Том 2, Выпуск 3
Стр. 63–75 (2024)

УДК 512.534, 519.713.2
MSC 08A35, 08A70

О мономорфизмах универсальных гиперграфических автоматов

Е.В. Хворостухина

Аннотация. Гиперграфическими автоматами называются автоматы, у которых множества состояний и выходных сигналов наделены структурами гиперграфов, сохраняющимися функциями переходов и выходными функциями. Универсальные притягивающие объекты в категории таких автоматов называются универсальными гиперграфическими автоматами. Для таких автоматов полугруппы входных сигналов являются производными алгебрами отображений, свойства которых взаимосвязаны со свойствами алгебраической структуры исходного автомата. В работе описывается строение мономорфизмов таких автоматов и их полугрупп входных сигналов.

Ключевые слова: гиперграфический автомат, мономорфизм, изоморфизм, полугруппа.

DOI: 10.26907/2949-3919.2024.3.63-75

Введение

Как известно [1], в алгебраической теории автоматов главный объект исследования – автомат – рассматривается как многосортная алгебраическая система $A = (X, S, Y, \delta, \lambda)$ с тремя базисными множествами: множеством состояний автомата X, множеством входных символов S, множеством выходных символов Y, с двумя сигнатурными операциями: функцией переходов $\delta : X \times S \to X$ и выходной функцией $\lambda : X \times S \to Y$. При этом в зависимости от рассматриваемых задач автоматы могут структуризироваться в подходящих алгебраических категориях, т. е. компоненты автоматов могут быть объектами некоторых специальных категорий. Так, множества состояний автомата и его выходных символов могут наделяться некоторой алгебраической структурой и являться объектами категории $\mathbf{K}$ соответствующих алгебраических систем. Важными примерами таких алгебраических систем являются графы, упорядоченные множества, линейные пространства, вероятностные пространства, топологические пространства и другие. Исследованию структуризованных в таких категориях автоматов посвящены многочисленные работы известных алгебраистов (см., например, обзор в [1]). Как следует из [1], универсальные притягивающие объекты в категории автоматов, структуризованных в любой категории $\mathbf{K}$, представляются

Поступила: 01.07.2024. Принята: 10.08.2024. Опубликована: 17.10.2024.

универсальными автоматами $\mathrm{Atm}(A, B)$ с алгебраической системой состояний $A \in \mathbf{K}$, алгебраической системой выходных символов $B \in \mathbf{K}$ и полугруппой входных символов $S = \mathrm{End}A \times \mathrm{Hom}(A, B)$. В нашей работе рассматриваются гиперграфические автоматы, а именно, автоматы, структуризованные в категории гиперграфов особого вида – эффективных гиперграфов с p-определимыми ребрами $\mathbf{Hgr}$. Универсальные притягивающие объекты в категории таких автоматов представляются универсальными гиперграфическими автоматами $\mathrm{Atm}(H_X, H_Y)$ с гиперграфом состояний H_X, гиперграфом выходных символов H_Y и полугруппой входных символов $S = \mathrm{End}H_X \times \mathrm{Hom}(H_X, H_Y)$, $H_X, H_Y \in \mathbf{Hgr}$. Это достаточно широкий и весьма важный класс автоматов, так как он содержит, в частности, не только автоматы, у которых гиперграфы состояний и выходных символов являются плоскостями, но и автоматы, у которых гиперграфы состояний и выходных символов являются разбиениями на классы эквивалентностей, содержащие более p элементов, и многие другие.

Для таких автоматов в работе [2] доказано, что они (с точностью до изоморфизма) определяются своими полугруппами входных сигналов, в работах [3–5] получены конкретная характеризация, абстрактная характеризация таких автоматов и полугрупп их входных сигналов. В нашей работе продолжаются исследования таких автоматов: здесь изучается структура мономорфизмов рассматриваемых автоматов.

Результаты работы докладывались на Международной конференции "Алгебра и математическая логика: теория и приложения", посвященной 130-летию со дня рождения основателя кафедры алгебры Казанского университета, члена-корреспондента АН СССР Николая Григорьевича Чеботарева (1894–1947) и 80-летию со дня рождения заведующего кафедрой, академика АН РТ Марата Мирзаевича Арсланова (Казань, 2024) [6].

1. Предварительные сведения

В работе используется общепринятая терминология и основные понятия теории автоматов [1], теории полугрупп [7, 8], алгебры отношений [9] и теории гиперграфов [10].

Пусть X, Y – непустые множества. Всюду определенное однозначное бинарное отношение $\varphi \subset X \times Y$ называется отображением множества X в множество Y и обозначается символом $\varphi : X \to Y$. Постоянное отображение множества X в элемент $a \in Y$ обозначается символом C_a. Тождественное отображение множества X в себя обозначается символом Δ_X.

Согласно [10] гиперграфом называется система вида $H = (X, L)$, где X – это непустое множество вершин гиперграфа и L – семейство некоторых подмножеств множества X, называемых ребрами гиперграфа. Множество вершин гиперграфа называется ограниченным, если оно содержится в некотором его ребре, и неограниченным в противном случае. Вершины гиперграфа, принадлежащие некоторому его ребру, называются смежными.

Гиперграф $H = (X, L)$ называется эффективным, если любая его вершина принадлежит некоторому ребру этого гиперграфа.

Пусть p – некоторое натуральное число. Гиперграф H будем называть гиперграфом с p-определимыми ребрами, если в каждом ребре этого гиперграфа найдется по крайней мере $p+1$ вершина и, с другой стороны, любые p вершин этого гиперграфа содержатся не более, чем в одном ребре.

Например, всякое разбиение множества вершин без одноэлементных классов является эффективным гиперграфом с 1-определимыми ребрами. Кроме того, существует множество других эффективных гиперграфов с p-определимыми ребрами. На рис. 1 представлен эффективный гиперграф с 2-определимыми ребрами $H_1 = (X, L_X)$, где $X = \{1, 2, \ldots, 9\}$, $L_X = \{\{1, 2, 3, 4\}, \{4, 5, 6, 7\}, \{1, 6, 9\}, \{7, 8, 9\}\}$.

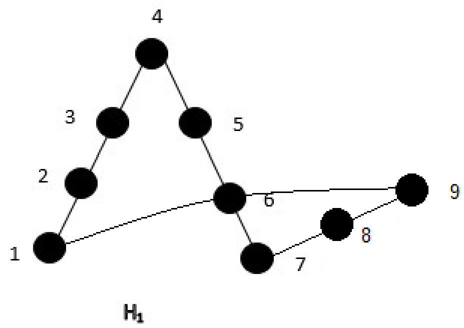

Рис. 1. Эффективный гиперграф с 2-определимыми ребрами

Частным случаем эффективных гиперграфов с p-определимыми ребрами являются p-гиперграфы.

Для фиксированного натурального числа p гиперграф $H = (X, L)$ называется p-гиперграфом, если выполняются следующие аксиомы:

(A_1) любые p вершин содержатся в одном и только одном ребре;

(A_2) каждое ребро содержит по крайней мере $p+1$ вершину;

(A_3) в множестве X есть (p+1)-элементное множество, не принадлежащее ни одному ребру.

Если рассматривать плоскости [11] как гиперграфы, вершинами которых являются точки, а ребрами – прямые этих плоскостей, то любая проективная плоскость и любая аффинная плоскость с числом точек более четырех являются 2-гиперграфами. Помимо этих известных примеров, существуют и другие p-гиперграфы.

Например, 3-гиперграфом является гиперграф $H = (X, L)$ с множеством вершин $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ и множеством ребер $L = \{l_1, l_2, \ldots, l_{14}\}$, где

$$
\begin{array}{llll}
l_1 = \{1,2,3,4\}, & l_2 = \{1,2,5,6\}, & l_3 = \{1,2,7,8\}, & l_4 = \{1,3,5,7\}, \\
l_5 = \{1,3,6,8\}, & l_6 = \{1,4,5,8\}, & l_7 = \{1,4,6,7\}, & l_8 = \{2,3,5,8\}, \\
l_9 = \{2,3,6,7\}, & l_{10} = \{2,4,5,7\}, & l_{11} = \{2,4,6,8\}, & l_{12} = \{3,4,5,6\}, \\
l_{13} = \{3,4,7,8\}, & l_{14} = \{5,6,7,8\}. & &
\end{array}
$$

Для гиперграфов $H_X = (X, L_X)$, $H_Y = (Y, L_Y)$ отображение $\varphi : X \to Y$ называется гомоморфизмом гиперграфа H_X в гиперграф H_Y, если оно ограниченные множества вершин гиперграфа H_X отображает в ограниченные множества вершин гиперграфа H_Y, т. е. выполняется свойство:

$$\forall\, l \in L_X \;\exists\, l' \in L_Y \;(\varphi(l) \subset l').$$

Множество всех гомоморфизмов H_X в H_Y обозначается $\mathrm{Hom}(H_X, H_Y)$.

При этом гомоморфизм $\varphi : H_X \to H_Y$ называется:

- мономорфизмом, если отображение f взаимно однозначное, т. е. для любых $x, y \in X$ из условия $\varphi(x) = \varphi(y)$ следует $x = y$;
- изоморфизмом гиперграфа H_X на гиперграф H_Y, если φ – взаимно однозначное отображение множества X на множество Y, сохраняющее ребра этих гиперграфов, т. е. выполняется
$$\forall\, l \subset X \;(l \in L_X \Longleftrightarrow \varphi(l) \in L_Y);$$
- эндоморфизмом гиперграфа H_X, если $H_X = H_Y$.

Множество всех эндоморфизмов гиперграфа H_X с операцией композиции образует полугруппу $\mathrm{End}(H_X)$. Как известно [1], множество $S(H_X, H_Y) = \mathrm{End}(H_X) \times \mathrm{Hom}(H_X, H_Y)$ образует полугруппу с ассоциативной бинарной операцией “$\cdot$”, определяемой по правилу: $(\varphi, \psi) \cdot (\varphi_1, \psi_1) = (\varphi\varphi_1, \varphi\psi_1)$ для пар $(\varphi, \psi), (\varphi_1, \psi_1) \in \mathrm{End}(H_X) \times \mathrm{Hom}(H_X, H_Y)$.

Следуя [1], под автоматом будем понимать алгебраическую систему $\mathbf{A} = (X, S, Y, \delta, \lambda)$, состоящую из множества состояний X, множества выходных сигналов Y, полугруппы входных сигналов S, функции переходов $\delta : X \times S \to X$ и выходной функции $\lambda : X \times S \to Y$ таких, что для любых $x \in X$ и $a, b, c \in S$ выполняются равенства:

$$(ab)c = a(bc), \quad \delta(x, ab) = \delta(\delta(x, a), b), \quad \lambda(x, ab) = \lambda(\delta(x, a), b).$$

Для каждого $s \in S$ определим отображения $\delta_s : X \to X$ и $\lambda_s : X \to Y$ по формулам: $\delta_s(x) = \delta(x, s)$, $\lambda_s(x) = \lambda(x, s)$, где $x \in X$.

Автомат $A = (X, S, Y, \delta, \lambda)$ будем называть гиперграфическим автоматом, если множество состояний X и множество выходных символов Y наделены такими структурами гиперграфов $H_X = (X, L_X)$ и $H_Y = (Y, L_Y)$, что при каждом фиксированном входном сигнале $s \in S$ преобразование $\delta_s : X \to X$ является эндоморфизмом гиперграфа H_X и отображение $\lambda_s : X \to Y$ – гомоморфизмом гиперграфа H_X в гиперграф H_Y. Такие автоматы будем также обозначать $A = (H_X, S, H_Y, \delta, \lambda)$.

Гомоморфизмом гиперграфического автомата $\mathbf{A} = (H_X, S, H_Y, \delta, \lambda)$ в гиперграфический автомат $\mathbf{A}' = (H'_X, S', H'_Y, \delta', \lambda')$ называется упорядоченная тройка $\gamma = (f, \pi, g)$ гомоморфизмов $f : H_X \to H'_X$, $\pi : S \to S'$ и $g : H_Y \to H'_Y$, сохраняющих алгебраические операции таких автоматов, т. е. для любой вершины x гиперграфа H_X и любого входного сигнала $s \in S$ выполняются условия: $f(\delta(x, s)) = \delta'(f(x), \pi(s))$, $g(\lambda(x, s)) = \lambda'(f(x), \pi(s))$.

Гомоморфизм $\gamma = (f, \pi, g)$ называется изоморфизмом (мономорфизмом) автомата $\mathbf{A}$ на (в) автомат $\mathbf{A}'$, если все гомоморфизмы f, π, g являются изоморфизмами (мономорфизмами) соответствующих алгебраических систем.

Важный пример гиперграфического автомата дает алгебраическая система $\mathrm{Atm}(H_X, H_Y) = (H_X, S(H_X, H_Y), H_Y, \delta', \lambda')$, где $H_X = (X, L_X)$, $H_Y = (Y, L_Y)$ – некоторые гиперграфы, и для любых $x \in X$, $(\varphi, \psi) \in S(H_X, H_Y)$ определены значения:

$$\delta'(x, (\varphi, \psi)) = \varphi(x), \quad \lambda'(x, (\varphi, \psi)) = \psi(x).$$

Легко проверить, что автомат $\mathrm{Atm}(H_X, H_Y)$ удовлетворяет следующему универсальному свойству: для любого гиперграфического автомата $A = (H_X, S, H_Y, \delta, \lambda)$ существует такой гомоморфизм $\pi : S \to S(H_X, H_Y)$, что упорядоченная тройка $\gamma = (\Delta_X, \pi, \Delta_Y)$ является гомоморфизмом A в $\mathrm{Atm}(H_X, H_Y)$. По этой причине такой гиперграфический автомат $\mathrm{Atm}(H_X, H_Y)$ называется [1] универсальным гиперграфическим автоматом над гиперграфами H_X, H_Y.

2. Основные результаты

Обозначим через $Z(H_X, H_Y)$ множество правых нулей полугруппы $S(H_X, H_Y)$, а через $U(H_X, H_Y)$ – множество всех левых единиц полугруппы $S(H_X, H_Y)$. Эти множества в полугруппе $S(H_X, H_Y)$ соответственно определяются по следующим формулам теории полугрупп: $\Phi(x) = \forall y\ (yx = x)$ и $\Psi(x) = \forall y\ (xy = y)$.

В работе [2] был получен следующий результат.

Лемма 1. *Пусть $H_X = (X, L_X), H_Y = (Y, L_Y)$ – эффективные гиперграфы с p-определимыми ребрами. Тогда справедливы следующие утверждения:*

1) *элемент $z \in S(H_X, H_Y)$ является правым нулем полугруппы $S(H_X, H_Y)$ тогда и только тогда, когда найдутся $a \in X$, $b \in Y$ такие, что $z = (C_a, C_b)$, где C_a и C_b – постоянные отображения множества X соответственно в a и b;*
2) *элемент $i \in S(H_X, H_Y)$ является левой единицей полугруппы $S(H_X, H_Y)$ тогда и только тогда, когда $i = (\Delta_X, \psi)$ для некоторого $\psi \in \mathrm{Hom}(H_X, H_Y)$.*

Лемма 2. *Пусть $H_X = (X, L_X)$, $H_Y = (Y, L_Y)$ и $H_{X_1} = (X_1, L_{X_1})$, $H_{Y_1} = (Y_1, L_{Y_1})$ – эффективные гиперграфы с p-определимыми ребрами, $f : H_X \to H_{X_1}$ – изоморфизм, отображение $g : H_Y \to H_{Y_1}$ – мономорфизм. Пусть $\pi : S(H_X, H_Y) \to S(H_{X_1}, H_{Y_1})$ – отображение, определяемое по формуле: $\pi(\varphi, \psi) = (f^2(\varphi), f \times g(\psi))$ для произвольной пары $(\varphi, \psi) \in S(H_X, H_Y)$. Тогда справедливы следующие утверждения:*

1) *π – мономорфизм полугруппы $S(H_X, H_Y)$ в полугруппу $S(H_{X_1}, H_{Y_1})$;*
2) *упорядоченная тройка $\gamma = (f, \pi, g)$ является мономорфизмом автомата $\mathrm{Atm}(H_X, H_Y)$ в автомат $\mathrm{Atm}(H_{X_1}, H_{Y_1})$.*

Доказательство. Пусть отображение $\pi : S(H_X, H_Y) \to S(H_{X_1}, H_{Y_1})$ определяется по формуле $\pi = (f^2, f \times g)$, где $f : H_X \to H_{X_1}$ – изоморфизм, $g : H_Y \to H_{Y_1}$ – мономорфизм. Для произвольной пары $(\varphi, \psi) \in S(H_X, H_Y)$ отображение φ – эндоморфизм гиперграфа H_X, отображение ψ – гомоморфизм гиперграфа H_X в гиперграф H_Y. Убедимся, что

$\pi(\varphi,\psi) \in S(H_{X_1},H_{Y_1})$. Очевидно, что образ $f^2(\varphi) = f^{-1}\varphi f$ – эндоморфизм гиперграфа H_{X_1}. Рассмотрим $\pi_2(\psi) = f\times g(\psi) = f^{-1}\psi g$. Ясно, что $\pi_2(\psi) : H_{X_1} \to H_{Y_1}$. Пусть e – произвольное ребро гиперграфа H_{X_1}. По определению гиперграфа с p-определимыми ребрами найдутся различные вершины $x_1,\ldots,x_{p+1}$, принадлежащие e. По определению изоморфизма в гиперграфе H_X найдутся такие различные вершины $t_1 = f^{-1}(x_1),...,t_{p+1} = f^{-1}(x_{p+1})$, что множество $\{t_1,\ldots,t_{p+1}\}$ ограниченно в H_X. Тогда

$$\pi_2(\psi)(x_i) = f^{-1}\psi g(x_i) = g(\psi(f^{-1}(x_i))) = g(\psi(t_i)), \quad i = \overline{1,p+1}.$$

Поскольку ψ и g являются гомоморфизмами, то множества $\{\psi(t_1),\ldots,\psi(t_{p+1})\}$ и $\{g(\psi(t_1)),\ldots,g(\psi(t_{p+1}))\}$ – ограниченные множества в гиперграфах H_Y и H_{Y_1}, соответственно. Аналогичным образом, для любого подмножества $e' \subseteq e$ можно показать, что $f\times g(\psi)(e')$ – ограниченное множество в H_{Y_1}. Это означает, что найдется ребро $r \in L_{Y_1}$ такое, что в силу p-определимости гиперграфов выполняется $f\times g(\psi)(e) = f^{-1}\psi g(e) \subseteq r$. Следовательно, $\pi_2(\psi) = f\times g(\psi)$ – гомоморфизм гиперграфа H_{X_1} в гиперграф H_{Y_1}. Это означает, что $\pi(\varphi,\psi) \in S(H_{X_1},H_{Y_1})$.

Ясно, что π является инъекцией. Действительно, пусть $\pi(\varphi,\psi) = \pi(\varphi_1,\psi_1)$ для некоторых пар $(\varphi,\psi),(\varphi_1,\psi_1) \in S(H_X,H_Y)$. Это означает, что $(f^2(\varphi), f\times g(\psi)) = (f^2(\varphi_1), f\times g(\psi_1))$, $f^2(\varphi) = f^2(\varphi_1)$, $f\times g(\psi) = f\times g(\psi_1)$. В силу инъективности отображений f и g получаем, что $\varphi = \varphi_1$, $\psi = \psi_1$, значит, $(\varphi,\psi) = (\varphi_1,\psi_1)$. Следовательно, π – инъекция.

Возьмем произвольные элементы $s = (\varphi,\psi)$, $s_1 = (\varphi_1,\psi_1)$ полугруппы $S(H_X,H_Y)$. Так как $ss_1 = (\varphi\varphi_1,\varphi\psi_1)$, то выполняются равенства

$$\begin{aligned}\pi(s)\cdot\pi(s_1) &= \pi(\varphi,\psi)\cdot\pi(\varphi_1,\psi_1) = (f^2(\varphi),(f\times g)(\psi))\cdot(f^2(\varphi_1),(f\times g)(\psi_1))\\ &= (f^2(\varphi)f^2(\varphi_1), f^2(\varphi)(f\times g)(\psi_1)) = (f^{-1}\varphi ff^{-1}\varphi_1 f, f^{-1}\varphi ff^{-1}\psi_1 g)\\ &= (f^{-1}\varphi\varphi_1 f, f^{-1}\varphi\psi_1 g) = (f^2(\varphi\varphi_1),(f\times g)(\varphi\psi_1)) = \pi(ss_1).\end{aligned}$$

Таким образом, π – мономорфизм полугруппы $S(H_X,H_Y)$ в полугруппу $S(H_{X_1},H_{Y_1})$, т. е справедливо утверждение 1).

Более того, для произвольных $x \in X, s = (\varphi,\psi) \in S(H_X,H_Y)$ имеют место равенства:

$$\begin{aligned}f(\delta(x,s)) &= f(\varphi(x)) = f(\varphi(f^{-1}(f(x)))) = f^{-1}\varphi f(f(x)) = f^2(\varphi)(f(x))\\ &= \delta_1(f(x),(f^2(\varphi),(f\times g)(\psi))) = \delta_1(f(x),\pi(s)),\\ g(\lambda(x,s)) &= g(\psi(x)) = g(\psi(f^{-1}(f(x)))) = f^{-1}\psi g(f(x)) = (f\times g)(f(x))\\ &= \lambda_1(f(x),(f^2(\varphi),(f\times g)(\psi))) = \lambda_1(f(x),\pi(s)).\end{aligned}$$

Это означает, что $\gamma = (f,\pi,g)$ является мономорфизмом автомата $\mathrm{Atm}(H_X,H_Y)$ в автомат $\mathrm{Atm}(H_{X_1},H_{Y_1})$, т. е справедливо утверждение п. 2). $\square$

В работе [2] доказано, что универсальные гиперграфические автоматы (с точностью до изоморфизма) определяются своими полугруппами входных сигналов, и описано строение изоморфизмов таких автоматов. Основной результат нашей работы – теорема 3, в которой описывается строение мономорфизмов универсальных гиперграфических автоматов и их полугрупп входных сигналов.

Теорема 3. *Пусть* $\mathrm{Atm}(H_X, H_Y)$, $\mathrm{Atm}(H_{X_1}, H_{Y_1})$ *– универсальные гиперграфические автоматы над эффективными гиперграфами с p-определимыми ребрами* $H_X = (X, L_X)$, $H_Y = (Y, L_Y)$ *и* $H_{X_1} = (X_1, L_{X_1})$, $H_{Y_1} = (Y_1, L_{Y_1})$, *соответственно. Пусть* f *– такая сюръекция* X *на* X_1, *что в гиперграфе* H_X *существует множество* $V = \{v_1, v_2, \ldots, v_{p+1}\}$, *в котором все p-элементные подмножества ограниченны в* H_X, *образ* $f(V) = \{f(v_1), f(v_2), \ldots, f(v_{p+1})\}$ *– неограниченное множество в* H_{X_1}, *имеется отображение* $g : Y \to Y_1$. *Тогда следующие условия эквивалентны*:

1) $\pi = (f^2, f \times g)$ *– мономорфизм полугруппы* $S(H_X, H_Y)$ *в полугруппу* $S(H_{X_1}, H_{Y_1})$;
2) f *– изоморфизм гиперграфа* H_X *на гиперграф* H_{X_1}, g *– мономорфизм гиперграфа* H_Y *в гиперграф* H_{Y_1};
3) $\gamma = (f, (f^2, f \times g), g) : \mathrm{Atm}(H_X, H_Y) \to \mathrm{Atm}(H_{X_1}, H_{Y_1})$ *– мономорфизм автомата* $\mathrm{Atm}(H_X, H_Y)$ *в автомат* $\mathrm{Atm}(H_{X_1}, H_{Y_1})$.

Доказательство. Очевидно, из условия 3) следует условие 1). А согласно лемме 2 из условия 2) следуют условия 1) и 3).

Остается показать, что из 1) следует 2). Пусть выполняется условие 1).

Докажем, что f – гомоморфизм. Рассмотрим прозвольное ребро $l \in L_X$. Тогда любое отображение φ на l является эндоморфизмом гиперграфа H_X, и для произвольного $\psi \in \mathrm{Hom}(H_X, H_Y)$ пара $(\varphi, \psi) \in S(H_X, H_Y)$. Значит, $\pi(\varphi, \psi) \in S(H_{X_1}, H_{Y_1})$. Согласно условию, $\pi(\varphi, \psi) = (f^2(\varphi), f \times g(\psi))$. Это означает, что $\chi = f^2(\varphi)$ является эндоморфизмом гиперграфа H_{X_1}. При этом для любого $x \in X_1$ выполняется $\chi(x) = f(\varphi(f^{-1}(x))) \in f(l)$. В силу произвольности выбора x получаем, что $f(l)$ является ограниченным множеством гиперграфа H_{X_1}, т. е. найдется ребро $r \in L_{X_1}$ такое, что $f(l) \subseteq r$. Следовательно, f – гомоморфизм гиперграфа H_X в гиперграф H_{X_1}. Поскольку f – сюръекция, то $f(X) = X_1$, f – гомоморфизм гиперграфа H_X на гиперграф H_{X_1}.

Аналогичным образом можно показать, что g является гомоморфизмом гиперграфа H_Y в гиперграф H_{Y_1}.

Покажем, что f и g являются инъекциями. Пусть $f(a) = f(b)$ для некоторых $a, b \in X$. Обозначим $C_a : X \to a$, $C_b : X \to b$. В силу эффективности гиперграфа H_X константы C_a, C_b являются эндоморфизмами гиперграфа H_X. Согласно лемме 1, для некоторой константы $C_d : X \to d$ $(d \in Y)$ пары (C_a, C_d), (C_b, C_d) являются правыми нулями полугруппы $S(H_X, H_Y)$, т. е. $(C_a, C_d) \in Z(H_X, H_Y)$, $(C_b, C_d) \in Z(H_X, H_Y)$.

Рассмотрим

$$\pi(C_a, C_d) = (f^2(C_a), f \times g(C_d)) = (C_{f(a)}, f \times g(C_d)), \quad \pi(C_b, C_d) = (C_{f(b)}, f \times g(C_d)).$$

Поскольку $f(a) = f(b)$, то

$$C_{f(a)} = C_{f(b)} \Longrightarrow \pi(C_a, C_d) = \pi(C_b, C_d) \Longrightarrow C_a = C_b \Longrightarrow a = b.$$

Следовательно, отображение $f : X \to X_1$ взаимно однозначное, т. е. f является биекцией X на X_1.

Аналогичным образом можно показать, что отображение $g : Y \to Y_1$ взаимно однозначное и, значит, является мономорфизмом гиперграфа H_Y в гиперграф H_{Y_1}.

Покажем, что f – изоморфизм. Достаточно доказать, что $f^{-1} : H_{X_1} \to H_X$ – это гомоморфизм, т. е. остается показать, что

$$\forall\, l \in L_{X_1}\ \exists\, r \in L_X\ (f^{-1}(l) \subseteq r).$$

Предположим противное: пусть среди ребер гиперграфа H_{X_1} найдется ребро l такое, что не существует ребра $r \in L_X$, для которого $f^{-1}(l) \subseteq r$. Согласно определению гиперграфа с p-определимыми ребрами ребро l имеет по меньшей мере $p+1$ различную вершину: $x_1, x_2, \ldots, x_{p+1}$, где $x_i \neq x_j$ при $i \neq j$ для всех $i, j = \overline{1, p+1}$. Поскольку f – биекция, то в гиперграфе H_X найдутся различные вершины $y_i = f^{-1}(x_i) \in f^{-1}(l)$, $i = \overline{1, p+1}$.

Возможны два случая.

Случай 1. Все p-элементные подмножества множества $f^{-1}(l)$ неограниченны в H_X.

Рассмотрим отображение

$$\varphi(x) = \begin{cases} v_1, & \text{если } x = y_1; \\ v_2, & \text{если } x = y_2; \\ \ldots & \\ v_p, & \text{если } x = y_p; \\ v_{p+1}, & \text{в остальных случаях,} \end{cases}$$

где $x \in X$.

Согласно нашему предположению все p-элементные подмножества множества $f^{-1}(l)$ неограниченны в H_X. Следовательно, для любого ребра r гиперграфа H_X вершины $y_1, y_2, \ldots, y_p$ не могут одновременно лежать в этом ребре. Тогда по определению отображения φ образ всякого такого ребра r включается в p-элементное подмножество множества $V = \{v_1, v_2, \ldots, v_{p+1}\}$. Из условия теоремы имеем, что все p-элементные подмножества множества V ограниченны в H_X. Это означает, что образ $\varphi(r)$ – ограниченное множество в H_X. Следовательно, отображение φ является эндоморфизмом гиперграфа H_X, т. е. для произвольного $\psi \in \mathrm{Hom}(H_X, H_Y)$ имеем $(\varphi, \psi) \in S(H_X, H_Y)$.

Тогда выполняется, что $\pi(\varphi, \psi) = (f^2(\varphi), f \times g(\psi)) \in S(H_{X_1}, H_{Y_1})$. Но для ребра l множество $f^2(\varphi)(l) = \{f(v_1), f(v_2), \ldots, f(v_{p+1})\}$ является неограниченным в H_{X_1}. Следовательно, отображение $f^2(\varphi)$ не является эндоморфизмом гиперграфа H_{X_1}, т. е. π не является мономорфизмом полугруппы $S(H_X, H_Y)$ в полугруппу $S(H_{X_1}, H_{Y_1})$. Пришли к противоречию.

Случай 2. Хотя бы одно p-элементное подмножество множества $f^{-1}(l)$ ограниченно в H_X. Это означает, что найдется ребро $r \in L_X$, включающее это подмножество.

Не нарушая общности, будем считать, что $\{y_1, y_2, \ldots, y_p\} \subseteq r$, $y_{p+1} \notin r$. Поскольку f – гомоморфизм гиперграфа H_X на H_{X_1}, то по определению гиперграфа с p-определимыми ребрами получаем, что все вершины множества $f(r)$ содержатся в l: $f(r) \subset l$.

Рассмотрим отображение

$$\varphi(x) = \begin{cases} v_1, & \text{если } x = y_1; \\ v_2, & \text{если } x = y_2; \\ \ldots & \\ v_p, & \text{если } x \in r \text{ и } x \neq y_i, i = \overline{1, p-1}; \\ v_{p+1}, & \text{в остальных случаях,} \end{cases}$$

где $x \in X$.

Тогда $\varphi(r) = \{v_1, \ldots, v_p\}$ – ограниченное множество в гиперграфе H_X. С другой стороны, по определению гиперграфа с p-определимыми ребрами любое ребро $r' \neq r$ гиперграфа H_X может содержать не больше $p-1$ вершин ребра r. Значит, по определению отображения φ образ такого ребра r' гиперграфа H_X включается в p-элементное подмножество множества V. Из условия теоремы имеем, что все p-элементные подмножества множества V ограниченны в H_X. Это означает, что образ $\varphi(r')$ – ограниченное множество в H_X. Следовательно, отображение φ является эндоморфизмом гиперграфа H_X, т.е. для произвольного $\psi \in \mathrm{Hom}(H_X, H_Y)$ пара $(\varphi, \psi) \in S(H_X, H_Y)$.

Тогда выполняется $\pi(\varphi, \psi) = (f^2(\varphi), f \times g(\psi)) \in S(H_{X_1}, H_{Y_1})$. Но для ребра l множество $f^2(\varphi)(l) = \{f(v_1), f(v_2), \ldots, f(v_{p+1})\}$ является неограниченным в H_{X_1}. Следовательно, отображение $f^2(\varphi)$ не является эндоморфизмом гиперграфа H_{X_1}, а π не является мономорфизмом полугруппы $S(H_X, H_Y)$ в полугруппу $S(H_{X_1}, H_{Y_1})$. Пришли к противоречию.

Таким образом, получаем, что f – изоморфизм. Следовательно, выполняется условие 2). □

Следствие 4. *Пусть* $\mathrm{Atm}(H_X, H_Y)$, $\mathrm{Atm}(H_{X_1}, H_{Y_1})$ *– универсальные гиперграфические автоматы над p-гиперграфами $H_X = (X, L_X)$, $H_{X_1} = (X_1, L_{X_1})$ и над эффективными гиперграфами с p-определимыми ребрами $H_Y = (Y, L_Y)$, $H_{Y_1} = (Y_1, L_{Y_1})$, соответственно. Пусть имеются сюръекция $f : X \to X_1$ и отображение $g : Y \to Y_1$. Тогда следующие условия эквивалентны:*

1) $\pi = (f^2, f \times g)$ *– мономорфизм полугруппы $S(H_X, H_Y)$ в полугруппу $S(H_{X_1}, H_{Y_1})$;*
2) f *– изоморфизм гиперграфа H_X на гиперграф H_{X_1}, g – мономорфизм гиперграфа H_Y в гиперграф H_{Y_1};*
3) $\gamma = (f, (f^2, f \times g), g) : \mathrm{Atm}(H_X, H_Y) \to \mathrm{Atm}(H_{X_1}, H_{Y_1})$ *– мономорфизм автомата* $\mathrm{Atm}(H_X, H_Y)$ *в автомат* $\mathrm{Atm}(H_{X_1}, H_{Y_1})$.

Доказательство. Согласно аксиоме (A3) в гиперграфе H_{X_1} существует неограниченное множество $\{z_1, z_2, \ldots, z_{p+1}\}$, состоящее из $p+1$ различной вершины гиперграфа H_{X_1}.

В силу того, что f – сюръекция, в гиперграфе H_X найдется $(p+1)$-элементное множество $V=\{v_1,v_2,\dots,v_{p+1}\}$ такое, что $f(V)=\{f(v_1),f(v_2),\dots,f(v_{p+1})\}=\{z_1,z_2,\dots,z_{p+1}\}$. При этом согласно аксиоме (A1) все p-элементные подмножества множества V ограничены в H_X. Таким образом, выполняются все условия теоремы 3, а значит, условия 1)–3) равносильны. □

Заключение

Полученный результат описывает строение мономорфизмов универсальных гиперграфических автоматов над гиперграфами исследуемого класса и их полугрупп входных сигналов. Этот результат можно использовать для дальнейшего изучения морфизмов данных алгебраических систем и взаимосвязи свойств рассматриваемых атоматов и их полугрупп входных сигналов.

Список литературы

[1] Б.И. Плоткин, Л.Я. Гринглаз, А.А. Гварамия, *Элементы алгебраической теории автоматов*, Высшая школа, М., 1994.

[2] В.А. Молчанов, Е.В. Хворостухина, *Об абстрактной определяемой универсальности гиперграфических автоматов полугруппами входных сигналов*, Чебышевский сб. **20** (2), 259–272 (2019).
DOI: https://doi.org/10.22405/2226-8383-2019-20-2-259-272

[3] E.V. Khvorostukhina, V.A. Molchanov, *On problem of concrete characterization of universal automata*, Lobachevskii J. Math. **38** (4), 664–669 (2017).
DOI: https://doi.org/10.1134/S1995080217040114

[4] E.V. Khvorostukhina, V.A. Molchanov, *Abstract characterization of input symbol semigroups of universal hypergraphic automata*, Lobachevskii J. Math. **41** (2), 214–226 (2020).
DOI: https://doi.org/10.1134/S1995080220020109

[5] В.А. Молчанов, Е.В. Хворостухина, *О задаче абстрактной характеризацииии универсальных гиперграфических автоматов*, Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер.: Математика. Механика. Информатика **17** (2), 148–159 (2017).
DOI: https://doi.org/10.18500/1816-9791-2017-17-2-148-159

[6] Е.В. Хворостухина, *О мономорфизмах гиперграфических автоматов*, Материалы международной конференции “Алгебра и математическая логика: теория и приложения”, посвящ. 130-летию со дня рождения основателя кафедры алгебры Казанского ун-та члена-корреспондента АН СССР Н.Г. Чеботарева и 80-летию со дня рождения заведующего каф. академика АН РТ М.М. Арсланова, 177–179 (2024).

[7] А.И. Мальцев, *Алгебраические системы*, Наука, М., 1970.

[8] G. Lallement, *Semigroups and combinatorial applications*, John Wiley & Sons, New York–Chichester–Brisbane, 1979.

[9] В.В. Вагнер, *Теория отношений и алгебра частичных отображений*, в сб. *Теория полугрупп и ее прилож.* **1**, Изд. Саратовск. ун-та, 3–178 (1965).

[10] A. Bretto, *Hypergraph theory. An introduction*, Springer, Cham, 2013.
DOI: https://doi.org/10.1007/978-3-319-00080-0

[11] Ф. Картеси, *Введение в конечные геометрии*, Наука, М., 1980.

Екатерина Владимировна Хворостухина
Саратовский государственный технический университет имени Гагарина Ю.А.,
ул. Политехническая, д. 77, г. Саратов, 410054, Россия,
e-mail: khvorostukhina85@gmail.com

Volume 2, Issue 3
pp. 63–75 (2024)

UDC 512.534, 519.713.2
MSC 08A35, 08A70

On monomorphisms of hypergraphic automata

E.V. Khvorostukhina

Abstract. Hypergraphic automata are automata, state sets and output symbol sets of which are hypergraphs, being invariant under actions of transition and output functions. Universally attracting objects in the category of hypergraphic automata are called universal hypergraphic automata. The semigroups of input symbols of such automata are derivative algebras of mappings for such automata. So their properties are interconnected with properties of the algebraic structures of the automata. This paper describes the structure of monomorphisms of such automata and their semigroups of input signals.

Keywords: hypergraphic automaton, monomorphism, isomorphism, semigroup.

DOI: 10.26907/2949-3919.2024.3.63-75

References

[1] B.I. Plotkin, L.Ja. Geenglaz, A.A. Gvaramija, *Algebraic structures in automata and databases theory*, World Scientific Publishing Co., River Edge, NJ, 1992.
DOI: https://doi.org/10.1142/1631

[2] V.A. Molchanov, E.V. Khvorostukhina, *On problem of abstract definability of universal hypergraphic automata by input symbol semigroup*, Chebyshevskii Sb. **20** (2), 259–272 (2019) [in Russian].
DOI: https://doi.org/10.22405/2226-8383-2019-20-2-259-272

[3] E.V. Khvorostukhina, V.A. Molchanov, *On problem of concrete characterization of universal automata*, Lobachevskii J. Math. **38** (4), 664–669 (2017).
DOI: https://doi.org/10.1134/S1995080217040114

[4] E.V. Khvorostukhina, V.A. Molchanov, *Abstract characterization of input symbol semigroups of universal hypergraphic automata*, Lobachevskii J. Math. **41** (2), 214–226 (2020).
DOI: https://doi.org/10.1134/S1995080220020109

[5] V.A. Molchanov, E.V. Khvorostukhina, *On problem of abstract characterization of universal hypergraphic automata*, Izv. Saratov Univ. Math. Mech. Inform. **17** (2), 148–159 (2017) [in Russian].
DOI: https://doi.org/10.18500/1816-9791-2017-17-2-148-159

Received: 01 July 2024. Accepted: 10 August 2024. Published: 17 October 2024.

[6] E.V. Khvorostukhina, *On monomorphisms of hypergraphic automata*, The international conference “Algebra and mathematical logic: theory and applications” dedicated to the 130-th birthday of the founder of the department of algebra of Kazan university, professor N.G. Chebotarev, and the 80-th birthday of the chair of the department professor M.M. Arslanov, 177–179 (2024) [in Russian].

[7] A.I. Mal’cev, *Algebraic Systems*, Springer-Verlag, Berlin, New York, 1973. DOI: https://doi.org/10.1007/978-3-642-65374-2

[8] G. Lallement, *Semigroups and combinatorial applications*, John Wiley & Sons, New York–Chichester–Brisbane, 1979.

[9] V.V. Vagner, *The theory of relations and the algebra of partial mappings*, in: “The theory of semigroups and their applications” **1**, 3–178, (1965) [in Russian].

[10] A. Bretto, *Hypergraph theory. An introduction*, Springer, Cham, 2013. DOI: https://doi.org/10.1007/978-3-319-00080-0

[11] F. Kárteszi, *Introduction to finite geometries*, North Holland, Hungary, 2014.

Ekaterina Vladimirovna Khvorostukhina
Yuri Gagarin State Technical University of Saratov,
77 Politechnicheskaya str., Saratov 410054, Russia,
e-mail: khvorostukhina85@gmail.com