Том 2, Выпуск 3 УДК 510.532,510.535
Стр. 76–91 (2024) MSC 03D25, 03D28

Плотность вниз в n-вычислимо перечислимых тьюринговых степенях и равномерные конструкции

М.М. Ямалеев

Аннотация. В 1993 Р. Доуни и М. Стоб показали, что плотность вниз вычислимо перечислимых (далее, в. п.) тьюринговых степеней в частичном порядке 2-в. п. тьюринговых степеней не может быть доказана при помощи равномерной конструкции. Мы обобщаем этот результат на случай произвольного натурального $n > 2$ и доказываем, что не существует равномерной конструкции для плотности вниз $(n-1)$-в. п. степеней в структуре n-в. п. степеней. Более того, нами показано, что не существует равномерной конструкции для плотности вниз в структуре n-в. п. степеней.

Ключевые слова: тьюринговая степень, равномерная конструкция, иерархия Ершова, плотность вниз.

DOI: 10.26907/2949-3919.2024.3.76-91

Введение

Краткое сообщение данной статьи с изложением результатов и основных идей доказательств было опубликовано в [1].

В локальной теории степеней неразрешимости при доказательстве структурных свойств зачастую удается провести равномерную конструкцию, другими словами по заданным индексам вычислимо перечислимых (далее, в. п.) множеств удается эффективно найти индексы искомых в. п. множеств (см. также [2], с. 58). Однако, бывает и так, что некоторое структурное свойство верно, но соответствующую равномерную конструкцию провести не удается. В этом случае доказательство требует разбора случаев и как правило усложняется с комбинаторной точки зрения, в конструкции это проявляется тем, что эффективно строится несколько кандидатов, один из которых будет удовлетворять соответствующему структурному свойству. В данной работе исследуется вопрос равномерности конструкций для плотности вниз в структуре n-вычислимо перечислимых (далее, n-в. п.) тьюринговых степеней. Все рассматриваемые нами степени являются тьюринговыми.

Благодарности. Работа поддержана грантом Российского научного фонда и Кабинета Министров Республики Татарстан (проект № 22-21-20024, https://rscf.ru/project/22-21-20024/) и выполнена в рамках реализации программы развития Научно-образовательного математического центра Приволжского федерального округа (соглашение No. 075-02-2023-944). Также автор благодарен И.Ш. Калимуллину за ряд ценных советов и комментариев.

Поступила: 01.07.2024. Принята: 10.09.2024. Опубликована: 17.10.2024.

Напомним, что множество A называется n-в. п., если $A = \lim_s A_s$ и для любого x выполняется: $A_0(x) = 0$ и $|\{s|A_s(x) \neq A_{s+1}(x)\}| \leq n$, где последовательность конечных множеств $\{A_s\}_{s\in\omega}$ является вычислимым приближением к A. Соответственно, степень называется n-в. п., если она содержит n-в. п. множество. Известно, что n-в. п. степени образуют частичный порядок, и наименьшим элементом будет степень вычислимых множеств $\mathbf{0}$. Под плотностью вниз понимаем следующее: для любого $\mathbf{a} > \mathbf{0}$ существует $\mathbf{b}$, что $\mathbf{0} < \mathbf{b} < \mathbf{a}$. Равномерность конструкции в данном случае означает, что по индексу некоторого n-в. п. множества из степени $\mathbf{a}$ эффективно получаем индекс некоторого множества из степени $\mathbf{b}$.

Хорошо известно, что согласно теореме Сакса о плотности структура в. п. степеней является плотной, и, в частности, плотной вниз. Также плотность вниз можно получить из теоремы Сакса о разложении, и в обоих случаях конструкция является равномерной. Плотность вниз в 2-в. п. степенях легко получается при помощи ассоциированных в. п. множеств, и зачастую это наблюдение приписывают А. Лахлану, в честь которого эти ассоциированные в. п. множества называют лахлановскими. Приведем следующее их определение. Пусть A является 2-в. п. множеством, причем на каждом шаге происходит изменение $A(x)$ не более, чем для одного x. Тогда лахлановское множество определяем как $L(A) = \{s \mid \exists x \;\; x \in A_s - A\}$. Нетрудно видеть, что это множество в. п. и сводится по Тьюрингу к A. Более того, если A имеет собственную 2-в. п. степень (т. е. не содержащую в. п. множеств), то $L(A)$ невычислимо и строго ниже A, и, напротив, если A имеет в. п. степень, то $L(A)$ может иметь как вычислимую степень, так и степень множества A.

Таким образом, упомянутая выше плотность вниз 2-в. п. степеней использует разбор случаев: для невычислимого 2-в. п. множества A собственной 2-в. п. степени искомым будет $L(A)$, для невычислимого 2-в. п. множества A в. п. степени искомым будет в. п. множество, построенное согласно теореме Сакса о плотности. Для n-в. п. множества A определение $L(A)$ будет аналогичным, более того, будут сохраняться соответствующие свойства. Тогда для плотности вниз при $n > 1$ достаточно рассмотреть следующие n альтернатив: $L(A)$, $L(L(A))$, $L(\ldots L(L(A)))$ и случай в. п. степени множества A. В каждом из этих случаев устанавливается более сильное свойство плотности вниз, а именно: плотность вниз $(n-1)$-в. п. степеней в n-в. п. степенях. Таким образом, возникают два естественных вопроса: можно ли обойтись без разбора случаев для более сильного варианта плотности вниз, а если это не удается, то можно ли провести равномерную конструкцию для плотности вниз? Вопрос равномерности плотности первыми начали изучать в 1993 году Р. Доуни и М. Стоб [3] и дали отрицательный ответ на первый вопрос. Их решение было дано для случая $n = 2$, и оно обобщается без принципиальных трудностей. В данной работе приводится полное доказательство этого результата для произвольного $n \geq 2$ и дается отрицательный ответ на второй вопрос.

Для доказательства основных теорем понадобится следующее утверждение, которое является обобщением теоремы парной рекурсии Смальяна (см. [2], стр. 67) и доказательство которого предлагается в качестве упражнения. Здесь и далее, $\{\varphi_e\}_{e\in\omega}$ – эффективная нумерация всех частично вычислимых функций.

Предложение 1. *Для любых вычислимых функций* $f_1(x_1,\dots,x_n),\dots,\ f_n(x_1,\dots,x_n)$ *существуют такие* $x_1^0,\dots,x_n^0$, *что*

$$\varphi_{x_1^0}=\varphi_{f_1(x_1^0,\dots,x_n^0)},$$
$$\dots$$
$$\varphi_{x_n^0}=\varphi_{f_n(x_1^0,\dots,x_n^0)}.$$

Для удобства через $\overline{x}$ обозначим кортеж индексов $(x_1,\dots,x_n)$, а через $\overline{f}$ – кортеж функций $(f_1,\dots,f_n)$. Таким образом, для любого вычислимого набора функций $\overline{f}$ существует набор $\overline{x_0}$ такой, что $\varphi_{\overline{x_0}}=\varphi_{\overline{f}(\overline{x_0})}$, где под записью $\overline{f}(\overline{x_0})$ понимаем кортеж значений $(f_1(\overline{x_0}),\dots,f_n(\overline{x_0}))$. Далее, количество элементов в кортежах и количество аргументов не будем указывать явно, если они однозначно восстанавливаются из контекста.

Пусть $\{W_e\}_{e\in\omega}$ – эффективная нумерация всех в. п. множеств. Напомним, что произвольное n-в. п. множество можно представить в виде $D=U-V$, где U является в. п., а V является $(n-1)$-в. п. Рассуждая по индукции, сопоставим множеству D следующий кортеж индексов. Пусть $U=W_e$, а V соответствует набору индексов $\overline{i}=(i_1,\dots,i_{n-1})$, тогда D соответствует $\overline{j}=(e,i_1,\dots,i_{n-1})$. Также будем обозначать $D=W_{\overline{j}}$, и под индексом n-в. п. множества D будет подразумевать кортеж индексов $\overline{j}$.

1. Обобщение результата Р. Доуни и М. Стоба

В этом и следующем разделах будем придерживаться стандартных понятий и обозначений для приоритетных конструкций в теории вычислимости, большую часть из которых можно найти в [2]. В частности, дальнейшие рассуждения проводим с использованием дерева стратегий, а некоторые индексы можем опустить, когда они ясны из контекста.

Для плотности вниз, кроме эффективности поиска индексов в. п. множеств, можно также задаться вопросом эффективности поиска сводящего функционала. В частности, Р. Доуни и М. Стоб [3] рассматривали следующий вопрос: существуют ли вычислимые функции $f(e,i)$ и $g(e,i)$ такие, что для любого невычислимого 2-в. п. множества W_e-W_i множество $W_{g(e,i)}$ является невычислимым и выполняется $W_{g(e,i)}=\Phi_{f(e,i)}^{W_e-W_i}$? Оказалось, что вопрос можно решить и для случая, когда не требуется равномерность для индекса сводящего функционала.

Пусть $n>1$. При $n=2$ теорема 2 следует из теоремы 3: действительно, если бы существовала равномерная процедура из теоремы 2, то мы могли бы применить ее и теорему Сакса о плотности, что привело бы к существованию соответствующей равномерной процедуры для теоремы 3. В общем случае, подобное следствие получить не удается, хотя доказательства имеют ряд схожих черт.

Теорема 2. *Не существует равномерной процедуры поиска индекса невычислимого* $(n-1)$-*в. п. множества* W *по индексу невычислимого* n-*в. п. множества* A, *при которой* $W\le_T A$.

Доказательство. Этот результат был получен в нашей совместной работе с А.И. Талиповой [1] и с полным доказательством был приведен в ее магистерской диссертации. Здесь мы ограничимся основными идеями доказательства и описанием взаимодействия требований.

Сперва рассмотрим вспомогательное утверждение, доказательство которого начинается с подраздела 1.1. Пусть дано $(n-1)$-в. п. множество W, тогда существует равномерная конструкция для построения n-в. п. множества D такого, что D невычислимо и выполняется одно из условий: $W \not\leq_T D$ или $W \leq_T \emptyset$. Равномерность конструкции выполняется при помощи функций $g_1, \ldots, g_n$, для краткости обозначим $\overline{g}$. Обозначим $W = W_{\overline{i}}$, где набор $\overline{i}$ является индексом соответствующего $(n-1)$-в. п. множества. Таким образом, по $W = W_{\overline{i}}$ эффективно строим $D = W_{\overline{g}(\overline{i})}$.

Для доказательства основного факта теоремы рассуждаем от противного. Пусть равномерная конструкция для плотности вниз $(n-1)$-в. п. степеней в n-в. п. степенях существует. Тогда существует кортеж из $n-1$ функций от n аргументов $\overline{f}$ такой, что $W = W_{\overline{f}(\overline{e})}$, где $A = W_{\overline{e}}$, и если выполняется $\emptyset <_T A$, то $\emptyset <_T W \leq_T A$. Далее, пусть A произвольное n-в. п. множество, тогда по A эффективно находим W, а по W эффективно находим D. Также отметим, что либо $W \not\leq_T D$, либо $W \leq_T \emptyset$, и, более того, D не вычислимо вне зависимости от W.

Рассмотрим кортеж вычислимых функции от n аргументов $\overline{h} = \overline{g}(\overline{f})$. По предложению 1 существует кортеж $\overline{e}_0$ такой, что $W_{\overline{h}(\overline{e}_0)} = W_{\overline{e}_0}$. Значит, для некоторого $\overline{e}_0$ выполняется $D = A$. Однако, D невычислимо по построению, следовательно, и A невычислимо. Тогда $W = W_{\overline{f}(\overline{e}_0)}$, и $\emptyset <_T W \leq_T A$. Это дает противоречие, так как $W \not\leq_T D$.

1.1. Требования. Для доказательства упомянутого выше вспомогательного утверждения по данному $(n-1)$-в. п. множеству W строим n-в. п. множество D, удовлетворяя для всех e следующим требованиям:

$\mathcal{R}_e:\ W = \Phi_e^D \Rightarrow W \leq_T \emptyset$,

$\mathcal{P}_e:\ D \neq \Theta_e$.

Здесь, $\{\Theta_e\}_{e\in\omega}$ – эффективная нумерация всех частично вычислимых функций, $\{\Phi_e\}_{e\in\omega}$ – эффективная нумерация всех частично вычислимых функционалов с оракулом.

Требование $\mathcal{P}_e$ удовлетворяем при помощи стандартной стратегии диагонализации против всех вычислимых функций. Другими словами, назначаем большого свидетеля x (в частности, к моменту выбора x ни разу не перечислялся в D), ожидаем шаг s такой, что $\Theta_e(x)[s] \downarrow= 0$, и перечисляем x в D. Также инициализируем все стратегии с меньшими приоритетами. Таким образом, для младших стратегий элемент x окажется под запретом.

Требование $\mathcal{R}_e$ удовлетворяем при помощи следующей стратегии. При виде равенства $W(y)[s] = \Phi_e^D(y)[s]$ на шаге s запрещаем D в ограничении на $\varphi_e(y)[s]$ (use-функции вычисления $\Phi_e^D(y)[s]$) и доопределяем вычислимую функцию Δ_e в точке y так, чтобы $\Delta_e(y) = W(y)[s]$. Таким образом, если $W = \Phi_e^D$, то $W = \Delta_e$ окажется вычислимым.

Рассмотрим наиболее принципиальный случай взаимодействия требований, когда стратегия $\mathcal{P}_i$ имеет приоритет меньше, чем стратегия $\mathcal{R}_e$. Итак, для каждого y ожидаем шаг s такой, что $W(y)[s] = \Phi_e^D(y)[s]$ и определяем $\Delta_e(y) = W(y)[s]$. Если для некоторого y уже определено значение $\Delta_e(y)$, но на шаге $t > s$ выполняется $W(y)[t] \neq \Phi_e^D(y)[t]$, то это может произойти из-за того, что стратегия $\mathcal{P}_i$ перечислила некоторый элемент x в D. Фиксируем этот элемент x на шаге t, и дальнейшая стратегия $\mathcal{R}_e$ будет заключаться в диагонализации посредством x, при этом функция Δ_e аннулируется. Начиная с этого шага элемент x будет свидетелем диагонализации стратегии $\mathcal{R}_e$, и чтобы подчеркнуть это различие, элемент x будем называть Δ-*свидетелем*. Далее, x перечисляется в D и изымается из D в случае равенства в точке y. Поскольку аппроксимация $D(x)$ будет меняться не более, чем количество изменений в аппроксимации $W(y)$, то после $(n-1)$-изменения $W(y)$ у стратегии $\mathcal{R}_e$ всегда будет возможность поменять минимум еще один раз $D(x)$ (что позволит построить D как n-в. п. множество). Требование $\mathcal{R}_e$ в этом случае удовлетворится через конечное число шагов. Если же подобный элемент y никогда не найдется, то Δ_e будет всюду определена, и тогда нетрудно видеть, что Δ_e корректно вычисляет W (достаточно дождаться первого шага с равенством $W(y) = \Phi_e^D(y)$).

Далее, опишем лишь дерево стратегий. Для удовлетворения каждого требования будет работать несколько ассоциированных с ней стратегий. Стратегии расположим на некотором поддереве дерева $2^{<\omega}$, и будет достаточно, чтобы для каждого требования хотя бы одна стратегия оказалась удовлетворенной. Сперва зададим множество выходов как $L = \{\Delta, \mathrm{fin}\}$. Соответственно, некоторая $\mathcal{P}$-стратегия имеют один выход fin, а некоторая $\mathcal{R}$-стратегия имеет выходы $\Delta <_L \mathrm{fin}$ (в зависимости от успешности построения своей функции Δ). Упорядочим требования линейно следующим образом:

$$\mathrm{ListReq} = \{\mathcal{R}_0 > \mathcal{P}_0 > \mathcal{R}_1 > \mathcal{P}_1 > \cdots\},$$

начиная с требования с наибольшим приоритетом. Дерево стратегий T строим по индукции как поддерево бинарного дерева. Определяем $\mathrm{ListReq}_\lambda = \mathrm{ListReq}$ и ассоциируем с корнем дерева λ первое требование из списка $\mathrm{ListReq}_\lambda$. Пусть $\mathrm{ListReq}_\xi$ – это список требований, для которых нужно задать стратегии на вершинах $\supseteq \xi$. Далее, пусть первым требованием в $\mathrm{ListReq}_\xi$ является $\mathcal{P}_e$, тогда ассоциируем с вершиной ξ стратегию для требования $\mathcal{P}_e$ и полагаем $\mathrm{ListReq}_{\xi^\frown \mathrm{fin}} = \mathrm{ListReq}_\xi - \{\mathcal{P}_e\}$, если же первым требованием является $\mathcal{R}_e$, то ассоциируем с вершиной ξ стратегию для требования $\mathcal{R}_e$ и полагаем $\mathrm{ListReq}_{\xi^\frown \Delta} = \mathrm{ListReq}_\xi - \{\mathcal{R}_i | i \in \omega\}$ и $\mathrm{ListReq}_{\xi^\frown \mathrm{fin}} = \mathrm{ListReq}_\xi - \{\mathcal{R}_e\}$. Таким образом, в этом дереве стратегий отсутствуют $\mathcal{R}$-стратегии под Δ-выходами. Приоритет на дереве стратегий задаем согласно лексикографическому упорядочению вершин, и для удобства будем отождествлять понятия “вершина” и “стратегия”.

Полная конструкция и верификация могут быть восстановлены из конструкции и верификации теоремы 5 (в частности, $\mathcal{R}$-стратегии будут иметь лишь выходы Δ и fin). Приводить их не будем, чтобы избежать ряда повторений. Более того, доказательство может быть проведено при помощи несложного приоритетного рассуждения и без использования деревьев. $\square$

2. Неравномерность плотности вниз в n-в. п. степенях

Данный раздел посвящен следующей теореме, которая показывает что равномерности конструкции не удается добиться и в случае некоторого ослабления условия на множество W. Далее предполагаем, что $n > 1$.

Теорема 3. *Не существует равномерной процедуры поиска индекса невычислимого n-в. п. множества W по индексу невычислимого n-в. п. множества A, при которой $W <_T A$.*

Отметим, что изменение последнего условия по сравнению с теоремой 2 необходимо. Нетрудно видеть, что теоремы 3 достаточно, чтобы не было равномерной разложимости в n-в. п. степенях, в частности, следующий результат Б. Купера и А. Ли может быть получен в качестве следствия теоремы 3.

Теорема 4 (Б. Купер и А. Ли [4]). *Не существует вычислимых функций $f_1(e,i)$, $f_2(e,i)$, $g_1(e,i)$, $g_2(e,i)$ таких, что*

1) $(W_{f_1(e,i)} - W_{f_2(e,i)}) \leq_T (W_e - W_i)$;
2) $(W_{g_1(e,i)} - W_{g_2(e,i)}) \leq_T (W_e - W_i)$;
3) $(W_e - W_i) \leq_T (W_{f_1(e,i)} - W_{f_2(e,i)}) \oplus (W_{g_1(e,i)} - W_{g_2(e,i)})$;
4) $(W_e - W_i) \not\leq_T (W_{f_1(e,i)} - W_{f_2(e,i)})$ *или* $(W_e - W_i) \leq_T \emptyset$;
5) $(W_e - W_i) \not\leq_T (W_{g_1(e,i)} - W_{g_2(e,i)})$ *или* $(W_e - W_i) \leq_T \emptyset$.

Доказательство теоремы 3 проведем в более сильном виде, в котором свидетелем неравномерности является 2-в. п. множество. Некоторые из идей доказательства наследуются из теоремы 4.

Теорема 5. *Не существует равномерной процедуры поиска индекса невычислимого n-в. п. множества W по индексу невычислимого 2-в. п. множества A, при которой $W <_T A$.*

Доказательство. Начальные рассуждения проводятся аналогично рассуждениям доказательства теоремы 2. Пусть такая равномерная процедура существует, тогда существует кортеж вычислимых функций $\overline{f}$ такой, что $W = W_{\overline{f}(\overline{e})}$, где $A = W_{\overline{e}}$. При этом, если выполняется $\emptyset <_T A$, то $\emptyset <_T W <_T A$. Далее, по $W = W_{\overline{i}}$ эффективно строим 2-в. п. множество $D = W_{\overline{g}(\overline{i})}$, удовлетворяя следующим условиям:

(1) D невычислимо;

(2) либо $W \not\leq_T D$, либо W вычислимо, либо $D \leq_T W$.

Каждая из функций кортежа $\overline{h} = \overline{g}(\overline{f})$ является вычислимой и от двух аргументов. По предложению 1 существует кортеж $\overline{e}_0$ такой, что $W_{\overline{h}(\overline{e}_0)} = W_{\overline{e}_0}$. Как и ранее, для некоторого $\overline{e}_0$ верно $A = D$. Однако, D невычислимо по построению, следовательно, A невычислимо. Тогда $W = W_{\overline{f}(\overline{e}_0)}$ и $\emptyset <_T W <_T A$. Это дает противоречие, так как обязательно $W \not\leq_T D$.

2.1. Требования. Перейдем к доказательству вспомогательного утверждения. Множество D строим как 2-в. п., удовлетворяя для всех e следующим требованиям:

$\mathcal{R}_e: \; W = \Phi_e^D \Rightarrow W \leq_T \emptyset \vee D \leq_T W,$

$\mathcal{P}_e: \; D \neq \Theta_e.$

Здесь, $\{\Theta_e\}_{e \in \omega}$ – эффективная нумерация всех частично вычислимых функций, $\{\Phi_e\}_{e \in \omega}$– эффективная нумерация всех частично вычислимых функционалов с оракулом.

Так как базовые стратегии для $\mathcal{P}$- и $\mathcal{R}$-требований остаются как в теореме 2, то перейдем к рассмотрению трудностей, которые приводят к модификации соответствующих стратегий. Достаточно рассмотреть случай, когда несколько $\mathcal{P}$-стратегий находятся под бесконечным выходом $\mathcal{R}$-стратегии. Остальные случаи не вызывают трудностей благодаря приоритетному упорядочению на дереве стратегий. Ниже предполагаем, что каждый рассматриваемый шаг является расширяющим для $\mathcal{R}$-стратегии.

Стратегия $\mathcal{P}_i$ под бесконечным выходом стратегии $\mathcal{R}_e$.

Стратегия $\mathcal{P}_i$ по прежнему удовлетворяется посредством диагонализации, однако, теперь требуется большее взаимодействие с соответствующей $\mathcal{R}$-стратегией с бесконечным выходом. Стратегия $\mathcal{R}_e$, имея бесконечный выход, строит бесконечно много версий вычислимой функции $\Delta_e = W$, а также резервный функционал $\Gamma_e^W = D$. Итак, для диагонализации стратегия $\mathcal{P}_i$ выбирает большого свидетеля x и ожидает шага s такого, что $\Theta_i(x)[s] \downarrow= 0$. Далее, $\mathcal{P}_i$ перечисляет x в D, при этом могут возникнуть два следующих случая.

(1) Перечисление x в D не изменяет $\Phi_e^D(y) = W(y)$ для всех y таких, что $\varphi_e(y) > x$. Тогда стратегия $\mathcal{P}_i$ удовлетворена, а вычислимая функция Δ_e продолжает верно вычислять $W(y)$.

(2) Существует y, что $W(y)$ меняется из-за перечисления $x < \varphi_e(y)$ в D. Тогда появляется возможность изъять x из D и тем самым вынудить $W(y)$ стать равным $W(y)[s]$ (в противном случае $\mathcal{R}$-стратегия будет бесконечно ожидать на выходе fin). Таким образом, при изменении $W(y)$ вычислимая функция Δ_e начинает неверно вычислять W в точке y, в этом случае текущую версию Δ_e отменяем и позднее начнем строить ее новую версию. Также на этом шаге достраиваем функционал Γ_e^W в точке x, соответственно, use-функцию определяем как $\gamma_e(x) = s > y$. Позднее, стратегия $\mathcal{P}_i$ выбирает нового большого свидетеля x', определяет $\Gamma_e^W(x') = D(x')$ с $\gamma_e(x') = \gamma_e(x)$, более того, $x' > \varphi_e(y)[s]$. Таким образом, стратегия дожидается $\Theta_i(x')[t] \downarrow= 0$, изымает x из D и перечисляет x' в D. Очевидно, что стратегия $\mathcal{P}_i$ при этом удовлетворяется. Так как $x' > \varphi_e(y)[s]$, изъятие x из D возвращает use-функцию вычисления $\Phi_e^D(y)$ к шагу s, другими словами $x \notin D_{t+1}$ и $\Phi_e^D(y)[t+1] = \Phi_e^D(y)[s] = W(y)[s]$, что вынуждает измениться $W(y)$ к значению $W(y)[s]$, но тогда функционал Γ_e^W может быть поправлен и будет верно вычислять $D(x)$ и $D(x')$.

Однако, при таком подходе появляется следующая трудность, связанная с несколькими $\mathcal{P}$-стратегиями. Предположим, что есть еще одна стратегия $\mathcal{P}_k$ под бесконечным выходом $\mathcal{R}_e$, и $\mathcal{P}_k$ имеет приоритет выше, чем $\mathcal{P}_i$. Тогда возникает очевидный конфликт между этими тремя стратегиями. В частности, если u является свидетелем стратегии $\mathcal{P}_k$, то $\Gamma_e^W(u)$ необходимо определять не позднее определения $\Gamma_e^W(x)$ и $\Gamma_e^W(x')$, где $u < x < x'$. При этом изменение $D(u)$ может навсегда испортить функционал Γ_e^W, так как перечисление u в D не гарантирует изменения W на нужном интервале. Более того, функционал Γ_e^W должен был быть определен во всех рассматриваемых точках ввиду выбора второго свидетеля для x'.

Наиболее простым решением в этой ситуации будет добавление дополнительного бесконечного выхода стратегии $\mathcal{R}_e$, который будет означать строительство функционала Γ_e^W и под которым будем удовлетворять новые версии $\mathcal{P}$-стратегий. Таким образом, выход Δ соответствует построению $\Delta_e = W$ и аналогичен выходу Δ из предыдущей теоремы, а выход Γ соответствует построению $\Gamma_e^W = D$, является резервным, и отменяет текущие версии Δ_e.

Заметим, что стратегия $\mathcal{P}_i$ могла рассматривать в качестве второго свидетеля не x', а по прежнему x. Более того, x может быть использован в качестве свидетеля и другой $\mathcal{P}$-стратегией, что позволит удовлетворить эту $\mathcal{P}$-стратегию, не испортив функционал Γ_e^W. Исходя из изложенного, для $\mathcal{P}$-стратегий удобно будет рассматривать разные версии под Γ- и Δ-выходами. Под каждым Γ- и Δ-выходом будет список лишь из $\mathcal{P}$-стратегий, поэтому стратегии под Δ-выходами будут работать как и ранее, дополнительно предоставляя свидетелей $\mathcal{P}$-стратегиям под соответствующим Γ-выходом (метод известен как “поток”, который в полной мере проявил себя в работе М.М. Арсланова, И.Ш. Калимуллина и С. Лемппа [5]). Стратегии под Γ-выходами будут выбирать только из предоставленных свидетелей и вместо перечисления в D будут их при необходимости изымать, таких свидетелей будем называть Δ-*свидетелями*. Проиллюстрируем работу на следующем примере, из которого будет видно и преодоление оставшихся трудностей.

Стратегия $\mathcal{P}_k$ под Γ-выходом стратегии $\mathcal{R}_e$, стратегия $\mathcal{P}_i$ под Δ-выходом стратегии $\mathcal{R}_e$.

(1) Стратегия $\mathcal{P}_i$ выбирает большого свидетеля x и начинает ожидание. Во время этого ожидания стратегия $\mathcal{R}_e$ в порядке возрастания определяет Δ_e.
(2) На шаге шаге s_0 выполнено $\Theta_i(x)[s_0]\downarrow= 0$, и стратегия $\mathcal{P}_i$ перечисляет x в D.
(3) На шаге $s_1 > s_0$ стратегия $\mathcal{R}_e$ имеет $\Delta_e(y) \neq W(y)[s_1]$, но $\Phi_e^D(y)[s_1] = W(y)[s_1]$. Тогда инициализируем функцию Δ_e и посещаем выход Γ. При этом определяем $\Gamma_e^W(x)[s_1] = 1$ с $\gamma_e(x) = s_1$. Элемент x в качестве Δ-свидетеля передаем на выход Γ.
(4) Стратегия $\mathcal{P}_k$, начав работать, назначает Δ-свидетеля $z = x$.
(5) Во время ожидания стратегии $\mathcal{P}_k$ стратегия $\mathcal{R}_e$ строит новую функцию Δ_e, а $\mathcal{P}_i$ начинает работу с новым большим свидетелем.
(6) На шаге $s_2 > s_1$ стратегия $\mathcal{R}_e$ вновь имеет выход Γ, а у стратегии $\mathcal{P}_k$ выполнено $\Theta_k(z)[s_2]\downarrow= 1$. Тогда $\mathcal{P}_k$ изымает z из D, завершив свою работу.
(7) На шаге $s_3 > s_2$ стратегия $\mathcal{R}_e$ определяет $\Delta_e(y)$ (в частности, выполнено $\Phi_e^D(y)[s_3] = W(y)[s_3]$).

(8) На шаге $s_4 > s_3$ стратегия $\mathcal{R}_e$ имеет выход Γ и переопределяет $\Gamma_e^W(z) = 0$. Это переопределение возможно, так как обязательно будет

$$\Phi_e^D(y)[s_4] = \Phi_e^D(y)[s_3] = W(y)[s_3] = W(y)[s_4],$$

а значит $W(y)[s_4] = W(y)[s_0]$. Более того $\Gamma_e^W(z)[s_1] = 1$ уже было определено с $\gamma_e(x) = s_1 > y$ на шаге s_1.

Осталось заметить, что наличие двух $\mathcal{P}$-стратегий под Γ-выходом $\mathcal{R}$-стратегии не влияет существенным образом на работу этих стратегий. Действительно, пусть стратегии $\mathcal{P}_k$ и $\mathcal{P}_i$ находятся под Γ-выходом стратегии $\mathcal{R}_e$, и стратегия $\mathcal{P}_k$ имеет приоритет выше, чем приоритет у $\mathcal{P}_i$. Предположим, они имеют Δ-свидетелей $z_k < z_i$, соответственно. Тогда, если стратегия $\mathcal{P}_k$ первой изымает z_k из D, то z_i отменяется, а значит $\Gamma_e^W(z_i)$ не требует поправки. Если же стратегия $\mathcal{P}_i$ первой изымает z_i, то это никак не сказывается на вычислении $\Gamma_e^W(z_k)$, так как $\varphi_e(y(z_k)) < z_i$ (другими словами интервал в D для работы стратегии $\mathcal{P}_i$ находится вне интервала работы стратегии $\mathcal{P}_k$). Если после этого стратегия $\mathcal{P}_k$ также изымает z_k из k, то, очевидно, $\Gamma_e^W(z_k)$ может быть поправлено как и ранее, а вычисление $\Gamma_e^W(z_i)$ будет иметь свежий use ввиду элемента $y(z_k)$.

2.2. Дерево стратегий. Дерево стратегий будем строить по аналогии с деревом стратегий в теореме 2. Множество выходов определяем как $L = \{\Gamma, \Delta, \mathrm{fin}\}$. При этом $\mathcal{P}$-стратегии имеют один выход fin, $\mathcal{R}$-стратегии имеют выходы $\Gamma <_L \Delta <_L \mathrm{fin}$, где выход Δ соответствует вычислимости W, а выход Γ соответствует сводимости $D \leq_T W$. Упорядочим требования линейно следующим образом: $\mathrm{ListReq} = \{\mathcal{R}_0 > \mathcal{P}_0 > \mathcal{R}_1 > \mathcal{P}_1 > \cdots\}$, где $\mathcal{R}_0$ имеет наивысший приоритет. Дерево стратегий T строим по индукции как поддерево тернарного дерева. Определяем $\mathrm{ListReq}_\lambda = \mathrm{ListReq}$ и ассоциируем с вершиной λ первое требование из списка $\mathrm{ListReq}_\lambda$. Пусть $\mathrm{ListReq}_\xi$ – это список требований, для которых нужно задать стратегии на вершинах $\supseteq \xi$. Далее, пусть первым требованием в $\mathrm{ListReq}_\xi$ является $\mathcal{P}_e$, тогда ассоциируем с вершиной ξ стратегию для требования $\mathcal{P}_e$ и полагаем $\mathrm{ListReq}_{\xi^\frown \mathrm{fin}} = \mathrm{ListReq}_\xi - \{\mathcal{P}_e\}$, если же первым требованием является $\mathcal{R}_e$, то ассоциируем с вершиной ξ стратегию для требования $\mathcal{R}_e$ и полагаем $\mathrm{ListReq}_{\xi^\frown \Gamma} = \mathrm{ListReq}_\xi - \{\mathcal{R}_i | i \in \omega\}$, $\mathrm{ListReq}_{\xi^\frown \Delta} = \mathrm{ListReq}_\xi - \{\mathcal{R}_i | i \in \omega\}$ и $\mathrm{ListReq}_{\xi^\frown \mathrm{fin}} = \mathrm{ListReq}_\xi - \{\mathcal{R}_e\}$. Таким образом, в дереве стратегий под Γ- и Δ-выходами отсутствуют $\mathcal{R}$-стратегии. Приоритет на дереве стратегий задаем согласно лексикографическому упорядочению вершин. Запись Φ_ρ^D будет обозначать Φ_e^D, где стратегия ρ соответствует требованию $\mathcal{R}_e$. Аналогично для других подобных записей, в частности, каждая вершина ρ, соответствующая требованию $\mathcal{R}_e$, будет строить свою версию вычислимой функции Δ_e, обозначаемую как Δ_ρ.

Для каждой $\mathcal{R}$-стратегии ρ, определим *длину соглашения* на шаге s следующим образом:

$$l(\rho)[s] = \max\{x' \mid \forall x \leq x' \;\; W(x)[s] = \Phi_\rho^D(x)[s]\}.$$

Шаг s назовем *ρ-расширяющим*, если $l(\rho)[s] > l(\rho)[s^-]$, где $s^- < s$ – это предыдущий

ρ-расширяющий шаг, на котором ρ была посещена. Для удобства полагаем, что шаг 0 ткже является ρ-расширяющим.

Напомним, что каждая $\mathcal{P}$-стратегия под Γ-выходом имеет в качестве Δ-свидетеля число x, которое являлось одним из прежних свидетелей $\mathcal{P}$-стратегии под Δ-выходом; изъятие x из D вынуждает измениться $W(y)$ в некоторой точке y, связанной с x. Для обозначения Δ-свидетелей будем использовать z, обозначение $y(z)$, как и прежде, будем использовать для y, соответствующего z. Под назначением (отменой) свидетеля на шаге s подразумеваем, что соответствующий параметр становится на шаге s определенным (неопределенным). Ввиду того, что на каждом бесконечном пути может быть только один выход Γ, то для удобства будем отличать $\mathcal{P}$-стратегии под Γ-выходом от стратегий под Δ- и fin-выходами.

2.3. Конструкция. На каждом шаге определяем вычислимую аппроксимацию TP_s истинного пути TP. Также определяем аппроксимации всех множеств и функционалов на этих шагах (значения сохраняются, если явно не переопределяются). При инициализации стратегии отменяем все ее параметры.

Шаг $s = 0$. Определяем $D[s] = \emptyset$ и инициализируем все стратегии $\xi \in T$.

Шаг $s+1$. Вычислимую аппроксимацию TP_{s+1} определяем по индукции, работая на подшагах $t \leq s+1$. Сперва полагаем $TP_{s+1,0} = \lambda$, где λ – это корень дерева. На подшаге $t+1$, имея $TP_{s+1,t}$, определяем $TP_{s+1,t+1}$. Далее, если $t < s$, то переходим к подшагу $t+2$. Если $t = s$, то определяем $TP_{s+1} = TP_{s+1,t+1}$, переходим к следующему шагу $s+2$ и инициализируем все вершины $\xi \not\leq TP_{s+1}$. На подшаге $t+1$ построение зависит от стратегии $TP_{s+1,t}$.

Если $TP_{s+1,t} = \pi$ является $\mathcal{P}$-стратегией, которая не находится под каким-нибудь Γ-выходом, то выполняем инструкции первого случая, который имеет место.

(π1) Если свидетель не определен, то назначаем большого свидетеля $x_\pi[s+1]$. Инициализируем все вершины $\xi \not\leq \pi$ и определяем выход $TP_{s+1,t+1} = \pi^\frown\mathrm{fin}$.

(π2) Если свидетель $x = x_\pi[s]$ определен и $0 = D(x)[s] = \Theta_\pi(x)[s+1]$, то определяем $D[s+1] = D[s] \cup \{x\}$. Инициализируем все вершины $\xi \not\leq \pi$ и определяем выход $TP_{s+1,t+1} = \pi^\frown\mathrm{fin}$.

(π3) Иначе (тогда обязательно выполнено $D(x)[s] \neq \Theta_\pi(x)[s+1]$), определяем выход $TP_{s+1,t+1} = \pi^\frown\mathrm{fin}$.

Если $TP_{s+1,t} = \pi$ является $\mathcal{P}$-стратегией под Γ-выходом (предположим $\rho^\frown\Gamma \subseteq \pi$), то выполняем инструкции первого случая, который имеет место.

(π_Γ1) Если Δ-свидетель не определен, то назначаем Δ-свидетеля $z_\pi[s+1] = z_\rho[s+1]$. Инициализируем все вершины $\xi \not\leq \pi$ и определяем выход $TP_{s+1,t+1} = \pi^\frown\mathrm{fin}$.

(π_Γ2) Если Δ-свидетель $z = z_\pi[s]$ определен и $1 = D(z)[s] = \Theta_\pi(z)[s+1]$, то определяем $D[s+1] = D[s] - \{z\}$. Инициализируем все вершины $\xi \not\leq \pi$ и определяем выход $TP_{s+1,t+1} = \pi^\frown\mathrm{fin}$.

(π_Γ3) Иначе (тогда обязательно выполнено $D(z)[s] \neq \Theta_\pi(z)[s+1]$), определяем выход

$TP_{s+1,t+1} = \pi^\frown\mathrm{fin}$.

Если $TP_{s+1,t} = \rho$ является $\mathcal{R}$-стратегией, то выполняем инструкции первого случая, который имеет место.

(ρ1) Если $s+1$ является ρ-расширяющим шагом и существует наименьший y такой, что $W(y)[s+1] \neq \Delta_\rho(y)\downarrow$, но не определен Δ-свидетель $z_\rho[s]$, то предположим, что $\Delta_\rho(y)$ было определено на шаге $s_0 < s+1$. Тогда $\Phi_\rho^D(y)[s_0] = W(y)[s_0] \neq W(y)[s+1]$, и между шагами s_0 и $s+1$ изменение вычисления произошло из-за перечисления свидетеля $\mathcal{P}$-стратегии. Пусть этим свидетелем является x, тогда назначаем $z_\rho[s+1] = x$ в качестве Δ-свидетеля (для краткости через $y(x)$ будем обозначать y). Инициализируем функцию Δ_ρ и определяем $\Gamma_\rho^W(x)[s+1] = 1$ с $\gamma_\rho(x)[s+1] = s$. Для всех $x' < x$ таких, что $\Gamma_\rho^W(x')$ ни разу не было определено, полагаем тождественно $\Gamma_\rho^W(x') = 0$ с $\gamma_\rho(x')[s+1] = s$. Для всех x'' таких, что $\Gamma_\rho^W(x'')$, что требует переопределения, полагаем $\Gamma_\rho^W(x'')[s+1] = D(x'')[s+1]$ с $\gamma_\rho(x'')[s+1] = \gamma_\rho(x'')[s']$, где $s' < s$ является последним шагом, где было определено $\gamma_\rho(x'')[s']$. Определяем выход $TP_{s+1,t+1} = \rho^\frown\Gamma$.

(ρ2) Если $s+1$ является ρ-расширяющим шагом и существует наименьший y, для которого $\Delta_\rho(y)$ не определено и $W(y)[s+1] = \Phi_\rho^D(y)[s]$, то определяем $\Delta_\rho(y) = W(y)[s+1]$. Отменяем Δ-свидетеля $z_\rho[s+1]$ и определяем выход $TP_{s+1,t+1} = \rho^\frown\Delta$.

(ρ3) Иначе (шаг $s+1$ не является ρ-расширяющим), отменяем Δ-свидетеля $z_\rho[s+1]$ и определяем выход $TP_{s+1,t+1} = \pi^\frown\mathrm{fin}$.

2.4. Верификация. Покажем, что истинный путь $TP = \liminf_s TP_s$ существует и что каждое требование удовлетворяется соответствующей вершиной этого пути. Существование следует из того, что дерево конечно ветвящееся и $|TP_s| = s$ для любого s. Множество D является 2-в. п., так как перечисление элементов происходит из-за случая (π2), а изымание элементов из D происходит из-за случая (π_Γ2), более того, ни один Δ-свидетель не становится обычным свидетелем.

Сперва докажем, что каждая вершина на истинном пути инициализируется конечное число раз и инициализирует конечное число раз другие вершины на истинном пути. Рассуждаем по индукции. Для базы индукции (корневая вершина) доказательство аналогично индукционному шагу.

Рассмотрим $\pi \subset TP$, где π – $\mathcal{P}$-стратегия. По индукционному предположению зафиксируем шаг s_0, после которого π не инициализируется. Докажем, что π инициализирует другие стратегии конечное число раз. Сперва рассмотрим случай, когда π не находится под Γ-выходом. Пусть x – окончательный свидетель после шага s_0. Инициализация из-за π может происходить в двух случаях. Так как свидетель x назначен, то инициализация из-за случая (π1) происходить не может. Если инициализация происходит из-зя случая (π2) на шаге $s > s_0$, тогда $D(x)[s-1] = 0$ и $\Theta_\pi(x)[s] = 0$. Получаем $D[s](x) = 1$, следовательно $D(x) = 1$ (если $D(x)$ изменит значение с 1 на 0, то π инициализируется, что противоречит предположению). Таким образом, $\Theta_\pi(x) = \Theta_\pi(x)[s] = 0$, и получаем, что $D(x) = 1 \neq 0 = \Theta_\pi(x)$. После этого шага из-за случая ($\pi 2$) инициализация больше происходить не может, что и требовалось доказать.

Теперь рассмотрим случай, когда π находится под Γ-выходом некоторой $\mathcal{R}$-стратегии ρ. Пусть z – это окончательный Δ-свидетель после шага s_0. Инициализация из-за π может происходить в двух случаях. Так как Δ-свидетель z назначен, то инициализация из-за случая ($\pi_\Gamma 1$) происходить не может. Если инициализация происходит из-зя случая ($\pi_\Gamma 2$) на шаге $s > s_0$, тогда $D(z)[s-1] = 1$ и $\Theta_\pi(z)[s] = 1$. Получаем $D(z)[s] = 0$, следовательно $D(z) = 0$. Таким образом, $\Theta_\pi(z) = \Theta_\pi(z)[s] = 1$, и получаем $D(z) = 1 \neq 0 = \Theta_\pi(z)$. После этого шага из-за случая ($\pi_\Gamma 2$) инициализация больше происходить не может, что и требовалось доказать. Более того, выше доказано, что вершина π после шага s_0 удовлетворяет соответствующую стратегию $\mathcal{P}_e$.

Теперь рассмотрим $\rho \subset TP$, где ρ является $\mathcal{R}$-стратегией. По индукционному предположению зафиксируем шаг s_0, после которого ρ не инициализируется. Сперва рассмотрим случай $W \neq \Phi_\rho^D$. Очевидно, что соответствующее требование удовлетворено. Также стратегия ρ не производит действий по инициализации (другими словами, любая инициализация из-за ρ исходит от $TP_s \supset \rho$), а значит инициализирует вершины на TP только конечное число раз.

Наконец, пусть $W = \Phi_\rho^D$. Рассмотрим случай, когда ($\rho 1$) повторяется бесконечно часто. Тогда выход Γ будет истинным и ни одна стратегия из-за ρ на истинном пути не инициализируется после шага s_0. Дополнительно покажем, что $D = \Gamma_\rho^W$. Рассмотрим Δ-свидетеля z и $y = y(z)$ и предположим, что все шаги будут ρ-расширяющими. Пусть на шаге $s_1 > s_0$ было определено $\Delta_\rho(y)$. Далее, пусть на шаге $s_2 > s_1$ было определено $\Gamma_\rho^W(z)[s_2] = D(z)[s_2]$, значит, $W(y)[s_2] \neq W(y)[s_1] = \Delta_\rho(y)$. Так как выходы Γ и Δ могут быть в точности на расширяющих шагах, то заметим, что $\varphi_\rho(y)[s_1] < x$ для всех последующих свидетелей x под Δ-выходом и $z > \varphi_\rho(y(z'))$ для всех Δ-свидетелей $z' < z$. Если на шаге $s_3 > s_2$ с выходом Γ элемент z будет изъят из D (а значит к этому моменту z не отменен и ни один Δ-свидетель $z' < z$ не был изъят из D после шага s_2), то на следующем шаге $s_4 > s_3$ с выходом Γ имеем $\Phi_\rho^D(y)[s_4] = \Phi_\rho^D(y)[s_1] = W(y)[s_1]$. Следовательно, $\Gamma_\rho^W(z)[s_4] = D(z)[s_4] = D(z)$. Осталось убедиться, что если $W(y) = W(y)[s_2]$, то существует $y' < y$, что $W(y') \neq W(y')[s_2]$. Действительно, таким элементом будет $y' = y(z')$ для наименьшего $z' < z$ (свидетеля $\mathcal{P}$-стратегии под выходом Γ), который изъят на шаге $s_5 \geq s_4$.

Перейдем к случаю, когда ($\rho 1$) выполняется конечное число раз, и зафиксируем шаг $s_1 > s_0$, после которого он не выполняется. Тогда выход Δ будет истинным и ни одна стратегия из-за ρ на истинном пути не инициализируется после шага s_1. Продолжая рассуждения и не ограничивая общности, будем считать, что последняя версия Δ_ρ начинает строиться также с шага s_1. Тогда для любого y существует шаг $s > s_1$, что определяем $\Delta_\rho(y) = W(y)[s]$. Каждый раз, определяя $\Delta_\rho(y)$, инициализируем все $\mathcal{P}$-стратегии с меньшими приоритетами под выходом fin. Значит, никакая из этих стратегий после шага s не изменяет $D \restriction \varphi_\rho(y)[s]$. Получаем, что если выполняются равенства

$$W(y) = \Phi_\rho^D(y) = \Phi_\rho^D(y)[s] = W(y)[s] = \Delta_\rho(y),$$

то $W(y) = \Delta_\rho(y)$. Если равенства для всех y не будут нарушены, то W будет вычислимым. Рассмотрим случай, когда равенство между Δ_ρ и W может быть нарушено, и убедимся, что такого не произойдет. Тогда существовал бы наименьший y и шаг $t > s$, на котором посетили ρ, что $W(y)[t] \neq \Delta_\rho(y)$, значит у стратегии ρ должен был быть случай (ρ1). Более того, этот y может быть привязан к конкретному свидетелю x, так как с равенствами работаем лишь на расширяющих шагах. Тогда у ρ появится Δ-свидетель, что означает появление выхода Γ после шага s и приводит к противоречию.

Заметим, что если какая-то $\mathcal{R}$-стратегия на истинном пути имеет выход Γ или Δ, то все $\mathcal{R}$-требования удовлетворяются автоматически. Таким образом, если на какой-то бесконечной ветви дерева стратегий все стратегии будут удовлетворены, то этого будет достаточно для удовлетворения всех требований. Такой ветвью, очевидно, является истинный путь TP. Зафиксируем вершину на истинном пути, которая соответствует некоторому требованию. По доказанному выше эта вершина не инициализируется после некоторого шага s_0. Осталось повторить рассуждения, приведенные выше, для случаев $\mathcal{P}$-стратегии и $\mathcal{R}$-стратегии, соответственно. □

В заключении приведем два замечания, основанные на этом доказательстве.

Замечание 6. В теореме 5 класс множеств для W вовсе не обязан быть n-в. п., так как имеет значение лишь существование эффективной нумерации и выполнение теоремы рекурсии.

Замечание 7. В классе всех в. п. множеств плотность вниз всегда может быть получена равномерной конструкцией, в то время как в классе всех ω-в. п. множеств существует множество минимальной тьюринговой степени. Таким образом, для 2-в. п. множеств реализуется промежуточный вариант: они не могут иметь минимальные тьюринговые степени, но при этом могут быть минимальными с точки зрения равномерной плотности вниз.

Список литературы

[1] А.И. Талипова, М.М. Ямалеев, *Неравномерность плотности вниз в n-вычислимо перечислимых тьюринговых степенях*, Изв. вузов. Матем. (11), 124–131 (2022). DOI: https://doi.org/10.26907/0021-3446-2022-11-124-131

[2] Р.И. Соар, *Вычислимо перечислимые множества и степени*, Казан. матем. о-во, Казань, 2000.

[3] R. Downey, M. Stob, *Splitting theorems in recursion theory*, Ann. Pure Appl. Log. **65** (1), 1–106 (1993).
DOI: https://doi.org/10.1016/0168-0072(93)90234-5

[4] S.B. Cooper, A.S. Li, *Non-uniformity and generalised Sacks splitting*, Acta Math. Sinica **18** (2), 327–334 (2002).
DOI: https://doi.org/10.1007/s101140100150

[5] M.M. Arslanov, I.Sh. Kalimullin, S. Lempp, *On Downey's conjecture*, J. Symb. Log. **75** (2), 401–441 (2010).
DOI: https://doi.org/10.2178/jsl/1268917488

Марс Мансурович Ямалеев
Казанский (Приволжский) федеральный университет,
Институт математики и механики им. Н.И. Лобачевского,
Научно-образовательный математический центр ПФО,
ул. Кремлевская, д. 18, г. Казань, 420008, Россия,
e-mail: mars.yamaleev@kpfu.ru

Volume 2, Issue 3
pp. 76–91 (2024)

UDC 510.532,510.535
MSC 03D25, 03D28

Downwards density in the n-computably enumerable Turing degrees and the uniform constructions

M.M. Yamaleev

Abstract. In 1993, R. Downey and M. Stob showed that the downwards density of computably enumerable (c.e.) Turing degrees in the partial 2-c.e. Turing degrees cannot be obtained from a uniform construction. We generalize this result for any $n > 2$ and show that there is no a uniform construction for the downwards density of $(n-1)$-c.e. degrees in the structure of n-c.e. degrees. Moreover, we show that there is no a uniform construction for the downwards density in the n-c.e. degrees.

Keywords: Turing degree, uniform construction, Ershov's heirarchy, downwards density.

DOI: 10.26907/2949-3919.2024.3.76-91

References

[1] A.I. Talipova, M.M. Yamaleev, *Nonuniformity of downwards density in the n-computably enumerable Turing degrees*, Russian Math. (Iz. VUZ) **66** (11), 110–115 (2022).
DOI: https://doi.org/10.3103/S1066369X22110081

[2] R.I. Soare, *Recursively enumerable sets and degrees. A study of computable functions and computably generated sets*, Perspectives in mathematical logic. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, etc., 1987.
URL: https://link.springer.com/book/9783540666813

[3] R. Downey, M. Stob, *Splitting theorems in recursion theory*, Ann. Pure Appl. Log. **65** (1), 1–106 (1993).
DOI: https://doi.org/10.1016/0168-0072(93)90234-5

[4] S.B. Cooper, A.S. Li, *Non-uniformity and generalised Sacks splitting*, Acta Math. Sinica **18** (2), 327–334 (2002).
DOI: https://doi.org/10.1007/s101140100150

Acknowledgements. The work supported by the Russian Science Foundation and the Cabinet of Ministers of the Republic of Tatarstan (project No. 22-21-20024, https://rscf.ru/project/22-21-20024/) and performed under the development program of Volga Region Mathematical Center (project No. 075-02-2023-944). Also the author thanks I.Sh. Kalimullin for a number of helpful suggestions and comments.

Received: 01 July 2024. Accepted: 10 September 2024. Published: 17 October 2024.

[5] M.M. Arslanov, I.Sh. Kalimullin, S. Lempp, *On Downey's conjecture*, J. Symb. Log. **75** (2), 401–441 (2010).
DOI: https://doi.org/10.2178/jsl/1268917488

Mars Mansurovich Yamaleev
Kazan Federal University,
N.I. Lobachevsky Institute of Mathematics and Mechanics,
Volga Region Mathematical Center,
18 Kremlyovskaya str., Kazan 420008, Russia,
e-mail: mars.yamaleev@kpfu.ru