

Квазимногообразие $\mathbf{SP}(M_3)$: базис тождеств

А.Е. Изъюрова, М.В. Швидефски

Аннотация. Мы показываем, что квазимногообразие $(0, 1)$ -решеток, порожденное диамантом M_3 , является многообразием и находим базис тождеств этого многообразия.

Ключевые слова: решетка, базис тождеств, многообразие, диамант.

DOI: 10.26907/2949-3919.2024.3.53-62

Введение

Настоящая статья является первой в серии работ, посвященных квазимногообразию $\mathbf{SP}(M_3)$ $(0, 1)$ -решеток, порожденному диамантом M_3 . Здесь мы показываем, что это квазимногообразие является многообразием и находим его базис квазитожеств, см. [следствие 9](#). Отметим, что базис тождеств для многообразия $\mathbf{V}(M_3)$, порожденного M_3 , был найден ранее М. Шютценбергером [1], см. также работу С.Д. Комера и Д.С. Хонга [2]. Наш базис тождеств отличается от базиса тождеств, найденного в [2]. С использованием найденного нами базиса тождеств для $\mathbf{V}(M_3) = \mathbf{SP}(M_3)$ мы доказываем в последующих работах теоремы дуальности для решеток, принадлежащих $\mathbf{SP}(M_3)$. Отметим, что теоремы дуальности были установлены недавно для многообразия, порожденного пентагоном N_5 , в работах [3, 4], для многообразия, порожденного решеткой L_6 , в работе [5, 6], а также для многообразий, порожденных решетками подпорядков частичных порядков высоты не более 2, в работах [7, 8]. Все эти дуальности являются расширениями дуальности Биркгофа для дистрибутивных решеток.

За всеми понятиями и обозначениями, не определенными здесь, мы отсылаем читателя к [3, 9, 10].

1. Определения и обозначения

Для элемента a решетки L пусть $\mathfrak{M}(a)$ обозначает множество всех конечных минимальных нетривиальных покрытий a . Мы также полагаем $\downarrow a = \{x \in L \mid x \leq a\}$.

Пусть $J(L)$ обозначает множество всех $\vee$ -неразложимых элементов решетки L . Говорим, что L является J -решеткой для некоторого множества $J \subseteq J(L)$, если выполнены следующие два условия:

Благодарности. Работа была поддержана Российским научным фондом, проект 24-21-00075, <https://rscf.ru/project/24-21-00075/>.

- (i) для каждого элемента $a \in L$ найдется множество $J_a \subseteq J$ такое, что $a = \bigvee J_a$;
- (ii) для каждого элемента $a \in J$ и любого нетривиального покрытия $a \leq \bigvee F$, где множество F конечно, существует $G \in \mathfrak{M}(a)$, такое что $G \ll F$.

Пусть L является J -решеткой для некоторого множества $J \subseteq J(L)$ и пусть $S \subseteq J$. Полагаем:

$$\begin{aligned} \langle S \rangle_0 &= S; \\ \langle S \rangle_{n+1} &= \bigcup_{a \in \langle S \rangle_n} \{X \subseteq J \mid X \in \mathfrak{M}(a)\} \cup \langle S \rangle_n \quad \text{для всех } n < \omega; \\ \langle S \rangle &= \bigcup_{n < \omega} \langle S \rangle_n. \end{aligned}$$

Множество $S \subseteq J$ называется *замкнутым*, если $S = \langle S \rangle$.

Для множества $S \subseteq J(L)$ пусть Γ_S обозначает бинарное отношение на L , определенное следующим образом:

$$(u, v) \in \Gamma_S, \quad \text{если и только если} \quad \downarrow u \cap S = \downarrow v \cap S.$$

Следующее утверждение было установлено М.Е. Адамсом и В. Джебяком; его также можно найти в [3, 4].

Предложение 1. Пусть L является J -решеткой для некоторого множества $J \subseteq J(L)$ и пусть $S \subseteq J$ является замкнутым множеством. Тогда отношение Γ_S является конгруэнцией на L .

2. Три тождества

Рассмотрим следующие три тождества. Первое тождество — это тождество *2-дистрибутивности*, введенное А. Хуном [11], которое мы обозначаем через (D_2) :

$$x \wedge (y_0 \vee y_1 \vee y_2) = [x \wedge (y_0 \vee y_1)] \vee [x \wedge (y_0 \vee y_2)] \vee [x \wedge (y_1 \vee y_2)].$$

Второе тождество мы обозначаем через (C_1) ; оно было введено в работе [3]. Это тождество является частным случаем тождества (C_n) , $0 < n < \omega$, введенного в работе [7]:

$$\begin{aligned} x \wedge (y_0 \vee y_1) \wedge (z_0 \vee z_1) &= \bigvee_{i < 2} (x \wedge y_i \wedge (z_0 \vee z_1)) \vee \bigvee_{i < 2} (x \wedge z_i \wedge (y_0 \vee y_1)) \\ &\vee \bigvee_{i < 2} [x \wedge ((y_0 \wedge z_i) \vee (y_1 \wedge z_{1-i}))]. \end{aligned}$$

Третье тождество — это тождество *модулярности* (M) :

$$x \wedge (y \vee z) = x \wedge ((y \wedge (x \vee z)) \vee z).$$

Мы полагаем $\Sigma = \{(C_1), (D_2), (M)\}$. Следующее хорошо известное утверждение может быть найдено, например, в работах [3, 10]. В настоящем виде оно сформулировано в работе [5].

Лемма 2 ([5, следствие 2]). Пусть L является J -решеткой для некоторого множества $J \subseteq J(L)$. Следующие условия равносильны.

- (i) Тождество (D_2) истинно на L .
- (ii) Если $a \leq b_0 \vee \dots \vee b_m$ является минимальным нетривиальным покрытием для некоторых элементов $a, b_0, \dots, b_m \in J$, то $m = 1$.

Лемма 3 ([5, следствие 2]). Пусть L является 2-дистрибутивной J -решеткой для некоторого множества $J \subseteq J(L)$. Следующие условия равносильны.

- (i) Тождество (C_1) истинно на L .
- (ii) Каждый элемент $a \in J$ имеет не более одного минимального нетривиального покрытия.

Предложение 4. Пусть L — решетка и пусть множество $J \subseteq J(L)$ таково, что каждый элемент решетки L является объединением некоторого множества элементов из J . Следующие условия равносильны.

- (i) Если $a \leq b \vee c$ для некоторых $a \in J$, то $a \leq (b \wedge (a \vee c)) \vee c$.
- (ii) Тождество (M) истинно на L .

Доказательство. Покажем, что (i) влечет (ii). Ясно, что $a \wedge [(b \wedge (a \vee c)) \vee c] \leq a \wedge (b \vee c)$ для всех $a, b, c \in L$. Для проверки обратного неравенства достаточно установить, что $u \leq a \wedge [(b \wedge (a \vee c)) \vee c]$, как только $u \in J$ и $u \leq a \wedge (b \vee c)$. Действительно, если элемент $u \in J$ таков, что $u \leq a \wedge (b \vee c)$, то $u \leq a$ и $u \leq b \vee c$. Применяя утверждение (i) к последнему неравенству и принимая во внимание, что $u \leq a$, мы получаем, что $u \leq (b \wedge (u \vee c)) \vee c \leq (b \wedge (a \vee c)) \vee c$. Следовательно, $u \leq a \wedge [(b \wedge (a \vee c)) \vee c]$, поэтому условие (ii) выполнено.

Обратно, если выполнено условие (ii) и $a \leq b \vee c$ для некоторых $a, b, c \in L$, то $a = a \wedge (b \vee c) = a \wedge [(b \wedge (a \vee c)) \vee c] \leq (b \wedge (a \vee c)) \vee c$ в силу тождества модулярности. Таким образом, (ii) влечет (i). $\square$

Предложение 5. Пусть L является 2-дистрибутивной J -решеткой для некоторого множества $J \subseteq J(L)$. Следующие условия равносильны.

- (i) Если $a \leq b \vee c$ является минимальным нетривиальным покрытием для некоторых элементов $a, b, c \in J$, то $b \leq a \vee c$.
- (ii) (M) истинно на L .

Доказательство. Предположим, что условие (i) выполнено, и покажем, что утверждение (i) предложения 4 также выполняется. Действительно, пусть $a \leq b \vee c$ для некоторого элемента $a \in J$ и некоторых элементов $b, c \in L$. Если $a \leq b$, то $a \leq b \wedge (a \vee c) \leq (b \wedge (a \vee c)) \vee c$. Если $a \leq c$, то $a \leq (b \wedge (a \vee c)) \vee c$. Если же покрытие $a \leq b$ нетривиально, то существует

конечное множество $F \subseteq J$, такое что $F \ll \{b, c\}$ и $F \in \mathfrak{M}(a)$. По [лемме 2](#) $F = \{d, e\}$ для некоторых $d, e \in J$. Без ограничения общности можем полагать, что $d \leq b$ и $e \leq c$. Применяя (i), получаем, что $d \leq a \vee e \leq a \vee c$, поэтому $a \leq d \vee e = (d \wedge (a \vee c)) \vee e \leq (b \wedge (a \vee c)) \vee c$. Таким образом, утверждение (i) [предложения 4](#) выполнено. Следовательно, тождество (M) истинно на L по [предложению 4](#), и (i) влечет (ii).

Докажем, что (ii) влечет (i). Действительно, если тождество (M) истинно на L , а $a \leq b \vee c$ является минимальным нетривиальным покрытием для некоторых элементов $a, b, c \in J$, то $a \leq (b \wedge (a \vee c)) \vee c$ по утверждению (i) [предложения 4](#). Так как $b' = b \wedge (a \vee c) \leq b$, делаем вывод, что $\{b', c\} \ll \{b, c\}$. В силу минимальности покрытия $\{b, c\}$ получаем, что $b \in \{b, c\} \subseteq \{b', c\}$, поэтому $b = b' \leq a \vee c$. $\square$

Предложение 6. Пусть L является J -решеткой для некоторого множества $J \subseteq J(L)$ и пусть $L \models \Sigma$. Если $\{b, c\} \in \mathfrak{M}(a)$ для некоторых $a, b, c \in J$, то $\{\{a, c\}\} = \mathfrak{M}(b)$.

Доказательство. Так как $L \models (M)$, получаем по [предложению 5](#) (i), что $b \leq a \vee c$. Покажем сначала, что это покрытие нетривиально. Действительно, если $b \leq c$, то $a \leq b \vee c = c$, что противоречит нашему предположению о том, что $\{b, c\} \in \mathfrak{M}(a)$. Далее, по [предложению 5](#) (i) имеем неравенство $c \leq a \vee b$. Таким образом, если $b \leq a$, то $c \leq a \vee b = a$, и поэтому $b \vee c \leq a \leq b \vee c$ и $a = b \vee c$. Поскольку элемент a $\vee$ -неразложим, заключаем, что $a \in \{b, c\}$, что также противоречит нашему предположению о том, что $\{b, c\} \in \mathfrak{M}(a)$. Следовательно, мы установили, что покрытие $b \leq a \vee c$ нетривиально.

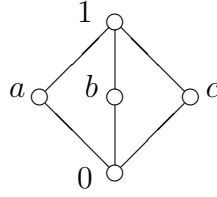
Так как L является 2-дистрибутивной J -решеткой, $b \leq a' \vee c'$ является минимальным нетривиальным покрытием для некоторых элементов $a' \leq a$ и $c' \leq c$ по [лемме 2](#). Покажем, что $a' = a$ и $c' = c$. Действительно, имеем $b \leq a' \vee c' \leq a' \vee c$. Следовательно, $a \leq b \vee c \leq a' \vee c \vee c = a' \vee c$. Если $a \leq a' \vee c$ является нетривиальным покрытием, то $\{b, c\} \ll \{a', c\}$, поскольку покрытие $\{b, c\}$ является единственным минимальным нетривиальным покрытием элемента a по [лемме 3](#), а L является J -решеткой. Таким образом, $b \leq a'$, что невозможно, так как покрытие $b \leq a' \vee c'$ минимально. Это противоречие означает, что покрытие $a \leq a' \vee c$ тривиально. Неравенство $a \leq c$ противоречило бы нашему предположению о том, что $\{b, c\} \in \mathfrak{M}(a)$. Следовательно, $a \leq a'$, поэтому $a = a'$.

Таким образом, покрытие $b \leq a \vee c'$ минимально. По [предложению 5](#) (i) имеем $a \leq b \vee c'$. Так как $c' \leq c$, получаем, что $\{b, c'\} \ll \{b, c\}$. Поскольку $\{b, c\} \in \mathfrak{M}(a)$, это дает включение $c \in \{b, c\} \subseteq \{b, c'\}$, т.е. $c = c'$. Поэтому покрытие $b \leq a \vee c$ является минимальным; к тому же оно единственно по [лемме 3](#). $\square$

Следствие 7. Решетка M_3 удовлетворяет всем тождествам из Σ .

Доказательство. Минимальными нетривиальными покрытиями в решетке M_3 являются в точности следующие покрытия (см. [рис. 1](#)):

$$a \leq b \vee c, \quad b \leq a \vee c, \quad c \leq a \vee b.$$

Рис. 1. Решетка M_3

Следовательно, решетка M_3 удовлетворяет условию (ii) [леммы 2](#). По [лемме 2](#) решетка M_3 2-дистрибутивна. Более того, M_3 удовлетворяет также условию (ii) [леммы 3](#) и условию (ii) [предложения 5](#). Таким образом, M_3 удовлетворяет тождествам (C_1) и (M) по [лемме 3](#) и [предложению 5](#) соответственно. $\square$

3. Основной результат

Предложение 8. Пусть L является J -решеткой для некоторого множества $J \subseteq J(L)$ и пусть $L \models \Sigma$. Тогда $L \in \mathbf{SP}(M_3)$.

Доказательство. Рассмотрим произвольный элемент $a \in J$. Если a является простым элементом, то множество $S = \{a\}$, очевидно, замкнуто. Если элемент a не прост, то по определению J -решетки и [лемме 2](#) существуют $b, c \in J$ такие, что покрытие $a \leq b \vee c$ минимально. В этом случае, принимая во внимание [лемму 3](#) и [предложение 6](#), а также тот факт, что L является J -решеткой, получаем, что множество $S = \{a, b, c\}$ замкнуто. Таким образом, множество J является раздельным объединением замкнутых множеств S_i , $i \in I$ таких, что для каждого $i \in I$ множество S_i либо одноэлементно, либо $S_i = \{a, b, c\}$, причем $a \leq b \vee c$, $b \leq a \vee c$, $c \leq a \vee b$ являются минимальными нетривиальными покрытиями.

Для каждого замкнутого множества $S \subseteq J$ пусть L_S обозначает для краткости фактор-решетку L/Γ_S и пусть

$$\tau_S: L \rightarrow L_S; \quad \tau_S: x \mapsto x/\Gamma_S$$

является каноническим гомоморфизмом.

Утверждение 1. Если множество $S = \langle S \rangle \subseteq J$ одноэлементно, то L_S является двухэлементной решеткой.

Доказательство утверждения. Пусть $S = \{a\}$ для некоторого $a \in J$. Так как элемент a $\vee$ -неразложим, то a не является наименьшим элементом в L . Поэтому существует $a' \in L$ такой, что $a' < a$. Для элемента $u \in L$ возможны следующие два случая.

Случай 1: $\downarrow u \cap S = \emptyset$. В этом случае $\downarrow u \cap S = \downarrow a' \cap S$, поскольку $a \not\leq a'$. Следовательно, $\tau_S(u) = u/\Gamma_S = a'/\Gamma_S = \tau_S(a')$.

Случай 2: $\downarrow u \cap S = \{a\}$. В этом случае $\downarrow u \cap S = \downarrow a \cap S$. Таким образом, $\tau_S(u) = u/\Gamma_S = a/\Gamma_S = \tau_S(a)$.

Следовательно, $L_S = \{\tau_S(a'), \tau_S(a)\}$ действительно является двухэлементной решеткой. $\square$

Утверждение 2. Если $S = \{a, b, c\} = \langle S \rangle \subseteq J$, то $L_S \cong M_3$.

Доказательство утверждения. Так как множество $S = \{a, b, c\}$ замкнуто, неравенства $a \leq b \vee c$, $b \leq a \vee c$ и $c \leq a \vee b$ являются минимальными нетривиальными покрытиями. В частности, множество S является антицепью. Полагаем $o = a \wedge b \wedge c$ и $i = a \vee b \vee c$; тогда $o < a, b, c < i$ в L . Принимая во внимания три минимальных нетривиальных покрытия, приведенных выше, следующие случаи возможны для элемента $u \in L$.

Случай 1: $\downarrow u \cap S = \emptyset$. В этом случае $\downarrow u \cap S = \downarrow o \cap S$, так как $o < a, b, c$. Следовательно, $\tau_S(u) = u/\Gamma_S = o/\Gamma_S = \tau_S(o)$.

Случай 2: $\downarrow u \cap S$ является одноэлементным множеством. Тогда $\downarrow u \cap S = \{d\}$ для некоторого элемента $d \in \{a, b, c\}$. В этом случае $\downarrow u \cap S = \downarrow d \cap S$ и $\tau_S(u) = u/\Gamma_S = d/\Gamma_S = \tau_S(d)$.

Случай 3: $\downarrow u \cap S = \{a, b, c\}$. В этом случае $\downarrow u \cap S = \downarrow i \cap S$, поскольку $a, b, c < i$ и $\tau_S(u) = u/\Gamma_S = i/\Gamma_S = \tau_S(i)$.

Таким образом, заключаем, что $L_S = \{\tau_S(o), \tau_S(a), \tau_S(b), \tau_S(c), \tau_S(i)\} \cong M_3$, поскольку множество $\{\tau_S(a), \tau_S(b), \tau_S(c)\}$ образует антицепь. $\square$

Утверждение 3. Отображение

$$\tau: L \rightarrow \prod_{S=\langle S \rangle \subseteq J} L_S; \quad \tau: x \mapsto (\tau_S(x) \mid S = \langle S \rangle \subseteq J)$$

является изоморфным вложением.

Доказательство утверждения. Ясно, что отображение τ является гомоморфизмом. Покажем, что τ взаимно однозначно. Действительно, пусть $a \not\leq b$ в L . Так как a является точной верхней гранью некоторого множества элементов из J , существует $x \in J$ такой, что $x \leq a$ и $x \not\leq b$. Таким образом, $x \in \downarrow a \cap \langle x \rangle \setminus \downarrow b \cap \langle x \rangle$ и $\tau_{\langle x \rangle}(a) = a/\Gamma_{\langle x \rangle} \not\leq b/\Gamma_{\langle x \rangle} = \tau_{\langle x \rangle}(b)$, поэтому $\tau(a) \not\leq \tau(b)$. $\square$

Требуемое утверждение вытекает из утверждений 1–3. Доказательство [предложения 8](#) завершено. $\square$

Следствие 9. Квазимногообразие $(0, 1)$ -решеток $\mathbf{SP}(M_3)$ является многообразием, а Σ образует базис тождеств этого многообразия.

Доказательство. Так как $M_3 \models \Sigma$ по [следствию 7](#), получаем, что $\mathbf{SP}(M_3) \models \Sigma$. Обратно, пусть $L \models \Sigma$; покажем, что $L \in \mathbf{SP}(M_3)$. Действительно, если M обозначает решетку, двойственную решетке фильтров решетки L , то $M \models \Sigma$. В частности, решетка M 2-дистрибутивна. В силу [10, теоремы 3.1–3.2] M является $J(M)$ -решеткой. По [предложению 8](#) имеем $M \in \mathbf{SP}(M_3)$. Поскольку L изоморфна $(0, 1)$ -подрешетке решетки M , заключаем, что $L \in \mathbf{SP}(M_3)$. $\square$

Список литературы

- [1] M. Schützenberger, *Sur certains axiomes de la théorie des structures*, C. R. Acad. Sci. Paris **221**, 218–220 (1945).
- [2] S.D. Comer, D.X. Hong, *Some remarks concerning the varieties generated by the diamond and the pentagon*, Trans. Amer. Math. Soc. **174**, 45–54 (1972).
- [3] W. Dziobiak, M.V. Schwedfsky, *Categorical dualities for some two categories of lattices: An extended abstract*, Bull. Sec. Logic **51** (3), 329–344 (2022).
DOI: <https://doi.org/10.18778/0138-0680.2022.14>
- [4] W. Dziobiak, M.V. Schwedfsky, *Duality for bi-algebraic lattices belonging to the variety of $(0, 1)$ -lattices generated by the pentagon*, Algebra and Logic (принята к печати).
- [5] A.O. Basheyeva, M.V. Schwedfsky, K.D. Sultankulov, *The quasivariety $\mathbf{SP}(L_6)$. I. An equational basis*, Сиб. электрон. матем. изв. **19** (2), 902–911 (2022).
DOI: <https://doi.org/10.33048/semi.2022.19.076>
- [6] А.О. Башеева, М.В. Швидефски, *Квазимногообразие $\mathbf{SP}(L_6)$. II. Результат о дуальности*, Сиб. матем. журн. **65** (3), 446–454 (2024).
DOI: <https://doi.org/10.1134/S0037446624030029>
- [7] O.A. Kadyrova, M.V. Schwedfsky, *Quasivarieties generated by small suborder lattices. I. Equational bases*, Сиб. электрон. матем. изв. **20** (1), 62–71 (2023).
DOI: <https://doi.org/10.33048/semi.2023.20.006>
- [8] O.A. Kadyrova, M.V. Schwedfsky, *Quasivarieties generated by small suborder lattices. II. A duality theorem* (препринт).
- [9] R. Freese, J. Ježek, and J.B. Nation, *Free lattices*, Math. Surveys Monogr. **42**, AMS, Providence, New York, 1995.
- [10] J.B. Nation, *An approach to lattice varieties of finite height*, Algebra Universalis **27** (4), 521–543 (1990).
DOI: <https://doi.org/10.1007/BF01188998>
- [11] A.P. Huhn, *Schwach distributive Verbände I*, Acta Sci. Math. (Szeged) **33** (3–4), 297–305 (1972).

Александра Евгеньевна Изьюрова

Новосибирский национальный исследовательский государственный университет,
ул. Пирогова, д. 1, г. Новосибирск, 630090, Россия,
e-mail: a.izyurova@g.nsu.ru

Марина Владимировна Швидефски

Новосибирский национальный исследовательский государственный университет,
ул. Пирогова, д. 1, г. Новосибирск, 630090, Россия,

Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН,
пр. Акад. Коптюга, д. 4, г. Новосибирск, 630090, Россия,
e-mail: m.schwidefsky@g.nsu.ru

The quasivariety $\mathbf{SP}(M_3)$: An equational basis

A.E. Izyurova, M.V. Schwidefsky

Abstract. We prove that the quasivariety of $(0,1)$ -lattices generated by the diamant M_3 is a variety and find an equational basis of this variety.

Keywords: lattice, equational basis, variety, diamant.

DOI: 10.26907/2949-3919.2024.3.53-62

References

- [1] M. Schützenberger, *Sur certains axiomes de la théorie des structures*, C. R. Acad. Sci. Paris **221**, 218–220 (1945).
- [2] S.D. Comer, D.X. Hong, *Some remarks concerning the varieties generated by the diamond and the pentagon*, Trans. Amer. Math. Soc. **174**, 45–54 (1972).
- [3] W. Dziobiak and M.V. Schwidefsky, *Categorical dualities for some two categories of lattices: An extended abstract*, Bull. Sec. Logic **51** (3), 329–344 (2022).
DOI: <https://doi.org/10.18778/0138-0680.2022.14>
- [4] W. Dziobiak and M.V. Schwidefsky, *Duality for bi-algebraic lattices belonging to the variety of $(0,1)$ -lattices generated by the pentagon*, Algebra and Logic (to appear).
- [5] A.O. Basheyeva, M.V. Schwidefsky, K.D. Sultankulov, *The quasivariety $\mathbf{SP}(L_6)$. I. An equational basis*, Siberian Electronic Mathematical Reports **19** (2), 902–911 (2022).
DOI: <https://doi.org/10.33048/semi.2022.19.076>
- [6] A.O. Basheyeva, M.V. Schwidefsky, *The quasivariety $\mathbf{SP}(L_6)$. II. A duality result*, Siberian Math. J. **65** (3), 514–521 (2024).
DOI: <https://doi.org/10.1134/S0037446624030029>
- [7] O.A. Kadyrova, M.V. Schwidefsky, *Quasivarieties generated by small suborder lattices. I. Equational bases*, Sib. Electron. Math. Rep. **20** (1), 62–71 (2023).
DOI: <https://doi.org/10.33048/semi.2023.20.006>
- [8] O.A. Kadyrova, M.V. Schwidefsky, *Quasivarieties generated by small suborder lattices. II. A duality theorem* (preprint).
- [9] R. Freese, J. Ježek, and J.B. Nation, *Free lattices*, Math. Surveys Monogr. **42**, AMS, Providence, New York, 1995.

Acknowledgements. The work is supported by the Russian Science Foundation, project no. 24-21-00075.

Received: 30 May 2024. Accepted: 10 August 2024. Published: 17 October 2024.

- [10] J.B. Nation, *An approach to lattice varieties of finite height*, Algebra Universalis **27** (4), 521–543 (1990).
DOI: <https://doi.org/10.1007/BF01188998>
- [11] A.P. Huhn, *Schwach distributive Verbände I*, Acta Sci. Math. (Szeged) **33** (3–4), 297–305 (1972).

Aleksandra Evgenyevna Izyurova

Novosibirsk State University,
1 Pirogov str., Novosibirsk 630090, Russia,
e-mail: a.izyurova@g.nsu.ru

Marina Vladimirovna Schwidefsky

Novosibirsk State University,
1 Pirogov str., Novosibirsk 630090, Russia,
Sobolev Institute of Mathematics SB RAS,
4 Acad. Koptug Ave., Novosibirsk 630090, Russia,
e-mail: m.schwidefsky@g.nsu.ru