Элементарная вложимость относительно сводимости по Вайрауху

Н.А. Баженов, М.И. Марчук, М. Фьори-Каронес

Аннотация. Изучается сложность по Вайрауху для проблем нахождения элементарных вложений в контексте классической теории моделей. Доказано, что проблема нахождения элементарного вложения из простой модели $\mathcal{M}$ в произвольную модель $\mathcal{N}$ (элементарно эквивалентную $\mathcal{M}$) является сильно эквивалентной по Вайрауху известной проблеме lim , которая находит предел последовательности в пространстве Бэра. Установлено, что проблема нахождения элементарного вложения из произвольной модели $\mathcal{M}$ в счетно-насыщенную модель $\mathcal{N}$ также сильно эквивалентна по Вайрауху проблеме lim .

Ключевые слова: сводимость по Вайрауху, элементарное вложение, простая модель, счетно-насыщенная модель.

DOI: 10.26907/2949-3919.2024.4.4-23

Введение

Данная работа посвящена исследованию различных теорем в теории моделей с точки зрения сводимости по Вайрауху. Обратная математика (reverse mathematics) и сводимость по Вайрауху дают два различных метода сравнения теорем из разных областей математики.

Обратная математика – это область математической логики, направленная на нахождение точной аксиоматической силы математических теорем. В обратной математике утверждения о счетных (или счетно представимых) структурах формулируются в формальной системе арифметики второго порядка Z_2 . Основные подсистемы в Z_2 получаются при помощи ограничения аксиом индукции и аксиом выделения на специальные подклассы формул. В частности, в слабой базовой системе RCA_0 есть выделение для Δ_1^0 -определимых множеств и индукция для Σ_1^0 -формул. Система ACA_0 есть расширение RCA_0 , позволяющее задавать множества с помощью арифметического выделения (в частности, отсюда вытекает и индукция для Σ_n^0 -формул). Дальнейшие сведения по обратной математике можно найти в монографиях [1, 2].

Благодарности. Работа Н.А. Баженова и М.И. Марчук выполнена в рамках государственного задания ИМ СО РАН (проект № FWNF-2022-0011).

© 2024 Н.А. Баженов, М.И. Марчук, М. Фьори-Каронес

Поступила: 30.09.2024. Принята: 10.12.2024. Опубликовано: 26.12.2024.

Существует достаточно много работ, посвященных обратной математике для теории моделей (см., например, [3–7]). В частности, известны следующие результаты (над системой RCA_0), связанные с элементарными вложениями для моделей произвольной полной теории T .

- (А) Утверждение о том, что любая счетная атомная модель теории T является простой (т. е. элементарно вкладывается в любую модель теории T), эквивалентно ACA_0 (теорема 2.3 в [3]).
- (В) Утверждение о том, что любая счетная модель теории T элементарно вкладывается в счетно-насыщенную модель теории T , эквивалентно ACA_0 [8].

Следуя [9], одной из основных целей изучения сводимости по Вайрауху является классификация теоретико-вычислительной силы математических теорем вида

$$(\forall x \in X)(x \in D \rightarrow (\exists y \in Y)P(x, y)).$$

Такой теореме можно сопоставить (частичную) многозначную функцию $F : \subseteq X \rightrightarrows Y$, такую что $\text{dom}(F) = D$ и $F : x \mapsto \{y \in Y : P(x, y)\}$. Сводимость по Вайрауху $\leq_W$ и сильная сводимость по Вайрауху $\leq_{sW}$ позволяют сравнивать сложность подобных многозначных функций (формальные детали приведены в [подразделе 1.2](#)). Подробные сведения о сводимости по Вайрауху можно найти, например, в обзорах [9, 10].

Заметим, что сводимость по Вайрауху для теорем из теории моделей до сих пор особо не изучалась (при этом отметим, что в [7, § 7.3] получены результаты о $\leq_W$ -степенях для некоторых теорем существования для моделей полной теории T). В данной работе изучаются следующие математические проблемы, соответствующие результатам (А) и (В), приведенным выше.

(i) $\text{ElEm}(\text{prime}, \text{any})$:

- Пример проблемы (instance) или входные данные (input): полные диаграммы счетных моделей $\mathcal{M}$ и $\mathcal{N}$ такие, что $\mathcal{M}$ и $\mathcal{N}$ элементарно эквивалентны и при этом модель $\mathcal{M}$ является атомной.
- Решение (solution): элементарное вложение $\theta : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$.

(ii) $\text{ElEm}(\text{any}, \text{sat})$:

- Пример проблемы: полные диаграммы счетных моделей $\mathcal{M}$ и $\mathcal{N}$ такие, что $\mathcal{M}$ и $\mathcal{N}$ элементарно эквивалентны и при этом модель $\mathcal{N}$ является счетно-насыщенной.
- Решение: элементарное вложение $\theta : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$.

Известно, что для данной теоремы Γ , эквивалентной ACA_0 в обратной математике, соответствующую степень Вайрауха для Γ зачастую можно описать при помощи проблемы lim или ее конечных скачков $\text{lim}^{(n)}$, $n \geq 1$ (см., например, [9, § 3] и [10, § 11.9.3]). Говоря неформально, проблема $\text{lim} : \subseteq \omega^\omega \rightarrow \omega^\omega$ есть взятие предела в пространстве Бэра (формальное определение lim приведено в [подразделе 1.2](#)). В связи с этим внимание в данной работе сосредоточено на степени $\text{deg}_{sW}(\text{lim})$.

Работа построена следующим образом. В [разделе 1](#) приводятся необходимые предварительные сведения. В [разделе 2](#) доказывается, что проблема $\text{ElEm}(\text{prime}, \text{any})$ сильно эквивалентна по Вайрауху проблеме lim ([теорема 5](#)). В [разделе 3](#) доказывается, что проблема $\text{ElEm}(\text{any}, \text{sat})$ также сильно эквивалентна по Вайрауху проблеме lim ([теорема 11](#)).

1. Предварительные сведения

Все рассматриваемые сигнатуры σ являются вычислимыми. Будем отождествлять формулы $\psi(\bar{x})$ сигнатуры σ с их гёделевыми номерами.

Для $A \subseteq \omega$ через χ_A обозначаем характеристическую функцию множества A . Говорят, что $\mathcal{A} = (A, E)$ является *структурой эквивалентности* (equivalence structure), если бинарный предикат E есть отношение эквивалентности на множестве A .

Как обычно, запись $\mathcal{M} \equiv \mathcal{N}$ означает, что модели $\mathcal{M}$ и $\mathcal{N}$ элементарно эквивалентны.

1.1. ПРОСТЫЕ И СЧЕТНО-НАСЫЩЕННЫЕ МОДЕЛИ. Если $\mathcal{M}$ – модель сигнатуры σ , то через $\text{Th}(\mathcal{M})$ обозначается элементарная теория модели $\mathcal{M}$. Модель $\mathcal{M}$ называется *простой*, если $\mathcal{M}$ элементарно вкладывается в любую модель теории $\text{Th}(\mathcal{M})$.

Модель $\mathcal{M}$ сигнатуры σ называется *атомной*, если для любого набора $\bar{a} = a_0, \dots, a_n$ из $\mathcal{M}$ существует формула $\varphi(x_0, \dots, x_n)$ сигнатуры σ такая, что $\mathcal{M} \models \varphi(\bar{a})$ и для любой формулы $\psi(x_0, \dots, x_n)$ выполнено: если $\mathcal{M} \models \psi(\bar{a})$, то

$$\mathcal{M} \models \forall \bar{x} (\varphi(\bar{x}) \rightarrow \psi(\bar{x})).$$

Формулу φ , удовлетворяющую таким условиям, называют *полной формулой* теории $\text{Th}(\mathcal{M})$. Известен следующий критерий (см. [11, теорема 2.3.4]).

Теорема 1 (Р.Л. Воот). *Пусть $\mathcal{M}$ – модель счетной сигнатуры σ . Тогда $\mathcal{M}$ является простой в том и только том случае, когда модель $\mathcal{M}$ счетная атомная.*

Пусть κ – бесконечный кардинал. Модель $\mathcal{M}$ сигнатуры σ называется *κ -насыщенной*, если она реализует все 1-типы над каждым подмножеством $|M|$, мощность которого меньше чем κ .

Модель $\mathcal{M}$ называют *счетно-насыщенной*, если $\mathcal{M}$ счетна и ω -насыщенна. Модель $\mathcal{M}$ называется *счетно-универсальной*, если она счетна и для любой счетной модели $\mathcal{N}$ такой, что $\mathcal{N} \equiv \mathcal{M}$, верно, что $\mathcal{N}$ элементарно вкладывается в $\mathcal{M}$.

Счетная модель $\mathcal{M}$ является *однородной*, если для любых конечных наборов $\bar{a}$ и $\bar{b}$ из модели $\mathcal{M}$, таких что $(\mathcal{M}, \bar{a}) \equiv (\mathcal{M}, \bar{b})$, и любого элемента $c \in \mathcal{M}$ найдется элемент $d \in \mathcal{M}$ с условием $(\mathcal{M}, \bar{a}, c) \equiv (\mathcal{M}, \bar{b}, d)$. Известен следующий результат (см., например, [11, теорема 5.1.14]).

Теорема 2. *Пусть $\mathcal{M}$ – модель счетной сигнатуры σ . Тогда $\mathcal{M}$ является счетно-насыщенной в том и только том случае, когда $\mathcal{M}$ счетно-универсальна и однородна.*

Как принято в обратной математике (см., например, [7]), будем отождествлять счетную модель $\mathcal{M}$ с ее *полной диаграммой* $FD(\mathcal{M})$. Интуитивно говоря, это означает, что можно считать, что все рассматриваемые счетные модели являются X -разрешимыми относительно некоторого подходящего оракула $X \subseteq \omega$. Кроме того, без ограничения общности можно считать, что счетная модель $\mathcal{M}$ имеет носитель ω .

1.2. Сводимость по ВАЙРАУХУ. В рамках данного подхода [10] математические проблемы задаются как многозначные функции $F : \subseteq X \rightrightarrows Y$ (которые фактически являются бинарными отношениями $F \subseteq X \times Y$). Элемент $p \in \text{dom}(F)$ называют *примером* (instance) проблемы F . Произвольный элемент $q \in F(p)$ называют *решением* (solution) проблемы F на примере p .

Дадим здесь определение *сводимости по Вайрауху*, которое не эквивалентно общему определению сводимости по Вайрауху на проблемах F , заданных на произвольных представленных пространствах X, Y . Тем не менее, это определение эквивалентно общему определению в случае, когда X и Y являются подпространствами пространства Бэра ω^ω . Отметим, что в этой работе рассматриваются только такие пространства: в частности, данная счетная модель $\mathcal{M}$ (имеющая носитель ω) отождествляется с характеристической функцией $\chi_{FD(\mathcal{M})} \in 2^\omega$ для ее полной диаграммы.

Приведенное ниже определение следует определению 1.5 из приложения А в работе [12].

Определение 3. Пусть $F, G : \subseteq \omega^\omega \rightrightarrows \omega^\omega$ – многозначные функции.

(а) Говорят, что F *сводится по Вайрауху* к G (обозначается через $F \leq_W G$), если существуют тьюринговы функционалы $\Phi, \Psi : \subseteq \omega^\omega \rightarrow \omega^\omega$ такие, что:

- $\Phi(p) \in \text{dom}(G)$ для любого $p \in \text{dom}(F)$,
- $\Psi(p \oplus q) \in F(p)$ для любых $p \in \text{dom}(F)$ и $q \in G(\Phi(p))$.

Говоря неформально, оператор «предобработки» Φ преобразует данный пример p проблемы F в пример p_G проблемы G . Зная произвольное решение q для проблемы G на примере p_G , оператор «постобработки» Ψ выдает элемент $\Psi(p \oplus q)$, являющийся решением исходной проблемы F на примере p .

(б) Говорят, что F *сильно сводится по Вайрауху* к G (обозначается через $F \leq_{sW} G$), если существуют тьюринговы функционалы $\Phi, \Psi : \subseteq \omega^\omega \rightarrow \omega^\omega$ такие, что:

- $\Phi(p) \in \text{dom}(G)$ для любого $p \in \text{dom}(F)$,
- $\Psi(q) \in F(p)$ для любых $p \in \text{dom}(F)$ и $q \in G(\Phi(p))$.

Говоря неформально, сильная сводимость $\leq_{sW}$ отличается от $\leq_W$ тем, что оператору постобработки Ψ не нужно знать исходный пример $p \in \text{dom}(F)$.

Для $p \in \omega^\omega$ и $i \in \omega$ через $p^{[i]}$ обозначаем i -й столбец для p , т.е. $p^{[i]}(x) = p(\langle i, x \rangle)$.

Определим две математические проблемы.

(1) *Предельным отображением* (limit map) называется функция $\text{lim} : \subseteq \omega^\omega \rightarrow \omega^\omega$ такая, что:

- $\lim(p) = \lim_{i \rightarrow \infty} p^{[i]}$, если существует предел $\lim_{i \rightarrow \infty} p^{[i]}$,
 - $\lim(p)$ не определено в противном случае.
- (2) *Тьюринговым скачком* называют функцию $J: \omega^\omega \rightarrow \omega^\omega$ такую, что

$$J(p)(i) = \begin{cases} 1, & \text{если } \varphi_i^p(\emptyset) \downarrow, \\ 0, & \text{иначе,} \end{cases}$$

для всех $p \in \omega^\omega$ и $i \in \omega$.

Известен следующий результат о связи между проблемами $\lim$ и J :

Теорема 4 (см. [10, теорема 11.6.7]). $\lim \equiv_{sW} J$.

2. Простые модели

Основным результатом данного раздела является следующая

Теорема 5. $\text{ElEm}(\text{prime}, \text{any}) \equiv_{sW} \lim$.

Для доказательства теоремы построим две сильные сводимости по Вайрауху (в предложениях 6 и 7).

Предложение 6. $\text{ElEm}(\text{prime}, \text{any}) \leq_{sW} \lim$.

Доказательство. Пусть $\mathcal{M}$ и $\mathcal{N}$ – счетные модели некоторой полной теории T (в сигнатуре σ) такие, что $\mathcal{M}$ является простой моделью. Построим элемент $p_{(\mathcal{M}, \mathcal{N})} \in \omega^\omega$ такой, что используя $\lim p_{(\mathcal{M}, \mathcal{N})}$, можно равномерно вычислимым образом построить элементарное вложение θ из $\mathcal{M}$ в $\mathcal{N}$. Рассмотрим следующее множество формул:

$$\text{AtForm}_s = \{ \varphi(\bar{x}) : T \vdash \exists \bar{x} \varphi(\bar{x}) \text{ и для любой } \psi(\bar{x}) \text{ с гёделевым номером } \leq s \\ \text{верно: } T \vdash \varphi(\bar{x}) \rightarrow \psi(\bar{x}) \text{ или } T \vdash \varphi(\bar{x}) \rightarrow \neg \psi(\bar{x}) \}.$$

Заметим, что множество $\text{AtForm} = \lim_{s \rightarrow \infty} \text{AtForm}_s$ является в точности множеством всех полных формул теории T . Зададим $p = p_{(\mathcal{M}, \mathcal{N})}$ по следующим правилам:

- $p(\langle 3e, s \rangle) = \chi_{\text{AtForm}_s}(e)$ для формулы $\varphi(\bar{x})$ сигнатуры σ , имеющей номер e ;
- $p(\langle 3e + 1, s \rangle) = \chi_{FD(\mathcal{M})}(e)$ для каждого $s \in \omega$;
- $p(\langle 3e + 2, s \rangle) = \chi_{FD(\mathcal{N})}(e)$ для каждого $s \in \omega$.

Рассмотрим элемент $p^* = \lim(p)$. Заметим, что $p^* = \chi_{\text{AtForm}} \oplus \chi_{FD(\mathcal{M})} \oplus \chi_{FD(\mathcal{N})}$. В частности, получаем, что p^* «кодирует» полные диаграммы моделей $\mathcal{M}$ и $\mathcal{N}$.

Используя элемент p^* в качестве оракула, можно с помощью стандартного «одностороннего» применения челночной конструкции построить (равномерно по p^*) элементарное вложение из $\mathcal{M}$ в $\mathcal{N}$. Конструкция подробно описана, например, в [11, теорема 2.3.4] (см. также теорему 2.3 в [3], обсуждающую доказательство в аксиоматической системе ACA_0). $\square$

Предложение 7. $\lim \leq_{sW} \text{ElEm}(\text{prime}, \text{any})$.

Доказательство. Зафиксируем $p \in \omega^\omega$, по данному p построим неориентированный граф $\mathcal{M}_p = (|\mathcal{M}_p|, E)$. Пусть A, B, C – попарно непересекающиеся бесконечные вычислимые множества такие, что $A \cup B \cup C = \omega$. Определим множество B как объединение равномерно вычислимых, попарно непересекающихся, бесконечных множеств: $B = \bigcup_{k \in \omega} B^k$. Считаем, что $B^k = \{b_m^k : m \in \omega\}$.

Приведем краткое неформальное описание графа $\mathcal{M}_p$. Для каждого $i \in \omega$ граф $\mathcal{M}_p$ содержит бесконечно много циклов длины $i+3$. Цепью длины $n \geq 1$ будем называть последовательность попарно различных элементов $x_0, \dots, x_n$ такую, что $\mathcal{M}_p \models \bigwedge_{0 \leq i < n} E(x_i, x_{i+1})$. Если $\varphi_i^p(\emptyset) \uparrow$, тогда к каждому циклу длины $i+3$ прикреплена одна бесконечная цепь элементов. Если $\varphi_i^p(\emptyset) \downarrow$, тогда существует бесконечно много циклов длины $i+3$, к которым прикреплена цепь длины L_i , и бесконечно много циклов длины $i+3$, к которым прикреплена цепь длины L_i+1 , для некоторого $L_i \geq 1$.

Продолжим формальное описание графа $\mathcal{M}_p$. Зафиксируем частично вычислимую биекцию α , действующую из ω^3 на ω такую, что $\text{dom}(\alpha) = \{(i, j, k) : j \leq i+2\}$ и $\text{ran}(\alpha) = A$. Если $j \leq i+2$, тогда через $a_i^{k,j}$ будем обозначать элемент $\alpha(i, j, k)$. Пусть γ – вычислимая биекция, действующая из ω^3 на C . Для $i, j, k \in \omega$ через $c_i^{k,j}$ обозначим элемент $\gamma(i, j, k)$.

Далее опишем построение графа $\mathcal{M}_p$ по шагам. Также будем строить частично p -вычислимую функцию $\lambda(x)$ такую, что $\text{dom}(\lambda) = \{e : \varphi_e^p(\emptyset) \downarrow\}$, и на каждом шаге $s > 0$ будем строить вспомогательное множество D_s^* . Если на шаге s в D_s^* добавляем формулу $E(a, b)$, то будем полагать, что $E(b, a)$ также добавляется в D_s^* .

Шаг 0. $D_0 = \emptyset$, $|\mathcal{M}_p^0| = \emptyset$ и $t'(0) = 0$.

Шаг $s+1$. Предположим, что $s = \langle e, t \rangle$. Если $t = 0$, тогда полагаем следующее:

$$D_{s+1}^* = D_s \cup \{E(a_e^{k,j}, a_e^{k,j+1}) : k \in \omega, j \leq e+1\} \cup \{E(a_e^{k,e+2}, a_e^{k,0}) : k \in \omega\} \\ \cup \{E(a_e^{k,0}, c_e^{k,0}) : k \in \omega\}.$$

Пусть $|\mathcal{M}_p^{s+1}| = |\mathcal{M}_p^s| \cup \{a_e^{k,j}, c_e^{k,0} : k \in \omega, j \leq e+1\}$ и $t'(s+1) = t'(s) + 1$.

Определим D_{s+1}^* как множество D_{s+1}^* , в которое дополнительно добавили все соответствующие отрицания формул для новых элементов. Под соответствующими отрицаниями будем понимать следующее: если $E(u, v) \notin D_{s+1}^*$ для $u \in |\mathcal{M}_p^{s+1}| \setminus |\mathcal{M}_p^s|$, $v \in |\mathcal{M}_p^{s+1}|$, тогда $\neg E(u, v) \in D_{s+1}^*$. Также соответствующие отрицания будут включать в себя формулы, устанавливающие, что все новые элементы попарно различны.

Если $t > 0$, тогда выполнен один из следующих двух случаев.

Случай 1. Пусть t – наименьший шаг такой, что $\varphi_{e,t}^p(\emptyset) \downarrow$. Пусть m – наименьший элемент такой, что $b_m^k \notin \mathcal{M}_p^s$. Полагаем

$$D_{s+1}^* = D_s \cup \{E(c_e^{k,j}, c_e^{k,j+1}) : t-1 \leq j < t'(s), k \in \omega\} \\ \cup \{E(b_j^k, b_{j+1}^k) : m \leq j \leq m+e+1, k \in \omega\} \cup \{E(b_m^k, b_{m+e+2}^k) : k \in \omega\}$$

$$\cup \{E(b_j^k, b_{j+1}^k) : m + e + 2 \leq j \leq m + e + t'(s) + 3, k \in \omega\}.$$

Пусть $|\mathcal{M}_p^{s+1}| = |\mathcal{M}_p^s| \cup \{c_e^{k,j} : k \in \omega, t \leq j \leq t'(s)\} \cup \{b_j^k : k \in \omega, m \leq j \leq m + e + t'(s) + 4\}$ и $t'(s+1) = t'(s) + 2$.

Определим D_{s+1} как множество D_{s+1}^* , к которому добавили все соответствующие отрицания формул. Полагаем $\lambda(e) = t'(s)$.

Случай 2. Если $\varphi_{e,t}^p(\emptyset) \uparrow$, тогда $D_{t+1}^* = D_t \cup \{E(c_e^{k,t-1}, c_e^{k,t}) : k \in \omega\}$.

Пусть $|\mathcal{M}_p^{s+1}| = |\mathcal{M}_p^s| \cup \{c_e^{k,t} : k \in \omega\}$ и $t'(s+1) = t'(s) + 1$.

Определим D_{s+1} как множество D_{s+1}^* , к которому добавили все соответствующие отрицания формул.

Описание конструкции завершено. Полагаем $|\mathcal{M}_p| = \bigcup_{s \in \omega} |\mathcal{M}_p^s|$ и $D(\mathcal{M}_p) = \bigcup_{s \in \omega} D_s$. Заметим, что $a \in \mathcal{M}_p$ тогда и только тогда, когда выполнено одно из условий:

- 1) $a \in A \cup B$;
- 2) $a = c_e^{k,t}$ и $a \in M_{(e,t)+1}$ для некоторых $e, k, t \in \omega$.

Следовательно, множество $|\mathcal{M}_p|$ p -вычислимо и $\mathcal{M}_p$ является p -вычислимым графом.

Лемма 8. *Граф $\mathcal{M}_p$ разрешим относительно оракула p .*

Доказательство леммы следует схеме доказательства леммы 3.1 работы [13]. Покажем, что полная диаграмма $FD(\mathcal{M}_p)$ есть p -рекурсивно аксиоматизируемая полная теория. Будем полагать, без потери общности, что $|\mathcal{M}_p| = \omega$. Определим следующие вспомогательные формулы для $n \geq 3$:

$$\psi_C^n(x_1, \dots, x_n) := \bigwedge_{1 \leq i < j \leq n} (x_i \neq x_j) \ \& \ \bigwedge_{1 \leq i < n} E(x_i, x_{i+1}) \ \& \ E(x_n, x_1).$$

Формула $\psi_C^n(\bar{x})$ говорит, что элементы из набора $\bar{x}$ образуют в графе цикл длины n . Для $n \in \omega$ определим формулу $\psi_{deg,n}(x)$, говорящую о том, что вершина x имеет степень n :

$$\begin{aligned} \psi_{deg,0}(x) &:= \neg \exists y E(x, y), \\ \psi_{deg,n+1}(x) &:= \exists y_0 \dots \exists y_n \left(\bigwedge_{i \leq n} E(x, y_i) \ \& \ \bigwedge_{i < j \leq n} y_i \neq y_j \right) \ \& \ \forall z_0 \dots \forall z_{n+1} \left(\bigwedge_{i \leq n+1} E(x, z_i) \rightarrow \right. \\ &\quad \left. \bigvee_{i < j \leq n+1} z_i = z_j \right). \end{aligned}$$

Зададим p -вычислимо перечислимый список аксиом в сигнатуре $\{E^2\} \cup \{c_k : k \in \omega\}$, включающий в себя следующие предложения:

- (1) Все формулы из атомной диаграммы графа $\mathcal{M}_p$.
- (2) Предложение, говорящее о том, что отношение E симметрично и иррефлексивно.
- (3) $\forall x [\psi_{deg,1}(x) \vee \psi_{deg,2}(x) \vee \psi_{deg,3}(x)]$.

(4) Для всех $n \in \omega$:

$$\forall x \forall y_0 \dots \forall y_n \left[\left(\psi_{deg,3}(x) \ \& \ E(x, y_0) \ \& \ \bigwedge_{i < n} E(y_i, y_{i+1}) \right) \rightarrow (y_n = x \vee \neg \psi_{deg,3}(y_n)) \right].$$

Эта серия предложений говорит о том, что каждая компонента связности графа содержит не более одной вершины степени 3.

(5) Для всех $n \in \omega$:

$$\forall x \forall y_0 \dots \forall y_n \left[\left(\psi_{deg,1}(x) \ \& \ E(x, y_0) \ \& \ \bigwedge_{i < n} E(y_i, y_{i+1}) \right) \rightarrow (y_n = x \vee \neg \psi_{deg,1}(y_n)) \right].$$

Другими словами, каждая компонента связности графа содержит не более одной вершины степени 1.

(6) Для всех $n \geq 3$ и $m \geq 1$:

$$\exists x_1^1 \dots \exists x_n^1 \dots \exists x_1^m \dots \exists x_n^m \left[\bigwedge_{1 \leq i \leq m} \psi_C^n(\bar{x}^i) \ \& \ \bigwedge_{1 \leq l \neq p \leq m} \left[\bigwedge_{1 \leq i, j \leq n} (x_i^l \neq x_j^p) \right] \right].$$

Это предложение говорит о том, что существует m циклов длины n .

(7) Для ненулевого натурального числа N выберем s – наименьший шаг конструкции, для которого существует $e \leq s$, такое что $\lambda(e)[s]$ определено и не меньше, чем N . Рассмотрим следующие два случая:

(7a) Пусть существует $e' \leq s$, для которого $\lambda(e')[s] \downarrow \in \{N-1, N\}$. Тогда добавим в список следующее предложение:

$$\forall x_0 \dots \forall x_N \forall y \left[\left(\psi_{deg,1}(x_0) \ \& \ \bigwedge_{i < N} E(x_i, x_{i+1}) \ \& \ \bigwedge_{1 \leq i < j \leq N} (x_i \neq x_j) \ \& \ \bigwedge_{1 \leq i \leq N} \psi_{deg,2}(x_i) \ \& \ E(x_N, y) \ \& \ \psi_{deg,3}(y) \right) \rightarrow \exists z_2 \dots \exists z_{e'+3} \psi_C^{e'+3}(y, \bar{z}) \right].$$

(7b) Если e' из предыдущего случая не существует, то добавляем формулу

$$\forall x_0 \dots \forall x_N \forall y \left[\left(\psi_{deg,1}(x_0) \ \& \ \bigwedge_{i < N} E(x_i, x_{i+1}) \ \& \ \bigwedge_{1 \leq i < j \leq N} (x_i \neq x_j) \ \& \ \bigwedge_{1 \leq i \leq N} \psi_{deg,2}(x_i) \ \& \ E(x_N, y) \right) \rightarrow \neg \psi_{deg,3}(y) \right].$$

Положим, что T – теория, аксиоматизируемая списком аксиом, приведенным выше. Учитывая свойства конструкции, можно установить, что $T \subseteq FD(\mathcal{M}_p)$. Покажем, что теория T полна. Чтобы установить полноту теории T , достаточно показать, что любые две насыщенные модели T , имеющие мощность ω_1 , изоморфны.

Пусть $\mathcal{M}^*$ и $\mathcal{M}^{**}$ – насыщенные модели теории T мощности ω_1 . Построим изоморфизм F из $\mathcal{M}^*$ на $\mathcal{M}^{**}$. Стандартные элементы отображаются естественным образом.

Говоря неформально, образ стандартного элемента a относительно F определяется следующими условиями:

- 1) видом компоненты связности $\mathcal{C}$, в которой лежит a (т. е. длиной цикла $\mathcal{R}$, входящего в $\mathcal{C}$, и количеством элементов $\mathcal{C}$, не принадлежащих $\mathcal{R}$);
- 2) расстоянием от a до единственной вершины степени 3 из $\mathcal{C}$;
- 3) принадлежит ли a циклу $\mathcal{R}$ или нет.

ζ -цепью в модели $\mathcal{N}$ теории T будем называть последовательность $\{x_i : i \in \mathbb{Z}\}$ попарно различных элементов модели $\mathcal{N}$ такую, что $\mathcal{N} \models \psi_{deg,2}(x_i)$ и $\mathcal{N} \models E(x_i, x_{i+1})$ для каждого $i \in \mathbb{Z}$. ω -цепью в модели $\mathcal{N}$ называем последовательность $\{x_i : i < \omega\}$ попарно различных элементов $\mathcal{N}$ такую, что $\mathcal{N} \models \psi_{deg,1}(x_0)$, $\mathcal{N} \models \psi_{deg,2}(x_{i+1})$ и $\mathcal{N} \models E(x_i, x_{i+1})$ для каждого $i < \omega$.

Приведем краткое описание отображения нестандартных элементов модели $\mathcal{M}^*$ в нестандартные элементы модели $\mathcal{M}^{**}$. Нестандартные элементы могут быть трех типов.

Нестандартный элемент *первого типа* входит в некоторую ζ -цепь. Элемент *второго типа* лежит в ω -цепи. Заметим, что ζ -цепей и ω -цепей содержится по ω_1 штук в каждой из моделей $\mathcal{M}^*$ и $\mathcal{M}^{**}$. При построении изоморфизма между $\mathcal{M}^*$ и $\mathcal{M}^{**}$ элементы из ω -цепей отображаем в соответствии с их местоположением относительно вершины степени 1. Элементы из ζ -цепей можно челночным методом отобразить друг в друга.

Нестандартный элемент *третьего типа* лежит в компоненте связности $\mathcal{C}$, не содержащей циклов и при этом имеющей в точности один элемент степени 3. В силу схемы аксиом (7) все остальные элементы $\mathcal{C}$ имеют степень 2. В каждой из моделей $\mathcal{M}^*$ и $\mathcal{M}^{**}$ содержится ω_1 попарно различных таких компонент. Элементы третьего типа отображаем друг в друга в соответствии с их местоположением относительно вершины степени 3.

Следовательно, $\mathcal{M}^*$ и $\mathcal{M}^{**}$ изоморфны, таким образом, теория T является полной. В силу того, что T полна, выполнено $FD(\mathcal{M}_p) = T$. Отсюда вытекает, что полная диаграмма $FD(\mathcal{M}_p)$ p -вычислима. **Лемма 8** доказана. $\square$

Отметим, что в доказательстве **леммы 8** полная диаграмма $FD(\mathcal{M}_p)$ строится равномерно по p : действительно, по данному $p \in \omega^\omega$ можно равномерно построить список аксиом для $FD(\mathcal{M}_p)$.

Лемма 9. *Модель $\mathcal{M}_p$ является простой.*

Доказательство. В силу **теоремы 1** достаточно показать, что любой конечный набор $\bar{d}$ из графа $\mathcal{M}_p$ удовлетворяет некоторой полной формуле $\theta(\bar{x})$. Приведем здесь набросок доказательства (использующий вспомогательные формулы из **леммы 8**).

Проверка полноты построенной формулы $\theta(\bar{x})$ осуществляется следующим образом. Необходимо установить следующий факт: если два кортежа $\bar{d}$ и $\bar{d}'$ удовлетворяют формуле $\theta(\bar{x})$ в модели $\mathcal{M}_p$, то эти кортежи автоморфны (а следовательно, верно и $(\mathcal{M}_p, \bar{d}) \equiv (\mathcal{M}_p, \bar{d}')$).

(1) Для данного элемента d из $\mathcal{M}_p$ полную формулу $\theta(x)$ можно построить следующим образом.

Если $\varphi_e^p(\emptyset) \uparrow$, то элемент $a_e^{k,0}$ удовлетворяет полной формуле

$$\theta_{e,A}^1(x) = \psi_{deg,3}(x) \ \& \ \exists \bar{y} \psi_C^{e+3}(x, \bar{y}).$$

Если $\varphi_e^p(\emptyset) \downarrow$, то выполнено следующее:

- элемент $a_e^{k,0}$ удовлетворяет полной формуле $\theta_{e,A}^2(x)$, являющейся конъюнкцией $\theta_{e,A}^1(x)$ и утверждения о том, что к x присоединена цепь длины $\lambda(e)$, оканчивающаяся элементом y степени 1;
- элемент b_{m+e+2}^k из конструкции теоремы удовлетворяет полной формуле $\theta_{e,B}(x)$, утверждающей следующее: выполнено $\theta_{e,A}^1(x)$ и при этом к x присоединена цепь длины $\lambda(e) + 1$, оканчивающаяся элементом степени 1.

Если элемент $d \neq a_e^{k,0}$ лежит в компоненте связности элемента $a_e^{k,0}$, то он соединен с $a_e^{k,0}$ цепью некоторой длины ℓ и при этом d либо лежит в цикле длины $e+3$ (т. е. выполнено $\exists \bar{y} \psi_C^{e+3}(d, \bar{y})$), либо лежит в присоединенной к этому циклу цепи. Опираясь на формулы $\theta_{e,A}^1$ и $\theta_{e,A}^2$, нетрудно восстановить и полную формулу для d . Аналогично рассматривается случай, когда d лежит в компоненте связности элемента b_{m+e+2}^k .

(2) Рассмотрим набор $\bar{d} = d_1, \dots, d_n$, где $n \geq 2$. Полная формула $\theta(x_1, \dots, x_n)$ для $\bar{d}$ задается как конъюнкция следующих формул:

- полные формулы $\theta_i(x_i)$ для каждого элемента d_i ;
- формулы вида $x_i = x_j$ для $d_i = d_j$;
- если элементы $d_i \neq d_j$ лежат в одной компоненте связности, то нужно записать, что x_i и x_j связаны цепью подходящей длины $\ell_{i,j}$;
- если d_i и d_j лежат в разных компонентах связности, то добавляем следующую формулу: существуют вершины z_i и z_j степени 3, такие что $z_i \neq z_j$ и при этом для $m \in \{i, j\}$ элемент x_m связан с z_m цепью подходящей длины ℓ_m .

Нетрудно проверить, что из условия $\mathcal{M}_p \models \theta(\bar{d}) \ \& \ \theta(\bar{d}')$ вытекает, что наборы $\bar{d}$ и $\bar{d}'$ автоморфны. [Лемма 9](#) доказана. $\square$

Наконец, установим следующий факт:

Лемма 10. *Существует p -разрешимая изоморфная копия $\mathcal{M}'_p$ графа $\mathcal{M}_p$ такая, что если F – произвольное элементарное вложение из $\mathcal{M}'_p$ в $\mathcal{M}_p$, то F вычисляет $J(p)$ (равномерно по p).*

Доказательство. Построение графа $\mathcal{M}'_p$ проводится аналогично конструкции графа $\mathcal{M}_p$ со следующими основными изменениями: на шаге $s+1$ в случае 1 полагаем:

$$\begin{aligned} D_{s+1}^* = & D_s \cup \{E(c_e^{k,j}, c_e^{k,j+1}) : t-1 \leq j < t'(s)+1, k \in \omega\} \\ & \cup \{E(b_j^k, b_{j+1}^k) : m \leq j \leq m+e+1, k \in \omega\} \cup \{E(b_m^k, b_{m+e+2}^k) : k \in \omega\} \\ & \cup \{E(b_j^k, b_{j+1}^k) : m+e+2 \leq j \leq m+e+t'(s)+2, k \in \omega\}. \end{aligned}$$

Пусть F – элементарное вложение из $\mathcal{M}_p$ в $\mathcal{M}'_p$, и пусть $k \in \omega$. Тогда выполнено:

- (a) $J(p)(e) = 0 \Leftrightarrow F(a_e^{k,0}) \in A$;
 (b) $J(p)(e) = 1 \Leftrightarrow F(a_e^{k,0}) \in B$.

Действительно, если $\varphi_e^p(\emptyset) \uparrow$, то как в графе $\mathcal{M}_p$, так и в графе $\mathcal{M}'_p$, элементы любого цикла длины $e + 3$ лежат в A . Если же $\varphi_e^p(\emptyset) \downarrow$, то в графе $\mathcal{M}_p$ элемент $a_e^{k,0}$ лежит в цикле длины $e + 3$, имеющем присоединенную цепь длины $\lambda(e)$. При этом в $\mathcal{M}'_p$ все такие циклы состоят из элементов множества B . [Лемма 10](#) доказана. $\square$

Построение полных диаграмм для модели $\mathcal{M}_p$ и модели $\mathcal{M}'_p$ из [леммы 10](#) осуществляется равномерно по $p \in \omega^\omega$. Применяя [теорему 4](#), заключаем, что [предложение 7](#) и [теорема 5](#) доказаны. $\square$

3. Счетно-насыщенные модели

Основным результатом данного раздела является следующая

Теорема 11. $\text{ElEm}(\text{any}, \text{sat}) \equiv_{sW} \text{lim}$.

Для доказательства теоремы построим две сильные сводимости по Вайрауху (в [предложении 12](#) и [подразделе 3.2](#)).

Предложение 12. $\text{ElEm}(\text{any}, \text{sat}) \leq_{sW} \text{lim}$.

Доказательство. Пусть $\mathcal{M}$ и $\mathcal{N}$ – счетные модели полной теории T такие, что модель $\mathcal{N}$ счетно-насыщенная. Зададим всюду определенную функцию $q: \omega^2 \rightarrow \{0, 1\}$ по следующему правилу: $q(\langle k, l \rangle, s) = 1$ в том и только том случае, когда k есть номер некоторого кортежа $\bar{a}$ из $\mathcal{M}$, l есть номер некоторого кортежа $\bar{b}$ из $\mathcal{N}$, длины наборов $\bar{a}$ и $\bar{b}$ равны, и при этом для каждой формулы $\psi(\bar{x})$, имеющей гёделев номер $\leq s$, верно:

$$\mathcal{M} \models \psi(\bar{a}) \Leftrightarrow \mathcal{N} \models \psi(\bar{b}).$$

Заметим, что $\lim_s q(\langle k, l \rangle, s) = 1$ в том и только том случае, когда типы соответствующих кортежей $\bar{a}$ и $\bar{b}$ совпадают. Полагаем $q^* = \lim(q)$.

Аналогично доказательству [предложения 6](#), можно задать элемент $p = p_{\mathcal{M}, \mathcal{N}}$ такой, что для $p^* = \lim(p)$ верно $p^* = q^* \oplus \chi_{FD(\mathcal{M})} \oplus \chi_{FD(\mathcal{N})}$.

Следуя стандартному доказательству (см., например, [14, лемма 4.3.17]), построим элементарное вложение θ из $\mathcal{M}$ в $\mathcal{N}$. Полагаем $\theta^0 = \emptyset$. Пусть θ^s уже построено, при этом $\text{dom}(\theta^s) = \{a_0, a_1, \dots, a_{s-1}\}$, $b_i = \theta^s(a_i)$, и типы кортежей $a_0, \dots, a_{s-1}$ и $b_0, \dots, b_{s-1}$ совпадают. Выберем наименьший элемент $a_s \in \mathcal{M} \setminus \text{dom}(\theta^s)$. В силу того, что модель $\mathcal{N}$ является ω -насыщенной, в модели $\mathcal{N}$ найдется элемент b такой, что типы кортежей $a_0, \dots, a_{s-1}, a_s$ и $b_0, \dots, b_{s-1}, b$ одинаковы. Используя оракул p^* , находим (равномерно по p^* и θ^s) наименьший такой элемент $b \in \mathcal{N}$. Полагаем $\theta^{s+1} = \theta^s \cup \{(a_s, b)\}$.

Построенное (равномерно по p^*) отображение $\theta = \bigcup_{s \in \omega} \theta^s$ есть элементарное вложение из $\mathcal{M}$ в $\mathcal{N}$. Заключаем, что $\text{ElEm}(\text{any}, \text{sat}) \leq_{sW} \text{lim}$. $\square$

Прежде чем устанавливать существование оставшейся сильной сводимости $\leq_{sW}$, в подразделе 3.1 приведем необходимые предварительные сведения.

3.1. Игры ЭРЕНФОЙХТА–ФРАЙССЕ И СТРУКТУРЫ ЭКВИВАЛЕНТНОСТИ. Следуя [15, 16], кратко опишем игры Эренфойхта–Фрайссе для структур конечной предикатной сигнатуры σ .

Пусть $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ – структуры сигнатуры σ с непересекающимися носителями. Пусть n – ненулевое натуральное число. *Раунд* (play) игры $EF_n(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ – это упорядоченная последовательность из n повторений следующих действий:

- игрок $\forall$ выбирает элемент из одной из структур $\mathcal{A}$ или $\mathcal{B}$,
- игрок $\exists$ выбирает элемент из другой структуры.

Элемент из структуры $\mathcal{A}$, выбранный во время хода t , обозначается через a_t . Элемент из $\mathcal{B}$, выбранный на ходе t , обозначаем через b_t .

Говорим, что игрок $\exists$ *выиграл* раунд игры, если отображение $\psi: a_t \mapsto b_t$ есть изоморфизм конечных структур $\mathcal{A} \upharpoonright \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ и $\mathcal{B} \upharpoonright \{b_1, b_2, \dots, b_n\}$. В противном случае считаем, что выиграл игрок $\forall$.

Пусть $A = \text{dom}(\mathcal{A})$ и $B = \text{dom}(\mathcal{B})$. Говорят, что игрок $\exists$ имеет *выигрышную стратегию* в игре $EF_n(\mathcal{A}, \mathcal{B})$, если существуют функции $f_1, f_2, \dots, f_n$, удовлетворяющие следующим условиям:

- (a) Область определения f_t есть множество всех упорядоченных t -кортежей элементов из $A \cup B$.
- (b) Если $c_1, \dots, c_t \in A \cup B$ (этот кортеж представляет выборы игрока $\forall$ за первые t ходов), то

$$f_t(c_1, \dots, c_t) \in \begin{cases} A, & \text{если } c_t \in B, \\ B, & \text{если } c_t \in A. \end{cases}$$

- (c) Пусть $c_1, \dots, c_n \in A \cup B$. Для ненулевого $t \leq n$ зададим

$$a_t = \begin{cases} c_t, & \text{если } c_t \in A, \\ f_t(c_1, \dots, c_t), & \text{если } c_t \in B; \end{cases} \quad b_t = \begin{cases} c_t, & \text{если } c_t \in B, \\ f_t(c_1, \dots, c_t), & \text{если } c_t \in A. \end{cases}$$

Тогда отображение $\psi: a_t \mapsto b_t$ является изоморфизмом конечных структур $\mathcal{A} \upharpoonright \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ и $\mathcal{B} \upharpoonright \{b_1, b_2, \dots, b_n\}$.

Если у игрока $\exists$ нет выигрышной стратегии, то говорим, что игрок $\forall$ имеет выигрышную стратегию. Будем писать $\mathcal{A} \sim_n \mathcal{B}$, если игрок $\exists$ имеет выигрышную стратегию в игре $EF_n(\mathcal{A}, \mathcal{B})$.

Теорема 13 (см., например, [15, следствие 3.3.3]). *Структуры $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ элементарно эквивалентны в том и только том случае, когда $\mathcal{A} \sim_n \mathcal{B}$ для всех $n \geq 1$.*

Приведем теперь необходимые сведения о структурах эквивалентности.

Пусть $\mathcal{A} = (A, E)$ – структура эквивалентности. Для $a \in A$ через $[a]_{\mathcal{A}}$ обозначаем класс эквивалентности элемента a в структуре $\mathcal{A}$. *Характером* структуры $\mathcal{A}$ называют множество

$$\chi(\mathcal{A}) = \{(n, k) : 1 \leq n, k < \omega, \text{ и } \mathcal{A} \text{ имеет не менее } k \text{ классов размера } n\}.$$

Говорят, что $\mathcal{A}$ имеет *неограниченный характер*, если для любого $n \in \omega$ структура $\mathcal{A}$ имеет класс конечного размера N , такого что $N > n$.

Установим следующий общий факт о структурах эквивалентности:

Предложение 14. Пусть $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ – это (не обязательно счетные) структуры эквивалентности, имеющие неограниченный характер.

- а) $\mathcal{A} \equiv \mathcal{B}$ в том и только том случае, когда $\chi(\mathcal{A}) = \chi(\mathcal{B})$.
- б) Пусть $\bar{c} = c_1, \dots, c_m$ – набор элементов из $\mathcal{A}$, $\bar{d} = d_1, \dots, d_m$ – набор элементов из $\mathcal{B}$. Тогда $(\mathcal{A}, \bar{c}) \equiv (\mathcal{B}, \bar{d})$ в том и только том случае, когда выполнены следующие условия:
 - $\chi(\mathcal{A}) = \chi(\mathcal{B})$;
 - наборы $\bar{c}$ и $\bar{d}$ удовлетворяют одним и тем же атомарным формулам;
 - для каждого $i \leq m$ либо размеры классов эквивалентности $[c_i]_{\mathcal{A}}$ и $[d_i]_{\mathcal{B}}$ конечны и равны, либо эти размеры бесконечны.

Доказательство. а) Ясно, что если структуры $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ элементарно эквивалентны, то их характеры совпадают. Действительно, для $n \geq 1$ зададим следующие вспомогательные формулы:

- $\psi_{\geq n}(x) = \exists y_1 \exists y_2 \dots \exists y_n [y_i \text{ попарно различны и } (y_i E x)]$,
- формула $\psi_{=n}(x) = \psi_{\geq n}(x) \ \& \ \neg \psi_{\geq n+1}(x)$ говорит о том, что класс эквивалентности $[x]_E$ имеет размер n .

Тогда условие $(n, k) \in \chi(\mathcal{A})$ выполнено в том и только том случае, когда в $\mathcal{A}$ существуют попарно не эквивалентные $x_1, \dots, x_k$, удовлетворяющие $\psi_{=n}(x_i)$, $i \leq k$.

Пусть теперь $\chi(\mathcal{A}) = \chi(\mathcal{B})$. Опишем выигрышную стратегию для игрока $\exists$ в игре Эренфойхта–Фраиссе $EF_n(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ для $n \geq 1$.

Пусть игроками $\forall$ и $\exists$ на первых $(t-1)$ ходах уже были выбраны элементы $a_1, \dots, a_{t-1} \in \mathcal{A}$ и $b_1, \dots, b_{t-1} \in \mathcal{B}$ со следующими свойствами:

- (i) наборы $a_1, \dots, a_{t-1}$ и $b_1, \dots, b_{t-1}$ удовлетворяют одним и тем же атомарным формулам,
- (ii) либо $\text{card}([a_i]_{\mathcal{A}}) = \text{card}([b_i]_{\mathcal{B}}) \leq n$, либо ($\text{card}([a_i]_{\mathcal{A}}) > n$ и $\text{card}([b_i]_{\mathcal{B}}) > n$).

Если на t -ом ходе игрок $\forall$ выбирает элемент $a_t \in \mathcal{A}$ такой, что $\text{card}([a_t]_{\mathcal{A}}) \leq n$, то игрок $\exists$ должен выбрать $b_t \in \mathcal{B}$ такой, что $\text{card}([b_t]_{\mathcal{B}}) = \text{card}([a_t]_{\mathcal{A}})$ и при этом наборы $a_1, \dots, a_{t-1}, a_t$ и $b_1, \dots, b_{t-1}, b_t$ удовлетворяют одним и тем же атомарным формулам. Такой выбор возможен в силу того, что для каждого $n' \leq n$ структуры $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ имеют одинаковое число классов размера n' .

Пусть теперь игрок $\forall$ выбирает элемент $a_t \in \mathcal{A}$ такой, что $\text{card}([a_t]_{\mathcal{A}}) > n$ (при этом, возможно, эта мощность бесконечна). Если $a_t = a_i$ для некоторого $i < t$, то полагаем $b_t = b_i$. Если $a_t \notin \{a_j : j < t\}$ и при этом $a_t \in [a_i]_{\mathcal{A}}$ для (наименьшего) $i < t$, то можно выбрать $b_t \in [b_i]_{\mathcal{B}}$ такой, что $b_t \notin \{b_j : j < t\}$. Действительно, такой выбор возможен в силу того, что

$$\text{card}([b_i]_{\mathcal{B}} \cap \{b_j : j < t\}) > n - (t - 1) > 0.$$

Если же a_t не эквивалентен ни одному из a_j , $j < t$, то игрок $\exists$ выбирает в качестве b_t такой элемент из $\mathcal{B}$, что $\text{card}([b_t]_{\mathcal{B}}) > n$ и при этом b_t не эквивалентен ни одному из b_j , $j < t$. Этот выбор возможен в силу того, что характер $\chi(\mathcal{B})$ неограничен.

Случай, когда игрок $\forall$ выбирает элемент $b_t \in \mathcal{B}$, рассматривается аналогично: в этом случае игрок $\exists$ может найти подходящий элемент $a_t \in \mathcal{A}$. Индукцией по $t \leq n$ нетрудно показать, что отображение $\psi: a_t \mapsto b_t$ есть изоморфизм конечных структур эквивалентности $\mathcal{A} \upharpoonright \{a_1, \dots, a_n\}$ и $\mathcal{B} \upharpoonright \{b_1, \dots, b_n\}$.

Заключаем, что для каждого $n \geq 1$ выполнено $\mathcal{A} \sim_n \mathcal{B}$. Следовательно, по [теореме 13](#), структуры $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ элементарно эквивалентны.

б) Доказательство проводится аналогично доказательству пункта а). При этом в стратегию для игры $EF_n((\mathcal{A}, \bar{c}), (\mathcal{B}, \bar{d}))$ необходимо добавить следующее условие:

(iii) для любых $k \leq m$ и $i < t$ выполнено: $a_i \in [c_k]_{\mathcal{A}} \Leftrightarrow b_i \in [d_k]_{\mathcal{B}}$.

[Предложение 14](#) доказано. □

Следствие 15. Пусть $\mathcal{A}$ – это счетная структура эквивалентности, имеющая неограниченный характер и бесконечное число бесконечных классов эквивалентности. Тогда $\mathcal{A}$ является счетно-насыщенной моделью.

Доказательство. Пусть $\mathcal{S}$ – это счетная структура, элементарно эквивалентная структуре $\mathcal{A}$. По [предложению 14](#) п. а) характер $\chi(\mathcal{S})$ равен $\chi(\mathcal{A})$. Отсюда получаем, что нетрудно построить изоморфное вложение θ из $\mathcal{S}$ в $\mathcal{A}$, такое что для любого $b \in \mathcal{S}$ выполнено $\text{card}([\theta(b)]_{\mathcal{A}}) = \text{card}([b]_{\mathcal{S}})$. По [предложению 14](#) п. б) получаем, что $(\mathcal{S}, \bar{b}) \equiv (\mathcal{A}, \theta(\bar{b}))$ для любого конечного кортежа $\bar{b}$ из $\mathcal{S}$. Заключаем, что θ есть элементарное вложение из $\mathcal{S}$ в $\mathcal{A}$. Следовательно, модель $\mathcal{A}$ счетно-универсальна.

В силу [теоремы 2](#) осталось показать, что модель $\mathcal{A}$ является однородной. Пусть $(\mathcal{A}, \bar{a}) \equiv (\mathcal{A}, \bar{b})$ и $c \in \mathcal{A}$. Из [предложения 14](#) п. б) вытекает, что существует автоморфизм g структуры $\mathcal{A}$ такой, что $\bar{b} = g(\bar{a})$. Получаем, что $(\mathcal{A}, \bar{a}, c) \equiv (\mathcal{A}, \bar{b}, g(c))$. Следовательно, модель $\mathcal{A}$ однородна. [Следствие 15](#) доказано. □

Также нам понадобится следующий известный факт:

Теорема 16 (следует, например, из [17, § 5]). Пусть $\mathcal{A}$ – вычислимая структура эквивалентности. Структура $\mathcal{A}$ является разрешимой в том и только том случае, когда вычислимы следующие два множества:

- характер $\chi(\mathcal{A})$;
- множество $K(\mathcal{A}) = \{(a, k) \in \text{dom}(\mathcal{A}) \times \omega : \text{card}([a]_{\mathcal{A}}) \geq k\}$.

3.2. ПРОДОЛЖЕНИЕ ДОКАЗАТЕЛЬСТВА ТЕОРЕМЫ 11

Предложение 17. $\lim \leq_{sW} \text{ElEm}(\text{any}, \text{sat})$.

Доказательство. Зафиксируем разрешимую структуру эквивалентности $\mathcal{U}$ со следующими свойствами:

- для каждого $\beta \in (\omega \setminus \{0\}) \cup \{\omega\}$ структура $\mathcal{U}$ имеет бесконечно много классов размера β ;
- функция $c_{\mathcal{U}}: a \mapsto \text{card}([a]_{\mathcal{U}})$ вычислима.

В силу того, что характер $\chi(\mathcal{U})$ неограничен и $\mathcal{U}$ имеет бесконечно много бесконечных классов эквивалентности, по [следствию 15](#), $\mathcal{U}$ есть счетно-насыщенная модель.

Для данного $p \in \omega^\omega$ зададим счетную структуру эквивалентности $\mathcal{E}_p$. Структура $\mathcal{E}_p$ определяется как дизъюнктивное объединение структуры $\mathcal{U}$ и структуры $\mathcal{A}$, которую построим по шагам.

Носитель структуры $\mathcal{A}$ будет равен $\{a_e : e \in \omega\} \cup \{b_i : i \in \omega\}$. В конструкции будем придерживаться следующего правила: $[a_i]_{\mathcal{A}} \neq [a_j]_{\mathcal{A}}$ при $i \neq j$.

На шаге 0 задаем $\mathcal{A}_0 = \emptyset$.

Шаг $s + 1$. Пусть конечная структура $\mathcal{A}_s$ уже построена. Добавляем элемент a_s в структуру $\mathcal{A}_{s+1}$. Для каждого $e \leq s$ осуществляем следующие действия. Если $\varphi_{e,s}^p(\emptyset) \uparrow$, то добавляем в класс $[a_e]_{\mathcal{A}_{s+1}}$ элемент b_m с наименьшим индексом m такой, что этот b_m ранее не был добавлен в $\mathcal{A}_{s+1}$.

Конструкция описана. Полагаем $\mathcal{A} = \bigcup_{s \in \omega} \mathcal{A}_s$. В силу того, что для каждого $\beta \in (\omega \setminus \{0\}) \cup \{\omega\}$ структура $\mathcal{E}_p = \mathcal{U} \sqcup \mathcal{A}$ имеет бесконечно много классов размера β , получаем, что $\mathcal{E}_p \cong \mathcal{U}$. Нетрудно понять, что структура $\mathcal{E}_p$ вычислима относительно оракула p .

Заметим, что для всех $e \in \omega$ и $m \geq 1$ выполнено: $\text{card}([a_e]_{\mathcal{A}}) \geq m$ тогда и только тогда, когда $\text{card}([a_e]_{\mathcal{A}_{e+m}}) \geq m$. Кроме того, для данного b_i можно p -вычислимо найти такой индекс e , что $b_i \in [a_e]_{\mathcal{A}}$. Отсюда следует, что множество

$$K(\mathcal{E}_p) = \{(c, m) : \text{card}([c]_{\mathcal{E}_p}) \geq m\}$$

вычислимо относительно оракула p . Применяя релятивизованную версию [теоремы 16](#), получаем, что структура $\mathcal{E}_p$ p -разрешима (равномерно относительно p).

Пусть теперь θ – это произвольное элементарное вложение из $\mathcal{E}_p$ в $\mathcal{U}$. По [предложению 14](#) п. б) получаем, что для любого $c \in \mathcal{E}_p$ верно $\text{card}([c]_{\mathcal{E}_p}) = \text{card}([\theta(c)]_{\mathcal{U}})$. Отсюда вытекает следующее:

- если $\varphi_e^p(\emptyset) \downarrow$, то мощность $\text{card}([\theta(a_e)]_{\mathcal{U}})$ конечна;
- если $\varphi_e^p(\emptyset) \uparrow$, то $\text{card}([\theta(a_e)]_{\mathcal{U}}) = \omega$.

Получаем, что зная θ , можно (равномерно по θ) вычислить скачок $J(p)$. Выводим (применяя [теорему 4](#)), что $\lim \equiv_{sW} J \leq_{sW} \text{ElEm}(\text{any}, \text{sat})$. [Предложение 17](#) и [теорема 11](#) доказаны. $\square$

Список литературы

- [1] S.G. Simpson, *Subsystems of second order arithmetic. Second edition.* Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2009.
DOI: <https://doi.org/10.1017/CBO9780511581007>
- [2] D.R. Hirschfeldt, *Slicing the truth: On the computable and reverse mathematics of combinatorial principles.* World Scientific Publishing Co., Hackensack, NJ, 2015.
DOI: <https://doi.org/10.1142/9208>
- [3] D.R. Hirschfeldt, R.A. Shore, T.A. Slaman, *The atomic model theorem and type omitting*, Trans. Amer. Math. Soc. **361** (11), 5805–5837 (2009).
DOI: <https://doi.org/10.1090/S0002-9947-09-04847-8>
- [4] D.R. Belanger, *Reverse mathematics of first-order theories with finitely many models*, J. Symb. Log. **79** (3), 955–984 (2014).
DOI: <https://doi.org/10.1017/jsl.2014.32>
- [5] D.R. Belanger, *WK₀ and induction principles in model theory*, Ann. Pure Appl. Logic **166** (7–8), 767–799 (2015).
DOI: <https://doi.org/10.1016/j.apal.2015.04.001>
- [6] P. Cholak, C. McCoy, *Effective prime uniqueness*, Proc. Amer. Math. Soc. **145** (12), 5363–5379 (2017).
DOI: <https://doi.org/10.1090/proc/13675>
- [7] D.R. Hirschfeldt, K. Lange, R.A. Shore, *Induction, bounding, weak combinatorial principles, and the homogeneous model theorem*, Mem. Amer. Math. Soc. **249** (1187), 2017.
DOI: <https://doi.org/10.1090/memo/1187>
- [8] K. Harris, *The reverse mathematics of saturated models*, preprint (2006).
- [9] V. Brattka, *Weihrauch complexity and the Hagen school of computable analysis*, arXiv:2203.06166 (2022).
DOI: <https://doi.org/10.48550/arXiv.2203.06166>
- [10] V. Brattka, G. Gherardi, A. Pauly, *Weihrauch complexity in computable analysis*, in: Handbook of Computability and Complexity in Analysis, Springer, Cham, 367–417 (2021).
DOI: https://doi.org/10.1007/978-3-030-59234-9_11
- [11] Г. Кейслер, Ч.Ч. Чэн, *Теория моделей*, Мир, М., 1977.
- [12] F.G. Dorais, D.D. Dzhafarov, J.L. Hirst, J.R. Mileti, P. Shafer, *On uniform relationships between combinatorial problems*, Trans. Amer. Math. Soc. **368** (2), 1321–1359 (2016).
DOI: <https://doi.org/10.1090/tran/6465>

- [13] Н.А. Баженов, М.И. Марчук, *Степени автоустойчивости относительно сильных конструктивизаций графов*, Сиб. матем. журн. **59** (4), 719–735 (2018).
DOI: <https://doi.org/10.17377/smzh.2018.59.401>
- [14] D. Marker, *Model theory: An introduction*, Springer, New York, 2002.
DOI: <https://doi.org/10.1007/b98860>
- [15] W. Hodges, *Model theory*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1993.
DOI: <https://doi.org/10.1017/CBO9780511551574>
- [16] J.G. Rosenstein, *Linear orderings*, Academic Press, New York, 1982.
URL: <https://www.sciencedirect.com/bookseries/pure-and-applied-mathematics/vol/98>
- [17] D. Cenzer, V. Harizanov, J.B. Remmel, Σ_1^0 and Π_1^0 equivalence structures, Ann. Pure Appl. Logic **162** (7), 490–503 (2011).
DOI: <https://doi.org/10.1016/j.apal.2011.01.002>

Николай Алексеевич Баженов

Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН,
пр. Акад. Коптюга, д. 4, г. Новосибирск, 630090, Россия,
e-mail: bazhenov@math.nsc.ru

Маргарита Игоревна Марчук

Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН,
пр. Акад. Коптюга, д. 4, г. Новосибирск, 630090, Россия,
e-mail: margaretmarchuk@gmail.com

Марта Фьори-Каронес

Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН,
пр. Акад. Коптюга, д. 4, г. Новосибирск, 630090, Россия,
e-mail: marta.fioricarones@outlook.it

Elementary embeddability with respect to Weihrauch reducibility

N.A. Bazhenov, M.I. Marchuk, M. Fiori-Carones

Abstract. We study the Weihrauch complexity for problems of finding an elementary embedding (within the framework of the classical model theory). We prove that the problem of finding an elementary embedding from a prime model $\mathcal{M}$ into an arbitrary model $\mathcal{N}$ (which is elementarily equivalent to $\mathcal{M}$) is strongly Weihrauch equivalent to the familiar problem lim (i. e., the problem of finding the limit of a sequence in Baire space). We show that the problem of finding an elementary embedding from an arbitrary model $\mathcal{M}$ into a countable saturated model $\mathcal{N}$ is also strongly Weihrauch equivalent to lim .

Keywords: Weihrauch reducibility, elementary embedding, prime model, countable saturated model.

DOI: 10.26907/2949-3919.2024.4.4-23

References

- [1] S.G. Simpson, *Subsystems of second order arithmetic. Second edition.* Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2009.
DOI: <https://doi.org/10.1017/CBO9780511581007>
- [2] D.R. Hirschfeldt, *Slicing the truth: On the computable and reverse mathematics of combinatorial principles.* World Scientific Publishing Co., Hackensack, NJ, 2015.
DOI: <https://doi.org/10.1142/9208>
- [3] D.R. Hirschfeldt, R.A. Shore, T.A. Slaman, *The atomic model theorem and type omitting*, Trans. Amer. Math. Soc. **361** (11), 5805–5837 (2009).
DOI: <https://doi.org/10.1090/S0002-9947-09-04847-8>
- [4] D.R. Belanger, *Reverse mathematics of first-order theories with finitely many models*, J. Symb. Log. **79** (3), 955–984 (2014).
DOI: <https://doi.org/10.1017/jsl.2014.32>
- [5] D.R. Belanger, *WKL₀ and induction principles in model theory*, Ann. Pure Appl. Logic **166** (7–8), 767–799 (2015).
DOI: <https://doi.org/10.1016/j.apal.2015.04.001>

Acknowledgements. The work of N.A. Bazhenov and M.I. Marchuk was carried out within the framework of the state contract of the Sobolev Institute of Mathematics (project no. FWNF-2022-0011).

- [6] P. Cholak, C. McCoy, *Effective prime uniqueness*, Proc. Amer. Math. Soc. **145** (12), 5363–5379 (2017).
DOI: <https://doi.org/10.1090/proc/13675>
- [7] D.R. Hirschfeldt, K. Lange, R.A. Shore, *Induction, bounding, weak combinatorial principles, and the homogeneous model theorem*, Mem. Amer. Math. Soc. **249** (1187), 2017.
DOI: <https://doi.org/10.1090/memo/1187>
- [8] K. Harris, *The reverse mathematics of saturated models*, preprint (2006).
- [9] V. Brattka, *Weihrauch complexity and the Hagen school of computable analysis*, arXiv:2203.06166 (2022).
DOI: <https://doi.org/10.48550/arXiv.2203.06166>
- [10] V. Brattka, G. Gherardi, A. Pauly, *Weihrauch complexity in computable analysis*, in: Handbook of Computability and Complexity in Analysis, Springer, Cham, 367–417 (2021).
DOI: https://doi.org/10.1007/978-3-030-59234-9_11
- [11] C.C. Chang, H.J. Keisler, *Model theory*, North-Holland, Amsterdam, 1973.
URL: <https://www.sciencedirect.com/bookseries/studies-in-logic-and-the-foundations-of-mathematics/vol/73/>
- [12] F.G. Dorais, D.D. Dzhafarov, J.L. Hirst, J.R. Mileti, P. Shafer, *On uniform relationships between combinatorial problems*, Trans. Amer. Math. Soc. **368** (2), 1321–1359 (2016).
DOI: <https://doi.org/10.1090/tran/6465>
- [13] N.A. Bazhenov, M.I. Marchuk, *Degrees of autostability relative to strong constructivizations of graphs*, Siberian Math. J. **59** (4), 565–577 (2018).
DOI: <https://doi.org/10.1134/S0037446618040018>
- [14] D. Marker, *Model theory: An introduction*, Springer, New York, 2002.
DOI: <https://doi.org/10.1007/b98860>
- [15] W. Hodges, *Model theory*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1993.
DOI: <https://doi.org/10.1017/CBO9780511551574>
- [16] J.G. Rosenstein, *Linear orderings*, Academic Press, New York, 1982.
URL: <https://www.sciencedirect.com/bookseries/pure-and-applied-mathematics/vol/98>
- [17] D. Cenzer, V. Harizanov, J.B. Remmel, Σ_1^0 and Π_1^0 equivalence structures, Ann. Pure Appl. Logic **162** (7), 490–503 (2011).
DOI: <https://doi.org/10.1016/j.apal.2011.01.002>

Nikolay Alekseyevich Bazhenov

Sobolev Institute of Mathematics,
4 Acad. Koptug Ave., Novosibirsk 630090, Russia,
e-mail: bazhenov@math.nsc.ru

Margarita Igorevna Marchuk

Sobolev Institute of Mathematics,
4 Acad. Koptug Ave., Novosibirsk 630090, Russia,
e-mail: margaretmarchuk@gmail.com

Marta Fiori-Carones

Sobolev Institute of Mathematics,
4 Acad. Koptug Ave., Novosibirsk 630090, Russia,
e-mail: marta.fioricarones@outlook.it