

О мультипликативно идемпотентных полукольцах с уравнительными свойствами

Е.М. Вечтомов

Аннотация. Изучается один класс полуколец, близких к дистрибутивным решеткам, именно: полукольца с коммутативным идемпотентным умножением, удовлетворяющие тождеству $x + 2xy = x$. Для таких полуколец исследуются уравнительные свойства (теоремы 7, 8, 10, предложение 12). Полученные результаты применены к дистрибутивным решеткам (предложения 15, 16, 17). Приведены примеры и поясняющие замечания.

Ключевые слова: мультипликативно идемпотентное полукольцо, дистрибутивная решетка, уравнительное условие, аннуляторное условие, уравнительное свойство.

DOI: 10.26907/2949-3919.2024.4.24-34

1. Предварительные сведения

Статья посвящена теории полуколец с дополнительными условиями; в ней продолжается изучение мультипликативно идемпотентных полуколец и дистрибутивных решеток, обладающих различными уравнительными свойствами [1–3].

Полукольцом называется алгебраическая структура $\langle S, +, \cdot \rangle$ с двумя бинарными операциями: коммутативно-ассоциативной операцией сложения $+$ и ассоциативной операцией умножения $\cdot$, дистрибутивной относительно сложения с обеих сторон. Полукольцо с коммутативным умножением называется *коммутативным*. Если полукольцо S имеет элемент, нейтральный по сложению и поглощающий по умножению, то такой элемент называется *нулем* полукольца S и обозначается 0 , а S называется *полукольцом с нулем*. Если S имеет нейтральный по умножению элемент, называемый *единицей* полукольца S и обозначаемый 1 , то S называется *полукольцом с единицей*. Полукольцо с тождеством идемпотентности $xx = x$ ($x + x = x$) называется *мультипликативно идемпотентным* (соответственно, *аддитивно идемпотентным*). Полукольцо называется *идемпотентным*, если оно мультипликативно идемпотентно и аддитивно идемпотентно. Мультипликативно идемпотентные кольца называются *булевыми*; они коммутативны и удовлетворяют тождеству $x + x = 0$.

Благодарности. Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда, проект №24-21-00117.

Для полуколец естественным образом определяются понятия подполукольца, идеала, конгруэнции, фактор-полукольца, прямого произведения полуколец (см. [4]). Теории мультипликативно идемпотентных полуколец посвящена книга [2].

Базовые сведения о решетках можно найти в монографиях [5, 6].

Хорошо известны два эквивалентных определения *решетки* – порядковое и алгебраическое [6, теорема 1, с. 20–21]. При порядковом подходе решетка определяется как упорядоченное множество $\langle L, \leq \rangle$, любые элементы a, b которого имеют точную верхнюю грань $\sup\{a, b\}$ и точную нижнюю грань $\inf\{a, b\}$. В алгебраическом смысле решеткой называется алгебраическая структура $\langle L, +, \cdot \rangle$ с двумя идемпотентными коммутативными ассоциативными операциями $+$ и $\cdot$, связанными законами *поглощения* $x + xy = x$ и $x(x + y) = x$. При этом для любых элементов a, b решетки L выполняются соотношения: $a + b = \sup\{a, b\}$, $ab = \inf\{a, b\}$ и $a \leq b \Leftrightarrow a + b = b$, равносильно, $ab = a$. Решетки L удобно рассматривать как алгебраические системы $\langle L, +, \cdot, \leq \rangle$.

Решетка с тождеством $x(y + z) = xy + xz$, равносильно, с тождеством $x + yz = (x + y)(x + z)$, называется *дистрибутивной*. Легко видеть, что дистрибутивные решетки суть в точности коммутативные мультипликативно идемпотентные полукольца, удовлетворяющие тождеству поглощения $x + xy = x$.

Дистрибутивные решетки и булевы кольца принадлежат классу коммутативных мультипликативно идемпотентных полуколец, удовлетворяющих тождеству $x + 2xy = x$.

Замечание 1. Коммутативные мультипликативно идемпотентные полукольца с тождеством $x + 2xy = x$ рассматривались в работах [7, р. 119], [2, с. 160–161]. Они образуют многообразие полуколец, порожденное двухэлементной цепью и двухэлементным полем. Такие полукольца являются подпрямыми произведениями булева кольца и дистрибутивной решетки.

Непустое подмножество F полукольца S назовем *коидеалом* в S , если $ab \in F$ и $a + x \in F$ для любых элементов $a, b \in F$ и $x \in S$. Ясно, что идеалы и коидеалы любого полукольца являются его подполукольцами.

Пусть L – произвольная решетка. Непустое подмножество F решетки L называется ее *фильтром*, если соотношения $a, b \in F$ и $a \leq x \in L$ влекут $ab \in F$ и $x \in F$ (заметим, что $a \leq x \Leftrightarrow a + x = x$). Коидеалы и фильтры решетки L совпадают. Подрешетка A решетки L называется *выпуклой*, если для любых элементов $a \leq b$ из A весь интервал $[a, b] = \{x \in L : a \leq x \leq b\}$ лежит в A . Выпуклые подрешетки решетки L – это в точности непустые пересечения некоторых идеала и фильтра в L [6, лемма 6, с. 38]. Решетка с нулем 0 и ненулевой единицей 1 называется *ограниченной*.

Неодноэлементная ограниченная дистрибутивная решетка L называется *булевой*, если каждый ее элемент a имеет дополнение $a' \in L$ (оно единственно): $a + a' = 1$ и $aa' = 0$. Дистрибутивная решетка с нулем называется *обобщенной булевой решеткой*, если она обладает относительными дополнениями. Напомним, что *относительным дополнением* элемента b до элемента a в решетке L с нулем 0 называется такой элемент $a \setminus b \in L$, что

$(a \setminus b)b = 0$ и $(a \setminus b) + b = a + b$. В дистрибутивных решетках с нулем имеющиеся относительные дополнения единственны. Легко видеть, что обобщенные булевы решетки – это в точности дистрибутивные решетки L с нулем, ненулевые главные идеалы aL которых являются булевыми решетками с единицами a . С другой стороны, любая булева решетка L будет неоднородной обобщенной булевой решеткой, в которой $a \setminus b = ab'$ для любых $a, b \in L$.

Для произвольных элементов a, c полукольца S обозначим через $\text{Eq}(a, c)$ их (левый) *уравнитель* $\{x \in S : xa = xc\}$, а через $\text{Seq}(a, c)$ – их *коуравнитель* $\{x \in S : x + a = x + c\}$. Скажем, что полукольцо S удовлетворяет *уравнительному условию*, соответственно, *коуравнительному условию*, если

$$\forall a, b, c \in S \quad (\text{Eq}(a, c) = \text{Eq}(b, c) \Rightarrow a = b),$$

соответственно, $\forall a, b, c \in S \quad (\text{Seq}(a, c) = \text{Seq}(b, c) \Rightarrow a = b)$.

Для элемента a полукольца S с нулем 0 (с единицей 1) определим (левый) *аннулятор* $\text{Ann } a = \{x \in S : xa = 0\}$ (соответственно, *коаннулятор* $\text{Can } a = \{x \in S : x + a = 1\}$). Полукольцо S с 0 (с единицей 1) называется полукольцом с *аннуляторным условием* (соответственно, с *коаннуляторным условием*), если различные его элементы имеют различные аннуляторы (различные коаннуляторы).

Отметим, что мультипликативно идемпотентные полукольца и дистрибутивные решетки, удовлетворяющие аннуляторному условию, рассматривались в статьях [1, 3].

Замечание 2. Если S – полукольцо с нулем 0 , то $\text{Eq}(a, 0) = \text{Ann } a$ для любого $a \in S$. Пусть теперь S – полукольцо с единицей 1 . Тогда равенство $\text{Seq}(a, 1) = \text{Can } a$ при фиксированном элементе $a \in S$ эквивалентно формуле

$$\forall x \in S \quad (x + a = x + 1 \Leftrightarrow x + a = 1),$$

которая, в свою очередь, эквивалентна формуле

$$\forall x \in S \quad (x + a = 1 \Rightarrow x + 1 = 1).$$

Отметим, что коммутативные мультипликативно идемпотентные полукольца с тождеством $x + 1 = 1$ (влекущим закон поглощения $xy + y = y$) и коммутативные идемпотентные полукольца с тождеством $x + 2xy = x$ будут дистрибутивными решетками.

Для произвольного полукольца $\langle S, +, \cdot \rangle$ обозначим через $L(S)$ алгебраическую структуру $\langle S, \vee, \cdot \rangle$, где $a \vee b = a + ab + b$ для любых $a, b \in S$.

Нам понадобятся следующие утверждения.

Лемма 3 ([3, свойства 1 и 2 предложения 3]). *Мультипликативно идемпотентные полукольца с аннуляторным условием коммутативны и удовлетворяют тождеству $x + 2xy = x$.*

Лемма 4. Для того чтобы коммутативное мультипликативно идемпотентное полукольцо S удовлетворяло тождеству $x + 2xy = x$, необходимо и достаточно, чтобы алгебраическая структура $L(S)$ была дистрибутивной решеткой.

Доказательство. Необходимость. Пусть дано коммутативное мультипликативно идемпотентное полукольцо S , удовлетворяющее тождеству $x + 2xy = x$. Его мультипликативная полугруппа – полурешетка $\langle S, \cdot \rangle$ – определяет порядок $\leq$ на S по правилу: $a \leq b \Leftrightarrow ab = a$ для любых $a, b \in S$, причем, $ab = \inf\{a, b\}$. Покажем, что $a \vee b = \sup\{a, b\}$ для любых элементов a, b упорядоченного множества $\langle S, \leq \rangle$. Поскольку $a(a \vee b) = a(a + ab + b) = a + 2ab = a$, то $a \leq a \vee b$. Аналогично, $b \leq a \vee b$. Значит, $a \vee b$ – верхняя грань множества $\{a, b\}$. Возьмем произвольную верхнюю грань $c \in S$ множества $\{a, b\}$, т. е. $ac = a$ и $bc = b$. Тогда

$$(a \vee b)c = (a + ab + b)c = ac + abc + bc = a + ab + b = a \vee b,$$

т. е. $a \vee b \leq c$. Следовательно, $a \vee b = \sup\{a, b\}$. Получаем решетку $\langle S, \leq \rangle$ в порядковом смысле или, равносильно, решетку $\langle S, \vee, \cdot \rangle$ как алгебраическую структуру. Для любых $a, b, c \in S$ имеем $(a \vee b)c = (a + ab + b)c = ac + (ac)(bc) + bc = (ac) \vee (bc)$, что доказывает дистрибутивность решетки $L(S) = \langle S, \vee, \cdot \rangle$.

Достаточность. Если $L(S)$ – дистрибутивная решетка, то для любых элементов $a, b \in S$ имеем $a = a(a \vee b) = a(a + ab + b) = a + ab + ab = a + 2ab$. $\square$

Замечание 5. Для произвольного булева кольца S дистрибутивная решетка $L(S)$ является обобщенной булевой решеткой, в которой $a \setminus b = a + ab$ для всех $a, b \in S$. Обратно, если $L = \langle L, \vee, \cdot \rangle$ – обобщенная булева решетка, то $S = \langle L, +, \cdot \rangle$ будет булевым кольцом при $a + b = (a \setminus b) \vee (b \setminus a)$ для всех $a, b \in L$; при этом $L(S) = L$. Получаем естественное взаимно однозначное соответствие между классом булевых колец (булевых колец с ненулевой единицей) и классом обобщенных булевых решеток (булевых решеток). Подробности в [6, с. 109, теорема 9].

Пример 6. Всякий коидеал F полукольца S является фильтром решетки $L(S)$. Действительно, пусть F – коидеал полукольца S . Если $a \in F$, $x \in L(S) = S$ и $a \leq x$, то $x = a \vee x = a + (ax + x) \in F$. Значит, F – фильтр решетки $L(S)$.

Обратное утверждение неверно. Возьмем булево кольцо S с $1 \neq 0$. Тогда $L(S)$ будет булевой решеткой. Пусть F – собственный фильтр решетки $L(S)$, например, $F = \{1\}$. Если $a \in F$, то $a + a = 0 \notin F$, стало быть, F не является коидеалом полукольца S .

2. Полукольца с уравнительным условием

Докажем несколько утверждений о свойствах мультипликативно идемпотентных полуколец с уравнительным условием.

Теорема 7. Для того чтобы мультипликативно идемпотентное полукольцо S с нулем 0 удовлетворяло уравнительному условию, необходимо и достаточно, чтобы S удовлетворяло аннуляторному условию.

Доказательство. Необходимость. Возьмем мультипликативно идемпотентное полукольцо S с нулем 0 , обладающее уравнительным свойством. Имеем $\text{Eq}(a, 0) = \text{Ann } a$ для любого элемента $a \in S$. Поэтому уравнительное свойство полукольца S при $c = 0$ влечет аннуляторное условие.

Достаточность. Рассмотрим мультипликативно идемпотентное полукольцо S с аннуляторным условием. Полукольцо S коммутативно по лемме 3. Пусть $\text{Eq}(a, c) = \text{Eq}(b, c)$ для некоторых элементов $a, b, c \in S$. Имеем $ac \in \text{Eq}(a, c)$ и $bc \in \text{Eq}(b, c)$. Поэтому $ac = abc = bc$. Предположим от противного, что $a \neq b$. Тогда по условию $\text{Ann } a \neq \text{Ann } b$, скажем, $ax = 0$, но $bx \neq 0$. Для элемента $ac + bx$ получаем

$$a(ac + bx) = ac + bax = ac = ac + axc = ac + bxc = c(ac + bx),$$

т.е. $ac + bx \in \text{Eq}(a, c)$. Но $b(ac + bx) = ac + bx \neq ac$, поскольку равенство $ac + bx = ac$ влечет $acx + bx = acx$ и $bx = 0$, что невозможно. Поэтому $ac + bx \notin \text{Eq}(b, c)$. Следовательно, $\text{Eq}(a, c) \neq \text{Eq}(b, c)$. Получили противоречие. $\square$

В теореме 7 вместо (левого) уравнительного условия можно взять правое или двустороннее уравнительное условие.

Теорема 8. *Любой идеал коммутативного мультипликативно идемпотентного полукольца S с тождеством $x + 2xu = x$, удовлетворяющего уравнительному условию, является полукольцом с уравнительным условием.*

Доказательство. Пусть полукольцо S удовлетворяет условиям теоремы и J – идеал в S . Возьмем элементы $a, b, c \in J$, для которых $\text{Eq}(a, c) = \text{Eq}(b, c)$ в полукольце J . Покажем, что $\text{Eq}(a, c) = \text{Eq}(b, c)$ в полукольце S . Тогда получим $a = b$, что и требуется доказать. Допустим, что $xa = xc$ для некоторого элемента $x \in S$. Рассмотрим элемент $a \vee b \vee c$, принадлежащий – по леммам 3 и 4 – идеалу J . Имеем $x(a \vee b \vee c) \in J$ и $(a \vee b \vee c)a = a$, $(a \vee b \vee c)b = b$, $(a \vee b \vee c)c = c$. Поэтому $x(a \vee b \vee c) \in \text{Eq}(a, c)$, значит, $x(a \vee b \vee c) \in \text{Eq}(b, c)$ в J . Откуда $xb = x(a \vee b \vee c)b = x(a \vee b \vee c)c = xc$. Стало быть, $\text{Eq}(a, c) \subseteq \text{Eq}(b, c)$ в полукольце S . В силу равноправности элементов a и b получаем также включение $\text{Eq}(b, c) \subseteq \text{Eq}(a, c)$ в S . Тем самым, $\text{Eq}(a, c) = \text{Eq}(b, c)$ в S , и теорема доказана. $\square$

Из теорем 7 и 8 вытекает

Следствие 9 ([3, свойство 6 предложения 3]). *Все идеалы мультипликативно идемпотентного полукольца с аннуляторным условием будут полукольцами с аннуляторным условием.*

Теорема 10. *Для произвольного коммутативного мультипликативно идемпотентного полукольца S с тождеством $x + 2xu = x$ равносильны следующие утверждения:*

- 1) полукольцо S удовлетворяет уравнительному условию;
- 2) все идеалы полукольца S удовлетворяют уравнительному условию;

- 3) любой коидеал с нулем полукольца S является полукольцом с аннуляторным условием;
- 4) если пересечение идеала и коидеала с нулем в полукольце S не пусто, то оно будет полукольцом с аннуляторным условием.

Доказательство. 1) $\Rightarrow$ 2) по [теореме 8](#).

2) $\Rightarrow$ 3). Предположим, что полукольцо S удовлетворяет уравнительному условию и F – его коидеал с нулем θ . Возьмем такие элементы $a, b \in F$, что $\text{Ann } a = \text{Eq}(a, \theta) = \text{Eq}(b, \theta) = \text{Ann } b$ в полукольце F . Покажем, что $\text{Eq}(a, \theta) = \text{Eq}(b, \theta)$ в самом полукольце S . Тогда по условию $a = b$. Значит, F будет полукольцом с аннуляторным условием. Пусть $x \in S$ и $xa = x\theta$. Имеем $x + \theta \in F$ и $(x + \theta)a = xa + \theta a = x\theta + \theta = (x + \theta)\theta$. Поэтому $(x + \theta)b = (x + \theta)\theta$. Откуда $xb + \theta = \theta$ и $xb + xb\theta = xb\theta = x\theta$. Так как $\theta + \theta = \theta$, то $xb\theta = 2xb\theta$. Значит, $xb = xb + 2xb\theta = xb + xb\theta = x\theta$. В полукольце S имеем $\text{Eq}(a, \theta) \subseteq \text{Eq}(b, \theta)$. Аналогично, $\text{Eq}(a, \theta) \supseteq \text{Eq}(b, \theta)$. Тем самым, $\text{Eq}(a, \theta) = \text{Eq}(b, \theta)$ в самом полукольце S .

3) $\Rightarrow$ 4) по [теореме 8](#).

4) $\Rightarrow$ 1). В силу 4) в полукольце S каждый коидеал с нулем является полукольцом с аннуляторным условием. Возьмем в S произвольные элементы a, b, c , для которых $\text{Eq}(a, c) = \text{Eq}(b, c)$. Требуется доказать, что $a = b$. Положим $\theta = 2abc$ и рассмотрим множество $F = \{x \in S : x\theta = \theta\}$. Имеем $a, b, c \in F$ и $\theta + \theta = 4abc = 2abc = \theta$. Пусть $x, y \in F$ и $z \in S$. Тогда $(xy)\theta = \theta$ и $(x + z)\theta = x\theta + z\theta = \theta + 2z\theta = \theta$. Значит, F – коидеал полукольца S . Кроме того, $x\theta = \theta$ и $x + \theta = x + 2x\theta = x$, т.е. θ служит нулем полукольца F . По условию F будет полукольцом с аннуляторным условием. Равенство $\text{Eq}(a, c) = \text{Eq}(b, c)$ выполняется и в F . Тогда $a = b$ в силу [теоремы 7](#). $\square$

Замечание 11. Для краткости, рассматриваемые уравнительное, коуравнительное, аннуляторное и коаннуляторное условия будем называть просто *уравнительными свойствами*.

Легко видеть, что имеет место

Предложение 12. *Справедливы следующие утверждения:*

- 1) *прямое произведение любого непустого семейства полуколец с данным уравнительным свойством удовлетворяет этому уравнительному свойству;*
- 2) *если прямое произведение непустого семейства полуколец с нулем удовлетворяет некоторому уравнительному свойству, то все сомножители также удовлетворяют этому уравнительному свойству;*
- 3) *прямая сумма непустого семейства полуколец с нулем будет полукольцом с уравнительным свойством тогда и только тогда, когда все ее слагаемые являются полукольцами с этим же уравнительным свойством.*

Пример 13. Произвольное кольцо R удовлетворяет коуравнительному условию. В самом деле, если $\text{Seq}(a, c) = \text{Seq}(b, c)$ для некоторых элементов $a, b, c \in R$, то выполнение равенств $x + a = x + c$ и $x + b = x + c$ в кольце R влечет $a = c = b$. В кольцах с единицей выполняется и коаннуляторное условие. Однако, кольца с аннуляторным условием

суть в точности булевы кольца [1, теорема 1]. Поэтому любое небулево кольцо, будучи полукольцом с коуравнительным условием, не удовлетворяет уравнительному условию по [теореме 7](#). Булевы же кольца с единицей обладают всеми четырьмя рассматриваемыми уравнительными свойствами, т. е. удовлетворяют уравнительному, коуравнительному, аннуляторному и коаннуляторному условиям.

3. Случай дистрибутивных решеток

Рассмотрим применения теорем [7](#), [8](#), [10](#) к дистрибутивным решеткам L , для которых условия этих теорем очевидным образом справедливы.

Замечание 14. Дистрибутивная решетка L обладает некоторым уравнительным свойством тогда и только тогда, когда двойственная ей дистрибутивная решетка L' обладает двойственным уравнительным свойством.

Поэтому из [теоремы 7](#) вытекает

Предложение 15. Дистрибутивная решетка с единицей удовлетворяет коуравнительному условию тогда и только тогда, когда она удовлетворяет коаннуляторному условию.

Из [теоремы 8](#) в силу [замечания 14](#) следует

Предложение 16. Любой фильтр дистрибутивной решетки с коуравнительным условием (с коаннуляторным условием) является дистрибутивной решеткой с коуравнительным условием (соответственно, с коаннуляторным условием).

Из [теоремы 10](#) и [замечания 14](#) вытекает

Предложение 17. Для произвольной дистрибутивной решетки L эквивалентны следующие утверждения:

- 1) L удовлетворяет коуравнительному условию;
- 2) все фильтры в L удовлетворяют коуравнительному условию;
- 3) любой главный идеал решетки L удовлетворяет коаннуляторному условию;
- 4) любая выпуклая подрешетка решетки L , обладающая наибольшим элементом, удовлетворяет коаннуляторному условию.

Приведем ряд примеров дистрибутивных решеток с теми или иными уравнительными свойствами.

Пример 18. Всякая обобщенная булева решетка L удовлетворяет уравнительному и коуравнительному условиям. Возьмем в L элементы $a \neq b$. Тогда $a \setminus b \neq 0$ или $b \setminus a \neq 0$, ибо иначе $b = (a \setminus b) + b = a + b = (b \setminus a) + a = a$. Скажем, $a \setminus b \neq 0$. Имеем $a \setminus b \in \text{Ann } b$, но $a \setminus b \notin \text{Ann } a$, так как

$$(a \setminus b)a = (a \setminus b)a + (a \setminus b)b = (a \setminus b)(a + b) = (a \setminus b)(a \setminus b + b) = a \setminus b \neq 0.$$

Значит, L удовлетворяет аннуляторному условию. По [теореме 7](#) L удовлетворяет и уравнительному условию. Каждый главный идеал J решетки L является булевой решеткой (как подрешетка в L), которая самодвойственна (взятие дополнения устанавливает изоморфизм между булевой решеткой J и двойственной к ней булевой решеткой J'). По уже доказанному булева решетка J' удовлетворяет уравнительному условию, стало быть, решетка $J = (J')'$ удовлетворяет коуравнительному условию. По [предложению 17](#) сама решетка L также удовлетворяет коуравнительному условию.

Пример 19. Зафиксируем бесконечное множество A и возьмем в нем бесконечное подмножество B так, чтобы множество $A \setminus B$ было бесконечным. Образует решетку множеств

$$L = \{X \subseteq A : X \text{ конечно или } A \setminus X \text{ конечно или } X = (B \setminus Y) \cup Z \text{ для конечных } Y, Z \subseteq A\}.$$

Очевидно, L замкнуто относительно бинарных операций $\cup$ и $\cap$ множеств. Как легко видеть, получаем небулеву ограниченную дистрибутивную решетку L с аннуляторным и коаннуляторным условиями. По [теореме 7](#) и [предложению 15](#) решетка L удовлетворяет уравнительному и коуравнительному условиям.

Пример 20. Возьмем бесконечное множество A . И пусть L есть решетка множеств, состоящая из конечных подмножеств в A и самого множества A . Получаем ограниченную дистрибутивную решетку L с аннуляторным условием, не удовлетворяющую коаннуляторному условию. По [теореме 7](#) решетка L удовлетворяет уравнительному условию. По [предложению 15](#) решетка L не удовлетворяет коуравнительному условию. Отметим, что ее подрешетка (наибольший идеал) $L \setminus \{A\}$ является обобщенной булевой решеткой. Двойственная решетка L' удовлетворяет коаннуляторному и коуравнительному условиям, но не удовлетворяет ни аннуляторному, ни уравнительному условию.

Пример 21. Всякая неодноэлементная конечная небулева дистрибутивная решетка L не удовлетворяют ни аннуляторному, ни коаннуляторному условию. Действительно, любая неодноэлементная конечная дистрибутивная решетка с аннуляторным условием булева [[1](#), замечание 2]. Поэтому в силу [замечания 14](#) любая неодноэлементная конечная дистрибутивная решетка с коаннуляторным условием также будет булевой. Следовательно, по [предложениям 15](#) и [17](#) решетка L не удовлетворяет ни уравнительному условию, ни коуравнительному условию.

Замечание 22. Руководствуясь [предложением 12](#) и примерами [13](#), [18](#), [19](#), [20](#) и [21](#) мы можем получить примеры коммутативных мультипликативно идемпотентных полуколец S с тождеством $x + 2xy = x$, не являющихся дистрибутивными решетками, обладающих наперед заданными уравнительными свойствами. Пусть R – неодноэлементное булево кольцо с единицей, L – ограниченная дистрибутивная решетка из примеров [18](#), [19](#), [20](#) или [21](#), и пусть $S = R \times L$ – их прямое произведение. В силу [предложения 12](#) и [примера 13](#) полукольцо S обладает некоторым уравнительным свойством тогда и только тогда, когда этим свойством обладает дистрибутивная решетка L .

Список литературы

- [1] Е.М. Вечтомов, *Аннуляторные характеристики булевых колец и булевых решеток*, Матем. заметки **53** (2), 15–24 (1993).
URL: <https://www.mathnet.ru/rus/mzm3943>
- [2] Е.М. Вечтомов, А.А. Петров, *Функциональная алгебра и полукольца. Полукольца с идемпотентным умножением*, Лань, Санкт-Петербург, 2023.
URL: <https://e.lanbook.com/book/302885>
- [3] Е.М. Вечтомов, А.А. Петров, *Мультипликативно идемпотентные полукольца с аннуляторным условием*, Изв. вузов. Матем. (3), 29–40 (2023).
DOI: <https://doi.org/10.26907/0021-3446-2023-3-29-40>
- [4] J.S. Golan, *Semirings and their applications*, Kluwer Academic Publ., Dordrecht-Boston-London, 1999.
DOI: <https://doi.org/10.1007/978-94-015-9333-5>
- [5] Г. Биркгоф, *Теория решеток*, Наука, М., 1984.
- [6] Г. Гретцер, *Общая теория решеток*, Мир, М., 1982.
- [7] S. Ghosh, *A characterization of semirings which are subdirect products of a distributive lattice and a ring*, Semigroup Forum **59** (1), 106–120 (1999).
DOI: <https://doi.org/10.1007/PL00005999>

Евгений Михайлович Вечтомов

Вятский государственный университет,
ул. Московская, д. 36, г. Киров, 610000, Россия,
e-mail: vecht@mail.ru

About multiplicatively idempotent semirings with annihilator properties

E.M. Vechtomov

Abstract. We study one class of semirings close to distributive lattices, namely: semirings with commutative idempotent multiplication, satisfying the identity $x+2xy = x$. For such semirings, the equalizing properties are investigated (Theorems 7, 8, 10, Proposition 12). The results obtained can be applied to distributive lattices (Propositions 15, 16, 17). The work provides examples and explanatory notes.

Keywords: multiplicatively idempotent semiring, distributive lattice, equalizing condition, annihilator condition, equalizing property.

DOI: 10.26907/2949-3919.2024.4.24-34

References

- [1] E.M. Vechtomov, *Annihilator characterizations of boolean rings and boolean lattices*, Math. Notes **53** (2), 124–129 (1993).
DOI: <https://doi.org/10.1007/BF01208314>
- [2] E.M. Vechtomov, A.A. Petrov, *Functional algebra and semirings. Semirings with idempotent multiplication*, Lan, Saint Petersburg, 2023 [in Russian].
URL: [URL:https://e.lanbook.com/book/302885](https://e.lanbook.com/book/302885)
- [3] E.M. Vechtomov, A.A. Petrov, *Multiplicatively idempotent semirings with annihilator condition*, Russ. Math. **67** (3), 23–31 (2023).
DOI: <https://doi.org/10.3103/S1066369X23030064>
- [4] J.S. Golan, *Semirings and their applications*, Kluwer Academic Publ., Dordrecht-Boston-London, 1999.
DOI: <https://doi.org/10.1007/978-94-015-9333-5>
- [5] G. Birkhoff, *Lattice theory*, AMS Colloq. Publ., Providence, RI, 1979.
- [6] G. Grätzer, *General lattice theory*, Birkhäuser Verlag, Basel, 2003.

Acknowledgements. The work is supported by the Russian Science Foundation (grant no. 24-21-00117).

Received: 22 July 2024. Accepted: 02 September 2024. Published: 26 December 2024.

- [7] S. Ghosh, *A characterization of semirings which are subdirect products of a distributive lattice and a ring*, Semigroup Forum **59** (1), 106–120 (1999).

DOI: <https://doi.org/10.1007/PL00005999>

Evgenii Mikhailovich Vechtomov

Vyatka State University,

36 Moskovskay str., Kirov 610000, Russia,

e-mail: vecht@mail.ru