Том 3, Выпуск 1
Стр. 26–51 (2025)

УДК 512.77, 515.162.6, 519.175.3
MSC 14P25, 14H45, 05C90

Графы тригональных кривых и жесткие изотопии особых вещественных алгебраических кривых бистепени $(4, 3)$ на гиперболоиде

В.И. Звонилов

Аннотация. Жесткой изотопией вещественных алгебраических кривых некоторого класса называется путь в пространстве кривых этого класса. В работе завершена жесткая изотопическая классификация неособых вещественных алгебраических кривых бистепени (4,3) на гиперболоиде, начатая автором в более ранних работах. Даны отсутствовавшие доказательства единственности компонент связности 16-ти классов вещественных алгебраических кривых бистепени (4,3), имеющих единственную невырожденную двойную точку или точку возврата. Основным техническим средством являются графы вещественных тригональных кривых на поверхностях Хирцебруха.

Ключевые слова: пространства вещественных алгебраических кривых, кривые на гиперболоиде, тригональные кривые, вложенные графы.

DOI: 10.26907/2949-3919.2025.1.26-51

Введение

В работе автора [1, теорема 2] утверждалось, что *неособая кривая бистепени* (4,3) *на гиперболоиде определяется с точностью до жесткой изотопии своей комплексной схемой*. Для доказательства этого использовался подход, предложенный в [2] для получения жесткой изотопической классификации плоских вещественных квинтик и основанный на теореме 1 работы [1], указывающей все компоненты связности пространства кривых бистепени (4,3), имеющих единственную невырожденную двойную точку или точку возврата. Доказательство этой теоремы было начато автором в [1]; в [3] был указан пробел в этом доказательстве, который устранен в настоящей работе отличным от предыдущего способом – с использованием графов вещественных тригональных кривых на поверхности Хирцебруха Σ_3, полученных из особых кривых бистепени (4,3).

Структура статьи: раздел 1 содержит необходимые сведения по топологии вещественных алгебраических кривых, имеющиеся в работах [4, 5], и в частности, кривых на гиперболоиде (см. [6]). В разделе 2 напоминаются определения поверхностей Хирцебруха

Благодарности. Работа выполнена в рамках государственного задания FSWR-2023-0034.

© 2025 В.И. Звонилов
Поступила: 23.01.2025. Принята: 20.02.2025. Опубликована: 24.04.2025.

Σ_k и их бирациональных преобразований, необходимых в дальнейшем для связи между кривыми на гиперболоиде и тригональными кривыми на Σ_3. Разделы 3 и 5, следуя работам [7] и [8], напоминают понятия, связанные с вещественными тригональными кривыми. В разделе 4 понятие скелета, введенное в [8] для максимально изогнутых тригональных кривых, распространяется на более широкий класс кривых. В разделе 6 описываются классы кривых бистепени (4,3), имеющих единственную невырожденную двойную точку или точку возврата, и восполняется указанный пробел, состоявший в отсутствии доказательства связности каждого из классов особых кривых $\omega^{\pm}_{inn}$, $\alpha^{\pm}_{lp}\langle l\rangle$, $l = 0, 1, 2, 4, 5$, $\alpha^{\pm}_{lp}\langle 3\rangle_I$, $\alpha^{\pm}_{lp}\langle 3\rangle_{II}$ (в обозначениях работ [1, 3]) на гиперболоиде. Те же аргументы дают доказательство связности остальных классов особых кривых.

1. Определения и обозначения

Вещественным алгебраическим многообразием называется комплексное алгебраическое многообразие V с антиголоморфной инволюцией $c = c_V : V \to V$. Множество неподвижных точек $\mathbb{R}V = \operatorname{Fix} c$ называется *вещественной частью* многообразия V. Регулярный морфизм $f : V \to W$ двух вещественных многообразий называется *вещественным* или *эквивариантным* если $f \circ c_V = c_W \circ f$.

Гиперболоид X понимается как вещественная неособая квадрика $X = \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ с антиголоморфной инволюцией c_X, сохраняющей произведение, и вещественной частью $\mathbb{R}X = \mathbb{R}P^1 \times \mathbb{R}P^1$.

Зафиксируем пару P_1, P_2 образующих гиперболоида X, изоморфных $\mathbb{P}^1$. Фундаментальные классы $[P_1]$, $[P_2]$ образуют базис группы $H_2(X) \cong \mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}$. Пусть A – алгебраическая кривая на X. Тогда $[A] = m_2[P_1] + m_1[P_2]$ для некоторых неотрицательных целых m_1, m_2. Пара (m_1, m_2) называется *бистепенью* кривой A. Если $[x_0 : x_1]$, $[y_0 : y_1]$ – однородные координаты на прямых P_1, P_2, то кривая A задается биоднородным многочленом

$$F(x_0, x_1; y_0, y_1) = \sum_{i,j=1}^{m_1,m_2} a_{i,j} x_1^i x_0^{m_1-i} y_1^j y_0^{m_2-j},$$

имеющим степени однородности m_1 по x_0, x_1 и m_2 по y_0, y_1, причем A вещественна тогда и только тогда, когда все $a_{i,j}$ могут быть выбраны вещественными.

Для указания топологии вещественной кривой на гиперболоиде мы используем модификацию стандартной кодировки вещественных схем плоских проективных кривых (см., например, [5]). Пусть $A \subset X$ – неособая вещественная алгебраическая кривая. Вещественная часть $\mathbb{R}A$ может иметь компоненты двух типов: стягиваемые в $\mathbb{R}X$ и нестягиваемые; стягиваемые компоненты называются *овалами*. Число овалов обозначается через l, число нестягиваемых компонент – через h. Каждый овал ограничивает топологический диск в $\mathbb{R}X$, называемый *внутренностью* овала. Фундаментальные классы $[\mathbb{R}P_1]$, $[\mathbb{R}P_2]$, наделенные некоторыми (фиксированными) ориентациями, образуют базис группы $H_1(\mathbb{R}X) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$. Все нестягиваемые компоненты $N_1, ..., N_h$ реализуют один и тот же

ненулевой класс (c_1, c_2) в $H_1(\mathbb{R}X)$, где c_1, c_2 взаимно просты. Вещественная схема кривой $\mathbb{R}A \subset \mathbb{R}X$ кодируется следующим образом:

$$\langle (c_1, c_2), \mathrm{scheme}_1, (c_1, c_2), \mathrm{scheme}_2, \ldots, (c_1, c_2), \mathrm{scheme}_h \rangle,$$

где $\mathrm{scheme}_1, \ldots, \mathrm{scheme}_h$ – схемы расположения овалов, лежащих в связных компонентах поверхности $\mathbb{R}X \smallsetminus (N_1 \cup \ldots \cup N_h)$ (ср. [5, 6]).

Согласно Ф. Клейну (см. [9] или [4]) вещественная кривая A принадлежит *типу* I или *типу* II в зависимости от того, разбивает $\mathbb{R}A$ множество комплексных точек кривой A или нет. Если A принадлежит типу I, естественные ориентации компонент U и V пространства $A \smallsetminus \mathbb{R}A$ дают две противоположные ориентации кривой $\mathbb{R}A = \partial U = \partial V$; они называются *комплексными ориентациями*. Вещественная схема, наделенная типом и, в случае типа I, комплексными ориентациями, называется *комплексной схемой*. Если нужно указать тип кривой с вещественной схемой $\langle B \rangle$ используются обозначения $\langle B \rangle_{\mathrm{I}}$ и $\langle B \rangle_{\mathrm{II}}$.

Все вещественные кривые бистепени (m, n) образуют пространство $C_{m,n} \cong \mathbb{R}P^N$ с $N = mn + m + n$. Множество $\Delta \subset C_{m,n}$ особых кривых имеет размерность $N - 1$. Через $S \subset \Delta$ обозначается подмножество кривых, имеющих особую точку, отличную от невырожденной двойной точки или точки возврата, или имеющих несколько особых точек. Множество $\Delta \smallsetminus S$ является топологическим многообразием (хотя и не гладким подмногообразием в $C_{m,n}$). *Жестким изотопическим классом* кривой $A \in C_{m,n} \smallsetminus \Delta$ (или $A \in \Delta \smallsetminus S$) называется компонента пространства $C_{m,n} \smallsetminus \Delta$ (соотв. $\Delta \smallsetminus S$), содержащая A. Компоненты пространства $C_{m,n} \smallsetminus \Delta$ (соотв. $\Delta \smallsetminus S$) называются *камерами* (*стенками*).

2. Поверхности Хирцебруха и преобразования Нагаты

Поверхность Хирцебруха $\Sigma_k, k \geq 0$, является пространством расслоения $q : \Sigma_k \to \mathbb{P}^1$ со слоем $\mathbb{P}^1$, т. е. рациональной линейчатой поверхностью, с исключительным сечением E_k, $E_k^2 = -k$. Слои расслоения q называются *вертикальными*, например, мы говорим о вертикальных касательных, вертикальных перегибах и т. д. Поверхность $\Sigma_0 = \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ является гиперболоидом, в котором в качестве исключительного сечения можно взять любую кривую бистепени $(0, 1)$. Далее Σ_k считается вещественной поверхностью, с исключительным вещественным сечением.

Определение 1. *Положительным* (*отрицательным*) *преобразованием Нагаты* (см. [10, § 2 (3)]) называется послойное бирациональное преобразование $\Sigma_k \to \Sigma_{k+1}$ (соответственно, $\Sigma_k \to \Sigma_{k-1}$), состоящее из раздутия точки $p \in E_k$ (соответственно, $p \notin E_k$) и последующего стягивания в точку собственного прообраза слоя $q^{-1}(p)$.

Положительное (отрицательное) преобразование Нагаты переводит E_k в E_{k+1} (соответственно, в E_{k-1}).

3. Вещественные тригональные кривые

Тригональной кривой называется приведенная кривая $C \subset \Sigma_k$, не содержащая ни исключительного сечения, ни слоя в качестве компоненты и такая, что сужение $q|_C$ есть отображение степени три. Тригональная кривая C называется *собственной*, если $C \cap E_k = \varnothing$.

Слой поверхности Σ_k с лежащей на ней тригональной кривой C называется *особым*, если он пересекает $C \cup E_k$ геометрически менее, чем в четырех точках.

Согласно [11, п. 3.1.1], для собственной тригональной кривой $C \subset \Sigma_k, k \geq 1$, на Σ_k существует аффинная карта (x, y), в которой исключительное сечение E_k определяется уравнением $y = \infty$, а кривая C – *уравнением Вейерштрасса*

$$y^3 + b(x)y + w(x) = 0,$$

где b, w – многочлены, $\deg b \leq 2k, \deg w \leq 3k$. Можно расширить карту до $\Sigma_k \smallsetminus E_k$, считая b, w однородными многочленами степеней $2k, 3k$.

Вещественная собственная тригональная кривая C называется *почти общей*, если все критические точки сужения $q|_C$, т. е. все корни дискриминанта $\Delta(x) = 4b^3 + 27w^2$, простые (так что C неособая), и *максимально изогнутой*, если все корни дискриминанта вещественные (и не обязательно простые).

Вещественная собственная тригональная кривая C (возможно особая) называется *гиперболической*, если ограничение $\mathbb{R}C \to \mathbb{R}P^1$ отображения q является трехлистным накрытием.

Для вещественной тригональной кривой C рациональная функция $j = j_C = \frac{4b^3}{\Delta} = 1 - \frac{27w^2}{\Delta}$ называется *j-инвариантом* этой кривой. Кривая с постоянным j-инвариантом называется *изотривиальной*. Почти общая кривая называется *общей*, если для каждого вещественного критического значения t ее j-инварианта кратность каждого корня уравнения $j(x) = t$ равна 3 при $t = 0$, равна 2 при $t \neq 0$ и все эти корни при $t \notin \{0, 1\}$ вещественны. Любую почти общую тригональную кривую можно малым изменением коэффициентов уравнения кривой превратить в общую.

Вещественная часть неособой негиперболической кривой C имеет единственную *длинную компоненту* L, характеризующуюся тем, что ограничение $L \to \mathbb{R}P^1$ отображения q имеет степень ± 1. Для всех остальных компонент множества $\mathbb{R}C$, называемых *овалами*, эта степень равна 0. Пусть $Z \subset \mathbb{R}P^1$ – множество точек с более чем одним прообразом в $\mathbb{R}C$. Каждый овал переводится отображением q в целую компоненту множества Z, которая также называется *овалом*. Остальные компоненты множества Z, а также их прообразы в L называются *зигзагами*.

Под *деформацией* тригональной кривой $C \subset \Sigma_k$ понимается деформация пары $(q : \Sigma_k \to P^1, C)$ в смысле Кодаиры–Спенсера. Деформация почти общей тригональной кривой называется *послойной*, если кривая остается почти общей на протяжении всей деформации.

Деформационная эквивалентность вещественных тригональных кривых задается

отношением эквивалентности, порожденным эквивариантными послойными деформациями и вещественными изоморфизмами.

3.1. Граф тригональной кривой. Далее нам понадобятся графы на круге (*dessins*, как частные случаи трихотомических графов, в терминологии работ [7, раздел 5], [12]), изоморфные графам вещественных тригональных кривых (см. определение в следующем абзаце). Согласно [7] любой такой граф является графом некоторой тригональной кривой. Если не оговорено противное, всюду ниже термин *граф* подразумевает существование вещественной тригональной кривой с таким графом.

Пусть D – круг, полученный факторизацией комплексной проективной прямой $\mathbb{P}^1$ по комплексному сопряжению, и $\mathrm{pr} : \mathbb{P}^1 \to D$ – проекция. Точки, отрезки и т. д., лежащие на граничной окружности ∂D называются *вещественными*. Для j-инварианта $j_C : \mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^1 = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ неизотривиальной вещественной тригональной кривой $C \subset \Sigma_k$ прямую $\mathbb{R}P^1$, лежащую в образе этой функции, наделим ориентацией, задаваемой порядком в $\mathbb{R}$, и раскрасим следующим образом: пусть 0, 1, и ∞ – это, соответственно, $\bullet$-, $\circ$- и $\times$- вершина; $(\infty, 0)$, $(0, 1)$ и $(1, \infty)$ – это, соответственно, сплошное, жирное и пунктирное ребро. Поднимем эти ориентацию и раскраску на граф $\Gamma_C = \mathrm{pr}(j_C^{-1}(\mathbb{R}P^1))$, получив *граф вещественной тригональной кривой* C. Его $\bullet$-, $\circ$- и $\times$-вершины, являющиеся точками ветвления (критическими точками j-инварианта) с критическими значениями $0, 1$ и ∞, называются *существенными*, остальные вершины, являющиеся точками ветвления с вещественными критическими значениями, отличными от $0, 1, \infty$, называются *монохромными*. Монохромные вершины подразделяются на сплошные, жирные и пунктирные согласно тому, какие ребра к ним примыкают. *Монохромный цикл* в Γ_C – это цикл, все вершины которого монохромны; следовательно, все его ребра и вершины одного цвета. Определение графа Γ_C подразумевает, что он не имеет ориентированных монохромных циклов.

Склеим из двух копий круга D сферу S, превратив круги в полусферы. Пусть $p : S \to D$ – проекция, отождествляющая копии, и $\Gamma'_C = p^{-1}(\Gamma_C)$ – граф на сфере с раскраской, индуцированной проекцией. *Полной валентностью* вершины v графа Γ_C называется валентность любой вершины $v' \in p^{-1}(v)$ графа Γ'_C. Степень отображения j_C имеет вид $6k$, $k \in \mathbb{N}$, поэтому сумма валентностей всех $\bullet$-, $\circ$- или $\times$-вершин графа Γ'_C равна $12k$. Число $3k$ называется *степенью* графа Γ_C, оно равно степени многочлена w в уравнении кривой C. Граф степени 3 называется *кубическим*.

На рисунках *вещественная часть* $\partial D \cap \Gamma$ графа Γ и ее подмножества обозначены серыми полосами.

Для графа $\Gamma \subset D$ замыкания компонент связности множества $D \smallsetminus \Gamma$ называются *гранями* графа Γ. Грань с тремя существенными вершинами на ее границе называется *треугольной*.

Граф кривой называется *неразветвленным*, если все его $\times$-вершины вещественны. Другими словами, неразветвленными являются графы, соответствующие максимально изогнутым кривым.

3.2. Сегменты графа. Граф Γ называется *гиперболическим*, если все его вещественные ребра являются пунктирными. Он соответствует гиперболической кривой.

Объединение замыканий некоторых одинаково раскрашенных вещественных ребер графа Γ называется *сегментом*, если оно гомеоморфно отрезку. Пунктирный (жирный) сегмент называется *максимальным* если его концами являются две ×-вершины (соответственно, две •-вершины). Напомним (см. раздел 3), что максимальный пунктирный сегмент негиперболического графа Γ, содержащий четное/нечетное количество ∘-вершин, называется овалом/зигзагом; он является проекцией овала/зигзага соответствующей тригональной кривой.

Максимальный пунктирный/жирный сегмент с четным/нечетным количеством ∘-вершин называется *волной/скачком*.

3.3. Элементарные преобразования графов. Два графа называются *эквивалентными*, если с точностью до гомеоморфизма f круга D их можно соединить конечной последовательностью изотопий и следующих *элементарных преобразований*:

- *монохромная модификация*, см. рис. 1 (a);
- *создание* (*удаление*) моста, см. рис. 1 (b), где *мост* – это пара монохромных вершин, соединенных вещественным монохромным ребром;
- ∘-*in* и обратное к нему ∘-*out*, см. рис. 1 (c) и (d);
- •-*in* и обратное к нему •-*out*, см. рис. 1 (e) и (f).

В первых двух случаях преобразование считается возможным, только если в результате получается граф без ориентированных монохромных циклов.

Эквивалентность двух графов называется *ограниченной*, если гомеоморфизм $f = \mathrm{id}_D$ и указанные выше изотопии сохраняют овалы, зигзаги, волны и скачки как множества.

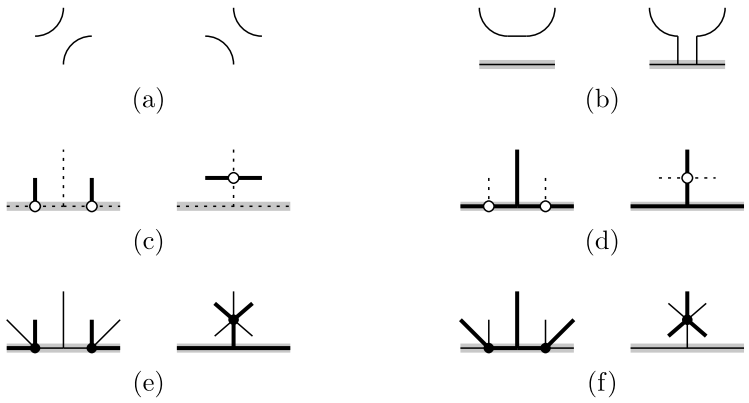

Рис. 1. Элементарные преобразования графов

Следующее утверждение доказывается так же, как и аналогичное утверждение [7, п. 5.3].

Теорема 2. *Две общие вещественные тригональные кривые деформационно эквивалентны (в классе почти общих вещественных тригональных кривых) тогда и только тогда, когда их графы эквивалентны.*

3.4. Жесткие изотопии и слабая эквивалентность. Жесткая изотопия отличается от деформационной эквивалентности дополнительной парой взаимно обратных операций: выпрямлением/созданием зигзага, первая из которых состоит в слиянии двух вертикальных касательных, ограничивающих зигзаг, в одну касательную в точке перегиба с последующим превращением их в пару мнимых сопряженных слоев расслоения q. На уровне графов, эти операции показаны на рис. 2.

Определение 3. Два графа называются *слабо эквивалентными*, если они связаны последовательностью изотопий, элементарных преобразований (см. раздел 3.3) и операции *выпрямления/создания зигзага*, заключающейся в замене одного из фрагментов, показанных на рис. 2, другим.

Рис. 2. Выпрямление/создание зигзага

Следующее утверждение легко вывести из [7].

Предложение 4. *Две общие вещественные тригональные кривые жестко изотопны тогда и только тогда, когда их графы слабо эквивалентны.*

Как упоминалось в [13], следующую теорему можно вывести, например, из предложений 5.5.3 и 5.6.4 в [7] (см. также [14]).

Теорема 5. *Любая негиперболическая неособая вещественная тригональная кривая на поверхности Хирцебруха жестко изотопна максимально изогнутой.*

В рамках слабой эквивалентности графов нам понадобятся следующие два преобразования, уменьшающие число вещественных ○-вершин графа:

1) удаление соседних скачка и зигзага, состоящее из выпрямления зигзага с последующими ○- и ●-in, а также обратное преобразование (см. рис. 3);
2) удаление пары соседних зигзагов, состоящее из ●-out, и выпрямления двух зигзагов с последующими ○- и ●-in, а также обратное преобразование (см. рис. 4).

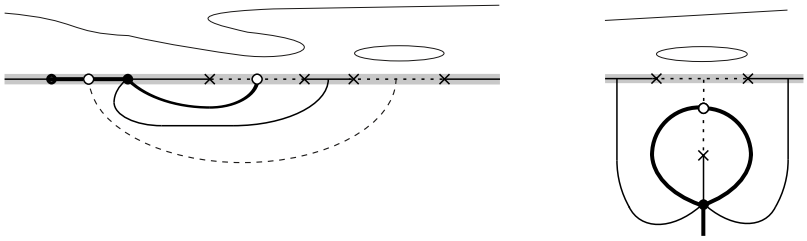

Рис. 3. Удаление/создание соседних скачка и зигзага

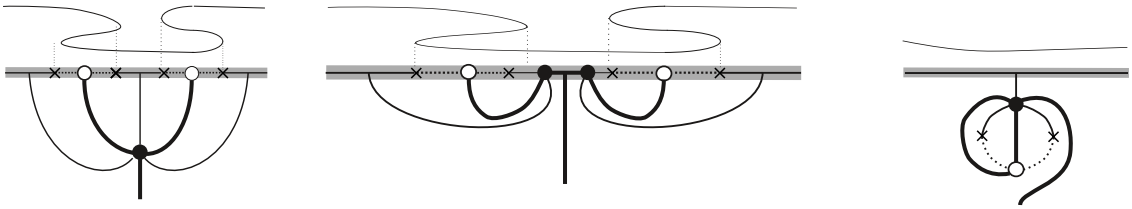

Рис. 4. Удаление/создание пары соседних зигзагов

3.5. Особые тригональные кривые. Неизотривиальная тригональная кривая называется *нодально-каспидальной*, если все корни ее дискриминанта Δ имеют кратность не превосходящую трех.

Теорема 2 распространяется на вещественные нодально-каспидальные кривые и их графы (см. [11, теорема 4.26]).

Нетрудно проверить, что [8, теорема 3] распространяется на вещественные нодально-каспидальные кривые без мнимых особенностей:

Теорема 6. *Любая вещественная нодально-каспидальная негиперболическая кривая без мнимых особенностей жестко изотопна максимально изогнутой.*

Назовем *особыми* вершины графа, отвечающие особым точкам кривой. Вещественные особые $\times$-вершины, к которым примыкают сплошные ребра, т. е. отвечающие изолированным особым точкам кривой (“вырожденным овалам”), назовем *изолированными* и включим их в число максимальных пунктирных сегментов.

Предложение 7. *На вещественном отрезке без $\circ$-вершин изолированную особую точку можно поменять местами с овалом.*

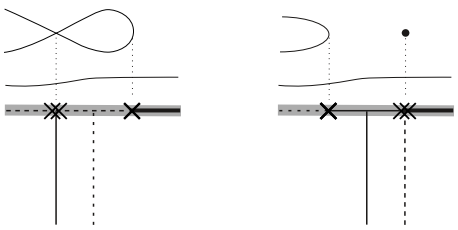

Рис. 5. Прохождение нодальной точки через касп

Доказательство. На таком отрезке все •-вершины встречаются парами, которые можно удалить с отрезка с помощью •-in. После этого преобразование на рис. 5 меняет местами изолированную особую точку и овал. □

3.6. Разрезы. Для $j = 1, 2$ пусть D_j – диск, $\Gamma_j \subset D_j$ – граф нодально-каспидальной кривой, $I_j \subset \partial D_j$ – отрезок и $\varphi : I_1 \to I_2$ – изоморфизм, то есть диффеоморфизм отрезков устанавливающий изоморфизм графов $\Gamma_1 \cap I_1 \to \Gamma_2 \cap I_2$. Рассмотрим фактор-множество $D_\varphi = (D_1 \sqcup D_2)/\{x \sim \varphi(x)\}$ и образ $\Gamma'_\varphi \subset D_\varphi$ графа $\Gamma_1 \cup \Gamma_2$. Обозначим через Γ_φ граф, полученный из Γ'_φ удалением образа отрезка I_1, если φ меняет ориентацию, а если не меняет, то либо преобразованием образов концов отрезка I_1 в монохромные вершины, либо сохранением этих концов в качестве существенных вершин.

В дальнейшем мы всегда считаем, что I_j является частью ребра графа Γ_j (см. рис. 7), или I_j содержит одну ∘-вершину, или заканчивается в особых вершинах и содержит одну монохромную вершину (см. рис. 6). С точностью до изотопии во втором и третьем случаях изоморфизм φ единственен; в первом случае для этого надо еще указать, сохраняет ли φ ориентацию или обращает ее. Если Γ_φ – граф тригональной кривой, его называют результатом *склейки* графов Γ_1, Γ_2 вдоль φ. Образ I_1 называется *разрезом* в Γ_φ. Разрез называется *естественным* (*искусственным*), если φ сохраняет (соответственно, обращает) ориентацию; он называется сплошным, пунктирным или жирным в зависимости от структуры отрезка $\Gamma \cap I_1$. (Названия пунктирный и жирный по-прежнему применяются к разрезам, содержащим ∘-вершину.) *Контактом* называется естественный разрез, полученный склейкой двух графов вдоль изоморфных частей их зигзагов (см. левый рис. 6).

Рис. 6. Примеры естественного склеивания

Рис. 7. Примеры искусственного склеивания

4. Скелеты

Неразветвленные графы можно свести к более простым объектам, так называемым скелетам, которые получаются игнорированием всех ребер, кроме пунктирных.

Ниже понятие скелета, введенное в [8] для максимально изогнутых тригональных кривых, распространяется на случай графа кривой, полученной из максимально изогнутой преобразованиями на рис. 3 и рис. 4, добавлением внутренних неизолированных белых и крестовых вершин скелета (см. определение 9).

4.1. Абстрактные скелеты. Рассмотрим вложенный в круг D (конечный) граф $\mathrm{Sk} \subset D$. Мы не исключаем возможности того, что некоторые вершины Sk принадлежат границе D; такие вершины называются *вещественными*, остальные называются *мнимыми* или *внутренними*. Набор ребер, смежных с каждой вещественной (соответственно внутренней) вершиной v графа Sk получает от D пару противоположных линейных (соответственно циклических) порядков. *Непосредственные соседи* ребра e в вершине v – это непосредственные предшественник и преемник этого ребра относительно (любого) из этих порядков. *Первососедний путь* в Sk – это последовательность ориентированных ребер графа Sk, в которой за каждым ребром следует одно из его непосредственных соседних ребер.

Ниже рассматриваются графы с ребрами двух видов: ориентированными и неориентированными. Мы называем такие графы *частично ориентированными*. Ориентированные и неориентированные части (объединения соответствующих ребер и соседних вершин) частично ориентированного графа Sk обозначаются через $\mathrm{Sk}_{\mathrm{dir}}$ и $\mathrm{Sk}_{\mathrm{ud}}$ соответственно.

Определение 8. Пусть D – круг. *Абстрактный скелет* – это частично ориентированный вложенный граф $\mathrm{Sk} \subset D$, не пересекающийся с ∂D за исключением некоторых вершин, и удовлетворяющий следующим условиям:

1) каждая вершина является *белой*, *черной* или *крестовой*; валентность любой мнимой белой вершины равна двум, любая мнимая черная вершина является изолированной, любая крестовая вершина является мнимой одновалентной и соединена входящим в нее ребром, исходящим из мнимой белой вершины; любое ребро, смежное с вещественной черной вершиной (называемой *источником*), является исходящим; оба ребра, смежных с мнимой белой вершиной, являются исходящими;
2) любая изолированная черная/белая вершина принадлежит $\mathrm{Sk}_{\mathrm{dir}}$ / $\mathrm{Sk}_{\mathrm{ud}}$;
3) любой непосредственный сосед входящего ребра – исходящее ребро;
4) Sk не имеет первососедних циклов;
5) множество вещественных вершин графа Sk непусто;
6) $b_1 + 3b = v + z + i$ для любой открытой грани R, т. е. компоненты дополнения в D объединения замыканий всех ребер графа Sk, где b_1 – количество лежащих на границе $\mathrm{Fr}R$ грани R черных вершин, каждая из которых инцидентна одному

исходящему из нее ребру, лежащему на $\mathrm{Fr}R$, b – количество изолированных (вещественных или мнимых) черных вершин в R, v – количество черных вершин на $\mathrm{Fr}R$, каждая из которых инцидентна двум исходящим из нее ребрам, лежащим на $\mathrm{Fr}R$, z – количество компонент связности множества $\mathrm{Sk}_{\mathrm{ud}} \cap \mathrm{Fr}R$, i – количество мнимых белых вершин на $\mathrm{Fr}R$, причем такая вершина считается дважды, если смежные с ней ребра на $\mathrm{Fr}R$ являются внутренними, т. е. R примыкает к ним с двух сторон.

Если дополнительно

7) $\mathrm{Sk}_{\mathrm{dir}} \cap \mathrm{Sk}_{\mathrm{ud}} = \varnothing$;
8) в каждой вещественной вершине нет ориентированных исходящих ребер, являющихся непосредственными соседями;
9) каждая вещественная белая вершина $\mathrm{Sk}_{\mathrm{dir}}$ имеет нечетную валентность и является *стоком*, что означает, что число соседних входящих в нее ребер на единицу больше числа исходящих;
10) каждая черная вершина вещественна и одновалентна (т. е. является источником);
11) вершины подграфов $\mathrm{Sk}_{\mathrm{dir}}$ и $\mathrm{Sk}_{\mathrm{ud}}$ чередуются вдоль ∂D,

то Sk называется скелетом *типа* I.

4.2. Эквивалентность абстрактных скелетов. Два абстрактных скелета называются *эквивалентными*, если с точностью до гомеоморфизма $f : D \to D$ они могут быть связаны следующими *элементарными преобразованиями* (ср. раздел 3.3):

– *элементарная модификация*, см. рис. 8 (a);
– *создание* (*удаление*) *моста*, см. рис. 8 (b); вершина, показанная на рисунке, является белой, к ней могут примыкать и другие ребра скелета Sk;
– *создание* (*удаление*) *неориентированного ребра*, см. рис. 8 (c); вершина, показанная на рисунке, является черной вещественной, примыкающие к ней ребра являются непосредственными соседями, кроме которых к ней могут примыкать и другие ориентированные исходящие ребра; ребро в правой части рисунка неориентированное;
– $\bullet$-*in* и обратное к нему $\bullet$-*out*, см. рис. 8 (d), (e); все вершины показанные на этих рисунках черные, на рисунке (d) могут присутствовать другие ориентированные исходящие ребра, примыкающие к вещественным вершинам;
– *удаление/создание соседних скачка и зигзага*, см. рис. 8 (f);
– *удаление/создание пары соседних зигзагов*, см. рис. 8 (g);
– *преобразование пары ориентированных ребер в неориентированное ребро и обратное преобразование*, см. рис. 8 (h).

Преобразование выполнимо только в том случае, если результатом опять является абстрактный скелет.

Эквивалентность двух абстрактных скелетов на одном круге с тем же набором вер-

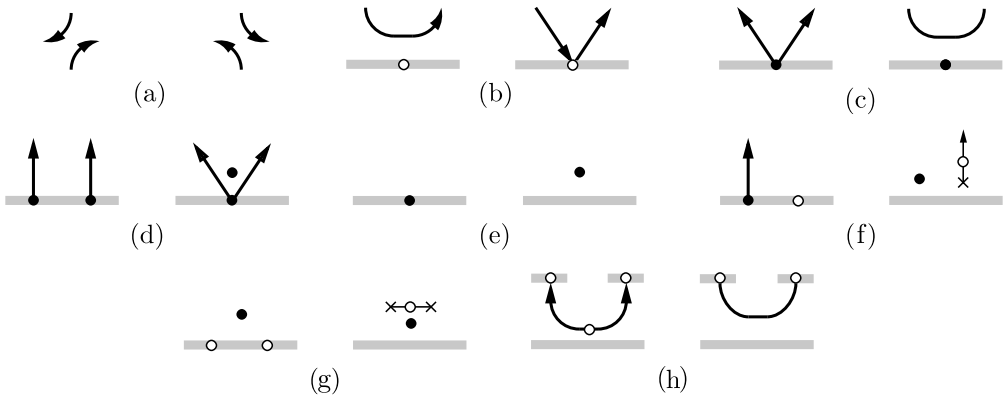

Рис. 8. Преобразования скелетов

шин называется *ограниченной*, если гомеоморфизм $f = \mathrm{id}$ и указанные выше изотопии можно выбрать тождественными на вершинах.

4.3. Пунктирные скелеты. Интуитивно, пунктирный скелет (см. определение 9) получается из графа Γ некоторой общей тригональной кривой удалением всех ребер, кроме пунктирных, склейкой последних в вещественных $\circ$-вершинах и добавлением мнимых $\bullet$-, $\circ$- и $\times$-вершин. При этом неориентированные ребра скелета отвечают контактам графа Γ.

Определение 9. Пусть $\Gamma \subset D$ – неразветвленный граф или граф, полученный из неразветвленного удалениями некоторых пар, состоящих из соседних скачка и зигзага, или пар соседних зигзагов (см. рис. 3, рис. 4). Пусть $\bar{D}$ – это круг, полученный из D стягиванием каждого максимального пунктирного/жирного сегмента в точку. (*Пунктирный*) *скелет* графа Γ представляет собой частично ориентированный граф $\mathrm{Sk} = \mathrm{Sk}_\Gamma \subset \bar{D}$, полученный из Γ следующим образом:

- каждый максимальный пунктирный/жирный сегмент стягивается в точку, которая объявляется белой/черной вершиной скелета Sk;
- каждая внутренняя $\bullet$-/$\times$-вершина графа Γ заменяется внутренней черной/крестовой вершиной скелета Sk;
- каждая внутренняя $\circ$-вершина графа Γ, не лежащая на контакте заменяется внутренней белой вершиной скелета Sk, а примыкающие к ней пунктирные ребра заменяются ориентированными ребрами скелета, направленными от этой белой вершины к крестовой или белой вещественной вершинам;
- каждый контакт заменяется неориентированным ребром скелета Sk, а каждое из не упомянутых выше внутренних пунктирных ребер графа Γ заменяется ориентированным ребром скелета Sk с ориентацией, полученной из ориентации пунктирного ребра;
- $\mathrm{Sk}_{\mathrm{dir}}$ ($\mathrm{Sk}_{\mathrm{ud}}$) является объединением черных (соответственно белых) изолированных вершин и замыканий ориентированных (соответственно, неориентированных) ребер скелета Sk (так что $\mathrm{Sk}_{\mathrm{dir}}$ и $\mathrm{Sk}_{\mathrm{ud}}$ могут пересекаться в вещественных вершинах).

Следующие утверждения доказываются так же, как и утверждения [8, предложения 5–7, теорема 2].

Предложение 10. *Скелет* Sk *графа* Γ *из определения 9 представляет собой абстрактный скелет в смысле определения 8.*

Предложение 11. *Любой абстрактный скелет* Sk *является скелетом некоторого графа* Γ *в смысле определения 9; любые два таких графа можно соединить последовательностью изотопий и элементарных преобразований (см. раздел 3.3) сохраняющих скелет.*

Предложение 12. *Пусть скелеты* Sk_1 *и* Sk_2 *с одинаковым набором вершин получены из графов* $\Gamma_1, \Gamma_2 \subset D$ *в соответствии с определением 9. Тогда* Γ_1 *и* Γ_2 *связаны ограниченной эквивалентностью в том и только в том случае, когда соответствующие скелеты* Sk_1 *и* Sk_2 *ограниченно эквивалентны.*

Теорема 13. *Существует каноническая биекция между множеством классов жесткой изотопии почти общих вещественных тригональных кривых и множеством классов эквивалентности абстрактных скелетов.*

5. Конструктивное описание максимально изогнутых тригональных кривых

В этом разделе дается конструктивное описание вещественных частей неособых максимально изогнутых тригональных кривых.

5.1. Блоки. Рассмотрим класс неразветвленных графов, задаваемых конструктивно согласно следующему определению.

Определение 14. *Кубическим блоком типа* I называется неразветвленный граф степени 3 типа I (см. рис. 9 I). *Кубическим блоком типа* II называется неразветвленный граф степени 3 типа II с внутренней •-вершиной (см. рис. 9 II). Несколько кубических блоков, искусственно склеенных вдоль отрезков сплошных ребер, образуют (*общий*) *блок*. Тип блока – это тип кривой, соответствующей блоку.

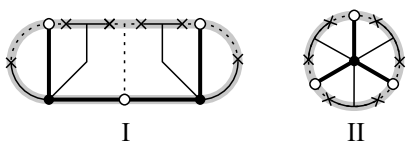

Рис. 9. Кубические блоки

Согласно [7, 5.6.7] и [8, 5.1], оба кубических блока единственны с точностью до изоморфизма.

Следующее предложение [8, предложение 8] дает описание блоков.

Предложение 15. *Пусть $d \geq 1$ – целое число, и пусть $O, J \subset S^1 = \partial D$ – два непересекающихся d-элементных множества. Тогда существует единственный, с точностью до ограниченной эквивалентности, блок $\Gamma \subset D$ типа* I *и степени $3d$ с овалом вокруг каждой точки из O, скачком в вокруг каждой точки из J и зигзагом между любыми двумя точками $O \cup J$ (и без других пунктирных и жирных сегментов).*

Блок степени $3d$ произвольного типа с c скачками, с овалами, b внутренними $\bullet$-вершинами и z зигзагами соответствует абстрактному скелету в круге с c ориентированными непересекающимися хордами, b внутренними черными вершинами и z вещественными изолированными белыми вершинами, которые удовлетворяют следующим условиям:

1) $b + c = d$, $z + c = 3d$;
2) *для каждой компоненты R_i замкнутого разреза круга по хордам, $z_i = c_i + 3b_i$, где c_i, b_i и z_i – число хорд, черных внутренних вершин и вещественных изолированных вершин этой компоненты.*

Замечание 16. Из этого описания сразу следует, что естественную склейку двух блоков по жирным отрезкам можно заменить либо контактом двух других блоков, составленных из частей прежних блоков, либо искусственной склейкой вдоль отрезков сплошных ребер, т. е. новым блоком.

5.2. Вещественные части максимально изогнутых кривых. Полное описание вещественной части максимально изогнутой неособой тригональной кривой, т. е. описание топологии пары $(\mathbb{R}\Sigma_k, \mathbb{R}C)$, дано в [8, 5.3] и, с учетом замечания 16, выглядит следующим образом: граф максимально изогнутой кривой получается из дизъюнктного объединения блоков с помощью контактов, преобразующих круги блоков в один круг. При этом если все блоки имеют тип I и все склейки являются контактами, получается граф типа I, в противном случае – граф типа II.

5.3. Блоки и слабая эквивалентность графов. Согласно [8, предложение 10, лемма 1] для любого $d \geq 1$ существует единственный, с точностью до слабой эквивалентности, блок $\Gamma \subset D$ типа I степени $3d$.

Теорема 17. *Блок типа* II *с не менее, чем двумя овалами слабо эквивалентен графу с контактом.*

Доказательство. Пусть B – блок типа II и $d \geq 2$ – его степень. Если в B имеются два скачка, соединенных сплошным сегментом, то контакт получается после преобразований на рис. 8 (d), (c) скелета блока B. В противном случае каждый скачок имеет свой соседний зигзаг, и все скачки можно устранить с помощью преобразования на рис. 8 (f), получив, согласно предложению 15, граф с d (мнимыми) $\bullet$-вершинами, c овалами и z зигзагами, $c \leq d$, $z \geq d$. Если после этого зигзаги будут чередоваться с овалами, то обратное преобразование возвращает к блоку типа I согласно тому же предложению. Поэтому B содержит

два соседних овала, между которыми (хотя бы на одном из вещественных отрезков) лежит $r \geq 2$ зигзагов. Применим к $[r/2]$ тройкам, состоящим из пары этих зигзагов и $\bullet$-вершины, преобразование на рис. 8 (g). В зависимости от того, четно r или нет, преобразуем скелет полученного графа согласно рис. 10 или рис. 11. □

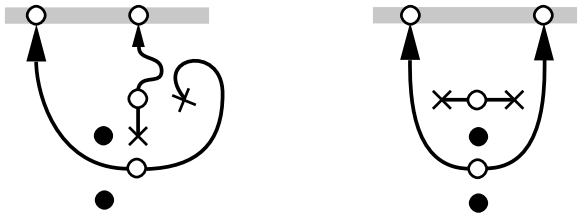

Рис. 10. Контакт с кубическим блоком типа II

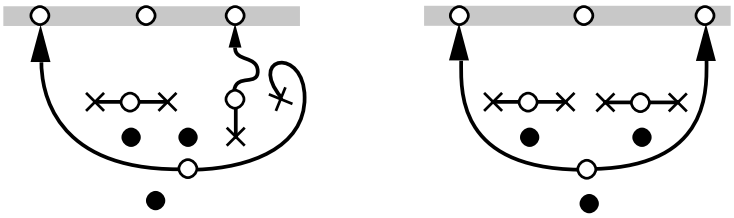

Рис. 11. Контакт с блоком степени 6

6. Особые кривые бистепени (4,3) на гиперболоиде и собственные тригональные кривые

Хорошо известно (см., например, [11, 3.1.1]), что положительное и отрицательное преобразования Нагаты устанавливают соответствие между (тригональными) кривыми бистепени $(m, 3)$ на гиперболоиде и собственными тригональными кривыми: кривой $C \subset \Sigma_0$ отвечает ее образ $N(C) \subset \Sigma_m$ при положительном преобразовании Нагаты, раздувающем точки пересечения кривой C с кривой $E_0 \subset \Sigma_0 = \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$.

Перечислим стенки в пространстве $C_{4,3}$ и найдем соответствие между жесткими изотопиями кривых в стенке и преобразованиями графов соответствующих собственных тригональных кривых.

6.1. Стенки в пространстве $C_{4,3}$. На рис. 12, рис. 13, рис. 14 в обозначениях работы [1] указаны вещественные схемы кривых классов $\omega^{\pm}_{inn}$, $\omega^{\pm}_{out}$, $\tilde{\omega}$, $\gamma^{\pm}_{inn}$, $\gamma^{\pm}_{out}$, $\tilde{\gamma}$, $\alpha^{\pm}_{lp}\langle l\rangle$, $\alpha^{\pm}_{ov}\langle l\rangle$, $\tilde{\alpha}\langle l\rangle$ в пространстве $C_{4,3}$, отмеченные верхним индексом "+" (для кривых классов γ^{+}_{out}, α^{+}_{lp}, $\tilde{\alpha}$ показаны схемы с изолированной особой точкой). Схемы с верхним индексом "−" получаются отражением относительно вертикального слоя. Графы и скелеты на этих рисунках описываются ниже.

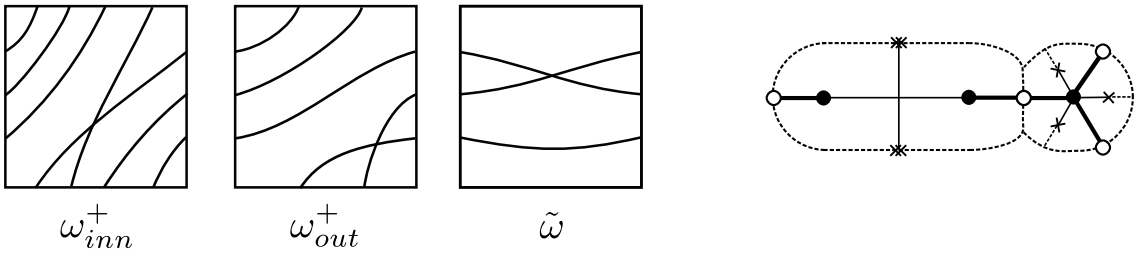

Рис. 12. Вещественные схемы кривых классов ω^+_{inn}, ω^+_{out}, $\tilde{\omega}$ и граф соответствующей тригональной кривой

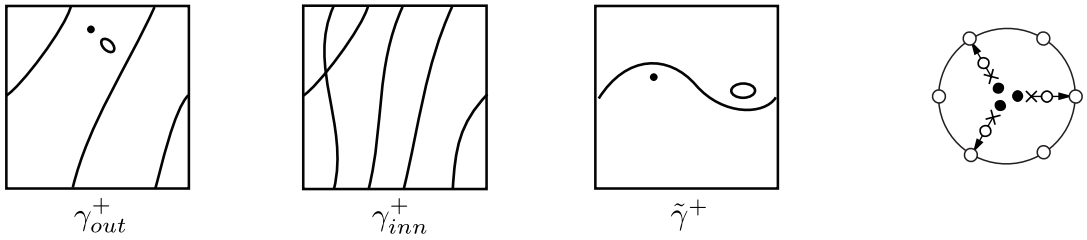

Рис. 13. Вещественные схемы кривых классов γ^+_{inn}, γ^+_{out}, $\tilde{\gamma}$ и скелет соответствующей тригональной кривой

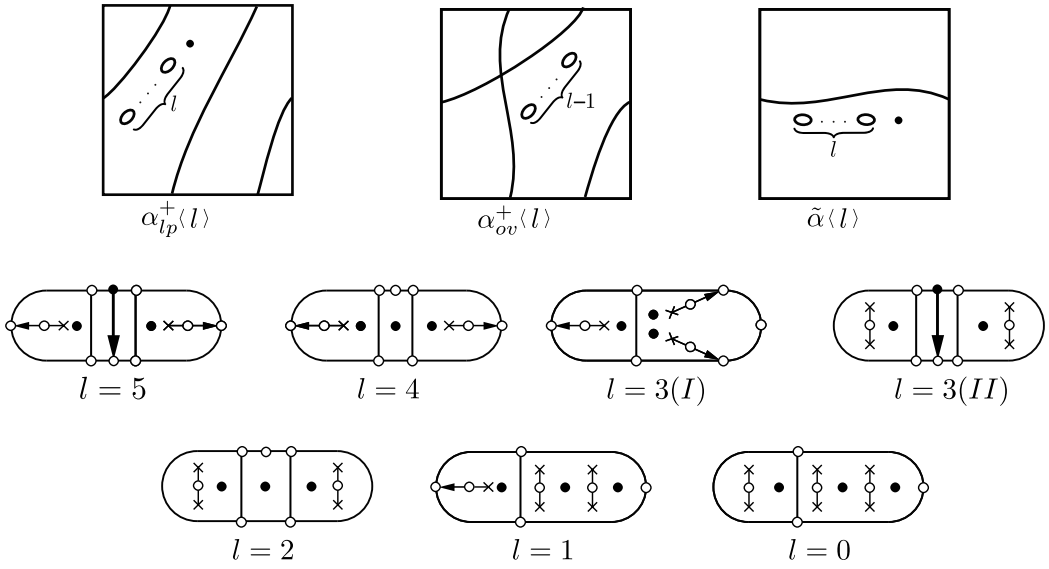

Рис. 14. Вещественные схемы кривых классов $\alpha^+_{lp}\langle l\rangle$, $\alpha^+_{ov}\langle l\rangle$, $\tilde{\alpha}\langle l\rangle$ и скелеты соответствующих тригональных кривых

В работе [1] доказано, что каждая из комплексных схем $\omega^{\pm}_{\text{out}}$, $\tilde{\omega}$, $\gamma^{\pm}_{\text{inn}}$, $\gamma^{\pm}_{\text{out}}$, $\tilde{\gamma}^{\pm}$, $\alpha^{\pm}_{\text{ov}}B$ ($B = \langle 1\rangle$, $\langle 2\rangle$, $\langle 3\rangle^{\pm}_{I}$, $\langle 3\rangle_{II}$, $\langle 4\rangle$, $\langle 5\rangle^{\pm}$), $\tilde{\alpha}B$ ($B = \langle 0\rangle$, $\langle 1\rangle$, $\langle 2\rangle$, $\langle 3\rangle_{I}$, $\langle 3\rangle_{II}$, $\langle 4\rangle$, $\langle 5\rangle$) отвечает единственной стенке. То же самое осталось доказать для комплексных схем $\{\omega^{\pm}_{\text{inn}}$, , $\alpha^{\pm}_{\text{lp}}B$ ($B = \langle 0\rangle$, $\langle 1\rangle$, $\langle 2\rangle$, $\langle 3\rangle_{I}$, $\langle 3\rangle_{II}$, $\langle 4\rangle$, $\langle 5\rangle$).

6.2. Особые слои и преобразования Нагаты. Для получения с помощью преобразования Нагаты собственной тригональной кривой на Σ_3 из особой кривой $C \in \Delta \smallsetminus S$ бистепени $(4,3)$ на гиперболоиде в качестве исключительного сечения E_0 возьмем кривую бистепени $(0,1)$, проходящую через особую точку кривой C, и рассмотрим на гиперболоиде карту (x,y), где E_0 и особый слой F задаются уравнениями $y=\infty$ и $x=0$. Тогда положительное преобразование Нагаты N с центром в точке $p = F \cap C \cap E_0$ задается равенством $(x,z)=(x,xy)$. Ниже кривая C и ее образ $N(C)$ задаются локальными уравнениями с указанием лишь необходимых начальных членов. Для кривых из классов $\omega^{\pm}_{inn}$, $\alpha^{\pm}_{lp}$ нам понадобятся преобразования Нагаты следующих особых слоев (слои $N(F)$ и $N^2(F)$ кривых $N(C)$ и $N^2(C)$ обозначены в соответствии с [11, 3.1.2]):

1) p – невырожденная двойная точка, в которой кривая C не касается ни F, ни E_0.
   $C : x^2y^3+y+1=0$, $N(C) : z^3+z+x=0$, слой $N(F):\ \tilde{A}_0$;
2) p – невырожденная двойная точка, в которой кривая C касается слоя F и не касается E_0.
   $C : x^2y^3+xy^2+1=0$, $N(C) : z^3+z^2+x=0$, слой $N(F):\ \tilde{A}^*_0$;
3) p – невырожденная двойная точка, в которой кривая C касается E_0 и не касается F.
   $C : x^3y^3+xy^2+y+1=0$, $N^2(C) : z^3+z^2+xz+x^3=0$, слой $N^2(F):\ \tilde{A}_1$;
4) p – невырожденная двойная точка, в которой кривая C касается как E_0, так и F.
   $C : x^3y^3+xy^2+1=0$, $N^2(C) : z^3+z^2+xz+x^3=0$, слой $N^2(F):\ \tilde{A}_2$;
5) p – точка возврата, касательная в которой не совпадает ни с E_0, ни с F.
   $C : x^2y^3+2xy^2+y+x^2y^2+1=0$, $N(C) : z^3+2z^2+z+xz^2+x=0$, слой $N(F):\ \tilde{A}^*_0$;
6) p – точка возврата с вертикальной касательной.
   $C : x^2y^3+1=0$, $N(C) : z^3+x=0$, слой $N(F):\ \tilde{A}^{**}_0$;
7) p – точка возврата с горизонтальной касательной.
   $C : x^3y^3+y+1=0$, $N^2(C) : z^3+xz+x^3=0$, слой $N^2(F):\ \tilde{A}^*_1$;
8) p – неособая точка кривой C с невертикальной и негоризонтальной касательной, а F пересекается с C в трех различных точках.
   $C : xy^3+y^2+1=0$, $N(C) : z^3+z^2+x^2=0$, слой $N(F):\ \tilde{A}_1$;
9) p – неособая точка кривой C с невертикальной и негоризонтальной касательной, а F касается кривой C (в точке, отличной от p).
   $C : xy^3+y^2+x=0$, $N(C) : z^3+z^2+x^3=0$, слой $N(F):\ \tilde{A}_2$;
10) p – неособая точка кривой C с вертикальной касательной и F пересекает кривую C в точке, отличной от p.
    $C : xy^3+y+x=0$, $N(C) : z^3+xz+x^3=0$, слой $N(F):\ \tilde{A}^*_1$;
11) p – точка перегиба кривой C с вертикальной касательной.
    $C : xy^3+1=0$, $N(C) : z^3+x^2=0$, слой $N(F):\ \tilde{A}^*_2$.

6.3. Кривые $\omega^{\pm}_{inn}$. Кривая $C \in \omega^{\pm}_{inn}$ является гиперболической. Ее вещественную схему можно получить объединением вещественных схем $\langle (2,3) \rangle$ и $\langle (1,1) \rangle$ неособых ветвей

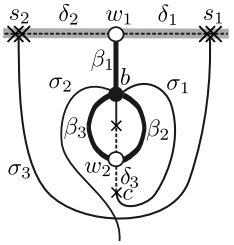

Рис. 15. Сплошной разрез

кривой, трансверсально пересекающихся в одной точке p (см. рис. 12). Поэтому кривая C имеет три особых слоя: два слоя вида 8) и слой F_p вида 1) из раздела 6.2. Следовательно, кривая $N_3(C) \subset \Sigma_3$, где N_3 – композиция трех положительных преобразований Нагаты, имеет две различные крестовые особые точки и неособую точку $a \in N_3(F_p)$, лежащую на образе ветви $(2,3)$ (на той ее дуге, ограниченной особыми точками, которая имеет четную кратность пересечения с прямой $y = 0$).

Лемма 18. *Граф кривой $N_3(C)$ эквивалентен графу с естественным сплошным разрезом, соединяющим мнимую сплошную вершину с особыми вершинами.*

Доказательство. Так как степень 9 графа кривой $N_3(C)$ нечетна, он имеет нечетное число $\circ$-вершин. На вещественном отрезке графа, ограниченном особыми вершинами s_1, s_2 и имеющем нечетное число $\circ$-вершин, удалим все эти $\circ$-вершины, кроме одной, с помощью $\circ$-in и удалим появившиеся возможно мосты. Оставшаяся $\circ$-вершина w_1 соединена вещественными ребрами δ_1, δ_2 с s_1, s_2 и жирным ребром β_1 с некоторой $\bullet$-вершиной b. Пусть β_2, β_3 – другие жирные ребра, исходящие из b (см. рис. 15), и w_2 – $\circ$-вершина, являющаяся концом ребра β_2. Сделав при необходимости монохромные преобразования, получаем, что w_2 будет концом ребра β_3 и концом пути $b, \sigma_1, c, \delta_3, w_2$, где σ_1 – сплошное ребро, лежащее между β_1 и β_2, c – $\times$-вершина, δ_3 – пунктирное ребро. Соединим вершины b и s_1 сплошным ребром σ_2, сделав, если нужно, монохромное преобразование. Грань полученного графа, содержащая на границе путь $s_1, \sigma_2, b, \beta_1, \delta_2, s_2, \sigma_3$, где σ_3 – сплошное ребро, не является треугольной, поэтому в ходе (сплошного) монохромного преобразования ребер σ_2, σ_3 можно остановиться в промежуточном положении, создав мнимую монохромную вершину и, тем самым, искомый разрез. □

Замечание 19. Слой $N_3(F_p)$ отвечает точке графа кривой $N_3(C)$, лежащей на вещественном отрезке графа, ограниченном особыми вершинами s_1, s_2 и имеющем четное число $\circ$-вершин, иначе существует преобразование графа, переводящее s_1, s_2 в мнимую особую вершину, что невозможно, согласно сказанному в начале раздела 6.3.

Теорема 20. *Каждый из классов ω^+_{inn} и ω^-_{inn} связен, т. е. состоит из одной стенки.*

Доказательство. После разреза, указанного в лемме 18, получаются кубический граф типа II и граф степени 6 с одним овалом, которые по теореме 5 слабо эквивалентны

соответствующим блокам (см. граф на рис. 12). Последние единственны с точностью до слабой эквивалентности согласно [8, предложение 8, лемма 1].

Если по собственной тригональной кривой кривая ω^-_{inn} построена, то кривую, симметричную кривой C относительно E_0, можно получить из кривой, которая в аффинной карте $\Sigma_3 \setminus (E_3 \cup N_3(F_p))$ симметрична кривой $N_3(C)$ относительно оси x, и имеет, очевидно, тот же граф, что и кривая $N_3(C)$. □

Замечание 21. Кривые из классов $\omega^\pm_{out}$, $\tilde{\omega}$ отличаются от кривой $C \in \omega^\pm_{inn}$ лишь выбором точки $a \in N_3(C)$ (на дуге образа ветви $(2,1)$, ограниченной особыми точками, которая имеет нечетную кратность пересечения с прямой $y = 0$ – для классов $\omega^\pm_{out}$; на образе ветви $(1,0)$ – для класса $\tilde{\omega}$). Поэтому те же аргументы доказывают связность и этих классов.

6.4. Кривые $\alpha^\pm_{lp}\langle l\rangle$. Кривая $C \in \alpha^\pm_{lp}\langle l\rangle$ является негиперболической. Ее вещественная часть содержит (возможно особую) ветвь, реализующую класс $(1, \pm 2)$ в $H_1(\mathbb{R}X)$, и l овалов, если особая точка не лежит на овале (см. рис. 14). Поэтому кривая C имеет либо три особых слоя: два слоя видов 8)-11) и слой F_p одного из видов 1), 2), 5), 6) из раздела 6.2, либо два особых слоя: слой одного из видов 8)-11) и слой F_p одного из видов 3), 4), 7). Следовательно, собственная тригональная кривая $N_3(C) \subset \Sigma_3$ имеет особые слои, перечисленные в разделе 6.2. Для возвращения к кривой C с помощью отрицательных преобразований Нагаты надо раздуть особые точки кривой $N_3(C)$ и точку a, лежащую на образе ветви $(1, \pm 2)$ (на той ее дуге, ограниченной особыми точками, которая имеет четную кратность пересечения с прямой $y = 0$).

Замечание 22. При $l = 1$ кривая C принадлежит типу II. Кривая типа I с похожей вещественной схемой (см. рис. 13) принадлежит одной из стенок $\gamma^\pm_{out}$. Единственность последних, как и стенок $\tilde{\gamma}^\pm$, $\gamma^\pm_{inn}$, следует из единственности (см. [8, предложение 10, лемма 1]) блока степени 9, имеющего тип I, со скелетом на рис. 13, поскольку эти стенки отличаются лишь выбором точки $a \in N_3(C)$ (на дуге образа ветви $(1, \pm 2)$, ограниченной особыми точками, которая имеет четную/нечетную кратность пересечения с прямой $y = 0$ – для стенок $\gamma^\pm_{out}/\tilde{\gamma}^\pm$; на овале – для стенок $\gamma^\pm_{inn}$).

Лемма 23. *Существует нодально-каспидальная кривая с двумя невырожденными изолированными особыми точками, жестко изотопная кривой $N_3(C)$.*

Доказательство. Особые точки кривой $N_3(C)$ отвечают особым вершинам ее графа. Пусть особая вершина s не является изолированной. Если s соединена вещественным пунктирным ребром с (неособой) $\times$-вершиной, то s можно превратить в изолированную вершину с помощью преобразования на рис. 5.

Пусть теперь особая вершина s соединена с двумя $\times$-вершинами вещественными пунктирными отрезками, содержащими нечетное число $\circ$-вершин. С помощью $\circ$-in оставим по одной $\circ$-вершине на этих отрезках. Согласно теореме 6 граф кривой $N_3(C)$ является неразветвленным, поэтому результат Γ его возмущения, превращающего особые вершины в овалы, распадается на блоки после естественных разрезов по пунктирным ребрам

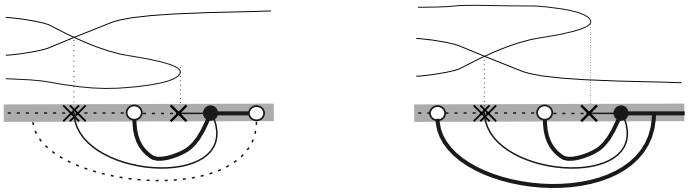

Рис. 16. Прохождение нодальной точки через точку $\tilde{A}_1^*$

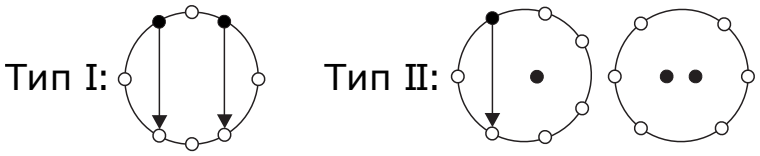

Рис. 17. Блоки степени 6 с точностью до слабой эквивалентности

(см. раздел 5.2). Следовательно, сплошной отрезок, полученный из s, лежит в одном из блоков между двумя зигзагами; поэтому блок имеет тип II и по теореме 17 имеет не более одного овала. Следовательно, рядом с одним из зигзагов лежит скачок. Возвращаясь к графу кривой $N_3(C)$ и применяя к фрагменту графа, содержащему $\bullet$-вершину этого скачка, преобразования на рис. 16 и рис. 5, получаем изолированную особую вершину. Наконец, последний возможный случай, препятствующий применить преобразование на рис. 5 сразу, – это когда обе особые вершины s_1, s_2 лежат между двумя $\times$-вершинами на одном пунктирном отрезке и разбивают его на три отрезка, содержащих нечетное число $\circ$-вершин (поскольку для кривой C тоже, очевидно, справедливо замечание 19, между s_1, s_2 лежит нечетное число $\circ$-вершин). С помощью $\circ$-in оставим по одной $\circ$-вершине на этих отрезках. Те же аргументы, что и в предыдущем случае, показывают, что рядом с одной из крайних $\times$-вершин лежит скачок, поэтому применение преобразования на рис. 16 удаляет $\circ$-вершину между s_1, s_2, приводя к графу кривой, не лежащей в $\alpha_{lp}^{\pm}\langle l\rangle$ в силу замечания 19. □

Используя доказанную лемму будем далее считать, что особые вершины графа $N_3(C)$ отвечают изолированным особым точкам. Обозначим через Γ результат возмущения этого графа, превращающего особые вершины в овалы.

Лемма 24. *Граф кривой $N_3(C)$ слабо эквивалентен графу с единственной вещественной $\circ$-вершиной.*

Доказательство. Согласно замечанию 22 граф Γ не может быть блоком типа I, поэтому по теореме 17 граф является контактом трех кубических блоков или кубического блока и блока степени 6 (см. рис. 17). Преобразования на рис. 3, рис. 4 в крайних блоках в первом случае и в обоих блоках во втором с последующим стягиванием двух овалов в особые точки дают нужный граф. □

Теорема 25. *Стенка в классе кривых $\alpha^{\pm}_{lp}\langle l\rangle$ однозначно определяется комплексной схемой.*

Доказательство. После преобразования, указанного в лемме 24, особые вершины можно менять местами с любыми овалами согласно предложению 7. Поэтому достаточно доказать теорему для графа Γ. Рассмотрим все значения l. Скелеты изучаемых ниже графов указаны на рис. 14.

1) При $l = 5$ в силу [8, лемма 1] граф Γ единственен с точностью до слабой эквивалентности как граф M-кривой.
2) При $l = 4$ в силу [7, 6.4.2] и [8, лемма 1] граф Γ единственен с точностью до слабой эквивалентности как граф $(M-1)$-кривой.
3) При $l = 3$, как уже говорилось в доказательстве леммы 24, граф Γ является контактом кубического блока K и графа B степени 6. При этом если Γ принадлежит типу I, K и B являются блоками типа I, единственными с точностью до слабой эквивалентности по [8, предложение 8, лемма 1]. Если Γ принадлежит типу II, B содержит контакт по теореме 17, иначе он был бы блоком типа I с двумя овалами и потому K тоже был бы блоком типа I. Поэтому Γ – контакт трех кубических блоков, один имеет тип I, а два – тип II. Объединение блока типа I и блока типа II дает граф $(M-1)$-кривой, в котором блоки можно переставить согласно [7, 6.4.2]. Следовательно, Γ эквивалентен графу с центральным кубическим блоком типа I и потому единственен.
4) При $l = 2$, как и при $l = 3$, граф Γ является контактом кубического блока K и графа B степени 6. Если K принадлежит типу I, следующие преобразования скелета графа Γ позволяют получить контакт с концами в соседних овалах, превратив K в кубический блок типа II: преобразования (f), (g) на рис. 8, примененные к K и B, преобразование (h) на рис. 8, примененное к контакту, преобразование (a) на рис. 8, примененное к ребрам e_1, e_2 на рис. 18, преобразование на рис. 10, примененное к ребрам e'_1, e_3 на рис. 18.

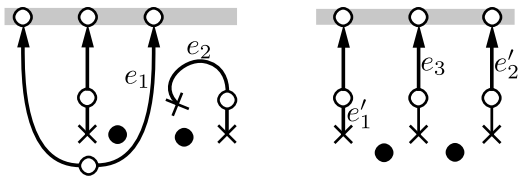

Рис. 18. Контакт с кубическим блоком типа I

5) При $l = 1$ граф Γ является контактом кубического блока K и блока B степени 6. Если K принадлежит типу I, такие же преобразования скелета графа Γ, как и при $l = 2$, переносят овал из K в B, помещая его рядом с любым из концов контакта. Обратные преобразования и преобразование на рис. 8 (g) дают скелет, указанный на рис. 14 ($l = 1$). Поэтому единственность Γ следует из его эквивалентности контакту кубического блока типа I и блока степени 6 без овалов.

6) При $l = 0$ граф Γ является контактом кубического блока K типа II и блока B степени 6 без овалов и потому единственен.

Если по собственной тригональной кривой кривая $C \in \alpha^+_{lp}\langle l\rangle$ построена, то кривую из $\alpha^-_{lp}\langle l\rangle$, симметричную C относительно E_0, можно получить из кривой, которая в аффинной карте $\Sigma_3 \setminus (E_3 \cup N_3(F_p))$ симметрична кривой $N_3(C)$ относительно оси x, и имеет, очевидно, тот же граф, что и кривая $N_3(C)$. □

Замечание 26. Кривые из классов $\tilde{\alpha}\langle l\rangle$, $\alpha^\pm_{ov}\langle l\rangle$, отличаются от кривой $C \in \alpha^\pm_{lp}\langle l\rangle$ лишь выбором точки $a \in N_3(C)$ (на дуге образа ветви $(1, 0)$, ограниченной особыми точками, которая имеет нечетную кратность пересечения с прямой $y = 0$ – для классов $\tilde{\alpha}\langle l\rangle$; на овале – для классов $\alpha^\pm_{ov}\langle l\rangle$). Поэтому те же аргументы доказывают связность и этих классов.

7. Применение: кривые рода 4 на квадратичном конусе

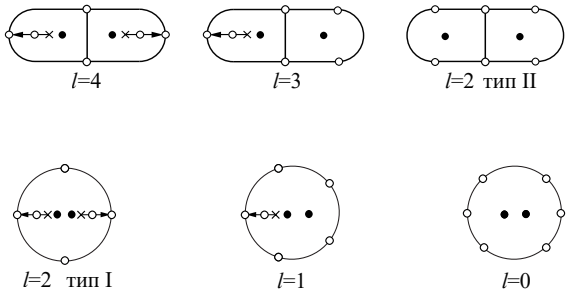

Рис. 19. Скелеты негиперболических кривых на Σ_2

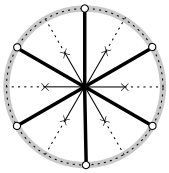

Рис. 20. Граф гиперболической кривой на Σ_2

Те же соображения, что и в доказательстве леммы 24, дают жесткую изотопическую классификацию неособых вещественных тригональных кривых рода 4 на квадратичном конусе (ср. [2, A3.6.1.]). После раздутия вершины конуса такая кривая дает собственную кривую на Σ_2. Граф негиперболической кривой является либо блоком степени 6, либо контактом двух кубических блоков (см. рис. 19). Кривые, получаемые друг из друга отражением относительно оси OX, имеют один и тот же граф, но симметричные вещественные схемы. Класс жесткой изотопии определяется комплексной схемой; их число равно 11: при $l = 0$ схема гиперболической кривой (см. ее граф на рис. 20) и схема типа II, при $l = 2$ схема типа I и две симметричные друг другу схемы типа II, при $l = 1, 3, 4$ – по две симметричные друг другу схемы.

Автор выражает благодарность рецензенту за советы и замечания, позволившие устранить недочеты и неточности, имевшиеся в первоначальном варианте статьи.

Список литературы

[1] В.И. Звонилов, *Жесткая изотопическая классификация вещественных алгебраических кривых бистепени* (4,3) *на гиперболоиде*, Вестник Сыктывкарского университета, Сер. 1 (3), 81–88 (1999).

[2] A. Degtyarev, I. Itenberg, V. Kharlamov, *Real Enriques surfaces*, Lecture Notes in Math. **1746**, Springer-Verlag, Berlin, 2000.
DOI: https://doi.org/10.1007/BFb0103960

[3] В.И. Звонилов, *Жесткая изотопическая классификация вещественных алгебраических кривых бистепени* (4,3) *на гиперболоиде. Приложение*, Вестник Сыктывкарского университета, Сер. 1 (5), 239–242 (2003).

[4] В.А. Рохлин, *Комплексные топологические характеристики вещественных алгебраических кривых*, УМН **33** (5), 77–89 (1978).
URL: https://www.mathnet.ru/rus/rm3519

[5] О.Я. Виро, *Успехи в топологии вещественных алгебраических многообразий за последние шесть лет*, УМН **41** (3), 45–67 (1986).
URL: https://www.mathnet.ru/rus/rm2078

[6] В.И. Звонилов, *Комплексные топологические инварианты вещественных алгебраических кривых на гиперболоиде и эллипсоиде*, Алгебра и анализ, **3** (5), 88–108 (1991).
URL: https://www.mathnet.ru/rus/aa280

[7] A. Degtyarev, I. Itenberg, V. Kharlamov, *On deformation types of real elliptic surfaces*, Amer. J. Math. **130** (6), 1561–1627 (2008).
DOI: https://doi.org/10.1353/ajm.0.0029

[8] V.I. Zvonilov, *Maximally inflected real trigonal curves on Hirzebruch surfaces*, In: Topology, Geometry, and Dynamics: V.A. Rokhlin-Memorial, Contemp. Math. **772**, 331–345 (2021).
DOI: http://dx.doi.org/10.1090/conm/772/15498

[9] F. Klein, *Gesammelte mathematische abhandlungen* II, Springer-Verlag Berlin, Heidelberg, 1922.

[10] М. Нагата, *О рациональных поверхностях.* I. *Неприводимые кривые арифметического рода* 0 *и* 1, Математика **8** (1), 55–72 (1964).
URL: https://www.mathnet.ru/rus/mat295

[11] A. Degtyarev, *Topology of algebraic curves. An approach via dessins d'enfants*, De Gruyter Studies in Mathematics **44**, Walter de Gruyter & Co., Berlin, 2012.
DOI: https://doi.org/10.1515/9783110258424

[12] A.J. Puentes, *Rigid isotopy classification of generic rational curves of degree* 5 *in the real projective plane*, Geom. Dedicata **211**, 1–70 (2021).
DOI: https://doi.org/10.1007/s10711-020-00540-8

[13] A. Degtyarev, I. Itenberg, V. Zvonilov, *Real trigonal curves and real elliptic surfaces of type* I, J. Reine Angew. Math. **686**, 221–246 (2014).
DOI: https://doi.org/10.1515/crelle-2012-0020

[14] В.И. Звонилов, *Жесткие изотопии трехчленных кривых с максимальным числом овалов*, Вестник Сыктывкарского университета, Сер. 1 (6), 45–66 (2006).

Виктор Иванович Звонилов
Национальный исследовательский
Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского,
проспект Гагарина, д. 23, г. Н. Новгород, 603950, Россия,
e-mail: zvonilov@itmm.unn.ru

Volume 3, Issue 1
pp. 26–51 (2025)

UDC 512.77, 515.162.6, 519.175.3
MSC 14P25, 14H45, 05C90

Graphs of trigonal curves and rigid isotopies of singular real algebraic curves of bidegree $(4,3)$ on a hyperboloid

V.I. Zvonilov

Abstract. A rigid isotopy of real algebraic curves of a certain class is a path in the space of curves of this class. Our study completes the rigid isotopic classification of nonsingular real algebraic curves of bidegree (4,3) on a hyperboloid, started by the author in his earlier works. Missing proofs of the uniqueness of the connected components for 16 classes of real algebraic curves of bidegree (4,3) having a single node or a cusp are given. The main technical tools are graphs of real trigonal curves on Hirzebruch surfaces.

Keywords: spaces of real algebraic curves, curves on a hyperboloid, trigonal curves, embedded graphs.

DOI: 10.26907/2949-3919.2025.1.26-51

References

[1] V.I. Zvonilov, *Rigid isotopy classification of real algebraic curves of bidegree* $(4,3)$ *on a hyperboloid*, Vestn. Syktyvkar. Univ. Ser. 1 Mat. Mekh. Inform. (3), 81–88 (1999) [in Russian].

[2] A. Degtyarev, I. Itenberg, V. Kharlamov, *Real Enriques surfaces*, Lecture Notes in Math. **1746**, Springer-Verlag, Berlin, 2000.
DOI: https://doi.org/10.1007/BFb0103960

[3] V.I. Zvonilov, *Appendix to: Rigid isotopy classification of real algebraic curves of bidegree* $(4,3)$ *on a hyperboloid*, Vestn. Syktyvkar. Univ. Ser. 1 Mat. Mekh. Inform. (5), 239–242 (2003) [in Russian].

[4] V.A. Rokhlin, *Complex topological characteristics of real algebraic curves*, Russian Math. Surveys **33** (5), 85–88 (1978).
DOI: https://doi.org/10.1070/RM1978v033n05ABEH002514

[5] O.Ya. Viro, *Progress in the topology of real algebraic varieties over the last six years*, Russian Math. Surveys **41** (3), 55–82 (1986).
DOI: https://doi.org/10.1070/RM1986v041n03ABEH003317

Acknowledgements. The work was completed within the framework of a scientific project of the State assignment FSWR-2023-0034.

Received: 23 January 2025. Accepted: 20 February 2025. Published: 24 April 2025.

[6] V.I. Zvonilov, *Complex topological invariants of real algebraic curves on a hyperboloid and on an ellipsoid*, St. Petersburg Math. J. **3** (5), 1023–1042 (1992).

[7] A. Degtyarev, I. Itenberg, V. Kharlamov, *On deformation types of real elliptic surfaces*, Amer. J. Math. **130** (6), 1561–1627 (2008).
DOI: https://doi.org/10.1353/ajm.0.0029

[8] V.I. Zvonilov, *Maximally inflected real trigonal curves on Hirzebruch surfaces*, In: Topology, Geometry, and Dynamics: V.A. Rokhlin-Memorial, Contemp. Math. **772**, 331–345 (2021).
DOI: http://dx.doi.org/10.1090/conm/772/15498

[9] F. Klein, *Gesammelte mathematische abhandlungen* II, Springer-Verlag Berlin, Heidelberg, 1922.

[10] M. Nagata, *On rational surfaces I. Irreducible curves of arithmetic genus* 0 *or* 1, Mem. Coll. Sci. Univ. Kyoto Ser. A. Math. **32** (3), 351–370 (1960).
DOI: https://doi.org/10.1215/kjm/1250776405

[11] A. Degtyarev, *Topology of algebraic curves. An approach via dessins d'enfants*, De Gruyter Studies in Mathematics **4**4, Walter de Gruyter & Co., Berlin, 2012.
DOI: https://doi.org/10.1515/9783110258424

[12] A.J. Puentes, *Rigid isotopy classification of generic rational curves of degree* 5 *in the real projective plane*, Geom. Dedicata **211**, 1–70 (2021).
DOI: https://doi.org/10.1007/s10711-020-00540-8

[13] A. Degtyarev, I. Itenberg, V. Zvonilov, *Real trigonal curves and real elliptic surfaces of type* I, J. Reine Angew. Math. **686**, 221–246 (2014).
DOI: https://doi.org/10.1515/crelle-2012-0020

[14] V.I. Zvonilov, *Rigid isotopies of trinomial curves with the maximal number of ovals*, Vestn. Syktyvkar. Univ. Ser. 1 Mat. Mekh. Inform. (6), 45–66 (2006) [in Russian].

Victor Ivanovich Zvonilov
Lobachevsky State University of Nizhny Novgorod,
23 Gagarin av., Nizhny Novgorod 603950, Russia,
e-mail: zvonilov@itmm.unn.ru