

Относительно элементарная определимость класса универсальных частичных графовых полуавтоматов в классе полугрупп

В.А. Молчанов, Р.А. Фарахутдинов

Аннотация. Работа посвящена алгебраической теории структуризованных автоматов. Рассматриваются полугрупповые автоматы без выходных сигналов над графами, которые называются графовыми полуавтоматами. Изучаются частичные графовые полуавтоматы, каждый входной сигнал которых является частичным эндоморфизмом графа состояний. В категории частичных графовых полуавтоматов над графом $G = (X, \rho)$ особое внимание уделяется полуавтомату $\text{PAtm}(G) = (G, \text{PEnd}(G), \star)$ с полугруппой $\text{PEnd}(G)$ всех частичных эндоморфизмов графа G , так как он является универсально притягивающим объектом в данной категории и называется универсальным частичным графовым полуавтоматом. Основным результатом работы состоит в доказательстве относительно элементарной определимости класса универсальных частичных графовых полуавтоматов над нетривиальными рефлексивными графами в классе полугрупп и ее приложений.

Ключевые слова: полуавтомат, граф, частичный эндоморфизм, относительно элементарная определимость.

DOI: 10.26907/2949-3919.2024.4.103-123

Введение

Особое место в алгебраической теории автоматов занимает исследование автоматов в категориях [1], т. е. автоматов, основные множества которых наделены дополнительными математическими структурами из категории $\mathbf{K}$, а функции переходов и выходов являются морфизмами этой категории. В настоящей работе исследуются полугрупповые автоматы без выходных сигналов в категории графов – графовые полуавтоматы [2], у которых множество состояний наделено структурой графа, сохраняющегося функциями переходов полуавтомата.

При исследовании таких математических объектов естественно возникает интерес к их изучению с помощью производных алгебраических систем, связанных специальным образом с исходными объектами. Это направление имеет непосредственное отношение к проблеме С. Улама [3] характеристики математических объектов с помощью алгебр эндоморфизмов и автоморфизмов. Принципиальный вопрос состоит в том, как точно производная

алгебраическая система определяет исходный объект. Для решения этого вопроса проводятся исследования, которые позволяют оценить взаимосвязь исходного объекта с производной алгебраической системой. В частности, для групп автоморфизмов алгебраических систем, полугрупп эндоморфизмов графов, колец эндоморфизмов модулей подобные исследования проводились Б.И. Плоткиным [4], А.Г. Пинусом [5, 6], Ю.М. Важениным [7, 8], Л.М. Глускиным [9, 10], А.В. Михалёвым [11] и другими.

Хорошо известно [12], что эффективным способом решения проблем элементарной классификации исходных объектов с помощью теорий первого порядка производных алгебраических систем и проблем разрешимости теорий первого порядка производных алгебраических систем является метод относительно элементарной определимости одного класса моделей $\mathbf{K}$ в другом классе моделей $\mathbf{K}_1$, суть которого заключается в построении изоморфной копии исходной модели $A \in \mathbf{K}$ в ее производной алгебраической системе $S(A) \in \mathbf{K}_1$ с помощью средств узкого исчисления предикатов (УИП) сигнатуры класса $\mathbf{K}_1$ и некоторых фиксированных элементов модели $S(A)$.

В работе [13] доказана относительно элементарная определимость класса универсальных графовых полуавтоматов над нетривиальными квазибесконтурными рефлексивными графами в классе полугрупп. Настоящая работа продолжает исследование графовых полуавтоматов. Здесь рассматриваются частичные графовые полуавтоматы, т. е. такие полуавтоматы, у которых входные сигналы являются частичными эндоморфизмами графа состояний. Для класса универсальных частичных графовых полуавтоматов над нетривиальными рефлексивными графами решается вопрос его относительно элементарной определимости в классе полугрупп. Приводятся приложения этого результата к исследованию взаимосвязи свойств таких полуавтоматов и их полугрупп входных сигналов.

1. Основные понятия и определения

В работе используется общепринятая терминология теории алгебраических систем из [14], теории графов из [15], теории полугрупп из [16] и теории автоматов из [1].

Далее всюду под графом будем понимать ориентированный граф. Граф $G = (X, \rho)$ называется рефлексивным, если у каждой его вершины есть петля, т. е. для любого $x \in X$ выполняется условие $(x, x) \in \rho$. Граф $G = (X, \rho)$ называется симметричным, если для любых вершин $x, y \in X$ из условия $(x, y) \in \rho$ следует $(y, x) \in \rho$, т. е. у каждой дуги есть встречная дуга (петли встречны сами себе). Граф $\tilde{G} = (X, \rho^{-1})$ называется двойственным графом для графа $G = (X, \rho)$. Граф $G = (X, \rho)$ называется тривиальным, если $\rho = \emptyset$, или $\rho = \Delta_X$, или $\rho = X \times X$. Дугу графа будем называть собственной, если у нее нет встречной дуги.

Следуя [17], под частичным преобразованием множества X понимается однозначное бинарное отношение $f \subset X \times X$ с областью определения $\text{dom } f$ и множеством значений $\text{Im } f$. Частичное преобразование f множества X называется частичным эндоморфизмом графа $G = (X, \rho)$, если для любых $x, y \in \text{dom } f$ из $(x, y) \in \rho$ следует $(f(x), f(y)) \in \rho$.

Множество всех частичных эндоморфизмов графа G с композицией образуют полугруппу $\text{PEnd}(G)$, которая называется полугруппой частичных эндоморфизмов графа G .

В работе под частичным полуавтоматом понимается алгебраическая система $A = (X, S, \star)$, состоящая из непустого множества состояний X , полугруппы входных сигналов $S = (S, \cdot)$ и частичной функции переходов $\star : X \times S \rightarrow X$, согласованной с операцией умножения полугруппы по правилу $x \star (s_1 \cdot s_2) = (x \star s_1) \star s_2$ для любых $x \in X$, $s_1, s_2 \in S$, удовлетворяющих условию $(x, s_1), (x \star s_1, s_2), (x, s_1 \cdot s_2) \in \text{dom } \star$. Для каждого входного сигнала $s \in S$ частичного полуавтомата определена частичная функция переходов $\delta_s(x) = x \star s$, где $(x, s) \in \text{dom } \star$.

Далее рассматриваются полуавтоматы $A = (X, S, \star)$ без равнодействующих входных сигналов, в которых разные входные сигналы $s_1, s_2 \in S$ определяют разные функции переходов $\delta_{s_1} \neq \delta_{s_2}$. Для таких полуавтоматов входные сигналы можно отождествлять с определяемыми ими функциями переходов и полугруппу входных сигналов S рассматривать как полугруппу частичных преобразований множества состояний X . Полугруппа входных сигналов полуавтомата A обозначается символом $\text{Inp}(A)$.

Частичный полуавтомат $A = (X, S, \star)$ называется графовым, если множество его состояний X наделено такой структурой графа $G = (X, \rho)$, что для любого входного сигнала $s \in S$ частичная функция переходов δ_s является частичным эндоморфизмом графа G . Символически такие полуавтоматы обозначаются $A = (G, S, \star)$. Для графового полуавтомата $A = (G, S, \star)$ полуавтомат $\tilde{A} = (\tilde{G}, S, \star)$ называется двойственным полуавтоматом.

Согласно [1] частичный графовый полуавтомат $\text{PAtm}(G) = (G, \text{PEnd}(G), \star)$ с полугруппой входных сигналов $\text{PEnd}(G)$ и функцией переходов $x \star s = s(x)$ (здесь $x \in X$, $s \in S$ и $(x, s) \in \text{dom } \star$) является универсально притягивающим объектом в категории частичных графовых полуавтоматов над графом G и называется универсальным частичным графовым полуавтоматом.

Изоморфизмом графового полуавтомата $A_1 = (G_1, S_1, \star_1)$ над графом $G_1 = (X_1, \rho_1)$ на графовый полуавтомат $A_2 = (G_2, S_2, \star_2)$ над графом $G_2 = (X_2, \rho_2)$ называется пара отображений $\gamma = (f, g)$, где $f : G_1 \rightarrow G_2$ – изоморфизм графа G_1 на граф G_2 , $g : S_1 \rightarrow S_2$ – изоморфизм полугруппы S_1 на полугруппу S_2 , и для любых $x \in X$, $s \in S$ выполняются условия $f(x \star_1 s) = f(x) \star_2 g(s)$.

2. Относительно элементарная определимость

Введем следующие формулы языка элементарной теории полугрупп $\mathbf{L}_S$:

$$\begin{aligned} I(x) &= (x \neq 0 \wedge x \cdot x = x), \\ J(x) &= (I(x) \wedge (\forall y)(I(y) \wedge x \cdot y = y \Rightarrow y \cdot x = x)), \\ M(x) &= (J(x) \wedge (\forall y)(J(y) \wedge y \cdot x \neq 0 \Rightarrow y \cdot x = y)). \end{aligned}$$

Лемма 1. Для полугруппы $\text{PEnd}(G)$ частичных эндоморфизмов графа $G = (X, \rho)$ спра-

ведливы следующие утверждения:

- 1) для элемента $\varphi \in \text{PEnd}(G)$ выполнимость условия $J(\varphi)$ равносильна тому, что φ является непустым идемпотентным частичным эндоморфизмом графа G с одноэлементным множеством значений $\text{Im } \varphi = \{a\}$ для некоторого $a \in X$;
- 2) для элемента $\varphi \in \text{PEnd}(G)$ выполнимость условия $M(\varphi)$ равносильна тому, что φ является частичным одноэлементным тождественным эндоморфизмом графа G вида $\varphi = \begin{pmatrix} a \\ a \end{pmatrix}$ для некоторого $a \in X$.

Доказательство. Пусть частичный эндоморфизм $\varphi \in \text{PEnd}(G)$ удовлетворяет условию $J(\varphi)$. Тогда φ есть идемпотентный частичный эндоморфизм графа G с множеством значений $\text{Im } \varphi$, для которого $|\text{Im } \varphi| > 0$. Следовательно, $\text{Im } \varphi \subset \text{dom } \varphi$ и $\varphi \upharpoonright \text{Im } \varphi = \Delta_{\text{Im } \varphi}$. Для вершины $x \in \text{Im } \varphi$ выполняется $x \in \varphi^{-1}(x)$, и частичное преобразование $\psi = \begin{pmatrix} \varphi^{-1}(x) \\ x \end{pmatrix}$ является ненулевым идемпотентным частичным эндоморфизмом графа G , для которого выполняется равенство $\varphi\psi = \psi\varphi = \psi$. Так как полугруппа $\text{PEnd}(G)$ содержит все частичные тождественные эндоморфизмы графа G , в том числе $\Delta_{\varphi^{-1}(x)}$, то композиция $\psi = \Delta_{\varphi^{-1}(x)} \varphi$ тоже принадлежит полугруппе $\text{PEnd}(G)$. Тогда из условия $J(\varphi)$ следует равенство $\psi\varphi = \varphi$. Значит, $\varphi = \psi$ есть частичный эндоморфизм графа G с одноэлементным множеством значений $\text{Im } \varphi = \{x\}$.

Обратно, пусть частичный эндоморфизм $\varphi \in \text{PEnd}(G)$ имеет вид $\varphi = \begin{pmatrix} \varphi^{-1}(x) \\ x \end{pmatrix}$ для некоторого $x \in X$, и ненулевым идемпотентным частичным эндоморфизмом ψ графа G удовлетворяет условию $\varphi\psi = \psi$. Тогда $x \in \text{dom } \psi$, $\text{dom } \psi = \text{dom } \varphi = \varphi^{-1}(x)$. Следовательно, $\psi = \varphi$, $\psi\varphi = \varphi^2 = \varphi$. Значит, выполняется условие $J(\varphi)$. Таким образом, утверждение 1) доказано.

Пусть частичный эндоморфизм $\varphi \in \text{PEnd}(G)$ удовлетворяет условию $M(\varphi)$. Тогда φ есть идемпотентный частичный эндоморфизм графа G с одноэлементным множеством значений $\text{Im } \varphi = \{x_\varphi\}$ для некоторого $x_\varphi \in X$, и для любого идемпотентного частичного эндоморфизма ψ графа G с одноэлементным множеством значений $\text{Im } \psi = \{x_\psi\}$ ($x_\psi \in X$) из условия $\psi\varphi \neq 0$ следует $\psi\varphi = \psi$. Условие $\psi\varphi \neq 0$ эквивалентно тому, что $x_\psi \in \text{dom } \varphi$, а равенство $\psi\varphi = \psi$ равносильно тому, что $\text{Im } \varphi = \text{Im } \psi$. Следовательно, $x_\varphi = x_\psi$. Поскольку полугруппа $\text{PEnd}(G)$ содержит все частичные тождественные эндоморфизмы графа G , то для произвольной вершины $x \in \text{dom } \varphi$ частичный эндоморфизм $\psi = \begin{pmatrix} x \\ x \end{pmatrix}$ принадлежит полугруппе $\text{PEnd}(G)$ и удовлетворяет условию $\psi\varphi \neq 0$. Отсюда следует, что $x = x_\varphi$ и, в силу произвольности выбора $x \in \text{dom } \varphi$, выполняется $\text{dom } \varphi = \{x_\varphi\}$ и, как результат, $\varphi = \begin{pmatrix} x_\varphi \\ x_\varphi \end{pmatrix}$.

Обратно, пусть $\varphi \in \text{PEnd}(G)$ есть частичный одноэлементный тождественный эндо-

морфизм графа G вида $\varphi = \begin{pmatrix} x_\varphi \\ x_\varphi \end{pmatrix}$ для некоторого $x_\varphi \in X$. Тогда для любого идемпотентного частичного эндоморфизма ψ графа G с одноэлементным множеством значений $\text{Im } \psi = \{x_\psi\}$ из условия $\psi\varphi \neq 0$ следует $x_\psi = x_\varphi$. Следовательно, $\psi\varphi = \psi$. Значит, выполняется условие $M(\varphi)$. Таким образом, утверждение 2) доказано. $\square$

Для элемента $x \in X$ символом $\bar{x}$ обозначим одноэлементное тождественное преобразование $\begin{pmatrix} x \\ x \end{pmatrix}$ множества X . Легко видеть, что справедливо следующее утверждение.

Лемма 2. Для универсального частичного графового полуавтомата $\text{PAtm}(G) = (G, \text{PEnd}(G), \star)$ над графом $G = (X, \rho)$ при любых $x, y \in X$ и $s \in \text{PEnd}(G)$ условие $\bar{x} \cdot s \cdot \bar{y} \neq \emptyset$ равносильно тому, что $s(x) = y$, т. е. $x \star s = y$.

Доказательство. Пусть для произвольных $x, y \in X$ и $s \in \text{PEnd}(G)$ выполняется условие $\bar{x} \cdot s \cdot \bar{y} \neq \emptyset$. Это означает, что $x \in \text{dom } s$, $y = s(x)$. Тогда по определению функции переходов $\star$ графового полуавтомата $\text{PAtm}(G)$ получим $x \star s = s(x) = y$. $\square$

Для частичного полуавтомата $A = (X, S, \star)$ с полугруппой входных сигналов S на множестве состояний X определяются следующие канонические отношения:

$$\begin{aligned} \beta &= \{((x, y), (u, v)) \in X^2 \times X^2 : (\exists s \in S)(x \star s = u \wedge y \star s = v)\}, \\ P &= \{(x, y) \in X^2 \setminus \Delta_X : X^2 \subset \beta(x, y)\}, \\ R &= \{(x, y) \in X^2 : X^2 \setminus \Delta_X \subset \beta^{-1}(x, y)\}, \\ Q &= X^2 \setminus (P \cup R). \end{aligned}$$

Справедлива следующая лемма.

Лемма 3. Для универсального частичного графового полуавтомата $\text{PAtm}(G) = (G, \text{PEnd}(G), \star)$ над нетривиальным рефлексивным графом $G = (X, \rho)$ справедливы утверждения:

- 1) для элементов $x, y \in X$ условие $(x, y) \in P$ равносильно тому, что вершины x, y несмежны в графе G ;
- 2) для элементов $x, y \in X$ условие $(x, y) \in R$ равносильно тому, что вершины x, y в графе G соединяются встречными дугами;
- 3) для элементов $x, y \in X$ условие $(x, y) \in Q$ равносильно тому, что вершины x, y в графе G соединяются собственной дугой.

Доказательство. Пусть для элементов $x, y \in X$ выполняется условие $(x, y) \in P$. Поскольку граф G нетривиальный рефлексивный, найдутся такие элементы $c, d \in X$, что $(c, d) \notin \rho$. По определению отношения P это означает, что в полугруппе $\text{PEnd}(G)$ существуют частичные эндоморфизмы, отображающие пару вершин (x, y) в пару несмежных вершин

(c, d) . Следовательно, вершины x и y также несмежны. В обратную сторону очевидно. Таким образом, утверждение 1) доказано.

Пусть для элементов $x, y \in X$ выполняется условие $(x, y) \in R$. Если $x = y$, то утверждение 2) выполняется, поскольку петля встречна сама себе. Пусть теперь $x \neq y$. Поскольку граф G нетривиальный рефлексивный, то в нем найдется дуга, не являющаяся петлей, т. е. некоторая дуга $(a, b) \in \rho$, $a \neq b$. По определению отношения R это означает, что в полугруппе $\text{PEnd}(G)$ существуют частичные эндоморфизмы $\begin{pmatrix} a & b \\ x & y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b & a \\ x & y \end{pmatrix} \in \text{PEnd}(G)$.

Следовательно, $(x, y) \in \rho \cap \rho^{-1}$. В обратную сторону доказательство очевидно. Таким образом, утверждение 2) доказано.

Пусть для элементов $x, y \in X$ выполняется условие $(x, y) \in Q$. Так как $(x, y) \notin P$, то из пункта 1) следует, что x и y смежны. Поскольку, кроме этого, $(x, y) \notin R$, то из пункта 2) следует, что x и y не соединяются встречными дугами. Следовательно, x и y соединяются собственной дугой. $\square$

Введем следующие формулы языка элементарной теории полугрупп L_S :

$$\begin{aligned} \Pi(x, y, u, v) &= (M(x) \wedge M(y) \wedge M(u) \wedge M(v) \wedge (\exists s)(x \cdot s \cdot u \neq 0 \wedge y \cdot s \cdot v \neq 0)), \\ \Phi_P(x, y) &= (x \neq y \wedge M(x) \wedge M(y) \wedge (\forall u, v)(M(u) \wedge M(v) \Rightarrow \Pi(x, y, u, v))), \\ \Phi_R(x, y) &= (M(x) \wedge M(y) \wedge (\forall u, v)(M(u) \wedge M(v) \wedge u \neq v \Rightarrow \Pi(u, v, x, y))), \\ \Phi_Q(x, y) &= \neg \Pi(x, y, y, x), \\ \Phi_0(x, y) &= \Phi_Q(x, y) \vee (\neg(\exists u, v) \Phi_Q(u, v) \wedge x \neq y \wedge \Phi_R(x, y)), \\ D(x, y, z) &= (M(x) \wedge M(z) \wedge x \cdot y \cdot z \neq 0). \end{aligned}$$

Имеет место следующая лемма.

Лемма 4. Для универсального частичного графового полуавтомата $\text{PAtm}(G)$ над нетривиальным рефлексивным графом $G = (X, \rho)$ с полугруппой входных сигналов $S = \text{PEnd}(G)$ справедливы утверждения:

- 1) для элементов $x_i \in S$, $i = \overline{1, 4}$ условие $\Pi(x_1, x_2, x_3, x_4)$ равносильно тому, что для некоторых элементов $a_i \in X$, $i = \overline{1, 4}$ и $s \in \text{PEnd}(G)$ выполняется $x_i = \overline{a_i}$, $i = \overline{1, 4}$ и $a_1 \star s = a_3$, $a_2 \star s = a_4$;
- 2) для элементов $x, y \in S$ условие $\Phi_P(x, y)$ равносильно тому, что выполняется $x = \overline{a}$, $y = \overline{b}$ для некоторых несмежных вершин $a, b \in X$ графа G ;
- 3) для элементов $x, y \in S$ условие $\Phi_R(x, y)$ равносильно тому, что выполняется $x = \overline{a}$, $y = \overline{b}$ для некоторых соединенных встречными дугами вершин $a, b \in X$ графа G ;
- 4) для элементов $x, y \in S$ условие $\Phi_Q(x, y)$ равносильно тому, что выполняется $x = \overline{a}$, $y = \overline{b}$ для некоторых соединенных собственной дугой вершин $a, b \in X$ графа G ;
- 5) формула $\Phi_0(x, y)$ выполнима в полугруппе $\text{PEnd}(G)$.

Доказательство. Пусть для элементов $x_i \in S, i = \overline{1, 4}$ выполняется условие $\Pi(x_1, x_2, x_3, x_4)$. Отсюда по определению следует, что для элементов x_i выполняются формулы $M(x_i)$. Тогда по [лемме 1](#) выполняются равенства $x_i = \bar{a}_i$ для некоторых элементов $a_i \in X$. Более того, найдется $s \in S$ такой, что $\bar{a}_1 \cdot s \cdot \bar{a}_3 \neq 0$ и $\bar{a}_2 \cdot s \cdot \bar{a}_3 \neq 0$. Отсюда по [лемме 2](#) получаем, что $a_1 \star s = a_3, a_2 \star s = a_4$. Утверждение 1) доказано.

Утверждения 2), 3) следуют непосредственно из [леммы 3](#) и определения предикатов Φ_P, Φ_R , поскольку в этих формулах выражены теоретико-множественные определения этих предикатов. В силу [леммы 3](#) для элементов $x, y \in S$ условие $\Phi(x, y) = \neg\Phi_P(x, y) \wedge \neg\Phi_R(x, y)$ равносильно тому, что выполняется $x = \bar{a}$ и $y = \bar{b}$ для некоторых соединенных собственной дугой вершин $a, b \in X$ графа G . С другой стороны, в силу [леммы 3](#) в полугруппе S условие $\Pi(x, y, y, x)$ равносильно выполнимости формулы $\Phi_P(x, y) \vee \Phi_R(x, y)$. Отсюда следует, что условие $\Phi_Q(x, y)$ равносильно тому, что вершины a и b в графе G соединяются собственной дугой. Утверждение 4) доказано.

Докажем утверждение 5). Если нетривиальный рефлексивный граф G не симметричный, то в нем найдется собственная дуга $(a, b) \in \rho$. Тогда для элементов $x = \bar{a} \in S, y = \bar{b} \in S$ выполняется формула $\Phi_Q(x, y)$ и, следовательно, выполняется формула $\Phi_0(x, y)$. Если же граф G симметричный, то, очевидно, в нем нет ни одной собственной дуги, следовательно не найдется элементов $(u, v) \in S$, для которых выполняется формула $\Phi_Q(u, v)$. При этом в симметричном графе каждая дуга имеет встречную. Тогда по условию 3) для некоторых элементов $(x, y) \in S$ выполняется формула $\Phi_R(x, y)$ и, следовательно, выполняется формула $\Phi_0(x, y)$. Таким образом, формула $\Phi_0(x, y)$ в любом случае выполнима в полугруппе S . $\square$

Следующий результат доказывает относительно элементарную определимость класса универсальных частичных графовых полуавтоматов над нетривиальными рефлексивными графами в классе полугрупп.

Теорема 5. Для любого универсального частичного графового полуавтомата $\text{PAtm}(G)$ над нетривиальным рефлексивным графом $G = (X, \rho)$ выполняются следующие условия:

- 1) множество $\bar{X} = \{s \in \text{PEnd}(G) \mid M(s)\}$ непусто;
- 2) формула $D(x, y, z)$ определяет тернарное отношение $\bar{\star} \subset \bar{X} \times S \times \bar{X}$, удовлетворяющее условию $(x, y, z_1), (x, y, z_2) \in \bar{\star} \Rightarrow z_1 = z_2$;
- 3) в полугруппе входных сигналов $\text{PEnd}(G)$ найдутся такие элементы x_0, y_0 , что формула $\Pi(x_0, y_0, x, y)$ задает бинарное отношение $\bar{\rho}$ на множестве $\bar{X}$, для которого графовый полуавтомат $\bar{A} = (\bar{G}, \text{PEnd}(G), \bar{\star})$ над графом $\bar{G} = (\bar{X}, \bar{\rho})$ изоморфен полуавтомату $\text{PAtm}(G)$.

Доказательство. Пусть $A = \text{PAtm}(G)$ – универсальный частичный графовый полуавтомат над нетривиальным рефлексивным графом $G = (X, \rho)$ с полугруппой входных сигналов $S = \text{PEnd}(G)$. Так как полугруппа S содержит все тождественные преобразования $\bar{x}$ для всех вершин $x \in X$, то по [лемме 1](#), условие 1) выполняется, т. е. множество

$\overline{X} = \{s \in \text{PEnd}(G) \mid M(s)\}$ непусто. Помимо этого, соответствие $x \mapsto \overline{x}$ ($x \in X$) определяет биективное отображение f множества вершин X на множество $\overline{X}$ всех одноэлементных частичных тождественных преобразований из S .

Формула $D(x, y, z)$ определяет в полугруппе S тернарное отношение $\overline{\star} \subseteq \overline{X} \times S \times \overline{X}$, так как для любых $x, y, z \in S$ из $D(x, y, z)$ следует $x, z \in \overline{X}$. Тогда $x = \overline{u}$, $z = \overline{v}$ для некоторых $u, v \in X$. Кроме того, из выполнимости формулы $D(x, y, z)$ получаем

$$x \cdot y \cdot z = \overline{u} \cdot y \cdot \overline{v} = \begin{pmatrix} u \\ u \end{pmatrix} \cdot y \cdot \begin{pmatrix} v \\ v \end{pmatrix} \neq 0$$

и, следовательно, по лемме 2 $u \in \text{dom } y$ и $v = y(u)$. Таким образом, $z = \overline{y(u)}$. Поскольку $y \in S$ – преобразование множества X , удовлетворяющее свойству однозначности, то из $(x, y, z_1), (x, y, z_2) \in \overline{\star}$ следует равенство $z_1 = z_2$. Тогда отношение $\overline{\star}$ можно рассматривать как частичное отображение множества $\overline{X} \times S$ в множество $\overline{X}$. Значит, условие 2) выполняется.

Так как по условию теоремы $G = (X, \rho)$ – нетривиальный рефлексивный граф, то в нем найдется дуга $(a_0, b_0) \in \rho$, не являющаяся петлей (т. е. $a_0 \neq b_0$). Если граф G симметричный, то пусть (a_0, b_0) – это произвольная дуга $(a_0, b_0) \in (\rho \cap \rho^{-1}) \setminus \Delta_X$, в противном случае пусть (a_0, b_0) – произвольная собственная дуга $(a_0, b_0) \in \rho \setminus \rho^{-1}$. Обозначим, $f(a_0) = \overline{a_0} = x_0$, $f(b_0) = \overline{b_0} = y_0$.

Формула $\Pi(x_0, y_0, x, y)$ определяет в полугруппе S бинарное отношение $\overline{\rho} \subseteq \overline{X} \times \overline{X}$, так как для любых $x, y \in S$ из $\Pi(x_0, y_0, x, y)$ следует $x, y \in \overline{X}$.

Таким образом, получаем частичный графовый полуавтомат $\overline{A} = (\overline{G}, S, \overline{\star})$ над графом $\overline{G} = (\overline{X}, \overline{\rho})$. Покажем, что этот полуавтомат изоморфен исходному универсальному частичному графовому полуавтомату $A = \text{PAtm}(G)$ над нетривиальным рефлексивным графом $G = (X, \rho)$.

Изоморфизм γ графовых полуавтоматов $\text{PAtm}(G)$ и $\overline{A} = (\overline{G}, S, \overline{\star})$ определяется как изоморфизм двухосновных алгебраических систем $\text{PAtm}(G)$ и $\overline{A}$ упорядоченной парой $\gamma = (f_1, f_2)$ биекций $f_1 : G \rightarrow \overline{G}$, $f_2 : S \rightarrow S$, удовлетворяющих при любых $x, y \in X$, $s, t \in S$ условиям:

$$\begin{aligned} (x, y) \in \rho &\iff (f_1(x), f_1(y)) \in \overline{\rho}, \\ f_2(s \cdot t) &= f_2(s) \cdot f_2(t), \\ f_1(x \star s) &= f_1(x) \overline{\star} f_2(s). \end{aligned}$$

Положим в нашем случае $f_1 = f$, $f_2 = \Delta_S$ и покажем, что $\gamma = (f, \Delta_S)$ является изоморфизмом $\text{PAtm}(G)$ на $\overline{A}$.

Во-первых, покажем, что отображение f определяет изоморфизм графа $G = (X, \rho)$ на граф $\overline{G} = (\overline{X}, \overline{\rho})$, т. е. для любых $x, y \in X$ выполняется условие $(x, y) \in \rho \iff (f(x), f(y)) \in \overline{\rho}$. Пусть для произвольных вершин $x, y \in X$ выполняется $(x, y) \in \rho$. Тогда для фиксирован-

ных ранее элементов $a_0, b_0 \in X$ существует частичный эндоморфизм $\varphi = \begin{pmatrix} a_0 & b_0 \\ x & y \end{pmatrix} \in S$, для которого выполняются следующие равенства:

$$\begin{aligned} x_0 \cdot \varphi \cdot \bar{x} &= \bar{a}_0 \cdot \varphi \cdot \bar{x} \neq 0, \\ y_0 \cdot \varphi \cdot \bar{y} &= \bar{b}_0 \cdot \varphi \cdot \bar{y} \neq 0, \end{aligned}$$

т. е. по [лемме 2](#) $x = \varphi(a_0), y = \varphi(b_0)$. Это означает, что для элементов $f(x) = \bar{x}, f(y) = \bar{y}$ из множества $\bar{X}$ выполняется формула $\Pi(x_0, y_0, f(x), f(y))$, т. е. по определению отношения $\bar{\rho}$ выполняется $(f(x), f(y)) \in \bar{\rho}$.

С другой стороны, пусть для элементов $f(x) = \bar{x}, f(y) = \bar{y}$ из множества $\bar{X}$ выполняется $(f(x), f(y)) \in \bar{\rho}$. Покажем, что $(x, y) \in \rho$. По определению бинарного отношения $\bar{\rho}$ для некоторого частичного эндоморфизма $s \in S$ выполняются условия $x_0 \cdot s \cdot \bar{x} \neq 0, y_0 \cdot s \cdot \bar{y} \neq 0$. Значит, по [лемме 2](#) $s(a_0) = x$ и $s(b_0) = y$. Так как $(a_0, b_0) \in \rho$ и s – частичный эндоморфизм графа $G = (X, \rho)$, то по определению частичного эндоморфизма $(x, y) \in \rho$. Таким образом, f – изоморфизм графа $G = (X, \rho)$ на граф $\bar{G} = (\bar{X}, \bar{\rho})$. Следовательно, $\bar{G} = (\bar{X}, \bar{\rho})$ также является нетривиальным рефлексивным графом.

Покажем, что изоморфизм γ согласован с функциями переходов полуавтоматов $\text{PAtm}(G)$ и $\bar{A}$. По определению функции переходов $\star$ в универсальном частичном графовом полуавтомате $\text{PAtm}(G)$ для любых $(x, s) \in \text{dom } \star$ выполняется $x \star s = s(x)$. Тогда по построению отображения f выполняется равенство $f(x \star s) = f(s(x)) = \overline{s(x)}$. С другой стороны, по определению функции переходов $\bar{\star}$ в полуавтомате $\bar{A}$ выполняется равенство $f(x) \bar{\star} \Delta_S(s) = \bar{x} \bar{\star} s = \overline{s(x)}$. Следовательно, $f(x \star s) = f(x) \bar{\star} \Delta_S(s)$ для любых $(x, s) \in \text{dom } \star$ (где $x \in X, s \in S$).

Значит, полуавтоматы $\text{PAtm}(G)$ и $\bar{A}$ изоморфны. $\square$

Таким образом, доказанная выше теорема показывает, что универсальный частичный графовый полуавтомат над нетривиальным рефлексивным графом с точностью до изоморфизма представляется как алгебраическая система, построенная в полугруппе входных сигналов этого полуавтомата.

С теоретико-модельной точки зрения частичный графовый полуавтомат $A = (G, S, \star)$ над графом $G = (X, \rho)$ с полугруппой входных сигналов $S = (S, \cdot)$ и частичной функцией переходов $\star : X \times S \rightarrow X$ рассматривается как двухосновная алгебраическая Ω -система $\mathbf{A} = (X, S, \Omega)$ с двумя базисными множествами X, S и сигнатурой $\Omega = \{B, \cdot, \star\}$. Здесь X – множество вершин графа состояний G , B – бинарный предикатный символ отношения смежности на множестве X , $\cdot$ – бинарный функциональный символ композиции элементов полугруппы, $\star$ – бинарный функциональный символ функции переходов. Элементарная теория универсальных частичных графовых полуавтоматов определяется в стиле аксиоматики Гильберта геометрии плоскости с помощью языка УИП с двухсортными переменными $\mathbf{L}_A$. Алфавит такого языка состоит из:

1) счетного множества индивидуальных переменных первого сорта для обозначения

- элементов множества вершин графа состояний полуавтомата;
- 2) счетного множества индивидуальных переменных второго сорта для обозначения входных сигналов полуавтомата;
 - 3) из двухместного предикатного символа B типа $(1, 1)$ для обозначения отношения смежности на множестве вершин графа состояний полуавтомата;
 - 4) из двухместного функционального символа $\cdot$ типа $(2, 2, 2)$ для обозначения композиции в полугруппе входных сигналов полуавтомата;
 - 5) из двухместного функционального символа $\star$ типа $(1, 2, 1)$ для обозначения функции переходов полуавтомата;
 - 6) из конечного множества логических и технических символов, таких как

$$\neg, \wedge, \vee, \implies, \iff, \forall^1, \exists^1, \forall^2, \exists^2, = \text{ и } (,).$$

Для языка $\mathbf{L_A}$ термы и формулы определяются аналогично тому, как это делается в работе [13]. Двойственной для формулы Φ называется формула $\bar{\Phi}$, которая получается из формулы Φ заменой всех ее атомарных подформул вида $B(t_1, t_2)$ формулами $B(t_2, t_1)$.

Формула Φ языка $\mathbf{L_A}$ истинна на алгебраической Ω -системе $\mathbf{A}$, если она образует истинное утверждение об этой системе при любой интерпретации ее свободных индивидуальных переменных в алгебраической системе $\mathbf{A}$. Такой факт символически описывается формулой $\mathbf{A} \models \Phi$.

Формула языка $\mathbf{L_A}$ без свободных переменных называется предложением. Множество всех предложений языка $\mathbf{L_A}$, истинных на алгебраической системе $\mathbf{A}$, обозначается через $\text{Th}(\mathbf{A})$ и называется элементарной теорией алгебраической Ω -системы $\mathbf{A}$. Полуавтоматы $\mathbf{A}$, $\mathbf{A}'$ называются элементарно эквивалентными (обозначается $\mathbf{A} \equiv \mathbf{A}'$), если $\text{Th}(\mathbf{A}) = \text{Th}(\mathbf{A}')$. Это означает, что полуавтоматы $\mathbf{A}$, $\mathbf{A}'$ не могут быть различимы с помощью свойств, выраженных формулами языка УИП $\mathbf{L_A}$.

Теорема 6. Для любой формулы Φ языка элементарной теории графовых полуавтоматов $\mathbf{L_A}$ существует эффективно построенная формула $\bar{\Phi}$ языка элементарной теории полугрупп $\mathbf{L_S}$ такая, что если формула Φ истинна на универсальном частичном графовом полуавтомате $\mathbf{A} = \text{PAtm}(G)$ над нетривиальным рефлексивным графом G , то формула $\bar{\Phi}$ истинна на его полугруппе входных сигналов $\text{Inp}(\mathbf{A}) = \text{PEnd}(G)$ и, с другой стороны, если формула $\bar{\Phi}$ истинна на полугруппе входных сигналов $\text{Inp}(\mathbf{A})$, то на универсальном частичном графовом полуавтомате $\mathbf{A}$ истинна формула Φ или двойственная ей формула $\bar{\Phi}$.

Доказательство. Для формул языка $\mathbf{L_A}$ элементарной теории графовых полуавтоматов рассмотрим следующую синтаксическую трансформацию в формулы языка $\mathbf{L_S}$ элементарной теории полугрупп. Пусть $t = t(y_1, \dots, y_n)$ – терм языка $\mathbf{L_A}$ с переменными $y_1, \dots, y_n$. Для такого терма t эффективно построим терм $\bar{t}$ сигнатуры языка $\mathbf{L_S}$ по следующему правилу:

- 1) если t является индивидуальной переменной y_i , обозначающей элемент множества вершин графа состояний полуавтомата, то $\bar{t}$ есть индивидуальная переменная y_i , обозначающая элемент полугруппы входных сигналов;
- 2) если t является индивидуальной переменной y_i , обозначающей входной сигнал полуавтомата, то $\bar{t}$ есть тот же самый терм y_i ;
- 3) если $t = t_1 \cdot t_2$ для термов t_1, t_2 второго сорта (обозначающих входные сигналы полуавтомата), то $\bar{t}$ есть терм $\bar{t}_1 \cdot \bar{t}_2$;
- 4) если $t = t_1 \star t_2$ для термина t_1 первого сорта (обозначающего элементы множества вершин графа состояний полуавтомата) и термина t_2 второго сорта (обозначающего входные сигналы полуавтомата), то $\bar{t}$ есть терм $\bar{t}_1 \cdot \bar{t}_2$.

Пусть теперь $\Phi = \Psi(y_1, \dots, y_n)$ – формула языка $\mathbf{L}_A$ с переменными $y_1, \dots, y_n$, бинарным предикатным символом B и двумя бинарными функциональными символами $\cdot, \star$. Для такой формулы Φ эффективно построим формулу $\check{\Phi}$ языка $\mathbf{L}_S$ по следующему правилу:

- 1) если Φ есть атомарная формула $t_1 = t_2$, то $\check{\Phi}$ есть формула $\bar{t}_1 = \bar{t}_2$;
- 2) если Φ есть атомарная формула $B(t_1, t_2)$ для двух термов t_1, t_2 первого сорта (обозначающих элементы множества вершин графа состояний полуавтомата), то $\check{\Phi}$ есть формула $\Pi(x_0, y_0, \bar{t}_1, \bar{t}_2)$;
- 3) если Φ есть формула $\Phi_1 \tau \Phi_2$, где τ – один из символов $\wedge, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow$, то $\check{\Phi}$ есть формула $\check{\Phi}_1 \tau \check{\Phi}_2$;
- 4) если Φ есть формула $\neg \Phi$, то формула $\check{\Phi}$ есть формула $\neg \check{\Phi}$;
- 5) если Φ есть формула $(\forall^1 y_i) \Psi(y_1, \dots, y_n)$ (соответственно, $(\exists^1 y_i) \Psi(y_1, \dots, y_n)$) для индивидуальной переменной y_i , обозначающей элемент множества вершин графа состояний полуавтомата, то $\check{\Phi}$ есть формула $(\forall y_i)(M(y_i) \Rightarrow \check{\Psi})$ (соответственно, $(\exists y_i)(M(y_i) \wedge \check{\Psi})$);
- 6) если Φ есть формула $(\forall^2 y_i) \Psi(y_1, \dots, y_n)$ (соответственно, $(\exists^2 y_i) \Psi(y_1, \dots, y_n)$) для индивидуальной переменной y_i , обозначающей входной сигнал полуавтомата, то $\check{\Phi}$ есть формула $(\forall y_i) \check{\Psi}$ (соответственно, $(\exists y_i) \check{\Psi}$).

Таким образом, для каждой формулы Φ языка $\mathbf{L}_A$ элементарной теории графовых полуавтоматов можно определить формулу $\bar{\Phi}$ языка $\mathbf{L}_S$ элементарной теории полугрупп по правилу:

$$\bar{\Phi} = (\exists x_0, y_0)(\Phi_0(x_0, y_0) \wedge \check{\Phi}).$$

Поскольку изоморфные алгебраические системы $\mathbf{A} = \text{PAtm}(G)$ над графом $G = (X, \rho)$ и $\bar{\mathbf{A}} = (\bar{G}, \text{PEnd}(G), \bar{\star})$ над графом $\bar{G} = (\bar{X}, \bar{\rho})$ элементарно эквивалентны, то для любой формулы Φ языка $\mathbf{L}_A$ элементарной теории графовых полуавтоматов формула $\mathbf{A} \models \Phi$ равносильна формуле $\bar{\mathbf{A}} \models \bar{\Phi}$. По аналогии с доказательством [18, теорема 3.1.8], индукцией относительно порядка формулы Φ можно доказать следующее свойство:

$$\bar{\mathbf{A}} \models \Phi \iff \text{Inp}(\mathbf{A}) \models \bar{\Phi}.$$

Следовательно, если Φ истинна на универсальном частичном графовом полуавтомате $\mathbf{A}$,

то формула $\bar{\Phi}$ истинна на его полугруппе входных сигналов $\text{Inp}(\mathbf{A})$, т.е. выполняется условие

$$\mathbf{A} \models \Phi \implies \text{Inp}(\mathbf{A}) \models \bar{\Phi}.$$

С другой стороны, ввиду того, что $\text{Inp}(\mathbf{A}) = \text{Inp}(\tilde{\mathbf{A}})$ и либо $\mathbf{A}$ изоморфен $\bar{\mathbf{A}}$ при определении отношения смежности $\bar{\rho}$ с помощью формулы $\Pi(x_0, y_0, x, y)$ для $(x_0, y_0) \in \bar{\rho}$, $x_0 \neq y_0$, либо $\tilde{\mathbf{A}}$ изоморфен $\bar{\mathbf{A}}$ при определении $\bar{\rho}$ с помощью формулы $\Pi(x_0, y_0, x, y)$ для $(y_0, x_0) \in \bar{\rho}$, $x_0 \neq y_0$, выполняется условие

$$\text{Inp}(\mathbf{A}) \models \bar{\Phi} \implies (\mathbf{A} \models \Phi \vee \mathbf{A} \models \check{\Phi}). \quad \square$$

3. Приложения относительно элементарной определимости

Доказанная относительно элементарная определимость класса универсальных частичных графовых полуавтоматов в классе полугрупп и эффективное преобразование формул элементарной теории графовых полуавтоматов в формулы элементарной теории полугрупп позволяют исследовать такие вопросы, как определяемость универсальных частичных графовых полуавтоматов своими полугруппами входных сигналов, относительная аксиоматизируемость подклассов универсальных частичных графовых полуавтоматов над нетривиальными рефлексивными графами формулами языка элементарной теории полугрупп и другие.

Следующая теорема показывает взаимосвязь универсальных частичных графовых полуавтоматов, у которых изоморфны полугруппы входных сигналов.

Теорема 7. *Для любых универсальных частичных графовых полуавтоматов $A_1 = \text{PAtm}(G_1)$, $A_2 = \text{PAtm}(G_2)$ над рефлексивными графами $G_1 = (X_1, \rho_1)$, $G_2 = (X_2, \rho_2)$ такими, что хотя бы один из них нетривиален, следующие условия эквивалентны:*

- 1) *полугруппа $\text{Inp}(A_1)$ входных сигналов частичного полуавтомата A_1 изоморфна полугруппе $\text{Inp}(A_2)$ входных сигналов частичного полуавтомата A_2 ;*
- 2) *частичный полуавтомат A_1 изоморфен частичному полуавтомату A_2 или двойственному для него частичному полуавтомату $\tilde{A}_2$.*

Доказательство. Докажем $1) \implies 2)$. Пусть φ – изоморфизм полугруппы $\text{Inp}(A_1)$ на полугруппу $\text{Inp}(A_2)$, и пусть, для определенности, $G_1 = (X_1, \rho_1)$ – нетривиальный рефлексивный граф. Тогда найдется дуга $(a_0, b_0) \in \rho_1 \setminus \Delta_{X_1}$ и по [лемме 4](#) для элементов $x_0 = \bar{a}_0$, $y_0 = \bar{b}_0$ в полугруппе $\text{Inp}(A_1)$ выполняется $\Phi_0(x_0, y_0)$. Следовательно, $\varphi(x_0) = \bar{c}_0$, $\varphi(y_0) = \bar{d}_0$ для вершин $c_0, d_0 \in X_2$. При этом в полугруппе $\text{Inp}(A_2)$ выполняется формула $\Phi_0(\varphi(x_0), \varphi(y_0))$. Тогда в силу [леммы 4](#) $(c_0, d_0) \in \rho_2 \setminus \Delta_{X_2}$ или $(d_0, c_0) \in \rho_2 \setminus \Delta_{X_2}$.

В [теореме 5](#) в полугруппе входных сигналов $\text{Inp}(A_1)$ полуавтомата A_1 с помощью формул языка элементарной теории полугрупп $\mathbf{L}_S$ и фиксированных элементов $x_0, y_0 \in \text{Inp}(A_1)$ строится изоморфный A_1 полуавтомат $\bar{A}_1$ над графом $\bar{G}_1 = (\bar{X}_1, \bar{\rho}_{X_1})$. Отношение смежности $\bar{\rho}_{X_1}$ определяется предикатом $\Pi(x_0, y_0, x, y)$ элементарной теории

полугрупп $\mathbf{L_S}$. Аналогично, используя формулы элементарной теории полугрупп $\mathbf{L_S}$, в полугруппе $\text{Inp}(A_2)$ с помощью элементов $\varphi(x_0)$ и $\varphi(y_0)$ определяется полуавтомат $\bar{A}_2$, такой, что A_2 изоморфен $\bar{A}_2$. Отношение смежности $\bar{\rho}_{X_2}$ графа $\bar{G}_2 = (\bar{X}_2, \bar{\rho}_{X_2})$ определяется предикатом $\Pi(\varphi(x_0), \varphi(y_0), x, y)$ элементарной теории полугрупп $\mathbf{L_S}$.

Поскольку полуавтоматы $\bar{A}_1$, $\bar{A}_2$ выражаются в соответствующих полугруппах $\text{Inp}(A_1)$, $\text{Inp}(A_2)$ формулами языка $\mathbf{L_S}$ элементарной теории полугрупп, определенными в [теореме 5](#), и изоморфизм φ сохраняет выполнимость таких формул, то для любых $x, y \in X_1$ по определению отношения $\bar{\rho}_{X_1}$ условие $(x, y) \in \bar{\rho}_{X_1}$ равносильно тому, что предикат $\Pi(x_0, y_0, x, y)$ истинен в полугруппе $\text{Inp}(A_1)$, а это, в свою очередь, равносильно тому, что предикат $\Pi(\varphi(x_0), \varphi(y_0), \varphi(x), \varphi(y))$ истинен в полугруппе $\text{Inp}(A_2)$. Значит, либо $(\varphi(x), \varphi(y)) \in \bar{\rho}_{X_2}$, если $(\varphi(x_0), \varphi(y_0)) \in \bar{\rho}_{X_2}$ (когда $(c_0, d_0) \in \rho_2$), либо $(\varphi(y), \varphi(x)) \in \bar{\rho}_{X_2}$, если $(\varphi(y_0), \varphi(x_0)) \in \bar{\rho}_{X_2}$ (когда $(d_0, c_0) \in \rho_2$). Следовательно, если $(c_0, d_0) \in \rho_2$, то φ индуцирует изоморфизм полуавтомата $\bar{A}_1$ на полуавтомат $\bar{A}_2$, и A_1 изоморфен $\bar{A}_2$; если $(d_0, c_0) \in \rho_2$, то φ индуцирует изоморфизм полуавтомата $\bar{A}_1$ на полуавтомат $\tilde{A}_2$, и A_1 изоморфен $\tilde{A}_2$.

Докажем $2) \implies 1)$. Пусть полуавтомат A_1 изоморфен полуавтомату A_2 или двойственному для него полуавтомату $\tilde{A}_2$. Так как $\text{Inp}(A_1) = \text{Inp}(\tilde{A}_2)$, то по определению изоморфизма полуавтоматов получаем, что $\text{Inp}(A_1)$ изоморфна $\text{Inp}(A_2)$. $\square$

В работе [\[7\]](#) Ю.М. Важенин обозначил проблему взаимосвязи графов, у которых элементарно эквивалентны производные полугруппы специальных преобразований. Следующий результат решает эту проблему для универсальных частичных графовых полуавтоматов над нетривиальными рефлексивными графами.

Теорема 8. *Для любых универсальных частичных графовых полуавтоматов $A_1 = \text{PAtm}(G_1)$, $A_2 = \text{PAtm}(G_2)$ над рефлексивными графами $G_1 = (X_1, \rho_1)$, $G_2 = (X_2, \rho_2)$ такими, что хотя бы один из них нетривиален, следующие условия эквивалентны:*

- 1) *полугруппа $\text{Inp}(A_1)$ входных сигналов частичного полуавтомата A_1 элементарно эквивалентна полугруппе $\text{Inp}(A_2)$ входных сигналов частичного полуавтомата A_2 ;*
- 2) *частичный полуавтомат A_1 элементарно эквивалентен частичному полуавтомату A_2 или двойственному для него частичному полуавтомату $\tilde{A}_2$.*

Доказательство. Докажем $1) \implies 2)$. Пусть $\text{Inp}(A_1) \equiv \text{Inp}(A_2)$. Рассмотрим формулу Ψ языка элементарной теории графовых полуавтоматов $\mathbf{L_A}$ такую, что $A_1 \models \Psi$. Тогда по [теореме 6](#) $\text{Inp}(A_1) \models \bar{\Psi}$ и, следовательно, $\text{Inp}(A_2) \models \bar{\Psi}$. Значит, по [теореме 6](#) $A_2 \models \Psi$ или $A_2 \models \check{\Psi}$.

В частности, если формула Ψ логически равносильна формуле $\check{\Psi}$, то она называется самодвойственной формулой и для нее выполняется условие $A_1 \models \Psi \iff A_2 \models \Psi$. Например, для произвольного предложения Φ языка элементарной теории полуавтоматов $\mathbf{L_A}$ формула $\Psi = (\Phi \iff \check{\Phi})$ является самодвойственной и, значит, предложение Φ является или не является равносильным предложению $\check{\Phi}$ одновременно на полуавтоматах A_1 , A_2 ,

т. е. предложения $\Phi, \check{\Phi}$ одновременно истинны или ложны как на полуавтомате A_1 , так и на полуавтомате A_2 .

Сначала предположим, что найдется предложение $\Psi_0 \in \text{Th}(A_1) \cup \text{Th}(A_2)$, которое не является самодвойственным. Пусть, для определенности, $\Psi_0 \in \text{Th}(A_1)$. Тогда формула $\Psi_0 \iff \check{\Psi}_0$ не выполняется на A_1 (и, следовательно, на A_2). Это означает, что как на полуавтомате A_1 , так и на полуавтомате A_2 , истинно только одно из предложений $\Psi_0, \check{\Psi}_0$. Тогда имеем $A_1 \models \Psi_0$ (по условию), $A_1 \not\models \check{\Psi}_0$ и либо $A_2 \models \Psi_0$, $A_2 \not\models \check{\Psi}_0$, либо $A_2 \models \check{\Psi}_0$, $A_2 \not\models \Psi_0$. Предположим, что $A_2 \models \Psi_0$, $A_2 \not\models \check{\Psi}_0$. Тогда для любой формулы Φ языка $\mathbf{L}_A$ элементарной теории полуавтоматов верно $A_2 \not\models \Phi \wedge \check{\Psi}_0$. Пусть $\Psi \in \text{Th}(A_1)$, тогда выполняются следующие условия: $A_1 \models \Psi$, $A_1 \models \Psi \wedge \Psi_0$. Так как двойственная для формулы $\Psi \wedge \Psi_0$ формула $\check{\Psi} \wedge \check{\Psi}_0$ не выполняется на A_2 (поскольку $A_2 \not\models \check{\Psi}_0$), то $A_2 \models \Psi \wedge \Psi_0$. Следовательно, $A_2 \models \Psi$ и $\Psi \in \text{Th}(A_2)$. Значит, $\text{Th}(A_1) \subset \text{Th}(A_2)$.

Теперь пусть $\Psi \in \text{Th}(A_2)$, тогда выполняются следующие условия: $A_2 \models \Psi$, $A_2 \models \Psi \wedge \Psi_0$. Так как двойственная для формулы $\Psi \wedge \Psi_0$ формула $\check{\Psi} \wedge \check{\Psi}_0$ не выполняется на A_1 (поскольку $A_1 \not\models \check{\Psi}_0$), то $A_1 \models \Psi \wedge \Psi_0$. Следовательно, $A_1 \models \Psi$ и $\Psi \in \text{Th}(A_1)$. Значит, $\text{Th}(A_2) \subset \text{Th}(A_1)$. В результате получаем равенство $\text{Th}(A_1) = \text{Th}(A_2)$, т. е. $A_1 \equiv A_2$.

Рассмотрим второй вариант – пусть $A_2 \models \check{\Psi}_0$, $A_2 \not\models \Psi_0$. Тогда $\tilde{A}_2 \models \Psi_0$ и для любой формулы Φ языка $\mathbf{L}_A$ элементарной теории полуавтоматов верно $A_2 \not\models \Phi \wedge \Psi_0$. Пусть $\Psi \in \text{Th}(A_1)$, тогда выполняются следующие условия: $A_1 \models \Psi$, $A_1 \models \Psi \wedge \Psi_0$. Так как двойственная для формулы $\check{\Psi} \wedge \check{\Psi}_0$ формула $\Psi \wedge \Psi_0$ не выполняется на A_2 (поскольку $A_2 \not\models \Psi_0$), то $A_2 \models \check{\Psi} \wedge \check{\Psi}_0$. Следовательно, $A_2 \models \check{\Psi}$, $\tilde{A}_2 \models \Psi$ и $\Psi \in \text{Th}(\tilde{A}_2)$. Значит, $\text{Th}(A_1) \subset \text{Th}(\tilde{A}_2)$.

Теперь пусть $\Psi \in \text{Th}(\tilde{A}_2)$, тогда выполняются следующие условия: $\tilde{A}_2 \models \Psi$, $A_2 \models \check{\Psi} \wedge \check{\Psi}_0$. Так как двойственная для формулы $\Psi \wedge \Psi_0$ формула $\check{\Psi} \wedge \check{\Psi}_0$ не выполняется на A_1 (поскольку $A_1 \not\models \check{\Psi}_0$), то $A_1 \models \Psi \wedge \Psi_0$. Следовательно, $A_1 \models \Psi$ и $\Psi \in \text{Th}(A_1)$. Значит, $\text{Th}(\tilde{A}_2) \subset \text{Th}(A_1)$. В результате получаем равенство $\text{Th}(A_1) = \text{Th}(\tilde{A}_2)$, т. е. $A_1 \equiv \tilde{A}_2$.

Теперь рассмотрим случай, когда все предложения $\Psi \in \text{Th}(A_1) \cup \text{Th}(A_2)$ самодвойственные. Тогда для любого такого предложения Ψ условия $A_1 \models \Psi$, $A_2 \models \Psi$ равносильны и, значит, выполняется равенство $\text{Th}(A_1) = \text{Th}(A_2)$, т. е. $A_1 \equiv A_2$.

Докажем $2) \implies 1)$. Пусть $A_1 \equiv A_2$ или $A_1 \equiv \tilde{A}_2$. Тогда $\text{Th}(A_1) = \text{Th}(A_2)$ или $\text{Th}(A_1) = \text{Th}(\tilde{A}_2)$ соответственно. Ясно, что элементарная теория $\text{Th}(\text{Inp}(A))$ полугруппы входных сигналов $\text{Inp}(A)$ любого графового полуавтомата A состоит из таких формул элементарной теории $\text{Th}(A)$ частичного графового полуавтомата A , в которых содержатся термы только второго сорта. Следовательно, из равенства $\text{Th}(A_1) = \text{Th}(A_2)$ (или $\text{Th}(A_1) = \text{Th}(\tilde{A}_2)$) следует равенство

$$\text{Th}(\text{Inp}(A_1)) = \text{Th}(\text{Inp}(A_2)) = \text{Th}(\text{Inp}(\tilde{A}_2)),$$

поскольку полугруппы входных сигналов двойственных полуавтоматов равны. Значит, $\text{Inp}(A_1) \equiv \text{Inp}(A_2)$. $\square$

Аксиомами языка $\mathbf{L}_A$ элементарной теории графовых полуавтоматов являются обычные аксиомы узкого исчисления предикатов с равенством [19]. Любое множество Σ формул языка $\mathbf{L}_A$ элементарной теории графовых полуавтоматов определяет класс $\text{Mod}(\Sigma)$ алгебраических Ω -систем, на которых истинны все формулы из Σ . В этом случае говорят, что класс алгебраических Ω -систем $\mathbf{K} = \text{Mod}(\Sigma)$ аксиоматизируется множеством формул Σ , которое, в свою очередь, называется системой аксиом класса $\mathbf{K}$.

Лемма 9. *Класс $\mathbf{K}_G$ всех универсальных частичных графовых полуавтоматов над рефлексивными графами аксиоматизируется следующим набором формул Σ_G :*

- 1) $A_1 = (\forall^1 x) B(x, x)$ – рефлексивность отношения смежности ρ ;
- 2) $A_2 = (\forall^2 x, y, z)((x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z))$ – ассоциативность операции композиции $\cdot$ полугруппы входных сигналов;
- 3) $A_3 = (\forall^1 x, y)(\forall^2 z)(B(x, y) \implies B(x \star z, y \star z))$ – согласованность функции переходов $\star$ с отношением смежности ρ ;
- 4) $A_4 = (\forall^1 x)(\forall^2 y, z)((x \star y) \star z = x \star (y \cdot z))$ – согласованность функции переходов $\star$ с операцией композиции $\cdot$ полугруппы входных сигналов.

Следствие 10. *Класс $\mathbf{K}_{G_0}$ всех универсальных частичных графовых полуавтоматов над нетривиальными рефлексивными графами аксиоматизируется набором формул Σ_G с добавлением следующей аксиомы:*

$$A_0 = (\exists^1 x, y)(x \neq y \wedge \neg B(x, y)).$$

Следствие 11. *Класс $\mathbf{K}_{G_1}$ всех универсальных частичных графовых полуавтоматов над рефлексивными симметричными графами аксиоматизируется набором формул Σ_G с добавлением следующей аксиомы:*

$$A_5 = (\forall^1 x, y)(B(x, y) \implies B(y, x)).$$

Следствие 12. *Класс $\mathbf{K}_{G_2}$ всех универсальных частичных графовых полуавтоматов над рефлексивными асимметричными графами аксиоматизируется набором формул Σ_G с добавлением следующей аксиомы:*

$$A_6 = (\exists^1 x, y)(x \neq y \implies (B(x, y) \wedge \neg B(y, x))).$$

Для каждого класса полуавтоматов $\mathbf{K} \subset \mathbf{K}_{G_0}$ определим класс полугрупп

$$\text{Inp}(\mathbf{K}) = \{\text{Inp}(A) : A \in \mathbf{K}\}.$$

Класс $\mathbf{K} \subset \mathbf{K}_{G_0}$ называется Inp -аксиоматизируемым, если соответствующий ему класс полугрупп $\text{Inp}(\mathbf{K})$ относительно аксиоматизируем в классе полугрупп $\mathbf{S}_{G_0} = \text{Inp}(\mathbf{K}_{G_0})$, т. е. $\text{Inp}(\mathbf{K}) = \mathbf{T} \cap \mathbf{S}_{G_0}$ для некоторого аксиоматизируемого класса полугрупп $\mathbf{T}$.

Множество Σ формул языка $\mathbf{L}_A$ элементарной теории полуавтоматов называется самодвойственным, если для любой формулы $\Psi \in \Sigma$ формула $\check{\Psi}$ логически равносильна некоторой формуле из класса Σ . В частности, если формула Ψ самодвойственна (т. е. выполняется $\Psi \iff \check{\Psi}$), то множество $\Sigma = \{\Psi\}$ самодвойственно.

Теорема 13. *Подклассы универсальных частичных графовых полуавтоматов $\mathbf{K}_{G_1}$, $\mathbf{K}_{G_2}$ класса $\mathbf{K}_{G_0}$ полуавтоматов Inp-аксиоматизируемы.*

Доказательство. В теореме 6 была определена эффективная трансформация $\Phi \mapsto \bar{\Phi}$ формул Φ языка $\mathbf{L}_A$ элементарной теории полуавтоматов в формулы $\bar{\Phi}$ языка $\mathbf{L}_S$ элементарной теории полуавтоматов так, что для любого универсального частичного графового полуавтомата $A = \text{PAtm}(G)$ над нетривиальным рефлексивным графом G выполняется условие:

$$A \models \Phi \vee A \models \check{\Phi} \iff \text{Inp}(A) \models \bar{\Phi}.$$

Если некоторый класс универсальных частичных графовых полуавтоматов $\mathbf{K}$ аксиоматизируется в классе $\mathbf{K}_{G_0}$ самодвойственным множеством формул Σ , то по теореме 6 для всех формул $\Phi \in \Sigma$ условие $A \models \Phi$ равносильно условию $\text{Inp}(A) \models \bar{\Phi}$. Значит, класс полугрупп входных сигналов $\text{Inp}(\mathbf{K})$ относительно аксиоматизируем в классе $\mathbf{S}_{G_0}$ множеством формул $\bar{\Sigma} = \{\bar{\Phi} : \Phi \in \Sigma\}$.

Поскольку классы $\mathbf{K}_{G_1}$, $\mathbf{K}_{G_2}$ аксиоматизируются в классе $\mathbf{K}_{G_0}$ самодвойственными аксиомами A_5 и A_6 , то они Inp-аксиоматизируются аксиомами

$$\begin{aligned} \bar{A}_5 &= (\forall x, y)(\Pi(x_0, y_0, x, y) \implies \Pi(x_0, y_0, y, x)), \\ \bar{A}_6 &= (\exists x, y)(x \neq y \implies (\Pi(x_0, y_0, x, y) \wedge \neg \Pi(x_0, y_0, y, x))) \end{aligned}$$

соответственно. □

Следующий результат показывает взаимосвязь проблем разрешимости [12] элементарных теорий классов графовых полуавтоматов и классов полугрупп.

Для формального языка $\mathbf{L}$ некоторой сигнатуры Ω символом P_L обозначим множество всех предложений этого языка. Теория T языка $\mathbf{L}$ называется разрешимой, если существует алгоритм для решения вопроса принадлежности предложения из P_L теории T . В противном случае теория T называется неразрешимой. Теория T называется наследственно неразрешимой, если любая подтеория теории T той же сигнатуры Ω неразрешима. Для класса $\mathbf{K}$ алгебраических систем сигнатуры Ω символом $\mathbf{K}_{fin}$ обозначается класс конечных систем из $\mathbf{K}$. Теория $\text{Th}(\mathbf{K})$ называется эффективно неотделимой, если рекурсивно неотделимы множества $\text{Th}(\mathbf{K})$ и $P_L \setminus \text{Th}(\mathbf{K}_{fin})$, т. е. не существует таких непересекающихся рекурсивных множеств $M, N \subset P_L$, что $\text{Th}(\mathbf{K}) \subset M$ и $P_L \setminus \text{Th}(\mathbf{K}_{fin}) \subset N$.

На основании теоремы 2 из §1 главы 5 книги [12] и теоремы 3.3.2 из статьи [19] получаем следующий результат.

Теорема 14. Для любого класса $\mathbf{K}$ универсальных частичных графовых полуавтоматов над нетривиальными рефлексивными графами справедливы следующие утверждения:

- 1) если элементарная теория класса $\mathbf{K}$ универсальных частичных графовых полуавтоматов наследственно неразрешима, то и элементарная теория класса $\text{Inp}(\mathbf{K})$ полугрупп наследственно неразрешима;
- 2) если элементарная теория класса $\mathbf{K}$ универсальных частичных графовых полуавтоматов эффективно неотделима, то и элементарная теория класса $\text{Inp}(\mathbf{K})$ полугрупп эффективно неотделима.

В заключение авторы выражают большую признательность рецензенту за его полезные замечания.

Список литературы

- [1] Б.И. Плоткин, Л.Я. Гринглаз, А.А. Гварамия, *Элементы алгебраической теории автоматов*, Высш. шк., М., 1994.
- [2] Р. Лидл, Г. Пильц, *Прикладная абстрактная алгебра*, Изд-во Урал. ун-та, Екатеринбург, 1996.
- [3] С. Улам, *Нерешенные математические задачи*, Наука, М., 1964.
- [4] Б.И. Плоткин, *Группы автоморфизмов алгебраических систем*, Наука, М., 1966.
- [5] А.Г. Пинус, Об элементарной эквивалентности производных структур свободных полугрупп, унарных и групп, *Алгебра и логика* **43** (6), 730–748 (2004).
URL: <https://www.mathnet.ru/rus/al107>
- [6] А.Г. Пинус, Об элементарной эквивалентности производных структур свободных решеток, *Изв. вузов. Матем.* (5), 44–47 (2002).
URL: <https://www.mathnet.ru/rus/ivm1014>
- [7] Ю.М. Важенин, Элементарные свойства полугрупп преобразований упорядоченных множеств, *Алгебра и логика* **9** (3), 281–301 (1970).
URL: <https://www.mathnet.ru/rus/al1245>
- [8] Ю.М. Важенин, Об элементарной определяемости и элементарной характеризуемости классов рефлексивных графов, *Изв. вузов. Матем.* (7), 3–11 (1972).
URL: <https://www.mathnet.ru/rus/ivm4076>
- [9] Л.М. Глускин, Полугруппы и кольца эндоморфизмов линейных пространств, *Изв. АН СССР. Сер. матем.* **23** (6), 841–870 (1959).
URL: <https://www.mathnet.ru/rus/im3817>
- [10] Л.М. Глускин, Полугруппы изотонных преобразований, *УМН* **16** (5), 157–162 (1961).
URL: <https://www.mathnet.ru/rus/rm6671>

- [11] В.Т. Марков, А.В. Михалёв, Л.А. Скорняков, А.А. Туганбаев, *Кольца эндоморфизмов модулей и структуры подмодулей*, Итоги науки и техн. Сер. Алгебра. Топол. Геом. **21**, 183–254 (1983).
URL: <https://www.mathnet.ru/rus/inta105>
- [12] Ю.Л. Ершов, *Проблемы разрешимости и конструктивные модели*, Наука, М., 1980.
- [13] Р.А. Фарахутдинов, *Относительно элементарная определимость класса универсальных графовых полуавтоматов в классе полугрупп*, Изв. вузов. Матем. (1), 74–84 (2022).
DOI: <https://doi.org/10.26907/0021-3446-2022-1-74-84>
- [14] А.И. Мальцев, *Алгебраические системы*, Наука, М., 1970.
- [15] Ф. Харари, *Теория графов*, Мир, М., 1973.
- [16] А. Клиффорд, Г. Престон, *Алгебраическая теория полугрупп*, Мир, М., 1972.
- [17] В.В. Вагнер, *Полугруппы частичных преобразований с симметричным отношением транзитивности*, Изв. вузов. Матем. (1), 81–88 (1957).
URL: <https://www.mathnet.ru/rus/ivm3022>
- [18] А. Робинсон, *Введение в теорию моделей и метаматематику алгебры*, Наука. Физматлит, М., 1967.
- [19] Ю.Л. Ершов, И.А. Лавров, А.Д. Тайманов, М.А. Тайцлин, *Элементарные теории*, УМН **20** (4), 37–108 (1965).
URL: <https://www.mathnet.ru/rus/rm6048>

Владимир Александрович Молчанов

Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского,
ул. Астраханская, д. 83, г. Саратов, 410012, Россия,
e-mail: v.molchanov@inbox.ru

Ренат Абуханович Фарахутдинов

Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского,
ул. Астраханская, д. 83, г. Саратов, 410012, Россия,
e-mail: renatfara@mail.ru

Relatively elementary definability of the class of universal partial graphic semiautomata in the class of semigroups

V.A. Molchanov, R.A. Farakhutdinov

Abstract. The work is devoted to the algebraic theory of structured automata. We consider semigroup automata without output signals over graphs, which are called graphic semiautomata. We study partial graphic semiautomata, each input signal of which is a partial endomorphism of the state graph. In the category of partial graphic semiautomata over the graph $G = (X, \rho)$, special attention is paid to the semiautomaton $\text{PAtm}(G) = (G, \text{PEnd}(G), \star)$ with semigroup $\text{PEnd}(G)$ of all partial endomorphisms of the graph G , since it is a universally attracting object in this category and is called a universal partial graphic semiautomaton. The main result of the work is the proof of the relatively elementary definability of the class of universal partial graphic semiautomata over nontrivial reflexive graphs in the class of semigroups, and applications of got relatively elementary definability.

Keywords: semiautomaton, graph, partial endomorphism, relatively elementary definability.

DOI: 10.26907/2949-3919.2024.4.103-123

References

- [1] B.I. Plotkin, L.Ja. Greenglaz, A.A. Gvaramija, *Elements of algebraic theory of automata*, Vysshaya shkola, M., 1994 [in Russian].
- [2] R. Lidl, G. Pilz, *Applied abstract algebra*, Springer-Verlag, New York, 1998.
DOI: <https://doi.org/10.1007/978-1-4757-2941-2>
- [3] S. Ulam, *A collection of mathematical problems*, Interscience Publ., New York, 1960.
- [4] B.I. Plotkin, *Groups of automorphisms of algebraic systems*, Wolters-Noordhoff Publ., Groningen, 1972.
- [5] A. G. Pinus, *Elementary equivalence of derived structures of free semigroups, unars, and groups*, Algebra Logic **43** (6), 408–417 (2004).
DOI: <https://doi.org/10.1023/B:ALLO.0000048829.60182.48>
- [6] A.G. Pinus, *Elementary equivalence of derived structures of free lattices*, Russ. Math. **46** (5), 42–45 (2002).

-
- [7] Yu.M. Vazhenin, *Elementary properties of semigroups of transformations of ordered sets*, Algebra Logic **9** (3), 281–301 (1970) [in Russian].
URL: <https://www.mathnet.ru/rus/al1245>
- [8] Yu.M. Vazhenin, *The elementary definability and elementary characterizability of classes of reflexive graphs*, Izv. Vyssh. Uchebn. Zaved. Mat. (7), 3–11 (1972) [in Russian].
URL: <https://www.mathnet.ru/rus/ivm4076>
- [9] L.M. Gluskin, *Semigroups and endomorphism rings of linear spaces*, Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat. **23** (6), 841–870 (1959) [in Russian].
URL: <https://www.mathnet.ru/rus/im3817>
- [10] L. M. Gluskin, *Semigroups of isotone transformations*, Uspekhi Mat. Nauk **16** (5), 157–162 (1961) [in Russian].
URL: <https://www.mathnet.ru/rus/rm6671>
- [11] V.T. Markov, A.V. Mikhalev, L.A. Skornyakov, A.A. Tuganbaev, *Endomorphism rings of modules, and lattices of submodules*, J. Soviet Math. **31** (3), 3005–3051 (1985).
DOI: <https://doi.org/10.1007/BF02106808>
- [12] Yu.L. Ershov, *Decidability problems and constructive models*, Nauka, M., 1980 [in Russian].
- [13] R.A. Farakhutdinov, *Relatively elementary definability of the class of universal graphic semiautomata in the class of semigroups*, Russ. Math. **66** (1), 62–70 (2022).
DOI: <https://doi.org/10.3103/S1066369X22010029>
- [14] A.I. Mal'cev, *Algebraic Systems*, Springer-Verlag, New York–Heidelberg, 1973.
DOI: <https://doi.org/10.1007/978-3-642-65374-2>
- [15] F. Harary, *Graph theory*, Addison-Wesley Publ., 1969.
DOI: <https://doi.org/10.1201/9780429493768>
- [16] A.H. Clifford, G.B. Preston, *The algebraic theory of semigroups*, AMS, New York, 1967.
- [17] V.V. Vagner, *Semigroups of partial transformations with a symmetric transitivity relation*, Izv. Vyssh. Uchebn. Zaved. Mat. (1), 81–88 (1957) [in Russian].
URL: <https://www.mathnet.ru/rus/ivm3022>
- [18] A. Robinson, *Introduction to model theory and to the metamathematics of algebra*, North-Holland Publ., 1965.
- [19] Yu.L. Ershov, I.A. Lavrov, A.D. Taimanov, M.A. Taitslin, *Elementary theories*, Russ. Math. Surv. **20** (4), 35–105 (1965).
DOI: <https://doi.org/10.1070/RM1965v020n04ABEH001188>

Vladimir Aleksandrovich Molchanov

Saratov State University,
83 Astrakhanskaya str., Saratov 410012, Russia,
e-mail: v.molchanov@inbox.ru

Renat Abukhanovich Farakhutdinov

Saratov State University,
83 Astrakhanskaya str., Saratov 410012, Russia,
e-mail: renatfara@mail.ru