

Отделимые нумерации универсальных алгебр

Н.Х. Касымов

Аннотация. В обзоре излагаются основы теории отделимых нумераций универсальных алгебр.

Ключевые слова: отделимо нумерованная алгебра, эффективно отделимая нумерация, негативная и эффективно отделимая аппроксимируемость, трансляционно полная и предполная алгебра, топологическая нумерованная алгебра, подпрямая неразложимость, артинова решетка конгруэнций, алгебраические и логические спецификации структуры данных.

DOI: 10.26907/2949-3919.2024.4.66-102

Введение

Теория нумерованных алгебр, систематическое изучение которой восходит к обзорной статье А.И. Мальцева [1], является бурно развивающейся областью современной математической логики, имеющей многочисленные пересечения с другими разделами естествознания, в частности – с теоретической информатикой. Ввиду обширности класса всех нумерованных систем представляется целесообразным изучение нумерованных систем при наложении алгоритмических ограничений различных типов на нумерационные эквивалентности (ядра) их нумераций. В рамках этого направления в первую очередь, нужно выделить вычислимые, т. е. алгоритмически разрешимые нумерации (см. [2–4]) с вычислимыми ядрами, которые поддерживаются вычислимыми представляющими функциями и отношениями, а ослабление требований к алгоритмической сложности ядер нумераций (при рассмотрении арифметических и других иерархий в качестве допустимых для сложности ядер нумераций) является общепринятым способом расширения изучаемых классов нумерованных алгебр (см. [5, 6]).

Другой подход заключается в игнорировании сложности нумерационной эквивалентности и ограничении рассматриваемых классов нумераций систем алгоритмическими условиями типа отделимости. Идеи применения отделимости в теории вычислимости, восходящие к В.А. Успенскому [7, 8] и А. Нероуду [9], получили дальнейшее и глубокое развитие в работах А.И. Мальцева [10] и Ю.Л. Ершова [11].

Благодарности. Работа выполнена в рамках реализации Программы развития Научно-образовательного математического центра Приволжского федерального округа (соглашение № 075-02-2024-1438).

Классическим и простейшим алгоритмическим условием отделимости является вычислимая отделимость. Многие естественные и важные типы нумерованных универсальных алгебр оказались вычислимо отделимыми, в том числе негативные алгебры, стандартно нумерованные конечно порожденные и финитно аппроксимируемые алгебры, позитивные алгебры со счетными решетками конгруэнций и т. д. (см. обзор [12]). Различные аспекты негативных нумераций и негативных алгебр исследовались Ю.Л. Ершовым [11], А.И. Мальцевым [13], А.С. Морозовым [14], Н.Г. Хисамиевым [5], С.П. Одинцовым и В.Л. Селивановым [6]. Классические результаты о позитивных универсальных алгебрах со счетными решетками конгруэнций можно найти у А.И. Мальцева [1], Ю.Л. Ершова [2], В. Баура [15, 16]. Проблематика исследования стандартных нумераций конечно порожденных алгебр, заложенная А.И. Мальцевым в [1], обосновывается В.А. Успенским и А.Л. Семеновым в [17], а классические образцы использования финитной аппроксимируемости для решения алгоритмических задач алгебры представлены у А.И. Мальцева в [1] и Д. Мак-Кинси в [18].

На базе и в рамках теории вычислимо отделимо представимых универсальных алгебр решается ряд вопросов, возникших в связи с работами А.И. Мальцева [1], В. Баура [15], Д. Бергстры и Д. Такера [19].

В сложных самоорганизующихся системах, по-видимому, важное значение имеет проблема распознавания. Если система задана своим алгоритмическим представлением, то с математической точки зрения это означает, что любая пара различных элементов отделяется алгоритмически определяемыми окрестностями. Важнейшими типами отделимых нумераций алгебр являются эффективно отделимые, т. е. такие, для которых существуют вычислимые (в смысле [11]) семейства отделяющих вычислимо перечислимых множеств. Основания теории отделимо нумерованных множеств и связи между отделимостью и эффективной отделимостью были введены, развиты и исследованы Ю.Л. Ершовым (см. [11]).

Находясь в рамках парадигмы о существовании у нумерованной алгебры эффективной системы алгоритмически порождаемых окрестностей, достаточных для распознавания отделимости любой пары ее элементов, нужно признать, что именно исследовавшееся Ю.Л. Ершовым в [11] наиболее общее понятие отделимой нумерации в случае нумераций универсальных алгебр можно трактовать как одно из математических уточнений понятия сложной развивающейся системы, интенционально заданной семейством представляющих вычислимых функций вместе с ядрами гомоморфизмов (нумераций) и допускающей эффективное распознавание различия составляющих ее элементов путем отделения их подходящими алгоритмически определяемыми окрестностями.

Результаты настоящего обзора в основном базируются на следующих фактах:

Нумерованная алгебра вычислимо отделима (отделима) если и только если она аппроксимируется негативными (эффективно отделимыми) алгебрами ([12, 20, 21]).

Целью настоящего обзора является изложение основ теории отделимо нумерованных универсальных алгебр и демонстрация некоторых приложений этой теории как в математической логике, так и в теоретической информатике.

Автор выражает глубокую благодарность Ю.Л. Ершову, С.С. Гончарову, А.С. Морозову и Б.М. Хусаинову, многочисленные и плодотворные обсуждения с которыми способствовали синтезу теории отделимых нумераций и универсальной алгебры.

1. Нумерованные алгебры

Определение 1. Алгоритмическим представлением счетной универсальной алгебры $\mathfrak{A} = \langle A; \Sigma \rangle$ эффективной сигнатуры Σ называется всякое такое отображение ν множества натуральных чисел ω на основное множество A алгебры $\mathfrak{A}$, для которого существует эффективное семейство F_Σ вычислимых функций, представляющих Σ -операции алгебры $\mathfrak{A}$ в нумерации ν , т.е. всякая операция $\sigma \in \Sigma$ представляется соответствующей ей такой вычислимой функцией $f_\sigma \in F_\Sigma$, что $\forall \bar{x} (\sigma \nu(\bar{x}) = \nu f_\sigma(\bar{x}))$.

Определение 2. Если ν – алгоритмическое представление алгебры $\mathfrak{A}$, то пара $(\mathfrak{A}, \nu)$ называется нумерованной алгеброй.

Далее под гомоморфизмами нумерованных алгебр мы понимаем их морфизмы, т.е. мы работаем в категории нумерованных алгебр с морфизмами в качестве эффективных на номерах гомоморфизмов.

Определение 3. Гомоморфизм $\varphi : \mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{B}$ называется вычислимым гомоморфизмом нумерованных моделей $(\mathfrak{A}, \mu) \rightarrow (\mathfrak{B}, \nu)$, если существует такая вычислимая функция h , что $\varphi \mu = \nu h$.

Ядром представления ν нумерованной алгебры $(\mathfrak{A}, \nu)$ будем называть эквивалентность $\{\langle x, y \rangle \mid \nu x = \nu y\}$. Если ν – представление, то его ядро будем обозначать через $\ker(\nu)$.

Пусть η – фиксированная эквивалентность на ω и $\mathfrak{A}$ – алгебра (не обязательно эффективной сигнатуры), обладающая представлением с ядром равным η . Тогда алгебру $\mathfrak{A}$ будем называть представимой над η (или η -алгеброй).

Для фиксированной алгебры классической является проблема изучения различных ее алгоритмических представлений и соотношений между ними, в частности, проблема существования хороших представлений (например, вычислимых) и их числа (в том числе единственности, с точностью до вычислимого изоморфизма).

С другой стороны, можно фиксировать ядро представления и изучать общие свойства алгебр, обладающих представлениями с данным ядром. Этот подход представляется целесообразным с точки зрения теории алгоритмических представлений алгебраических систем в рамках теоретической информатики (см. [12, 22]).

Изучению алгоритмических свойств эквивалентностей в настоящее время уделяется большое внимание. Можно отметить работы многих авторов, библиографию по этим вопросам можно найти в списках литературы к работам [23–25].

Представимость универсальной алгебры $\mathfrak{A}$ над эквивалентностью η равносильна существованию такой вычислимой алгебры $\langle \omega; F \rangle$, где F – подходящее семейство вычислимых функций, что η является конгруэнцией алгебры $\langle \omega; F \rangle$ и $\mathfrak{A}$ изоморфна фактор-алгебре

$\langle \omega/\eta; F \rangle$, т. е. фактически нумерация есть гомоморфизм из некоторой вычислимой алгебры на абстрактную.

Определение 4. Характеристической трансверсалью эквивалентности η на ω (обозначаемой через $\text{tr}(\eta)$) называется множество всех натуральных чисел, являющихся наименьшими в содержащих их смежных η -классах, т. е. $\text{tr}(\eta) = \{x \mid \forall y(x = y \pmod{\eta} \Rightarrow x \leq y)\}$. Характеристической трансверсалью нумерации ν называется характеристическая трансверсаль ее ядра, т. е. $\text{tr}(\ker(\nu))$.

Эквивалентность с бесконечным (конечным) числом смежных классов будем называть бесконечной (соответственно, конечной).

Если η – эквивалентность на ω , то множество $\alpha \subseteq \omega$ называется η -замкнутым, если $x \in \alpha \wedge x = y \pmod{\eta} \Rightarrow y \in \alpha$.

2. Вычислимо отделимые и отделимые алгебры

2.1. ХАРАКТЕРИЗАЦИИ ВЫЧИСЛИМО ОТДЕЛИМЫХ И ОТДЕЛИМЫХ АЛГЕБР

Определение 5. Подмножество $A_0 \subseteq A$ основного множества нумерованной алгебры $(\mathfrak{A}, \nu)$ называется ν -вычислимым (ν -перечислимым, ν -негативным и т. д.), если таковым является множество $\nu^{-1}A_0$. Множество $\alpha \subseteq \omega$ называется ν -замкнутым, если оно замкнуто относительно ядра нумерации ν , т. е. эквивалентности $\ker(\nu) = \{\langle x, y \rangle \mid \nu x = \nu y\}$.

Если из контекста будет ясно, о какой нумерации ν идет речь, то соответствующее подмножество будем называть вычислимым (и т. д.) без приставки ν .

Определение 6. Нумерация ν алгебры $\mathfrak{A}$ с основным множеством A называется вычислимо отделимой, если для любых различных $a_0, a_1 \in A$ существует такое ν -вычислимое подмножество $A_0 \subseteq A$, что $a_0 \in A_0 \wedge a_1 \notin A_0$.

Определение 7. Для нумерованного множества (A, ν) семейство $\mathfrak{S}$ ν -перечисливых подмножеств A называется полным разделяющим семейством, если для всяких различных $a_0, a_1 \in A$ найдется такое $\sigma \in \mathfrak{S}$, которое отделяет a_0 и a_1 (т. е. $a_0 \in \sigma \wedge a_1 \notin \sigma$ либо $a_1 \in \sigma \wedge a_0 \notin \sigma$).

Определение 8. Нумерация ν алгебры $\mathfrak{A}$ называется эффективно отделимой, если для нее существует полное разделяющее вычислимое семейство.

Неформально, эффективная отделимость нумерации означает наличие алгоритма, равномерно выдающего эффективные способы перечисления отделяющих базовых окрестностей точек множества.

Определение 9. Пусть $K = \{(\mathfrak{A}_i, \nu_i) \mid i \in I\}$ – семейство нумерованных алгебр. Нумерованная алгебра $(\mathfrak{A}, \nu)$ называется аппроксимируемой K -алгебрами (K -аппроксимируемой), если для любых различных $a_0, a_1 \in A$ существует различающий их морфизм $\varphi_j : (\mathfrak{A}, \nu) \longrightarrow (\mathfrak{A}_j, \nu_j)$ для подходящего $j \in I$ (т. е. $\varphi_j(a_0) \neq \varphi_j(a_1)$).

Теорема 10 ([12,20]). *Нумерованная алгебра вычислимо отделима тогда и только тогда, когда она аппроксимируется негативными алгебрами.*

Теорема 11 ([21]). *Нумерованная алгебра отделима тогда и только тогда, когда она аппроксимируется эффективно отделимыми алгебрами.*

Следствие 12. *Всякая вычислимо отделимая (отделимая) нумерация подпрямо неразложимой алгебры негативна (эффективно отделима).*

Следствие 13. *Всякая вычислимо отделимая (отделимая) нумерация алгебры с артиновой решеткой конгруэнций негативна (эффективно отделима).*

Определение 14. Нумерация бесконечного множества называется эффективно (неэффективно) бесконечной, если существует (не существует) бесконечное вычислимое множество натуральных чисел, попарно различных по модулю нумерационной эквивалентности.

Следствие 15. *Всякая алгебра, обладающая неэффективно бесконечной вычислимо отделимой нумерацией финитно аппроксимируема.*

Следствие 16. *Всякая алгебра, обладающая эффективно бесконечной вычислимо отделимой нумерацией с иммунной характеристической трансверсалью, финитно аппроксимируема.*

Определение 17. Бесконечное подмножество α множества ω называется наследственно высоким, если никакое его бесконечное подмножество (включая само α) не лежит в классе Π_3^0 арифметической иерархии.

Предложение 18 ([21]). *Существует такая отделимая бесконечная эквивалентность η , что*

- 1) $\text{tr}(\eta)$ – наследственно высокая;
- 2) *никакое расширение эквивалентности η не является эффективно T_1 -отделимым;*
- 3) *перечислимо порожденное пространство ω/η T_1 -отделимо, но не хаусдорфово;*
- 4) *всякая η -алгебра локально конечна и финитно аппроксимируема.*

2.2. ТРАНСЛЯЦИОННО ПОЛНЫЕ И ПРЕДПОЛНЫЕ АЛГЕБРЫ

Определение 19. Универсальная алгебра называется трансляционно полной, если всякая пара различных ее элементов переводится в любую другую пару различных элементов подходящей трансляцией.

Теорема 20 ([26]). *Всякая тело – трансляционно полная алгебра.*

Определение 21. Универсальная алгебра называется трансляционно предполной, если существует такая пара ее различных элементов, в которую переводится любая пара различных элементов подходящей трансляцией.

Очевидно, что любая трансляционно простая алгебра конгруэнц-проста, а любая трансляционно предполная алгебра подпрямой неразложима.

Предложение 22 ([26]). *Всякая T_2 -отделимая нумерация трансляционно предполной алгебры является негативной.*

Следствие 23. *Всякая T_2 -отделимая нумерация любого поля негативна.*

Однако, имеет место

Теорема 24 ([27]). *Существует T_1 -отделимая, но не $\Sigma_1^0 \cup \Pi_1^0$ -нумерация трансляционно предполной (а значит, и подпрямой неразложимой) алгебры с артиновой решеткой конгруэнций.*

Таковой будет, например, алгебра предшествования $P = \langle \omega; p \rangle$, $p(n+1) = n$, $p(0) = 0$.

Предложение 25 ([28]). *Над всякой негативной эквивалентностью представима трансляционно полная алгебра.*

Очевидно, что если над позитивной эквивалентностью представима трансляционно полная (даже подпрямой неразложимая) алгебра, то эта эквивалентность вычислима.

2.3. РАВНОМЕРНО ВЫЧИСЛИМО ОТДЕЛИМЫЕ АЛГЕБРЫ

Определение 26. Эквивалентность η равномерно вычислимо отделима, если существует такая частичная вычислимая функция g от трех переменных, что если $x \neq y \pmod{\eta}$, то функция $\lambda z.g(x, y, z)$ является характеристической вычислимой функцией для некоторого η -замкнутого множества, отделяющего x от y .

Неформально, равномерность вычислимо отделимой эквивалентности η означает существование такой эффективной процедуры, которая “выдает” для каждой пары натуральных чисел x, y , различных по модулю η , алгоритм разрешения η -замкнутого множества (характеристический индекс этого множества), отделяющего x от y .

Нумерация называется равномерно вычислимо отделимой, если таково ее ядро.

Рассмотрим следующие эквивалентности:

- 1) $\eta^\alpha = \{\langle 2x, 2x+1 \rangle \mid x \in \alpha\} \cup \{\langle 2x+1, 2x \rangle \mid x \in \alpha\} \cup \text{id } \omega$;
- 2) $\eta_\alpha = \alpha^2 \cup \text{id } \omega$;
- 3) $\eta_\alpha^* = \{\langle x, y \rangle \mid \gamma_x \setminus \alpha = \gamma_y \setminus \alpha\}$, где γ – каноническая нумерация конечных множеств.

Легко проверить, что для всякого $\alpha \subseteq \omega$ все эквивалентности $\eta^\alpha, \eta_\alpha, \eta_\alpha^*$ вычислимо отделимы. При этом, η^α равномерно вычислимо отделима при всяком α , а равномерность η_α зависит от выбора α . Известно, что если $\omega \setminus \alpha$ иммунно, но не гипериммунно, то η_α не является равномерной [29]; если α – гиперпростое с регрессивным дополнением, то η_α равномерно вычислимо отделима [29].

2.3.1. СЧЕТНЫЕ РЕШЕТКИ КОНГРУЭНЦИЙ. А.И. Мальцев в работе [1] показал, что конечно порожденная позитивная алгебра, всякая ненулевая конгруэнция которой имеет конечный индекс, является вычислимой.

Предложение 27 ([30]). Пусть $\mathfrak{A}$ – универсальная алгебра, всякая ненулевая конгруэнция которой имеет конечный индекс и ν – ее неразрешимая позитивная нумерация. Тогда $\mathfrak{A}$ локально конечна, финитно аппроксимируема, локально финитно отделима, имеет неартинову решетку конгруэнций и не является уноидом, а характеристическая трансверсаль $\text{tr}(\nu)$ гипериммунна.

Предложение 27 ничего не говорит о существовании таких алгебр.

Теорема 28 ([30]). Существует такая неразрешимая позитивная и равномерно вычислимо отделимая эквивалентность, над которой представима алгебра, всякая ненулевая конгруэнция которой имеет конечный индекс, а решетка конгруэнций изоморфна $1 + \omega^*$.

Теорема 29 ([31, 32]). Всякая позитивная нумерация алгебры со счетной решеткой конгруэнций (в частности, с нетеровой и, тем более, с ненулевыми конгруэнциями только конечного индекса) вычислимо отделима. Более того, такие алгебры аппроксимируются вычислимыми алгебрами.

Теорема 30 ([31]). Всякая позитивная алгебра, обладающая ненулевыми конгруэнциями только конечного индекса, эффективно вложима в конечно порожденную позитивную алгебру с нетеровой решеткой конгруэнций.

Следствие 31. Существует бесконечная конечно порожденная позитивная алгебра, всякое позитивно представимое обогащение которой финитно аппроксимируемо.

2.3.2. ЭФФЕКТИВНО РАСЩЕПЛЯЕМЫЕ КОНГРУЭНЦИИ

Определение 32. Равномерно вычислимо отделимая нумерованная алгебра называется эффективно расщепляемой, если существует эффективная процедура, сопоставляющая любому вычислимому семейству негативных конгруэнций перечислимый индекс такой негативной конгруэнции, которая находится строго ниже пересечения всех конгруэнций данного семейства.

Теорема 33 ([33]). Нумерованная алгебра эффективно расщепляема тогда и только тогда, когда характеристическая трансверсаль ядра ее нумерации полупродуктивна.

Предложение 34 ([33]). Существует эффективно расщепляемая алгебра, характеристическая трансверсаль ядра которой не продуктивна.

2.3.3. ПОЛУПЕРЕЧИСЛИМОСТЬ. Напомним некоторые классические определения [34, 35].

Множество $\alpha \subseteq \omega$ называется

- *полурекурсивным*, если существует такая вычислимая функция $f(x, y)$, что $f(x, y) \in \{x, y\}$ и $(x \in \alpha \vee y \in \alpha) \Rightarrow f(x, y) \in \alpha$;
- *полуперечислимым*, если существует такая частичная вычислимая функция $\psi(x, y)$, что $(x \in \alpha \vee y \in \alpha) \Rightarrow \psi(x, y) \downarrow \wedge \psi(x, y) \in \{x, y\} \cap \alpha$;
- *слабо полурекурсивным*, если существует такая частичная вычислимая функция $\psi(x, y)$, что $(x \in \alpha \Leftrightarrow y \notin \alpha) \Rightarrow \psi(x, y) \downarrow \wedge \psi(x, y) \in \{x, y\} \cap \alpha$.

Непосредственно из определений следует, что полурекурсивность любого множества равносильна полурекурсивности его дополнения. Ясно также, что эти свойства связаны между собой импликациями *полурекурсивность* $\Rightarrow$ *полуперечислимость* $\Rightarrow$ *слабая полурекурсивность*.

Назовем эквивалентность η *сильно равномерно вычислимо отделимой*, если существует частичная вычислимая функция $g(x, y)$ такая, что если $x \neq y \pmod{\eta}$, то $g(x, y) \downarrow$, и $\gamma_{g(x, y)}$ является η -замкнутым множеством, отделяющим x и y (γ – каноническая нумерация конечных множеств).

По определению, сильно равномерно вычислимая эквивалентность равномерно вычислимо отделима. Обратное неверно: если эквивалентность имеет хотя бы два бесконечных смежных класса, то вопрос о ее сильно равномерной вычислимой отделимости лишен смысла. Заметим, что для всякого $\alpha \subseteq \omega$ эквивалентность η^α сильно равномерно вычислимо отделима.

Теорема 35 ([36]). *Для произвольного $\alpha \subseteq \omega$ следующие условия эквивалентны:*

- 1) η_α – сильно равномерно вычислимо отделима;
- 2) η_α – равномерно вычислимо отделима;
- 3) $\omega \setminus \alpha$ – полуперечислимо.

Эта теорема позволяет доказать следующий факт.

Предложение 36 ([36]). *Существуют две равномерно вычислимо отделимые эквивалентности, пересечение которых таковым не является.*

2.4. УСЛОВИЯ КОНЕЧНОСТИ ДЛЯ ВЫЧИСЛИМО ОТДЕЛИМЫХ АЛГЕБР

2.4.1. ЛОКАЛЬНО ФИНИТНАЯ ОТДЕЛИМОСТЬ. Напомним, что универсальная алгебра называется финитно аппроксимируемой, если для любых двух различных ее элементов существует гомоморфизм на конечную алгебру, в котором образы этих элементов также различны. Аналогично, универсальная алгебра A называется финитно отделимой, если для всякой ее подалгебры A_0 и любого элемента $a \in A \setminus A_0$ найдется такая конгруэнция конечного индекса, по модулю которой элемент a отличен от всех элементов подалгебры A_0 . Другими словами, на языке гомоморфизмов, существует такой гомоморфизм φ из алгебры A на конечную алгебру, что $\varphi(a) \notin \varphi(A_0)$. Аналогично, алгебра называется

локально финитно отделимой, если для всякой ее конечно порожденной подалгебры и любого элемента вне этой подалгебры найдется конгруэнция конечного индекса, различающая данный элемент и подалгебру.

Сформулируем критерий локально финитной отделимости всякой алгебры, представимой над равномерно вычислимо отделимой эквивалентностью.

Теорема 37 ([37]). *Для бесконечной равномерно вычислимо отделимой эквивалентности η следующие условия эквивалентны:*

- 1) *характеристическая трансверсаль $\text{tr}(\eta)$ эквивалентности η иммунна;*
- 2) *всякая η -алгебра локально финитно отделима;*
- 3) *всякая η -алгебра финитно аппроксимируема.*

Предложение 38 ([37]). *Существует такая равномерно вычислимо отделимая позитивная эквивалентность η_α для подходящего α с иммунной характеристической трансверсалью, что некоторая η_α -алгебра не является финитно отделимой.*

Предложение 39 ([37]). *Существует такая вычислимо отделимая эквивалентность вида η_α^* с иммунной характеристической трансверсалью, которая является ядром представления подходящей универсальной алгебры, не являющейся локально финитно отделимой.*

Таким образом, в условиях [теоремы 37](#) нельзя отказаться как от алгебраического свойства локальности для финитной отделимости ([предложение 38](#)), так и от алгоритмического свойства равномерности для вычислимой отделимости ([предложение 39](#)).

Сужая класс иммунных характеристических трансверсалей до гипериммунных и расширяя класс равномерно вычислимо отделимых эквивалентностей до класса вычислимо отделимых эквивалентностей, получаем

Предложение 40 ([37]). *Пусть η – вычислимо отделимая эквивалентность с гипериммунной характеристической трансверсалью. Тогда всякая η -алгебра конечной сигнатуры локально финитно отделима.*

Приведем одну алгебраическую характеристику вычислимо отделимых эквивалентностей.

Предложение 41 ([37]). *Для бесконечной вычислимо отделимой эквивалентности η следующие условия равносильны:*

- 1) *η имеет бесконечное вычислимое расширение;*
- 2) *существует не финитно аппроксимируемая η -алгебра.*

2.4.2. ФИНИТНАЯ АППРОКСИМИРУЕМОСТЬ

Определение 42. Эквивалентность называется неэлиминируемой, если число ее смежных классов конечно и ровно один смежный класс бесконечен.

Эквивалентность, не являющуюся неэлиминируемой, назовем элиминируемой. Таким образом, любая элиминируемая эквивалентность либо бесконечна, либо содержит по крайней мере два бесконечных смежных класса.

Пусть $\mathbb{W}$ – счетное семейство элиминируемых эквивалентностей.

Теорема 43 ([37]). Пусть α – бесконечное и кобесконечное множество, содержащее число 0. Тогда существует такая эквивалентность η , каждый η -класс которой конечен, что $\text{tr}(\eta) = \alpha$ и для любого $W \in \mathbb{W}$ найдется пара элементов, различных по модулю W , но равных по модулю η .

Следствие 44. Пусть α – бесконечное и кобесконечное множество, содержащее число 0. Тогда существует такая эквивалентность η , каждый η -класс которой конечен, что $\text{tr}(\eta) = \alpha$ и всякая η -алгебра финитно аппроксимируема.

Следствие 45. Существует такая бесконечная вычислимо отделимая эквивалентность η с вычислимой характеристической трансверсалью, что всякая η -алгебра финитно аппроксимируема.

Следствие 46. Существует бесконечная вычислимо отделимая эквивалентность с вычислимой характеристической трансверсалью, всякое негативное расширение которой конечно и имеет ровно один бесконечный класс.

2.4.3. ЛОКАЛЬНАЯ КОНЕЧНОСТЬ

Определение 47. Универсальная алгебра называется конечно порожденной (локально конечной), если некоторое (всякое) ее конечное обеднение является конечно порожденным (локально конечным).

Для конечных сигнатур данное определение совпадает с классическим. Для бесконечных сигнатур понятие порожденности конечным множеством элементов и всеми сигнатурными операциями не совпадает с классическим понятием конечной порожденности. Например, рассмотрим алгебру $\mathfrak{A} = \langle \omega; f_n \rangle$, где ω – множество натуральных чисел и $\forall x \in \omega (f_n(x) = n)$. Тогда алгебра $\mathfrak{A}$ локально конечна, но порождается любым своим элементом.

Пусть A – бесконечное множество. Множество $F_A = \{f \mid f : A \rightarrow A\}$ всех отображений A в себя разделим на две части $F_0, F_1 : F_0 \cup F_1 = A$, $F_0 \cap F_1 = \emptyset$ так, что для каждой операции $f \in F_0$ справедливо следующее условие: для любого конечного $B \subset A$ существует такой элемент $a \in A \setminus B$, что $a \neq f(a) \wedge f(a) \in A \setminus B$. Все функции из F_0 будем называть A -нетривиальными или (если из контекста ясно, о каком A идет речь) нетривиальными (без приставки A -).

Операции из F_1 будем называть A -тривиальными или, аналогично сказанному выше, тривиальными. Таким образом, если f тривиально действует на A , т. е. $f \in F_1$, то существует такое конечное $B \subset A$, что для всякого элемента $a \in A \setminus B$ выполняется $a = f(a) \vee f(a) \in B$.

Пусть $\mathfrak{A} = \langle A; \Sigma \rangle$ – универсальная алгебра сигнатуры Σ и $B \subseteq A$. Подалгебру алгебры $\mathfrak{A}$, порожденную подмножеством B , будем обозначать через $\Sigma(B)$.

Предложение 48 ([38]). Пусть $\mathfrak{A}$ – алгебра конечной сигнатуры $\Sigma \subset F_A$ (т. е. $\mathfrak{A}$ – уноид), B – конечное подмножество A и подалгебра $\Sigma(B)$ бесконечна. Тогда существует хотя бы одна нетривиальная Σ -операция (т. е. из F_0).

В частности, имеет место очевидное

Следствие 49. Всякий уноид с тривиальными операциями локально конечен.

Пусть A – бесконечное счетное множество, θ – отношение эквивалентности на A и f – отображение из A^n в A . Будем говорить, что θ опускает f , если f не согласована с θ , т. е. найдутся такие наборы $\bar{x}, \bar{y}$, которые покомпонентно равны по модулю θ , но $f(\bar{x}) \neq f(\bar{y}) \pmod{\theta}$.

Другими словами, опускаемость операции f эквивалентностью θ означает, что действие f на A нельзя корректно перенести на фактор-множество A/η , образуя естественную фактор-алгебру. Если F – семейство операций на A , то будем говорить, что эквивалентность θ опускает семейство F , если θ опускает каждую операцию из F . Далее, до конца раздела будем рассматривать эквивалентности, опускающие семейства нетривиальных функций, заданных на множестве A .

Теперь, для упрощения обозначений, в качестве A будем рассматривать множество натуральных чисел ω .

Теорема 50 ([38]). Пусть F – счетное подсемейство семейства всех ω -нетривиальных отображений и T – бесконечное кобесконечное подмножество ω , содержащее 0. Тогда существует эквивалентность θ с конечными классами и характеристической трансверсалью T , опускающая семейство F .

Следствие 51. Для любого кобесконечного подмножества α множества натуральных чисел ω существует такая вычислимо отделимая эквивалентность θ с характеристической трансверсалью равной $\alpha \cup \{0\}$, что всякая уноидная алгебра представимая над θ является локально конечной.

Теорема 52 ([38]). Пусть α – подмножество множества натуральных чисел ω . Следующие условия равносильны:

- 1) α – кобесконечное множество;
- 2) существует такая эквивалентность θ с конечными θ -классами и характеристической трансверсалью, равной $\alpha \cup \{0\}$, над которой представимы только локально конечные, финитно аппроксимируемые и локально финитно отделимые унарные алгебры.

Таким образом, даже представимость над вычислимо отделимой эквивалентностью только локально конечных уноидов оказывается очень сильным свойством, обеспечивающим финитную аппроксимируемость и локально финитную отделимость любых (не обязательно унарных) алгебр, представимых над ней. Обратное, вообще говоря, неверно, так

как существуют конечно порожденные финитно аппроксимируемые и локально финитно отделимые алгебры, представимые над вычислимо отделимыми эквивалентностями с иммунными характеристическими трансверсями [12].

Ранее было неизвестно, существуют ли бесконечные эквивалентности с не иммунными характеристическими трансверсями, над которыми представимы только локально конечные уноиды.

Следствие 53. *Существует такая вычислимо отделимая эквивалентность с бесконечной вычислимой характеристической трансверсалью, что всякий представимый над ней уноид является локально конечным, финитно аппроксимируемым и локально финитно отделимым.*

3. Эффективно отделимые алгоритмические представления

Теория вычислимо отделимых алгебр и моделей в настоящий момент представляет собой вполне самостоятельную часть теории нумерованных систем со своей проблематикой, методами и парадигмой. Примерами вычислимо отделимых систем, как отмечалось выше, наряду с негативными алгебрами являются стандартно нумерованные финитно аппроксимируемые и конечно порожденные алгебры, позитивные алгебры со счетными (в частности, нетеровыми) решетками конгруэнций и т. д. [12].

Однако, если мы принимаем тезис об отделимости алгоритмических представлений моделей данных в рамках теоретической информатики, то следует рассматривать именно отделимые (а не просто вычислимо отделимые) нумерации.

3.1. Аксиомы отделимости. В этом подразделе рассмотрим некоторые усиления условия отделимости нумерации, которые во многих естественных случаях оказываются достаточными для ее эффективной отделимости и даже негативности. Выше рассматривались отделимые нумерации, которые естественно назвать T_0 -отделимыми. Попытка усиления понятия отделимости приводит к следующему определению.

Определение 54. Нумерация называется T_1 -отделимой (T_2, T_3, T_4 -отделимой), если для всякой пары натуральных чисел, различных по модулю ее нумерационной эквивалентности, найдутся пересечимая окрестность первого числа, не содержащая второе, и пересечимая окрестность второго, не содержащая первое (найдутся непересекающиеся пересечимые окрестности этих чисел; для всякого элемента и замкнутого в эффективно порожденной топологии множества, не содержащего этот элемент, найдутся их непересекающиеся окрестности; для всякой пары непересекающихся замкнутых множеств найдутся их непересекающиеся окрестности).

Обозначим через K_m ($0 \leq m \leq 4$) класс пространств, гомеоморфных эффективно порожденным пространствам, для которых выполняется аксиома T_m -отделимости.

Предложение 55. $K_m \setminus K_{m+1} \neq \emptyset$ для $m \in \{0, 1\}$, $K_3 = K_4$.

Для $m = 0$ тривиальный пример дается связным двоеточием, так как если α – вычислимо перечислимое невычислимое множество, то двухэлементное множество $\{\alpha, \omega \setminus \alpha\}$ с естественной нумерацией, сопоставляющей каждому числу содержащее его множество, есть эффективно порожденное отделимое и не T_1 -отделимое пространство.

Для $m = 1$ в [12] построен пример эффективно порожденного пространства, гомеоморфного счетно-бесконечному пространству Зарисского, поскольку непустыми вполне перечислимыми подмножествами в этом примере являются все коконечные множества, и только они.

Для $m = 3$ вопрос также тривиален, так как в предположении T_1 -отделимости для счетных топологических пространств регулярность и нормальность равносильны.

Для $m = 2$ вопрос открыт.

В случае вычислимо порожденных пространств ситуацию полностью описывает следующее

Предложение 56 ([39]). *Нумерация вычислимо отделима, если и только если вычислимо порожденное топологическое пространство совершенно нормально и вполне несвязно.*

В частности, в этом случае выполняются все аксиомы T_m -отделимости ($m \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$).

Определение 57. Нумерация называется эффективно T_1 -отделимой (T_2 -отделимой), если для нее существует вычислимое семейство T_1 -отделяющих (T_2 -отделяющих) множеств.

Для T_1 -отделимых (T_2 -отделимых) нумераций естественно возникает вопрос о справедливости усиленных аналогов теоремы 11: всякая ли T_1 -отделимая (T_2 -отделимая) нумерованная алгебра аппроксимируется эффективно T_1 -отделимыми (T_2 -отделимыми) алгебрами?

Если (A, ν) – нумерованная алгебра и K – класс нумерованных алгебр, однотипных с A , то назовем A простой относительно класса K (K -простой), если никакая ее неединичная фактор-алгебра не принадлежит K . Через K_1 (K_2) обозначим класс эффективно T_1 -отделимых (T_2 -отделимых) нумерованных алгебр. Для алгебр пустой сигнатуры (т. е. нумерованных множеств) верна

Теорема 58 ([21]). *Существует T_1 -отделимое, но не T_2 -отделимое нумерованное множество, никакое фактор-множество которого не является эффективно T_1 -отделимым.*

Следствие 59. *Существует K_1 -простая T_1 -отделимая нумерованная алгебра, эффективно порожденное топологическое пространство которой является пространством Зарисского.*

Простейшими примерами эффективно T_2 -отделимых нумераций являются позитивные и негативные нумерации. Более того, легко заметить, что в этих случаях имеет место равномерная T_2 -отделимость, т. е. существует эффективная процедура, определенная на каждой паре чисел, различных по модулю нумерационной эквивалентности, значением

которой является пара вычислимо перечислимых индексов непересекающихся множеств, замкнутых относительно нумерационной эквивалентности, отделяющих эту пару чисел.

Усиление аксиомы отделимости с T_1 -отделимости до T_2 -отделимости также не дает возможности описать ситуацию с T_2 -отделимо нумерованными универсальными алгебрами в терминах их гомоморфизмов на эффективно T_2 -отделимо нумерованные алгебры. Более того, T_2 -отделимо нумерованные алгебры не аппроксимируются даже эффективно T_1 -отделимо нумерованными алгебрами, как показывает следующее утверждение.

Предложение 60 ([21]). *Существует T_2 -отделимое нумерованное множество с перечислимыми элементами, никакое фактор-множество которого не является эффективно T_1 -отделимым.*

Из конструкции, используемой в доказательстве этого предложения непосредственно вытекает

Следствие 61. *Существует K_1 -простая T_2 -отделимая нумерованная алгебра, эффективно порожденное пространство которой дискретно.*

Теорема 58 и предложение 60 дополнительно подчеркивают фундаментальную роль теоремы Ю.Л.Ершова о вычислимых нумерациях с точки зрения теории нумерованных алгебр, так как для приведенных выше естественных усилений аксиом отделимости теорема об аппроксимации T_1 -отделимых (T_2 -отделимых) алгебр эффективно T_1 -отделимыми (T_2 -отделимыми) неверна. Заметим, что нумерованные множества, существование которых утверждается в теореме 58 и в предложении 60, тривиально аппроксимируются эффективно отделимыми связными двоеточиями.

Отметим, что в некоторых случаях, для известных типов алгебр, существование T_1 -отделимых (T_2 -отделимых) нумераций может являться достаточным условием их негативности (см. [21]).

3.2. ЭФФЕКТИВНО ВЫРОЖДЕННЫЕ НУМЕРАЦИИ. Если η – эквивалентность на ω , то η -замыканием множества α , обозначаемым через $[\alpha]_\eta$, называется пересечение всех η -замкнутых расширений множества α .

Множество называется η -бесконечным (η -конечным), если его η -замыкание состоит из бесконечного (конечного) числа классов η -эквивалентности. Очевидно, что необходимым (но не достаточным) условием η -бесконечности множества является его бесконечность.

Напомним, что под эффективным (вычислимым) топологическим пространством, заданном на нумерованном множестве (A, ν) , мы понимаем топологическое пространство на A , порожденное ν -перечислимыми (ν -вычислимыми) подмножествами множества A . Для сокращения обозначений в данном подразделе $\tau(\nu)$ -топологией будем называть эффективно порожденную топологию на нумерованном множестве (A, ν) , а $\tau(\nu)_{comp}$ -топологией – вычислимо порожденную.

Определение 62. Нумерация ν универсальной алгебры A называется эффективно невырожденной, если эффективно порожденное пространство $\tau(\nu)$ нетривиально (т. е. $\tau(\nu)$ -топология содержит хотя бы один элемент кроме $\emptyset$ и $\omega/\ker(\nu)$).

Нумерацию не являющуюся эффективно невырожденной будем называть эффективно вырожденной. Иначе говоря, эффективная вырожденность нумерации универсальной алгебры равносильна отсутствию нетривиальных перечислимых окрестностей ее элементов.

Предложение 63 ([26]). *Всякая не более чем счетная универсальная алгебра счетной сигнатуры имеет эффективно вырожденную нумерацию.*

Таким образом, эффективно невырожденные нумерованные алгебры образуют достаточно узкий класс (в категории нумерованных алгебр с морфизмами), в рамках которого мы формулируем наши утверждения.

Следствие 64. *Всякая не более чем счетная универсальная алгебра счетной сигнатуры (любой алгоритмической сложности) имеет нумерацию, т. е. представима над некоторой эквивалентностью.*

Для позитивных алгебр вычислимые и перечислимые топологии могут максимально различаться. Например, пусть η – совершенная позитивная эквивалентность (т. е. бесконечная позитивная эквивалентность, которая не имеет собственных η -замкнутых вычислимых подмножеств, см. книгу Ю.Л. Ершова [11]). Тогда η -пространство является дискретным, а η_{comp} -пространство – тривиальным. Оказывается, что в случае негативных алгебр вычислимые и перечислимые топологии совпадают.

Приведем это утверждение в наиболее общей формулировке.

Теорема 65 ([26]). *Если (A, ν) – негативно нумерованное множество, то $\tau(\nu)$ -топология и $\tau(\nu)_{\text{comp}}$ -топология совпадают.*

3.3. ПЕРЕЧИСЛИМЫЕ ТОПОЛОГИИ И ИХ КОМПАКТНЫЕ РАСШИРЕНИЯ. Компактные пространства появляются в теории вычислимости вполне естественным образом. Например, ядро η нумерации, существование которой утверждается в [теореме 58](#) таково, что дополнение всякого η -замкнутого перечислимого непустого множества является η -конечным и потому соответствующее пространство компактно.

Вышесказанное также подтверждает важность и полезность эквивалентностей вида η_α , в особенности для коиммунных α . В приведенных выше примерах принципиально важна финитная аппроксимируемость всех η_α -алгебр, что обеспечивается алгоритмической почти-конечностью иммунных множеств. Это алгоритмическое понятие оказалось равносильным компактности соответствующего вычислимого пространства.

Теорема 66 ([12]). *Для произвольного $\alpha \subseteq \omega$ следующие условия эквивалентны:*

- 1) α коконечно или коиммунно;

- 2) всякая η_α -алгебра финитно аппроксимируема;
- 3) вычислимое η_α -пространство – компакт.

Заметим, что если α вычислимо перечислимо, то перечислимое η_α -пространство компактным не будет. Более того, в этом случае пространство дискретно, т. е. всякое подмножество будет открытым.

Теорема 67 ([40]). *Всякая бесконечная эквивалентность на ω имеет такое бесконечное расширение, эффективное (вычислимое) фактор-пространство по модулю которого является компактным.*

Заметим, что эффективное пространство, являющееся компактным, может и не быть компактом (например, эффективное пространство Зарисского).

Рассмотрим более подробно эффективные топологические пространства над эквивалентностями вида η_α .

По существу, для множества α топология на ω/α является одноточечной компактификацией Александрова, при этом к множеству $\omega \setminus \alpha$ добавляется “точка” α .

Предложение 68 ([41]). *Для любого множества $\alpha \subseteq \omega$ следующие условия равносильны:*

- 1) эффективное η_α -пространство – компакт;
- 2) всякое перечислимое расширение α коконечно.

Следствие 69. *Для любого косжатого множества α следующие условия равносильны:*

- 1) эффективное η_α -пространство – компакт;
- 2) α не является перечислимым.

Предложение 70 ([41]). *Если α максимально, то вычислимое η_α -пространство – компакт, а эффективное η_α -пространство дискретно.*

Теорема 71 ([41]). *Для всякого множества α с бесконечным не гипериммунным дополнением существует такое его расширение $\beta \supseteq \alpha$ также с бесконечным не гипериммунным дополнением, что η_β -пространство есть компакт.*

4. Отделимые представления классических систем

Фундаментальные алгебраические понятия тела и области целостности являются классическими объектами исследования как в алгебре, так и в математической логике, которая, в частности, занимается описанием алгоритмических свойств колец, заданных теми или иными нумерациями (см. [2, 4], там же есть и библиография по теме). Важнейшими среди нумераций (представлений) этих объектов являются вычислимые, т. е. изоморфные кольцам, носителями которых являются вычислимые подмножества множества натуральных чисел, а операции сложения и умножения представлены подходящими вычислимыми операциями.

4.1. ЛОКАЛЬНО ПОЗИТИВНЫЕ И НЕГАТИВНЫЕ ГРУППЫ

Определение 72. Нумерация алгебры называется локально позитивной (негативной), если хотя бы один смежный класс ядра этой нумерации является перечислимым (коперечислимым).

Предложение 73 ([26]). *Для всякой локально позитивной (локально негативной) группы любой смежный класс ее ядра является перечислимым (коперечислимым).*

Предложение 74 ([26]). *Всякая локально позитивная нумерация любой группы является позитивной.*

Следствие 75. *Всякая локально позитивная нумерация любого кольца является позитивной.*

До сих пор, по умолчанию, мы рассматривали группы в сигнатуре с одной бинарной операцией.

Теорема 76 ([26]). *Всякая локально негативная нумерация любой группы в сигнатуре с бинарной групповой и унарной операцией взятия обратного элемента является негативной.*

Автору неизвестен ответ на вопрос: “всякая ли локально негативная группа в сигнатуре с одной бинарной групповой операцией является негативной?”.

Следствие 77. *Всякая локально позитивная нумерация любого тела является вычислимой.*

4.2. НЕГАТИВНОСТЬ ОТДЕЛИМЫХ НУМЕРАЦИЙ ТЕЛ. Под словом “кольцо”, если не оговорено противное, будем понимать ассоциативное кольцо, а под словосочетанием “область целостности” – ассоциативное кольцо (не обязательно коммутативное или с единицей) без делителей нуля.

Так как любое поле является конгруэнц-простой алгеброй (т.е. в нем отсутствуют собственные идеалы), то всякое позитивное представление поля является вычислимым (см. книгу Ю.Л. Ершова [2, с. 299, следствие 1], согласно которому всякая позитивная конгруэнц-простая универсальная алгебра является вычислимой). С другой стороны, всякое бесконечное вычислимо представимое поле обладает негативными невычислимыми представлениями [42]. Из результатов этой работы легко следует, что негативными невычислимыми представлениями обладают и бесконечные области целостности. Простейшим бесконечным полем характеристики нуль является поле рациональных чисел $\langle \mathbb{Q}; +, \times \rangle$, не имеющее не только собственных идеалов, но и собственных подполей. В связи с вышесказанным возникает разумный вопрос о вычислимости естественных позитивных подколец (с единицей, т.е. областей целостности, расширяющих кольцо целых чисел) поля рациональных чисел $\langle \mathbb{Q}; +, \times \rangle$ в любом его вычислимом представлении.

Пусть $\langle \omega; +, \times \rangle$ – вычислимое представление поля рациональных чисел Q , π – произвольное подмножество множества простых чисел $\Pi \subseteq \omega$, $\mathbf{n} = 1 + \dots + 1$ (n раз) и $R(\pi)$ – подкольцо поля Q , порожденное множеством рациональных дробей $\{1/\mathbf{n} \mid \mathbf{n} \in \pi\}$. Ясно, что всякая подобласть целостности R с единицей поля Q имеет вид $R(\pi)$ для подходящего $\pi \subseteq \Pi$, которое будем называть базисом кольца $R(\pi)$.

В качестве демонстрации описания вычислимых подколец поля рациональных чисел приведем без доказательства следующее, почти очевидное, утверждение ([26]), в котором через $Q = \langle \omega; +, \times \rangle$ обозначается вычислимое представление поля рациональных чисел с основным множеством ω .

Предложение 78. *Для произвольного подкольца R с единицей поля Q следующие условия эквивалентны:*

- 1) *всякое позитивное представление кольца R является вычислимым;*
- 2) *базис π кольца R перечислим в $Q = \langle \omega; +, \times \rangle$;*
- 3) *R – вычислимое подкольцо поля $Q = \langle \omega; +, \times \rangle$.*

Замечание. Отметим, что в отличие от полей, все позитивные представления которых вычислимы, позитивные области целостности не обязаны быть вычислимыми.

Теорема 79 ([26]). *Всякая эффективно невырожденная нумерация любого тела является негативной.*

Предложение 80 ([26]). *Всякая локально негативная нумерация любого тела является негативной.*

Доказательство. Непосредственно вытекает из теоремы 79, так как локальная негативность тела обеспечивает эффективную невырожденность соответствующего ему перечислимо порожденного пространства. $\square$

Следствие 81. *Всякая отделимая нумерация любого конечного тела является вычислимой.*

Следствие 82. *Для всякой эффективно невырожденной нумерации любого тела соответствующее перечислимое пространство совершенно нормально и вполне несвязно.*

Как отмечалось выше, если (A, ν) вычислимо отделимая нумерованная конгруэнц-простая универсальная алгебра и $\nu_{\text{отр}}$ -пространство нетривиально, то ν негативна ([12]). Поскольку всякая простая (т.е. без нетривиальных идеалов) коммутативная область целостности является полем (иначе решетка ее идеалов была бы неартиновой), то, по теореме 79, всякое эффективно невырожденное представление простой области целостности негативно. Однако, принципиальный вопрос о негативности эффективно невырожденного представления всякого простого коммутативного кольца (разумеется, с делителями нуля) на настоящий момент открыт.

4.3. ЭФФЕКТИВНАЯ ВЛОЖИМОСТЬ ОБЛАСТИ ЦЕЛОСТНОСТИ В ПОЛЕ. Академиком А.И. Мальцевым в [43] построен знаменитый пример ассоциативного кольца без делителей нуля, не вложимого в тело. Более того, мультипликативная полугруппа построенного им кольца не вложима в группу. Эти результаты стимулировали автора настоящей статьи к изучению вопросов эффективной вложимости колец в поля. Основная часть рассмотренных в текущем подразделе вопросов примыкает именно к этой проблематике.

По-видимому, в литературе по абстрактной вычислимости не уделялось должного внимания тому факту, что процедура вложения коммутативной области целостности в поле своих частных по существу является эффективной.

Идея конструкции поля частных для нумерованной области целостности, так же, как и в классическом случае, заключается в построении отношения эквивалентности (идеала кольца) на множествах пар номеров, вторые члены которых (“знаменатели” формальных дробей) могут принимать в качестве значений все элементы перечислимого множества, являющегося дополнением нулевого элемента исходного кольца. К этой идее апеллирует и введенное выше понятие локальной негативности кольца.

Теорема 83 ([26]). *Для всякой локально негативной области целостности существует негативное представление поля ее частных, в которое она эффективно вложима.*

Следствие 84. *Всякая локально негативная область целостности негативна.*

Следует из эффективной вложимости локально негативной области целостности в локально негативное (а значит, [по теореме 79](#), и негативное) поле.

Следствие 85. *Нумерованная коммутативная область целостности эффективно вложима в эффективно невырожденное поле тогда и только тогда, когда она негативна.*

Предложение 86. *Существует позитивная область целостности, эффективно не вложимая ни в какое эффективно невырожденное поле.*

5. Приложения в теоретической информатике

Продемонстрируем возможности применения понятия отделимо нумерованной универсальной алгебры к решению некоторых вопросов теоретической информатики и расширению класса моделей данных, допускающих эффективные реализации и адекватные логические описания.

5.1. АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ СПЕЦИФИКАЦИИ И ИНИЦИАЛЬНЫЕ МОДЕЛИ КВАЗИМНОГООБРАЗИЙ. Под структурой данных (или структурой, или системой, или моделью данных) понимается многосортная алгебра конечной сигнатуры, порожденная значениями сигнатурных констант [19, 44–46]. При этом, подразумевается, что структура данных имеет эффективное, в том или ином смысле, алгоритмическое представление [19, 47, 48], в

частности – позитивное [47]. В силу конечной порожденности можно говорить о позитивности структуры данных, если она позитивно представима, имея в виду ее стандартную нумерацию с учетом вычислимой устойчивости [4].

Определение 87. Структура данных называется эквационально специфицируемой, если существует ее обогащение, являющееся свободной системой некоторого конечно-базируемого многообразия.

Очевидно, что всякая эквационально специфицируемая структура данных позитивно представима. Необходимость рассмотрения обогащений обусловлена тем, что важные и простейшие структуры данных (например, просматриваемый стек М. Майстер [49]) не являются эквационально специфицируемыми [50].

В [19] доказано, что всякая вычислимая структура данных эквационально специфицируема. Ясно, что если структура эквационально специфицируема, то она позитивно представима. Верно ли обратное?

Из существования конечно порожденных вычислимо отделимых алгебр с иммунными характеристическими трансверсями (см. [следствие 31](#), а также работу [51]) следует

Теорема 88. *Существует конечно порожденная позитивно представимая алгебра, никакое обогащение которой не является свободной системой ни в каком конечно базируемом многообразии.*

Таким образом, язык тождеств в обогащениях оказывается неполным с точки зрения его выразительных возможностей для адекватного алгебраического описания даже позитивных структур данных.

5.2. УНИВЕРСАЛЬНЫЕ СПЕЦИФИКАЦИИ. В теории спецификаций программ и эффективной реализуемости одним из достаточно утвердившихся тезисов можно считать тезис о позитивной представимости любой модели данных [47]. Семантика таких моделей должна адекватно определяться их синтаксическими описаниями, которые, очевидно, обязаны иметь однозначно определенную интерпретацию и механизмы генерирования фактов о свойствах моделей. Другими словами, языки описания по определению являются логическими. На сегодняшний день наиболее изученным и обладающим достаточно большой областью применимости является язык исчисления предикатов первого порядка и различные его фрагменты. Особенно часто применяемую на практике часть этого языка образуют универсальные хорновские предложения, на которых основаны языки логического программирования [52]. Этот факт связан с двумя обстоятельствами:

- 1) всякое непротиворечивое эффективное множество универсальных хорновских предложений имеет позитивно представимую модель [47, 48, 53];
- 2) семантика этой модели заключена в устройстве инициальной модели данного множества предложений, которая всегда существует и, более того, существует алгоритм извлечения ее эффективной реализации из синтаксического описания [54, 55].

Эти факты являются классическими в математической логике, поэтому определение границ применимости данного языка, вопросы определимости моделей в классах их гомоморфных образов (инициальная семантика – строение свободной системы соответствующего ранга), а также о числе реализаций (эффективных, поскольку ничто другое нельзя считать реализацией в рамках идеологии теоретической информатики) являются основополагающими в этой парадигме программирования, согласно которой алгоритм должен иметь не императивный, а декларативный характер, и решение задачи должно заключаться не в описании конкретных процедур достижения цели, а в формулировке желаемой цели, при предоставлении поиска реализующей процедуры самой машине (универсальному алгоритму), предпринимающей эти попытки, исходя из синтаксического материала, заключенного в описании модели данных.

Спецификацией модели будем называть любое непротиворечивое вычислимо перечислимое множество предложений логики первого порядка, реализующееся в этой модели. Спецификация называется хорновской (универсальной, экзистенциальной, индуктивной и т. д.), если каждое предложение из нее есть предложение хорновское (соответственно универсальное, экзистенциальное, индуктивное и т. д.).

Пусть $(\mathfrak{M}, \mu)$ – позитивная модель, порожденная сигнатурными константами, и Φ – универсальная хорновская спецификация в сигнатуре модели $\mathfrak{M}$, реализующаяся в $\mathfrak{M}$. В работе [53] установлено, что если Φ не реализуется ни в каком позитивном гомоморфном образе модели $(\mathfrak{M}, \mu)$, то μ – вычислимая нумерация. Другими словами, если $(\mathfrak{M}, \mu)$ – позитивная невычислимая модель и Φ – универсальная хорновская спецификация, реализующаяся в $\mathfrak{M}$, то в классе Φ -моделей содержатся собственные позитивные гомоморфные образы модели $(\mathfrak{M}, \mu)$.

Следовательно, никакую позитивную невычислимую модель $\mathfrak{M}$ нельзя выделить в классе ее собственных позитивных гомоморфных образов никакой универсальной хорновской спецификацией, т. е. если Φ – универсальная хорновская спецификация, реализующаяся в $\mathfrak{M}$, то в классе собственных гомоморфных образов этой модели обязательно присутствуют позитивно представимые. Аналогично, никакую невычислимую позитивную модель нельзя выделить в классе ее собственных гомоморфных образов никакой универсальной спецификацией [53].

Сказанное поставило проблему определения тонкой грани между выразительными возможностями языков универсальных хорновских спецификаций и универсальных спецификаций в рамках проблемы универсальной определимости модели в классе ее эффективных гомоморфных образов (проблема номер 13 из списка вопросов в [12]). Иначе говоря, можно ли в принципе выделить позитивную невычислимую модель в классе ее собственных позитивных гомоморфных образов подходящей универсальной спецификацией?

Теорема 89 ([56]). *Существует позитивно представимая модель, не обладающая вычислимыми представлениями, которая выделяется в классе своих собственных позитивно представимых гомоморфных образов подходящей универсальной спецификацией.*

Заметим, что [теорему 89](#) можно усилить.

Следствие 90. *Существует позитивно представимая модель, не обладающая вычислимыми представлениями, которая выделяется в классе своих собственных позитивно представимых гомоморфных образов подходящей бескванторной спецификацией.*

Очевидно, что такая спецификация не может быть хорновской.

Таким образом, язык универсальных спецификаций оказывается существенно богаче языка универсальных хорновских предложений с точки зрения возможности адекватного описания позитивно представимых моделей.

5.2.1. УНИВЕРСАЛЬНЫЕ ХОРНОВСКИЕ СПЕЦИФИКАЦИИ. Выше было отмечено, что никакую невычислимую позитивную алгебру нельзя выделить в классе ее собственных позитивных фактор-алгебр никаким вычислимо перечислимым множеством универсальных хорновских предложений. Аналогично, никакую невычислимую позитивную алгебру нельзя выделить в классе ее собственных фактор-алгебр никаким вычислимо перечислимым множеством универсальных предложений. Оказалось, что универсальная хорновская определимость в классе собственных вычислимых фактор-алгебр не только возможна, но и весьма полезна.

Теорема 91 ([57]). *Всякая невычислимая позитивная алгебра, выделяемая подходящим вычислимо перечислимым множеством Q универсальных хорновских предложений в множестве своих вычислимых фактор-алгебр, имеет континуум Q -конгруэнций (т. е. таких конгруэнций, в факторах по которым реализуется Q).*

Например, подбирая подходящие эффективные системы универсальных хорновских предложений можно показать, что имеет место

Следствие 92. *Пусть (A, ν) – позитивная алгебра, удовлетворяющая хотя бы одному из следующих трех условий:*

- 1) ν не является вычислимо отделимой;
- 2) характеристическая трансверсаль $\text{tr}(\ker(\nu))$ иммунна, но не гипериммунна;
- 3) некоторое конечное обеднение (A, ν) имеет неэффективно бесконечную конечно порожденную подалгебру.

Тогда A имеет континуум конгруэнций.

Покажем, например, истинность п. 1). Если $\nu t \neq \nu n$ и t, n не отделяются никаким ν -замкнутым вычислимым множеством, то обогатим сигнатуру алгебры A двумя константными символами s, d , интерпретируя $s = \nu t, d = \nu n$. Тогда хорновское бескванторное предложение $s \neq d$ истинно в $(\langle A, s, d \rangle, \nu)$, но не реализуется ни в какой вычислимой фактор-алгебре нумерованной алгебры (A, ν) . Применяем [теорему 91](#).

Следствие 93. *Всякая алгебра, обладающая позитивной нумерацией с совершенным ядром имеет континуум конгруэнций.*

Заметим, что из [теоремы 91](#) также следует, что всякая позитивная алгебра со счетной решеткой конгруэнций аппроксимируется вычислимыми алгебрами.

Следствие 94. *Всякая конечно порожденная неэффективно бесконечная позитивная алгебра имеет континуум конгруэнций.*

Отметим, что условие конечной порожденности в [следствии 94](#) существенно: имеются примеры неэффективно бесконечных позитивных алгебр со счетными решетками конгруэнций (даже алгебр с ненулевыми конгруэнциями только конечного индекса, см. [теорему 28](#)).

5.3. СПЕЦИФИКАЦИИ НЕГАТИВНО ПРЕДСТАВИМЫХ МОДЕЛЕЙ ДАННЫХ. Негативно представимые системы представляются во многих аспектах не менее важными, чем позитивные и понятие эффективно представимой модели отражает тот факт, что далее мы принимаем тезис о позитивности или негативности любой структуры данных, так как, во-первых, эти представления лежат на самых нижних этажах арифметической иерархии и, во-вторых, они достаточно емкие, чтобы содержать в себе значительную часть структур данных, возникающих на практике. Однако для негативно представимых моделей, в отличие от позитивно представимых, имеются трудности с однозначным определением (с точностью до изоморфизма) стандартной модели спецификации. Напомним, что стандартные модели мы необходимым образом рассматриваем в сигнатурах подходящих обогащений [\[49, 50\]](#).

Определение 95. Структура $\mathcal{M}$ сигнатуры Σ называется универсально (экзистенциально, $\exists\forall$ -, $\forall\exists$ - и т. д.) определимой, если существуют такое ее обогащение $\mathcal{M}^*$ в сигнатуре Σ^* и вычислимо перечислимое множество Φ универсальных (экзистенциальных, $\exists\forall$ -, $\forall\exists$ - и т. д.) предложений сигнатуры Σ^* , что $\mathcal{M}^* \models \Phi$ и для всякой Σ^* -структуры ее подструктура, порожденная константами либо изоморфна $\mathcal{M}^*$, либо не является Φ -структурой.

Отметим, что условие “либо изоморфна $\mathcal{M}^*$, либо не является Φ -структурой” может давать достаточно большой разброс элементарных свойств системы $\mathcal{M}^*$ и порожденной константами не Φ -системы, так как, в случае неизоморфности, они не являются элементарно эквивалентными.

5.3.1. УНИВЕРСАЛЬНАЯ И ЭКЗИСТЕНЦИАЛЬНАЯ ОПРЕДЕЛИМОСТЬ. Следующее утверждение очевидно.

Предложение 96. *Всякая вычислимо представимая структура универсально (экзистенциально) определима.*

Предложение 97 ([\[58\]](#)). *Существует экзистенциально определимая негативно представимая структура, не имеющая позитивных представлений.*

Предложение 98 ([\[58\]](#)). *Существует экзистенциально определимая позитивно представимая структура, не имеющая негативных представлений.*

Предложения [97](#) и [98](#) показывают, что в отличие от универсальной определимости невычислимых структур их экзистенциальная определимость возможна.

Теорема 99 ([58]). *Всякая негативно представимая структура экзистенциально определима.*

Известно, что существует такие позитивные алгебры, всякие обогащения которых (относительно данного представления) локально конечны [59], поэтому вопрос выбора позитивного представления алгебры имеет ключевое значение. Для негативных алгебр можно выбирать любую негативную нумерацию и обогатить относительно нее исходную алгебру так, что полученная алгебра будет конечно порожденной и конгруэнц-простой [60].

Автору неизвестен ответ на принципиальный вопрос:

всякая ли позитивно представимая структура экзистенциально определима?

Назовем позитивно (негативно) представимую структуру $\mathfrak{M}$ локально $\exists$ -неопределимой, если всякая конечная совокупность $\exists$ -предложений, реализующаяся в $\mathfrak{M}$, реализуется в некотором собственном гомоморфном образе (соответственно, прообразе) этой структуры.

Предложение 100 ([58]). *Существует позитивно (негативно), но не вычислимо представимая экзистенциально определимая структура, являющаяся локально $\exists$ -неопределимой.*

Заметим, что для систем, конечно порожденных значениями замкнутых термов можно говорить об их позитивности без привязки к конкретному алгоритмическому представлению, так как в этом случае существует единственное, с точностью до вычислимого изоморфизма, позитивное представление. Для негативных представлений это не так [42]. В общем случае для порожденных замкнутыми термами систем существует наименьшее (относительно сводимости классов эквивалентных нумераций) алгоритмическое представление, индуцированное геделевской нумерацией системы, порожденной значениями термов в абсолютно свободной алгебре ранга ноль (см. [2]).

Из [предложения 100](#) и результатов работы [60] о представимости конечно порожденной и конгруэнц-простой алгебры над любой негативной эквивалентностью вытекает

Следствие 101. *Над любой невычислимой негативной эквивалентностью представима конечно порожденная конгруэнц-простая алгебра, не являющаяся универсально определимой.*

5.3.2. КОНЕЧНАЯ $\forall\exists$ -ОПРЕДЕЛИМОСТЬ НЕГАТИВНО ПРЕДСТАВИМЫХ СИСТЕМ. В теоретической информатике особую роль играют конечные спецификации [19, 44] или, говоря обычным математическим языком, формальные выражения (в частности, предложения логики первого порядка), адекватно описывающие специфицируемые понятия.

Пусть $\mathfrak{M}$ – система конечной сигнатуры Σ , порожденная значениями Σ -констант, μ – ее стандартная нумерация (т. е. лежащая в наименьшем классе эквивалентных алгоритмических представлений системы $\mathfrak{M}$ относительно сводимости нумераций или, что равносильно, подтверждающая каждое натуральное число значением подходящего

$T(\Sigma)$ -терма). Удобно считать, что замкнутый терм как синтаксическое выражение является “номером” или “кодом” класса эквивалентных в $\mathfrak{M}$ термов.

Структуру $\mathfrak{M}$ назовем конечно $\forall$ -($\exists$ -, $\exists\forall$ -, $\forall\exists$ - и т.д.) определимой, если соответствующее множество Φ^* из [определения 95](#) в сигнатуре обогащения Σ^* можно выбрать конечным.

Сравнивая универсальную определимость в смысле [определения 95](#) с конечной эквивалентной специфицируемостью [\[19\]](#) следует отметить, что второй метод, основанный на инициальной семантике, позволяет адекватно описывать и некоторые позитивно представимые невычислимы структуры. Но, в этом случае, эквивалентная спецификация реализуется в бесконечном числе собственных позитивных гомоморфных образов специфицируемой структуры. Методы $\forall$ -определимости и конечной $\forall$ -определимости лишены этого недостатка. Однако платой за точное выделение структуры в классе всех сигнатурно порожденных является сужение класса таких структур до вычислимо представимых.

В следующем предложении говоря о вычислимости структуры подразумеваем вычислимость ее стандартной нумерации.

Предложение 102 ([\[58\]](#)). *Для произвольной структуры $\mathfrak{M}$ следующие условия равносильны:*

- 1) μ вычислима;
- 2) $\mathfrak{M}$ является конечно $\forall$ -определимой.

Следствие 103. *Всякая вычислимо представимая система $\mathfrak{M}$ конечной сигнатуры имеет обогащение $\mathfrak{M}^*$, являющееся инициальной системой некоторого конечно-аксиоматизируемого универсального класса, во всех системах которого содержится изоморфная копия $\mathfrak{M}^*$.*

Иначе говоря, в более “синтаксической” терминологии, для всякой вычислимо представимой системы $\mathfrak{M}$ конечной сигнатуры существует обогащение $\mathfrak{M}^*$ и универсальное предложение φ такое, что $\mathfrak{M}^* \models p(\bar{t}) \Leftrightarrow \varphi \vdash p(\bar{t})$ и $\mathfrak{M}^* \models \neg p(\bar{t}) \Leftrightarrow \varphi \vdash \neg p(\bar{t})$, где $p(\bar{t})$ – атомарная формула от набора замкнутых термов $\bar{t}$.

Предложение 104 ([\[53\]](#)). *Если система имеет невычислимое негативное представление, то всякое $\exists\forall$ -предложение, реализующееся в ней, реализуется и в некотором собственном гомоморфном прообразе этой системы.*

Оказалось, что конечная $\forall\exists$ -определимость не обеспечивает вычислимость представления стандартной модели.

Предложение 105 ([\[58\]](#)). *Существует конечно $\forall\exists$ -определимая негативно представимая система, не имеющая позитивных представлений.*

Невычислимы негативные системы, вообще говоря, можно выделять в классе всех их собственных гомоморфных прообразов $\forall\exists$ -предложениями.

Следствие 106. *Существует $\forall\exists$ -предложение без вычислимо представимых моделей, реализующееся в негативно представимой системе.*

Следствие 107. *Существует негативно представимая система, не имеющая вычислимых представлений, в которой реализуется $\forall\exists$ -предложение, не реализующееся ни в каком собственном гомоморфном прообразе этой системы.*

Теорема 108 ([58]). *Всякая негативно представимая система, порожденная сигнатурными константами является конечно $\forall\exists$ -определимой.*

Важно отметить, что в рассматриваемых нами методах описания негативных систем фактически речь идет об обогащениях расширений. Вопрос существования обогащений над исходным носителем системы (т. е. всякая ли негативно представимая система имеет обогащение без новых сортов, являющееся конечно $\forall\exists$ -определимым?) является гораздо более тонким и его решение в настоящее время неизвестно.

5.4. ЛОГИЧЕСКИЕ СПЕЦИФИКАЦИИ ЭФФЕКТИВНО ОТДЕЛИМЫХ МОДЕЛЕЙ ДАННЫХ. С учетом вышесказанного, подчеркивая существенность наличия алгоритмически определяемых отделяющих окрестностей структур данных, заданных своими алгоритмическими представлениями, мы принимаем тезис о наличии эффективно отделимой нумерации любой структуры данных. Одним из обоснований этого направления в теоретической информатике является следующий факт.

Теорема 109 ([61]). *Всякая универсальная алгебра, имеющая эффективно отделимое алгоритмическое представление является $\exists\forall\exists$ -определимой.*

Список литературы

- [1] А.И. Мальцев, *Конструктивные алгебры. I*, УМН **16** (3), 3–60 (1961).
URL: <https://www.mathnet.ru/rus/rm6619>
- [2] Ю.Л. Ершов, *Проблемы разрешимости и конструктивные модели*, Наука, М., 1980.
- [3] Yu.L. Ershov, *Theory of numberings*, in: E.R. Griffor (ed.), Handbook of computability theory (Stud. Logic Found. Math., 140), Elsevier, Amsterdam, 1999, 473–503.
DOI: [https://doi.org/10.1016/S0049-237X\(99\)80030-5](https://doi.org/10.1016/S0049-237X(99)80030-5)
- [4] С.С. Гончаров, Ю.Л. Ершов, *Конструктивные модели*, Научная книга, Новосибирск, 1999.
- [5] Н.Г. Хисамиев, *Арифметическая иерархия абелевых групп*, Сиб. матем. журн. **29** (6), 144–159 (1988).
URL: <https://www.mathnet.ru/rus/smj7527>
- [6] С.П. Одинцов, В.Л. Селиванов, *Арифметическая иерархия и идеалы нумерованных булевых алгебр*, Сиб. матем. журн. **30** (6), 140–149 (1989).
URL: <https://www.mathnet.ru/rus/smj4672>

- [7] В.А. Успенский, *О вычислимых операциях*, ДАН СССР **103** (5), 773–776 (1955).
URL: https://archive.org/details/uspensky-1955-dan-103-5-computable-operations/Uspensky_1955_DAN_103_5_Typeset_by_Zolin/mode/2up
- [8] В.А. Успенский, *Системы перечислимых множеств и их нумерации*, ДАН СССР **105** (6), 1155–1158 (1955).
URL: https://archive.org/details/uspensky-1955-dan-105-6-enumerable-sets-numerations/Uspensky_1955_DAN_105_6_Typeset_by_Zolin/mode/2up
- [9] A. Nerode, *General topology and partial recursive functionals*, Summaries Summer Inst. Symbolic Logic **1957**, 247–251 (1960).
- [10] А.И. Мальцев, *К теории вычислимых семейств объектов*, Алгебра и логика **3** (4), 5–31 (1964).
URL: <https://www.mathnet.ru/rus/al1010>
- [11] Ю.Л. Ершов, *Теория нумераций*, Наука, М., 1977.
- [12] Н.Х. КАСЫМОВ, *Рекурсивно отделимые нумерованные алгебры*, УМН **51** (3), 145–176 (1996).
DOI: <https://doi.org/10.4213/rm971>
- [13] А. И. Мальцев, *Позитивные и негативные нумерации*, ДАН СССР **160** (2), 278–280 (1965).
URL: <https://www.mathnet.ru/rus/dan30557>
- [14] А.С. Морозов, *Об одном вопросе Хигмэна*, Алгебра и логика **29** (1), 29–34 (1990).
URL: <https://www.mathnet.ru/rus/al2089>
- [15] W. Baur, *Rekursive Algebren mit Kettenbedingungen*, Z. Math. Logik Grundlag. Math. **20** (1–3), 37–46 (1974).
DOI: <https://doi.org/10.1002/malq.19740200105>
- [16] W. Baur, *Über rekursive Strukturen*, Invent. Math. **23** (2), 89–95 (1974).
DOI: <https://doi.org/10.1007/BF01405162>
- [17] В.А. Успенский, А.Л. Семенов, *Теория алгоритмов: основные открытия и приложения*, Наука, М., 1987.
- [18] J.C.C. McKinsey, *The decision problem for some classes of sentences without quantifiers*, J. Symbol. Logic **8** (3), 61–76 (1943).
DOI: <https://doi.org/10.2307/2268172>
- [19] J.A. Bergstra, J.V. Tucker, *A characterization of computable data types by means of a finite, equational specification method*, Lecture Notes in Comput. Sci. **85**, 76–90 (1980).
DOI: https://doi.org/10.1007/3-540-10003-2_61
- [20] Н.Х. КАСЫМОВ, *О гомоморфизмах на негативные алгебры*, Алгебра и логика **31** (2), 132–144 (1992).
URL: <https://www.mathnet.ru/rus/al2186>

-
- [21] Н.Х. КАСЫМОВ, *О гомоморфизмах на эффективно отделимые алгебры*, Сиб. матем. журн. **57** (1), 47–66 (2016).
DOI: <https://doi.org/10.17377/smzh.2016.57.105>
- [22] Н.Х. КАСЫМОВ, *Об одной двойственной задаче теории конструктивных моделей*, Вычисл. системы **129**, 137–143 (1989).
URL: <https://zbmath.org/1052.03527>
- [23] U. Andrews, S. Lempp, J.S. Miller, K.M. Ng, L.S. Mauro, A. Sorbi, *Universal computably enumerable equivalence relations*, J. Symb. Logic **79** (1), 60–88 (2014).
DOI: <http://doi.org/10.1017/jsl.2013.8>
- [24] U. Andrews, A. Sorbi, *Joins and meets in the structure of ceers*, Computability **8** (3–4), 193–241 (2019).
DOI: <https://doi.org/10.3233/COM-180098>
- [25] U. Andrews, D.F. Belin, L. San Mauro, *On the structure of computable reducibility on equivalence relations of natural numbers*, J. Symb. Logic **88** (3), 1038–1063 (2023).
DOI: <https://doi.org/10.1017/jsl.2022.28>
- [26] Н.Х. КАСЫМОВ, Ф.Н. ИБРАГИМОВ, *Отделимые нумерации тел и эффективная вложимость в них колец*, Сиб. матем. журн. **60** (1), 82–94 (2019).
DOI: <https://doi.org/10.33048/smzh.2019.60.107>
- [27] Н.Х. КАСЫМОВ, А.С. МОРОЗОВ, И.А. ХОДЖАМУРАТОВА, *О T_1 -отделимых нумерациях подпрямых неразложимых алгебр*, Алгебра и логика **60** (4), 400–424 (2021).
DOI: <https://doi.org/10.33048/alglog.2021.60.402>
- [28] Н.Х. КАСЫМОВ, Р.Н. ДАДАЖАНОВ, С.Л. ДЖАВЛИЕВ, *Uniform m -equivalences and numberings of classical systems*, Сиб. электрон. матем. известия **19** (1), 49–65 (2022).
DOI: <http://doi.org/10.33048/semi.2022.19.005>
- [29] Н.Х. КАСЫМОВ, *Нумерованные алгебры с равномерно рекурсивно отделимыми классами*, Сиб. матем. журн. **34** (5), 85–102 (1993).
URL: <https://www.mathnet.ru/rus/smj836>
- [30] Н.Х. КАСЫМОВ, *Позитивные алгебры с конгруэнциями конечного индекса*, Алгебра и логика **30** (3), 293–305 (1991).
URL: <https://www.mathnet.ru/rus/al2151>
- [31] Н.Х. КАСЫМОВ, *Позитивные алгебры с нетеровыми решетками конгруэнций*, Сиб. матем. журн. **33** (2), 181–185 (1992).
URL: <https://www.mathnet.ru/rus/smj3208>
- [32] Н.Х. КАСЫМОВ, *Позитивные алгебры со счетными решетками конгруэнций*, Алгебра и логика **31** (1), 21–37 (1992).
URL: <https://www.mathnet.ru/rus/al2179>

- [33] Р.Н. Дадажанов, Н.Х. Касымов, И.А. Ходжамуратова, *Равномерно вычислимо отдельные алгебры с эффективно расщепляемыми семействами негативных конгруэнций*, Сиб. матем. журн. **63** (3), 562–575 (2022).
DOI: <https://doi.org/10.33048/smzh.2022.63.307>
- [34] C.G. Jockusch, *Semirecursive sets and positive reducibility*, Trans. Amer. Math. Soc. **131** (2), 420–436 (1968).
DOI: <https://doi.org/10.2307/1994957>
- [35] C.G. Jockusch, J.C. Owings, *Weakly semirecursive sets*, J. Symb. Logic **55** (2), 637–644 (1990).
DOI: <https://doi.org/10.2307/2274653>
- [36] Н.Х. Касымов, А.С. Морозов, *Нижние полурешетки отдельных конгруэнций нумерованных алгебр*, Сиб. матем. журн. **64** (4), 753–769 (2023).
DOI: <https://doi.org/10.33048/smzh.2023.64.408>
- [37] Н.Х. Касымов, *Вычислимо отдельные нумерации локально финитно отдельных алгебр*, Сиб. электрон. матем. изв. **21** (1), 315–346 (2024).
DOI: <https://doi.org/10.33048/semi.2024.21.024>
- [38] Н.Х. Касымов, *Локально конечные и финитно аппроксимируемые уноиды над вычислимо отдельными эквивалентностями*, Математика и теоретические компьютерные науки **2** (1), 55–74 (2024).
DOI: <https://doi.org/10.26907/2949-3919.2024.1.55-73>
- [39] Н.Х. Касымов, *Аксиомы отдельности и разбиения натурального ряда*, Сиб. матем. журн. **34** (3), 81–85 (1993).
URL: <https://www.mathnet.ru/rus/smjl654>
- [40] Н.Х. Касымов, И.А. Ходжамуратова, *Топологические пространства над алгоритмическими представлениями универсальных алгебр*, Итоги науки и техн. Соврем. мат. и ее прил. Темат. обз. **144**, 17–29 (2018).
URL: <https://www.mathnet.ru/rus/into268>
- [41] R.N. Dadazhanov, N.R. Karimova, N.Kh. Kasymov, *Effective compacts over co-immune sets*, Uzbek Math. J. **63** (3), 26–32 (2019).
DOI: <https://doi.org/10.29229/uzmj.2019-3-3>
- [42] B. Khoussainov, T. Slaman, P. Semukhin, $\prod_1^0$ -Presentations of Algebras, Arch. Math. Logic **45** (6), 769–781 (2006).
DOI: <https://doi.org/10.1007/s00153-006-0013-3>
- [43] A.I. Malcev, *On the immersion of an algebraic ring into a field*, Math. Ann. **113** (1), 686–691 (1937).
URL: <https://doi.org/10.1007/BF01571659>

-
- [44] S. Kamin, *Some definitions for algebraic data type specifications*, SIGPLAN Notes **14** (3), 28–37 (1979).
DOI: <https://doi.org/10.1145/988071.988075>
- [45] J.A. Goguen, J. Meseguer, *Completeness of many-sorted equational logic*, Houston J. Math. **11** (3), 307–334 (1985).
- [46] M. Broy, W. Dosch, H. Partsch, P. Pepper, M. Wirsing, *Existential quantifiers in abstract data types*, Lect. Notes in Comp. Sci. **71**, 73–87, (1979).
DOI: https://doi.org/10.1007/3-540-09510-1_7
- [47] С.С. Гончаров, *Модели данных и языки их описаний*, Вычисл. системы **107**, 52–70, (1985).
URL: <https://zbmath.org/0621.68020>
- [48] Н.Х. Касымов, А.С. Морозов, *Логические аспекты теории абстрактных типов данных*, Вычисл. системы **122**, 73–96 (1987).
URL: <https://zbmath.org/0712.68067>
- [49] M. Majster, *Data types, abstract data types and their specification problem*, Theor. Comp. Sci. **8** (1), 89–127 (1979).
DOI: [https://doi.org/10.1016/0304-3975\(79\)90059-8](https://doi.org/10.1016/0304-3975(79)90059-8)
- [50] D. Kapur, *Specifications of Majster's traversable stack and Veloso's traversable stack*, SIGPLAN Notes **14** (5), 46–53 (1979).
DOI: <https://doi.org/10.1145/988090.988096>
- [51] Н.Х. Касымов, *Об алгебрах с финитно аппроксимируемыми позитивно представляемыми обогащениями*, Алгебра и логика **26** (6), 715–730 (1987).
URL: <https://www.mathnet.ru/rus/al1999>
- [52] J.W. Lloyd, *Foundations of logic programming*, Springer-Verlag, Berlin, 1987.
DOI: <https://doi.org/10.1007/978-3-642-83189-8>
- [53] Н. Х. Касымов, *Позитивные модели и универсальные предложения*, Вычисл. системы **133**, 3–13 (1990).
URL: <https://zbmath.org/?q=an:0752.03016>
- [54] А.И. Мальцев, *Алгебраические системы*, Наука, М., 1970.
- [55] А.И. Мальцев, *Алгоритмы и рекурсивные функции*, Наука, М., 1986.
- [56] Н.Х. Касымов, Ф.Н. Ибрагимов, *Вычислимо отделимые модели*, СМФН **64** (4), 682–705 (2018).
DOI: <https://doi.org/10.22363/2413-3639-2018-64-4-682-705>
- [57] Н.Х. Касымов, *О числе Q -конгруэнций позитивных алгебр*, Алгебра и логика **31** (3), 297–305 (1992).
URL: <https://www.mathnet.ru/rus/al2194>

- [58] N. Kasymov, N. Karimova, B. Khoussainov, *Defining algorithmically presented structures in first-order logic*, Proceedings of the 39th Annual ACM/IEEE Symposium on Logic in Computer Science, 1–13, art. No. 47 (2024).
DOI: <https://doi.org/10.1145/3661814.3662120>
- [59] Н.Х. КАСЫМОВ, Б.М. ХУСАИНОВ, *Конечно порожденные перечислимые и абсолютно локально конечные алгебры*, Вычисл. системы **116**, 3–15 (1986).
URL: <http://old.math.nsc.ru/journals/vs/vs-cont1.html>
- [60] Н.Х. КАСЫМОВ, *Об алгебрах над негативными эквивалентностями*, Алгебра и логика **33** (1), 76–80 (1994).
URL: <https://www.mathnet.ru/rus/al2257>
- [61] Н.Х. КАСЫМОВ, *Логические спецификации эффективно отделимых моделей данных*, Изв. вузов. Матем. (6), 15–26 (2024).
DOI: <https://doi.org/10.26907/0021-3446-2024-6-15-26>

Надимулла Хабибуллаевич Касымов

Национальный университет Узбекистана им. Мирзо Улугбека,
ул. Университетская, д. 4, г. Ташкент, 100174, Республика Узбекистан,
e-mail: nadim59@mail.ru

Separable numberings of universal algebras

N.Kh. Kasymov

Abstract. The review outlines the foundations of the theory of separable numberings of universal algebras.

Keywords: separable numbered algebra, effectively separable numbering, negative and effectively separable approximability, translationally complete and pre-complete algebra, topological numbered algebra, subdirect indecomposability, Artinian congruence lattice, algebraic and logical data structure specifications.

DOI: 10.26907/2949-3919.2024.4.66-102

References

- [1] A.I. Malt'sev, *Constructive algebras. I*, Russian Math. Surveys, **16** (3), 77–129 (1961). DOI: <https://doi.org/10.1070/rm1961v016n03abeh001120>
- [2] Yu.L. Ershov, *Decidability problems and constructive models*, Nauka, M., 1980 [in Russian].
- [3] Yu.L. Ershov, *Theory of numberings*, in: E.R. Griffor (ed.), Handbook of computability theory (Stud. Logic Found. Math., 140), Elsevier, Amsterdam, 1999, 473–503. DOI: [https://doi.org/10.1016/S0049-237X\(99\)80030-5](https://doi.org/10.1016/S0049-237X(99)80030-5)
- [4] S.S. Goncharov, Yu.L. Ershov, *Constructive Models*, Siberian School of Algebra and Logic. Consultants Bureau, New York, 2000.
- [5] N.G. Khisamiev, *Arithmetic hierarchy of abelian groups*, Siberian Math. J. **29** (6), 987–999 (1988). DOI: <https://doi.org/10.1007/BF00972425>
- [6] S.P. Odintsov, V.L. Selivanov, *Arithmetic hierarchy and ideals of enumerated Boolean algebras*, Siberian Math. J. **30** (6), 952–960 (1989). DOI: <https://doi.org/10.1007/BF00970918>
- [7] V.A. Uspenskii, *On computable operations*, Dokl. AN SSSR **103** (5), 773–776 (1955) [in Russian]. URL: https://archive.org/details/uspensky-1955-dan-103-5-computable-operations/Uspensky_1955_DAN_103_5_TypeSet_by_Zolin/mode/2up

Acknowledgements. The work is performed under the development program of Volga Region Mathematical Center (agreement no. 075-02-2024-1438).

- [8] V.A. Uspenskii, *Systems of denumerable sets and their enumeration*, Dokl. AN SSSR **105** (6), 1155–1158 (1955) [in Russian].
URL: https://archive.org/details/uspensky-1955-dan-105-6-enumerable-sets-numerations/Uspensky_1955_DAN_105_6_Typeset_by_Zolin/mode/2up
- [9] A. Nerode, *General topology and partial recursive functionals*, Summaries Summer Inst. Symbolic Logic **1957**, 247–251 (1960).
- [10] A.I. Mal'tsev, *On the theory of computable families of objects*, Algebra Logic **3** (4), 5–31 (1964) [in Russian].
URL: <https://www.mathnet.ru/rus/al1010>
- [11] Yu.L. Ershov, *Theory of numberings*, Nauka, M., 1977 [in Russian].
- [12] N.Kh. Kasymov, *Recursively separable enumerated algebras*, Russian Math. Surveys **51** (3), 509–538 (1996).
DOI: <https://doi.org/10.1070/RM1996v051n03ABEH002913>
- [13] A.I. Mal'tsev, *Positive and negative enumerations*, Dokl. AN SSSR **160** (2), 278–280 (1965) [in Russian].
URL: <https://www.mathnet.ru/rus/dan30557>
- [14] A. S. Morozov, *A question of Higman*, Algebra Logic **29** (1), 22–26 (1990).
DOI: <https://doi.org/10.1007/BF01980217>
- [15] W. Baur, *Rekursive Algebren mit Kettenbedingungen*, Z. Math. Logik Grundlag. Math. **20** (1–3), 37–46 (1974).
DOI: <https://doi.org/10.1002/malq.19740200105>
- [16] W. Baur, *Über rekursive Strukturen*, Invent. Math. **23** (2), 89–95 (1974).
DOI: <https://doi.org/10.1007/BF01405162>
- [17] V.A. Uspenskii, A.L. Semenov, *Algorithm theory: key discoveries and applications*, Nauka, M., 1987 [in Russian].
- [18] J.C.C. McKinsey, *The decision problem for some classes of sentences without quantifiers*, J. Symbol. Logic **8** (3), 61–76 (1943).
DOI: <https://doi.org/10.2307/2268172>
- [19] J.A. Bergstra, J.V. Tucker, *A characterization of computable data types by means of a finite, equational specification method*, Lecture Notes in Comput. Sci. **85**, 76–90 (1980).
DOI: https://doi.org/10.1007/3-540-10003-2_61
- [20] N.Kh. Kasymov, *Homomorphisms onto negative algebras*, Algebra Logic **31** (2), 81–89 (1992).
DOI: <https://doi.org/10.1007/BF02259847>
- [21] N.Kh. Kasymov, *Homomorphisms onto effectively separable algebras*, Siberian Math. J. **57** (1), 36–50 (2016).
DOI: <https://doi.org/10.1134/S0037446616010055>

-
- [22] N.Kh. Kasymov, *A dual problem in the theory of constructive models*, Vychisl. Sist. **129**, 137–143 (1989) [in Russian].
URL: <https://zbmath.org/1052.03527>
- [23] U. Andrews, S. Lempp, J.S. Miller, K.M. Ng, L.S. Mauro, A. Sorbi, *Universal computably enumerable equivalence relations*, J. Symb. Logic **79** (1), 60–88 (2014).
DOI: <http://doi.org/10.1017/jsl.2013.8>
- [24] U. Andrews, A. Sorbi, *Joins and meets in the structure of ceers*, Computability **8** (3–4), 193–241 (2019).
DOI: <https://doi.org/10.3233/COM-180098>
- [25] U. Andrews, D.F. Belin, L. San Mauro, *On the structure of computable reducibility on equivalence relations of natural numbers*, J. Symb. Logic **88** (3), 1038–1063 (2023).
DOI: <https://doi.org/10.1017/jsl.2022.28>
- [26] N.Kh. Kasymov, F.N. Ibragimov, *Separable enumerations of division rings and effective embeddability of rings therein*, Siberian Math. J. **60** (1), 62–70 (2019).
DOI: <https://doi.org/10.1134/S0037446619010075>
- [27] N.Kh. Kasymov, A.S. Morozov, I.A. Khodzhamuratova, *T_1 -separable numberings of subdirectly indecomposable algebras*, Algebra Logic **60** (4), 263–278 (2021).
DOI: <https://doi.org/10.1007/s10469-021-09651-x>
- [28] N.Kh. Kasymov, R.N. Dadazhanov, S.K. Zhavliev, *Uniform m -equivalences and numberings of classical systems*, Sib. Electron. Math. Rep. **19** (1), 49–65 (2022).
DOI: <http://doi.org/10.33048/semi.2022.19.005>
- [29] N.Kh. Kasymov, *Enumerated algebras with uniformly recursive-separable classes*, Siberian Math. J. **34** (5), 869–882 (1993).
DOI: <https://doi.org/10.1007/BF00971403>
- [30] N.Kh. Kasymov, *Positive algebras with congruences of finite index*, Algebra Logic **30** (6), 190–199 (1991).
DOI: <https://doi.org/10.1007/BF01978852>
- [31] N.Kh. Kasymov, *Positive algebras with nonetherian congruence lattices*, Siberian Math. J. **33** (2), 338–341 (1992).
DOI: <https://doi.org/10.1007/BF00971109>
- [32] N.Kh. Kasymov, *Positive algebras with countable congruence lattices*, Algebra Logic **31** (1), 12–23 (1992).
DOI: <https://doi.org/10.1007/BF02259854>
- [33] R.N. Dadazhanov, N.Kh. Kasymov, I.A. Khodzhamuratova, *Uniformly computably separable algebras with effectively splittable families of negative congruences*, Siberian Math. J. **63** (3), 466–475 (2022).
DOI: <https://doi.org/10.1134/S0037446622030077>

- [34] C.G. Jockusch, *Semirecursive sets and positive reducibility*, Trans. Amer. Math. Soc. **131** (2), 420–436 (1968).
DOI: <https://doi.org/10.2307/1994957>
- [35] C.G. Jockusch, J.C. Owings, *Weakly semirecursive sets*, J. Symb. Logic **55** (2), 637–644 (1990).
DOI: <https://doi.org/10.2307/2274653>
- [36] N.Kh. Kasymov, A.S. Morozov, *Lower semilattices of separable congruences of numbered algebras*, Siberian Math. J. **64** (4), 864–876 (2023).
DOI: <https://doi.org/10.1134/S0037446623040080>
- [37] N.Kh. Kasymov, *Computably separable numberings of locally finite separable algebras*, Sib. Electron. Math. Rep. **21** (1), 315–346 (2024) [in Russian].
DOI: <https://doi.org/10.33048/semi.2024.21.024>
- [38] N.Kh. Kasymov, *Locally finite and residually finite unoids over computably separable equivalences*, MTCS **2** (1), 55–74 (2024) [in Russian].
DOI: <https://doi.org/10.26907/2949-3919.2024.1.55-73>
- [39] N.Kh. Kasymov, *Separation axioms and partitions of the set of natural numbers*, Siberian Math. J. **34** (3), 468–471 (1993).
DOI: <https://doi.org/10.1007/BF00971221>
- [40] N.Kh. Kasymov, I.A. Khodzhamuratova, *Topological spaces over algorithmic representations of universal algebras*, J. Math. Sci. **245** (3), 311–322 (2020).
DOI: <https://doi.org/10.1007/s10958-020-04692-6>
- [41] R.N. Dadazhanov, N.R. Karimova, N.Kh. Kasymov, *Effective compacts over co-immune sets*, Uzbek Math. J. **63** (3), 26–32 (2019).
DOI: <https://doi.org/10.29229/uzmj.2019-3-3>
- [42] B. Khoussainov, T. Slaman, P. Semukhin, $\prod_1^0$ -Presentations of Algebras, Arch. Math. Logic **45** (6), 769–781 (2006).
DOI: <https://doi.org/10.1007/s00153-006-0013-3>
- [43] A.I. Malcev, *On the immersion of an algebraic ring into a field*, Math. Ann. **113** (1), 686–691 (1937).
URL: <https://doi.org/10.1007/BF01571659>
- [44] S. Kamin, *Some definitions for algebraic data type specifications*, SIGPLAN Notes **14** (3), 28–37 (1979).
DOI: <https://doi.org/10.1145/988071.988075>
- [45] J.A. Goguen, J. Meseguer, *Completeness of many-sorted equational logic*, Houston J. Math. **11** (3), 307–334 (1985).
- [46] M. Broy, W. Dosch, H. Partsch, P. Pepper, M. Wirsing, *Existential quantifiers in abstract data types*, Lect. Notes in Comp. Sci. **71**, 73–87, (1979).
DOI: https://doi.org/10.1007/3-540-09510-1_7

-
- [47] S.S. Goncharov, *Data models and languages for their description*, Trans. Amer. Math. Soc. **143**, 139–152 (1989).
- [48] N.Kh. Kasymov, A.S. Morozov, *Logical aspects of the theory of abstract data types*, Vychisl. Sist. **122**, 73–96 (1987) [in Russian].
URL: <https://zbmath.org/0712.68067>
- [49] M. Majster, *Data types, abstract data types and their specification problem*, Theor. Comp. Sci. **8** (1), 89–127 (1979).
DOI: [https://doi.org/10.1016/0304-3975\(79\)90059-8](https://doi.org/10.1016/0304-3975(79)90059-8)
- [50] D. Kapur, *Specifications of Majster's traversable stack and Veloso's traversable stack*, SIGPLAN Notes **14** (5), 46–53 (1979).
DOI: <https://doi.org/10.1145/988090.988096>
- [51] N.Kh. Kasymov, *Algebras with finitely approximable positively representable enrichments*, Algebra Logic **26** (6), 441–450 (1987).
DOI: <https://doi.org/10.1007/BF01988315>
- [52] J.W. Lloyd, *Foundations of logic programming*, Springer-Verlag, Berlin, 1987.
DOI: <https://doi.org/10.1007/978-3-642-83189-8>
- [53] N.Kh. Kasymov, *Positive models and universal propositions*, Vychisl. Sist. **133**, 3–13 (1990) [in Russian].
URL: <https://zbmath.org/?q=an:0752.03016>
- [54] A.I. Mal'cev, *Algebraic Systems*, Springer-Verlag, New York–Heidelberg, 1973.
DOI: <https://doi.org/10.1007/978-3-642-65374-2>
- [55] A.I. Mal'cev, *Algorithms and recursive functions*, Wolters-Noordhoff Publishing, Groningen, 1970.
- [56] N.Kh. Kasymov, F.N. Ibragimov, *Computably separable models*, J. Math. Sci. **264** (6), 746–767 (2022).
DOI: <https://doi.org/10.1007/s10958-022-06033-1>
- [57] N.Kh. Kasymov, *The number of Q -congruences in positive algebras*, Algebra Logic **31** (3), 182–187 (1992).
DOI: <https://doi.org/10.1007/BF02259947>
- [58] N. Kasymov, N. Karimova, B. Khoussainov, *Defining algorithmically presented structures in first-order logic*, Proceedings of the 39th Annual ACM/IEEE Symposium on Logic in Computer Science, 1–13, art. No. 47 (2024).
DOI: <https://doi.org/10.1145/3661814.3662120>
- [59] N.Kh. Kasymov, B.M. Khoussainov, *Finitely generated enumerable and absolutely locally finite algebras*, Vychisl. Sist. **116**, 3–15 (1986) [in Russian].
URL: <https://zbmath.org/0646.03042>

- [60] N.Kh. Kasymov, *Algebras over negative equivalences*, Algebra Logic **33** (1), 46–48 (1994).
DOI: <https://doi.org/10.1007/BF00739416>
- [61] N.Kh. Kasymov, *Logical specifications of effectively separable data models*, Russ. Math. **68** (6), 11–20 (2024).
DOI: <https://doi.org/10.3103/S1066369X24700397>

Nadimulla Khabibullaevich Kasymov

National University of Uzbekistan,

4 Universitetskaya str., Tashkent 100174, Republic of Uzbekistan,

e-mail: nadim59@mail.ru