

Топология для дискретной математики

Ю.Л. Ершов

Аннотация. Представлен ряд результатов, касающихся проблемы существования и единственности продолжений непрерывных отображений топологических пространств.

Ключевые слова: T_0 -пространство, непрерывное отображение, собриффикация, u -расширение.

DOI: 10.26907/2949-3919.2024.3.46-52

Введение

Данная работа является расширенной версией доклада автора на церемонии вручения премии Лобачевского (Казанский (Приволжский) федеральный университет, декабрь 2023 года). Здесь обсуждается ряд понятий и результатов, связанных с вопросом существования и единственности продолжений непрерывных отображений топологических пространств. Все приведенные здесь понятия и результаты (вместе с их доказательствами) можно найти в монографии автора “Топология для дискретной математики” [1], изданной Сибирским отделением Российской академии наук в 2020 году.

Монографии [2–4], посвященные близким вопросам, были изданы на английском языке. Стоит отметить выпуск журнала *Annals of Pure and Applied Logic* [5], который также содержит близкие по тематике результаты. На русском языке общая теория T_0 -пространств систематическим образом изложена впервые в указанной выше монографии [1].

Топологией на множестве X называется семейство множеств $\mathcal{T} \subseteq 2^X$ такое, что

- 1) $\emptyset, X \in \mathcal{T}$;
- 2) если $U_0, U_1 \in \mathcal{T}$, то $U_0 \cap U_1 \in \mathcal{T}$;
- 3) если $V_i \in \mathcal{T}$ для любого $i \in I$, то $\bigcup_{i \in I} V_i \in \mathcal{T}$.

В этом случае $\mathbb{X} = \langle X, \mathcal{T} \rangle$ называется *топологическим пространством*. Полагаем при этом $\mathcal{T}(\mathbb{X}) = \mathcal{T}$.

Очевидно, что топология $\mathcal{T}(\mathbb{X})$ образует полную решетку относительно теоретико-множественного включения $\subseteq$, где для произвольного семейства открытых множеств

Благодарности. Работа выполнена в рамках госзадания Института математики им. С.Л. Соболева СО РАН, проект FWNF-2022-0012.

© 2024 Ю.Л. Ершов

Поступила: 11.06.2024. Принята: 10.08.2024. Опубликовано: 17.10.2024.

$V_i \in \mathcal{T}(\mathbb{X})$, $i \in I$, справедливо:

$$\bigwedge_{i \in I} V_i = \text{int} \bigcap_{i \in I} V_i, \quad \bigvee_{i \in I} V_i = \bigcup_{i \in I} V_i.$$

Топологическое пространство $\mathbb{X}$ называется T_0 -отделимым или просто T_0 -пространством, если оно удовлетворяет следующей аксиоме T_0 -отделимости:

для любых различных $x_0, x_1 \in X$ существует $U \in \mathcal{T}$ такое, что $x_i \in U$ и $x_{1-i} \notin U$ для некоторого $i < 2$.

Далее мы будем рассматривать только T_0 -пространства.

1. Проблема существования и единственности продолжений

Вопрос 1. Рассмотрим произвольные топологические пространства $\mathbb{X}, \mathbb{Y}, \mathbb{Z}$. Пусть $\mathbb{X} \leq \mathbb{Y}$, а отображение $f: \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{Z}$ непрерывно. Существует ли непрерывное отображение $f': \mathbb{Y} \rightarrow \mathbb{Z}$ такое, что $f'|_{\mathbb{X}} = f$? Когда такое отображение f' единственно?

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{X} & \xrightarrow{\text{id}} & \mathbb{Y} \\ & \searrow f & \swarrow f' \\ & \mathbb{Z} & \end{array}$$

Топологическое пространство $\mathbb{Z}$ такое, что для любого расширения $\mathbb{X} \leq \mathbb{Y}$ и любого непрерывного отображения $f: \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{Z}$ существует его непрерывное продолжение $f': \mathbb{Y} \rightarrow \mathbb{Z}$, называется *инъективным*. Если потребовать существование продолжений только для таких расширений $\mathbb{X} \leq \mathbb{Y}$, для которых пространство $\mathbb{X}$ плотно в $\mathbb{Y}$ (т. е. $Y = \text{cl}_{\mathbb{Y}} X$), то мы получим определение *ограниченно инъективного* пространства.

Описание таких пространств представлено в теоремах 11–12 ниже. Кроме того, [теорема 4](#) ниже связана с вопросом единственности продолжений, а [теорема 7](#) ниже – с существованием продолжений для расширений специального вида (так называемых *и-расширений*).

Для произвольного непрерывного отображения $f: \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{Y}$ рассмотрим отображение

$$f: \mathcal{T}(\mathbb{Y}) \rightarrow \mathcal{T}(\mathbb{X}), \quad f^*: U \mapsto f^{-1}(U).$$

Непосредственно можно проверить, что f^* является гомоморфизмом $(0, 1)$ -решеток, который сохраняет произвольные объединения.

Вопрос 2. Когда для гомоморфизма $(0, 1)$ -решеток $g: \mathcal{T}(\mathbb{Y}) \rightarrow \mathcal{T}(\mathbb{X})$, сохраняющего произвольные объединения, имеет место равенство $g = f^*$ для подходящего непрерывного отображения $f: \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{Y}$?

Частичный ответ на этот вопрос дает [теорема 5](#) ниже.

2. α -пространства

Для топологического пространства $\mathbb{X}$ рассмотрим следующие понятия.

- *Отношение специализации* $\leq$. Для произвольных $x, y \in X$ полагаем $x \leq y$, если для любого открытого множества $U \in \mathcal{T}(\mathbb{X})$ включение $x \in U$ влечет включение $y \in U$.
- Для произвольного $x \in X$ полагаем

$$\downarrow x = \{y \in X \mid y \leq x\}, \quad \uparrow x = \{y \in X \mid x \leq y\}.$$

- *Отношение аппроксимации* $\prec$. Для произвольных $x, y \in X$ полагаем $x \prec y$, если $y \in \text{int } \uparrow x$.

Нетрудно проверить, что $\mathbb{X}$ является T_0 -пространством тогда и только тогда, когда отношение специализации $\leq$ является частичным порядком на $\mathbb{X}$.

Топологическое пространство $\mathbb{X}$ называется α -пространством, если для любых $x \in X$ и $U \in \mathcal{T}(\mathbb{X})$ включение $x \in U$ влечет существование такого $y \in U$, что $y \prec x$.

Следующая теорема характеризует α -пространства в терминах их решеток открытых множеств.

Теорема 3 (о характеристике α -пространств). *Топологическое пространство $\mathbb{X}$ является α -пространством тогда и только тогда, когда полная решетка $\mathcal{T}(\mathbb{X})$ является вполне дистрибутивной, т. е. для произвольных семейств открытых множеств $\mathcal{W}_i \subseteq \mathcal{T}(\mathbb{X})$, $i \in I$, имеет место равенство*

$$\text{int}\left(\bigcap_{i \in I} \bigcup \mathcal{W}_i\right) = \bigcup_{f \in \mathcal{F}} \text{int}\left(\bigcap_{i \in I} f(i)\right),$$

где $\mathcal{F} = \prod_{i \in I} \mathcal{W}_i$.

3. Сопредельные точки и u -расширения

Рассмотрим расширение топологических пространств $\mathbb{X} \leq \mathbb{Y}$. Точка $y \in Y$ называется *сопредельной* для $\mathbb{X}$ в $\mathbb{Y}$, если для любого $U \in \mathcal{T}(\mathbb{Y})$ из включения $y \in U$ следует, что $\downarrow y \cap U \cap X \neq \emptyset$.

Пусть $\text{sob}_{\mathbb{Y}} \mathbb{X}$ обозначает множество всех сопредельных точек для $\mathbb{X}$ в $\mathbb{Y}$. Следующее понятие связано с вопросом единственности продолжений, см. [вопрос 1](#).

Расширение $\mathbb{X} \leq \mathbb{Y}$ называется *u -расширением*, если для любых непрерывных отображений $f, g: \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{Y}$ равенство $f|_X = g|_X$ влечет равенство $f = g$.

Теорема 4 (о характеристике u -расширений). *Для расширения $\mathbb{X} \leq \mathbb{Y}$ следующие условия равносильны.*

- (i) *Расширение $\mathbb{X} \leq \mathbb{Y}$ является u -расширением.*
- (ii) *Для любого $U \in \mathcal{T}(\mathbb{X})$ существует единственное $V \in \mathcal{T}(\mathbb{Y})$ такое, что $U = V \cap X$.*
- (iii) *Справедливо равенство $Y = \text{sob}_{\mathbb{Y}} X$.*

4. Собранные пространства и собрификации

Подмножество A пространства $\mathbb{X}$ называется *неприводимым*, если для произвольных замкнутых подмножеств F_0, F_1 в $\mathbb{X}$ включение $A \subseteq F_0 \cup F_1$ влечет включение $A \subseteq F_i$ для некоторого $i < 2$.

Очевидно, что множество $\downarrow x$ замкнуто и неприводимо в $\mathbb{X}$ для любого $x \in X$.

Топологическое пространство $\mathbb{X}$ называется *собранным*, если семейство $\{\downarrow x \mid x \in X\}$ исчерпывает семейство всех непустых замкнутых неприводимых подмножеств в $\mathbb{X}$.

Следующая теорема дает частичный ответ на [вопрос 2](#).

Теорема 5. *Если пространство $\mathbb{Y}$ является собранным, то для любого гомоморфизма $(0, 1)$ -решеток $g: \mathcal{T}(\mathbb{Y}) \rightarrow \mathcal{T}(\mathbb{X})$, сохраняющего произвольные объединения, существует непрерывное отображение $f: \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{Y}$ такое, что $g = f^*$.*

В качестве следствия [теоремы 5](#) получаем такой результат.

Теорема 6. *Если пространства $\mathbb{X}$ и $\mathbb{Y}$ являются собранными, а их решетки топологий $\mathcal{T}(\mathbb{X})$ и $\mathcal{T}(\mathbb{Y})$ изоморфны, то пространства $\mathbb{X}$ и $\mathbb{Y}$ гомеоморфны.*

Следующая теорема связана с вопросом существования и единственности продолжений, см. [вопрос 1](#).

Теорема 7 (о характеристизации собранных пространств). *Для топологического пространства $\mathbb{X}$ следующие условия равносильны.*

- (i) *Пространство $\mathbb{X}$ является собранным.*
- (ii) *Для любого расширения $\mathbb{X} \leq \mathbb{Y}$ справедливо $X = \text{sob}_{\mathbb{Y}} X$.*
- (iii) *Пространство $\mathbb{X}$ не имеет собственных u -расширений.*
- (iv) *Для любого u -расширения $\mathbb{Y}_0 \leq \mathbb{Y}$ и любого непрерывного отображения $f_0: \mathbb{Y}_0 \rightarrow \mathbb{X}$ существует [единственное] непрерывное отображение $f: \mathbb{Y} \rightarrow \mathbb{X}$ такое, что $f|_{\mathbb{Y}_0} = f_0$.*

Собранное пространство $\mathbb{Y}$ называется *собрификацией* пространства $\mathbb{X}$, если существует гомеоморфное вложение $\lambda: \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{Y}$ такое, что $Y = \text{sob}_{\mathbb{Y}} \lambda(X)$.

Теорема 8. *Собрификация любого T_0 -пространства единственна с точностью до гомеоморфизма.*

Следующая теорема характеризует собрификации T_0 -пространств.

Теорема 9 (о характеристизации собрификаций). *Для расширения $\mathbb{X} \leq \mathbb{Y}$ следующие условия равносильны.*

- (i) $\mathbb{Y}$ является собриффикацией пространства $\mathbb{X}$.
- (ii) $\mathbb{Y}$ является наибольшим u -расширением $\mathbb{X}$.
- (iii) $\mathbb{Y}$ является наименьшим собранным расширением $\mathbb{X}$.

Теорема 10. Если $\mathbb{X} \leq \mathbb{Y}$ является u -расширением, то собриффикации пространств $\mathbb{X}$ и $\mathbb{Y}$ гомеоморфны.

5. Инъективные пространства

Напомним, что топологическое пространство $\mathbb{Z}$ называется (ограниченно) *инъективным*, если для любого расширения пространств $\mathbb{X} \leq \mathbb{Y}$ (такого что $\mathbb{X}$ плотно в $\mathbb{Y}$) и любого непрерывного отображения $f: \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{Z}$ существует непрерывное отображение $f': \mathbb{Y} \rightarrow \mathbb{Z}$ такое, что $f'|_{\mathbb{X}} = f$.

Следующие две теоремы характеризуют (ограниченно) инъективные пространства, см. [вопрос 1](#).

Теорема 11 (о характеристике инъективных пространств). Топологическое пространство $\mathbb{X}$ является инъективным, если и только если выполнены следующие условия:

- (i) ч. у. множество $\langle X; \leq \rangle$ является полной решеткой;
- (ii) $\mathbb{X}$ является α -пространством (равносильно, полная решетка $\mathcal{T}(\mathbb{X})$ вполне дистрибутивна);
- (iii) $\mathbb{X}$ является собранным пространством.

Теорема 12 (о характеристике ограниченно инъективных пространств). Топологическое пространство $\mathbb{X}$ является ограниченно инъективным, если и только если выполнены следующие условия:

- (i) ч. у. множество $\langle X; \leq \rangle$ является bc -полным (т. е. любое ограниченное подмножество в $\langle X; \leq \rangle$ имеет точную верхнюю грань);
- (ii) $\mathbb{X}$ является α -пространством (равносильно, полная решетка $\mathcal{T}(\mathbb{X})$ вполне дистрибутивна);
- (iii) $\mathbb{X}$ является собранным пространством.

Список литературы

- [1] Ю.Л. Ершов, *Топология для дискретной математики*, Сибирское отделение РАН, Новосибирск, 2020.
- [2] G. Gierz, K.H. Hofmann, K. Keimel, J.D. Lawson, M.W. Mislove, D.S. Scott, *A compendium of continuous lattices*, Springer-Verlag, Berlin–Heidelberg, 1980.
DOI: <https://doi.org/10.1007/978-3-642-67678-9>

-
- [3] G. Gierz, K.H. Hofmann, K. Keimel, J.D. Lawson, M.W. Mislove, D.S. Scott, *Continuous lattices and domains*, Encyclopedia Math. Appl. **93**, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2003.
DOI: <https://doi.org/10.1017/CBO9780511542725>
- [4] J. Goubault-Larrecq, *Non-Hausdorff topology and domain theory: selected topics in point-set topology*, New Math. Monogr. **22**, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2013.
DOI: <https://doi.org/10.1017/CBO9781139524438>
- [5] *Joint workshop domains VIII – Computability over continuous data types, Novosibirsk, September 11–15, 2007*, Ann. Pure Appl. Logic **159** (3), 249–356 (2009).
URL: <https://www.sciencedirect.com/journal/annals-of-pure-and-applied-logic/vol/159/issue/3>

Юрий Леонидович Ершов

Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН,
пр. Акад. Коптюга, д. 4, г. Новосибирск, 630090, Россия,
e-mail: ershov@math.nsc.ru

Topology for discrete mathematics

Yu.L. Ershov

Abstract. A series of results is presented on the problem of the existence and the uniqueness of extensions of continuous mappings on topological spaces.

Keywords: T_0 -space, continuous mapping, sobrification, u -extension.

DOI: 10.26907/2949-3919.2024.3.46-52

References

- [1] Yu.L. Ershov, *Topology for discrete mathematics*, Sobolev Institute of Mathematics SB RAS, Novosibirsk, 2020 [in Russian].
- [2] G. Gierz, K.H. Hofmann, K. Keimel, J.D. Lawson, M.W. Mislove, D.S. Scott, *A compendium of continuous lattices*, Springer-Verlag, Berlin–Heidelberg, 1980.
DOI: <https://doi.org/10.1007/978-3-642-67678-9>
- [3] G. Gierz, K.H. Hofmann, K. Keimel, J.D. Lawson, M.W. Mislove, D.S. Scott, *Continuous lattices and domains*, Encyclopedia Math. Appl. **93**, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2003.
DOI: <https://doi.org/10.1017/CBO9780511542725>
- [4] J. Goubault-Larrecq, *Non-Hausdorff topology and domain theory: selected topics in point-set topology*, New Math. Monogr. **22**, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2013.
DOI: <https://doi.org/10.1017/CBO9781139524438>
- [5] *Joint workshop domains VIII – Computability over continuous data types, Novosibirsk, September 11–15, 2007*, Ann. Pure Appl. Logic **159** (3), 249–356 (2009).
URL: <https://www.sciencedirect.com/journal/annals-of-pure-and-applied-logic/vol/159/issue/3>

Yuri Leonidovich Ershov

Sobolev Institute of Mathematics SB RAS,
4 Acad. Koptug Ave., Novosibirsk 630090, Russia,
e-mail: ershov@math.nsc.ru

Acknowledgements. This research was carried out within the framework of the state contract of the Sobolev Institute of Mathematics, project FWNF–2022–0012.

Received: 11 June 2024. Accepted: 10 August 2024. Published: 17 October 2024.