engineering University,
51 Krasnoselskaya str., Kazan 420066, Russia,
E-mail: gsuren@inbox.ru

Tamara Anatolievna Grigoryan
Kazan State Power-Engineering University,
51 Krasnoselskaya str., Kazan 420066, Russia,
E-mail: tkhorkova@gmail.com