Некоторые свойства сжатого графа делителей нуля

А.С. Монастырева

Аннотация. Показано, что если сжатый граф делителей нуля конечного ассоциативного кольца имеет единственную вершину, смежную со всеми остальными вершинами этого графа, то эта вершина имеет петлю. Кроме того, доказаны еще некоторые свойства сжатого графа делителей нуля конечного ассоциативного кольца.

Ключевые слова: сжатый граф делителей нуля, конечное кольцо, ассоциативное кольцо, делитель нуля.

DOI: 10.26907/2949-3919.2025.1.52-63

Введение

В нашей работе рассматриваются ассоциативные кольца (не обязательно коммутативные и не обязательно имеющие единицу).

Графом делителей нуля $\Gamma(R)$ кольца R называют граф, вершинами которого являются ненулевые делители нуля кольца (односторонние и двусторонние), причем различные две вершины x, y соединяются ребром тогда и только тогда, когда $xy = 0$ или $yx = 0$ [1].

Понятие графа делителей нуля для коммутативного кольца было введено Д. Андерсоном, П. Ливингстоном в работе [2]. Позже в [1] это понятие было обобщено для некоммутативного кольца. В частности, С. Редмонд доказал, что граф делителей нуля любого ассоциативного кольца является связным и его диаметр не превосходит трех.

С 1999 года вышел ряд статей, посвященных графам делителей нуля конечных колец. Одна из проблем, которая возникла, – это изображение и анализ графа делителей нуля для колец достаточно больших порядков. Возникла идея разбить множество вершин графа делителей нуля на классы, причем так, чтобы не нарушалось представление о строении графа делителей нуля в целом. В работах [3, 4] предложили довольно естественный способ решения этой проблемы для коммутативного случая. В статье [5] этот подход был обобщен на некоммутативный случай. Изложим суть этого метода.

Для этого нам понадобятся некоторые обозначения. Пусть R – произвольное кольцо. Для каждого элемента $x \in R$ положим $l(x) = \{a \in R : ax = 0\}$ и $r(x) = \{a \in R : xa = 0\}$.

Благодарности. Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 24-21-00155, <https://rscf.ru/project/24-21-00155/>.

Пусть $D(R)$ – множество делителей нуля (односторонних и двусторонних) кольца R и $D(R)^* = D(R) \setminus \{0\}$.

Введем отношение эквивалентности на множестве $D(R)^*$ следующим образом:

$$\text{для любых } x, y \in D(R)^* \quad x \sim y \Leftrightarrow l(x) \cup r(x) = l(y) \cup r(y).$$

Обозначим через $[x]$ класс эквивалентности элемента $x \in D(R)^*$. Для любых $a \in [x], b \in [y]$, где $x, y \in D(R)^*$, очевидно, что $ab = 0$ или $ba = 0$ тогда и только тогда, когда $xy = 0$ или $yx = 0$. Обозначим через $\Gamma_{\sim}(R)$ граф, множеством вершин которого является множество $\{[x] : x \in D(R)^*\}$, причем две вершины $[x], [y]$ (не обязательно различные) будем соединять ребром (или петлей) тогда и только тогда, когда $xy = 0$ или $yx = 0$. Граф $\Gamma_{\sim}(R)$ будем называть *сжатым графом делителей нуля* кольца R .

Известно следующее

Предложение 1 ([5]). *Пусть R – произвольное кольцо и $x \in D(R)^*$. Если $x^2 = 0$, то $yz = 0$ или $zy = 0$ для любых $y, z \in [x]$; если же $x^2 \neq 0$, то $yz \neq 0$ и $zy \neq 0$ для любых $y, z \in [x]$.*

Из [предложения 1](#) следует, что в графе $\Gamma_{\sim}(R)$ все вершины делятся на два типа. Если $x^2 = 0$, то $[x]$ – это вершина с петлей. Если $x^2 \neq 0$, то $[x]$ – это вершина без петли. Зная, сколько элементов содержится в каждом классе $[x]$, мы всегда от сжатого графа делителей нуля можем перейти к обычному графу делителей нуля. Более того, в сжатом графе нильпотентные элементы индекса нильпотентности два выделены петлей. Отметим, что не всякий связный граф может являться сжатым графом делителей нуля для какого-нибудь кольца. Например, если взять отрезок $[a] - [b]$, где обе вершины имеют петли, то он не является сжатым графом делителей нуля никакого кольца, поскольку вершины $[a]$ и $[b]$ на самом деле можно стянуть в одну вершину с петлей. И таких примеров много, причем не всегда причина в том, что граф не до конца сжат. В работе [5] описаны все связные графы делителей нуля (с петлями) на одной, двух и трех вершинах, которые являются сжатыми графами делителей нуля какого-либо конечного кольца. В статье [6] полностью описаны все связные графы с петлями на четырех вершинах, которые могут быть реализованы как сжатые графы делителей нуля какого-нибудь конечного кольца. Из 50 неизоморфных связных графов с петлями на четырех вершинах только 8, как оказалось, являются сжатыми графами делителей нуля какого-либо конечного кольца (см. [6]). Описаны полностью конечные кольца, сжатые графы делителей нуля которых содержат мост, вершины которого не являются висячими [7]. В работах [7, 8] получено описание конечных колец, сжатые графы делителей нуля которых являются полными (возможно, с петлями). Позже были описаны конечные кольца с ациклическими сжатыми графами делителей нуля [9].

В этой работе мы доказываем, что если в сжатом графе делителей нуля существует ровно одна вершина, смежная со всеми остальными вершинами этого графа, то такая вершина имеет петлю, т. е. смежна и сама с собой. Доказаны также некоторые другие свойства

сжатого графа делителей нуля, которые будут полезны при дальнейшем описании сжатых графов делителей нуля на пяти вершинах и более.

1. Предварительные сведения

Нам понадобятся некоторые обозначения и определения.

Обозначим $\text{Ann}(R) = \{a \in R : aR = Ra = (0)\}$. Через $J(R)$ обозначим *радикал Джекобсона* кольца R . Конечное кольцо R с единицей называется *локальным*, если факторкольцо $R/J(R)$ является полем [10]. Конечное поле порядка q будем обозначать через $GF(q)$, а полное кольцо матриц порядка n над кольцом R – через $M_n(R)$. Единичные матрицы в кольце $M_n(R)$, как обычно, обозначим e_{ij} , $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$. Для любого подмножества S кольца R будем полагать $S^* = S \setminus \{0\}$. Кольцо R называется *антикоммумутативным*, если для всех $a, b \in R$ выполнено $ab = -ba$. Кольцо R называется *коммутативным по нулю*, если для всех $a, b \in R$ из $ab = 0$ следует, что $ba = 0$.

Пусть аддитивная группа кольца R разлагается в прямую сумму своих аддитивных подгрупп A_i , где $i = 1, \dots, n$ и $n \geq 2$, т.е. $R = A_1 \dot{+} \dots \dot{+} A_n$. Если все подгруппы A_i являются двусторонними идеалами кольца R , то кольцо R называют *разложимым* и пишут $R = A_1 \oplus \dots \oplus A_n$.

Элемент $e \in R$ называется *идемпотентом* кольца R , если $e = e^2$. Система ненулевых идемпотентов $e_1, \dots, e_k$ ($k \geq 2$) кольца R называется *ортогональной*, если $e_i e_j = e_j e_i = 0$ для любой пары различных чисел $i, j \in \{1, 2, \dots, k\}$. Далее, пусть R – произвольное кольцо (возможно, без единицы) и e – нетривиальный идемпотент кольца R , т.е. идемпотент, отличный от единицы (если она существует) и нуля. Обозначим

$$\begin{aligned} eRe &= \{ere : r \in R\}, & eR(1-e) &= \{er - ere : r \in R\}, \\ (1-e)Re &= \{re - ere : r \in R\}, & (1-e)R(1-e) &= \{r - re - er + ere : r \in R\}. \end{aligned}$$

Тогда для аддитивной группы кольца R имеет место следующее разложение, называемое *двусторонним тирсовским разложением* (см. [10, С. 32]):

$$R = eRe \dot{+} eR(1-e) \dot{+} (1-e)Re \dot{+} (1-e)R(1-e).$$

В кольце без единицы под записью $ex(1-e)$ мы будем понимать элемент $ex - exe$, аналогично $(1-e)xe = xe - exe$ и $(1-e)x(1-e) = x - ex - xe + exe$ для любого идемпотента $e \in R$ и для любого элемента $x \in R$.

Сжатый граф делителей нуля называется *полным*, если любые две различные вершины в этом графе соединены ребром, причем возможны петли. Заметим, что, если в полном графе две вершины с петлями, то их можно объединить в одну по определению сжатого графа делителей нуля. Таким образом, в полном сжатом графе делителей нуля петлю может иметь максимум одна вершина. Сжатый граф делителей нуля называется *звездой*, если все его вершины, может быть, кроме одной, являются висячими. Заметим,

что висячих вершин без петель может быть не более одной, поскольку две висячие вершины без петли могут быть объединены в одну по определению сжатого графа делителей нуля.

Вершину в графе мы будем называть *сильной*, если она смежна со всеми остальными вершинами графа. Заметим, что в сжатом графе делителей нуля $\Gamma_{\sim}(R)$ конечного ассоциативного кольца R не может быть двух сильных вершин с петлями, поскольку все элементы, входящие в такие вершины, должны быть объединены в одну сильную вершину с петлей по определению сжатого графа делителей нуля. Нильпотентное и локальное кольца всегда имеют в сжатом графе делителей нуля хотя бы одну сильную вершину с петлей.

2. Сильные вершины в сжатом графе делителей нуля

В работе [6] мы перебирали все связные графы на четырех вершинах (со всеми возможными расстановками петель) и выбирали те, которые являются сжатыми графами делителей нуля какого-нибудь конечного кольца. При доказательстве основного результата возникла гипотеза, что если в сжатом графе делителей нуля только одна сильная вершина, то эта вершина должна иметь петлю. Здесь мы покажем справедливость этой гипотезы.

Теорема 2. *Если в графе $\Gamma_{\sim}(R)$, где R – конечное ассоциативное кольцо, существует единственная сильная вершина, то эта вершина имеет петлю.*

Доказательство. Предположим, что в сжатом графе делителей нуля конечного ассоциативного кольца R существует единственная сильная вершина $[a]$, причем она не имеет петли. Ясно, что кольцо R не является нильпотентным или локальным. Если петель в графе $\Gamma_{\sim}(R)$ вообще нет, то R является прямой суммой полей [10]. Однако в этом случае либо в графе $\Gamma_{\sim}(R)$ вообще нет сильной вершины либо $R \cong GF(q_1) \oplus GF(q_2)$ и сильных вершин две, что противоречит условию. Таким образом, хотя бы одна вершина с петлей в графе $\Gamma_{\sim}(R)$ есть.

Докажем сначала, что кольцо R не содержит единицу. Предположим противное: в кольце R существует единица 1. Мы можем расписать $1 = e_1 + e_2 + \dots + e_n$, где $n \geq 2$ и $e_1, e_2, \dots, e_n$ – попарно ортогональные идемпотенты [10]. Если вершина $[a]$ не совпадает ни с одной вершиной $[e_i]$, $i = 1, 2, \dots, n$, то она смежна со всеми этими вершинами, т. е. $ae_i = 0$ или $e_i a = 0$ для всех i . Поэтому $a^2 = a \cdot 1 \cdot a = a(e_1 + e_2 + \dots + e_n)a = 0$, что противоречит тому, что вершина $[a]$ не имеет петли. Не нарушая общности, можем считать, что $[a] = [e_1]$. Если $n \geq 3$, то вершина $[e_1 + e_2]$ не смежна с $[a]$, не имеет петли, но и не совпадает с $[a]$, поскольку вершина $[a]$ смежна с $[e_2]$, а вершина $[e_1 + e_2]$ с этой вершиной не смежна. Получили противоречие, которое свидетельствует о том, что $n = 2$ и $1 = e_1 + e_2$. Тогда фактор-кольцо $R/J(R)$ изоморфно либо $M_2(GF(q))$, либо $GF(q_1) \oplus GF(q_2)$ [10]. В первом случае $R \cong M_2(S)$ для некоторого локального кольца S [10]. В этом случае $[a] = [e_{11}]$ и $1 = e_{11} + e_{22}$. Однако

$[e_{11}]$ не смежна с вершиной $[e_{11} + e_{12} + e_{21} + e_{22}]$ (заметим, что элемент $e_{11} + e_{12} + e_{21} + e_{22}$ является делителем нуля, так как $(e_{11} + e_{12} + e_{21} + e_{22})(e_{11} + e_{12} - e_{21} - e_{22}) = 0$). Противоречие. Итак, $R/J(R) \cong GF(q_1) \oplus GF(q_2)$, $R = e_1Re_1 \dot{+} e_1Re_2 \dot{+} e_2Re_1 \dot{+} e_2Re_2$, причем $e_1Re_2 \dot{+} e_2Re_1 \subseteq J(R)$ в силу коммутативности фактор-кольца $R/J(R)$. Кроме того, e_1Re_1 , e_2Re_2 являются локальными кольцами и $[a] = [e_1]$. Согласно [6, лемма 2.1] получаем, что e_1Re_1 является конечным полем. Элементы из множества $e_1Re_2^* + e_2Re_1^*$ (если они есть) образуют вершины, которые не смежны с $[a]$ и не смежны с $[e_2]$, чего быть не может. Значит, $e_1Re_2 = (0)$ или $e_2Re_1 = (0)$. Будем считать, что $e_2Re_1 = (0)$, т. е. $R = e_1Re_1 \dot{+} e_1Re_2 \dot{+} e_2Re_2$. Тогда $e_1Re_1^* + e_1Re_2 \subseteq [a] = [e_1]$, так как элементы этого множества не смежны с $[a]$, но являются делителями нуля. Далее, все делители нуля из множества $e_1Re_1^* + e_2Re_2^* + e_1Re_2$ тоже лежат в классе $[e_1] = [a]$, поскольку не смежны с этой сильной вершиной. Однако тогда они должны аннулировать (хотя бы с одной стороны) элементы из вершины $[e_2]$, чего быть не может. Противоречие показывает, что в множестве $e_1Re_1^* + e_2Re_2^* + e_1Re_2$ не существует делителей нуля. Другими словами, множество делителей нуля $D(R)$ состоит из элементов множеств $e_1Re_1 + e_1Re_2$ и $e_2Re_2 + e_1Re_2$. Тогда e_1Re_2 аннулирует все элементы из множества $D(R)$, т. е. существует еще одна сильная вершина и она с петлей; противоречие. Это позволяет нам заключить, что $e_1Re_2 = (0)$ и $R = e_1Re_2 \oplus e_2Re_2$, причем первое слагаемое является полем, а второе – локальным кольцом. Заметим, что вершина $[a] = [(1; 0)]$ смежна со всеми остальными. Рассмотрим элемент $b = (1; j)$, где $j \in J(e_2Re_2)^*$, $j^2 = 0$ (если такой существует). Тогда вершина $[b]$ не смежна с $[a]$, поэтому $[b] = [a]$. Однако вершина $[b]$ тогда является сильной и должна быть смежной с вершиной $[(0; 1)]$, которая не совпадает с $[a]$, поскольку в свою очередь не смежна с $[(0; j)]$. Итак, получили противоречие, которое говорит о том, что $J(e_2Re_2) = (0)$, т. е. кольцо R является прямой суммой двух конечных полей. Тогда сжатый граф делителей нуля кольца R не имеет петель. Противоречие. Значит, кольцо R не содержит единицу.

Итак, теперь будем полагать, что в кольце R нет единицы, но оно ненильпотентное. Тогда в R есть главный идемпотент e , образ которого в фактор-кольце $R/J(R)$ является единицей [10]. Сначала докажем, что $(1 - e)Re \neq (0)$ и $eR(1 - e) \neq (0)$. Предположим противное: пусть $(1 - e)Re = (0)$. Обозначим $B = (1 - e)R(1 - e)$. Если $B \neq (0)$, то мы можем взять ненулевой элемент $j \in \text{ann}(B)$. Тогда $jR = (0)$, т. е. вершина $[j]$ является сильной и имеет петлю; противоречие. Значит, $B = (0)$ и $R = eRe \dot{+} eR(1 - e)$. Тогда $eR(1 - e) \subseteq l(R)$, т. е. существует сильная вершина с петлей. Противоречие доказывает, что $eR(1 - e) = (0)$ и $R = eRe$, т. е. R является кольцом с единицей. Выше мы доказали, что случай с единицей не возможен. Значит, $(1 - e)Re \neq (0)$. Аналогично доказывается, что $eR(1 - e) \neq (0)$. Покажем теперь, что $[a] \neq [e]$. Предположим противное: пусть $[a] = [e]$. Элементы множества $B_1 = eR(1 - e)^* + (1 - e)Re^*$ (а такие элементы есть, как доказано выше) не смежны с сильной вершиной $[e]$, поэтому $B_1 \subseteq [e] = [a]$. Возьмем ненулевой элемент $j \in \text{ann}(B)$ (если такой элемент существует). Тогда $jb = 0$ или $bj = 0$ для любого $b \in B_1 \subseteq [e] = [a]$. Следовательно, вершина $[j]$ смежна со всеми вершинами сжатого графа делителей нуля кольца R и является вершиной с петлей, чего быть не может. Противо-

речие доказывает, что $B = (0)$ и $R = eRe \dot{+} eR(1-e) \dot{+} (1-e)Re$. Согласно [6, лемма 2.1] eRe является прямой суммой полей. Мы можем идемпотент e расписать как сумму попарно ортогональных идемпотентов: $e = e_1 + \dots + e_n$ [10]. Если $n \geq 2$, то вершина $[a] = [e]$ не смежна с вершинами $[e_1]$ и $[e_2]$, а это две разные вершины без петель. Это противоречит нашему предположению, что вершина $[e]$ является сильной. Значит, $n = 1$ и eRe является конечным полем. Далее, делители нуля из множеств $eRe^* + eR(1-e) + (1-e)Re$ и $eR(1-e)^* + (1-e)Re^*$ не аннулируют e ни с одной стороны, т.е. эти элементы лежат в $[e]$. Остальные вершины состоят из элементов множеств $eR(1-e)^*$ и $(1-e)Re^*$, т.е. они все с петлями. Более того, каждый элемент из $eR(1-e)^*$ аннулирует с какой-либо стороны каждый элемент из $eR(1-e)^* + (1-e)Re^* \subset [e]$. Поэтому все элементы из $eR(1-e)^*$ и $(1-e)Re^*$ аннулируют друг друга хотя бы с одной стороны. Следовательно в сжатом графе делителей нуля кольца R всего две вершины: одна с петлей, а вторая без петли. Понятно, что обе они являются сильными, что противоречит условию теоремы. Поэтому заключаем, что $[e] \neq [a]$. Докажем, что $a \in (1-e)R(1-e)$. Действительно, вершина $[a]$ смежна со всеми остальными вершинами и не равна вершине $[e]$. Следовательно, $a \notin eRe^* + eR(1-e) + (1-e)Re + (1-e)R(1-e)$ и $a \notin eR(1-e)^* + (1-e)Re^* + (1-e)R(1-e)$. Пусть, например, $a \in (1-e)Re + (1-e)R(1-e)$, т.е. $a = (1-e)re + (1-e)s(1-e)$ для некоторых элементов $r, s \in R$. Элемент a аннулирует хотя бы с одной стороны любой элемент вида $t = e + e\beta(1-e) + (1-e)\gamma e + (1-e)\delta(1-e)$, где $\beta, \gamma, \delta \in R$. Поэтому $at = 0$ или $ta = 0$. Отсюда получаем, что

$$er(1-e)\gamma e + er(1-e)\delta(1-e) + (1-e)s(1-e)\gamma e + (1-e)s(1-e)\delta(1-e) = 0$$

или

$$er(1-e) + (1-e)\delta(1-e)s(1-e) + (1-e)\gamma er(1-e) + e\beta(1-e)s(1-e) = 0.$$

Заметим, что в обоих равенствах все слагаемые из разных пирсовских компонент, т.е. из выполнения равенства суммы нулю следует, что все слагаемые этой суммы равны нулю. Заметим, что если $er(1-e) = 0$, то $a \in (1-e)R(1-e)$, что и требовалось доказать. Пусть $er(1-e) \neq 0$. Тогда $er(1-e)\gamma e = 0$ и $er(1-e) \cdot (1-e)\delta(1-e) = 0$ для любых $\gamma, \delta \in R$, т.е. $er(1-e) \cdot (1-e)Re = (0)$ и $er(1-e) \cdot (1-e)R(1-e) = (0)$. Другими словами, элемент $er(1-e)$ аннулирует все кольцо R слева, т.е. образует сильную вершину с петлей. Противоречие показывает, что $er(1-e) = 0$ и $a \in (1-e)R(1-e)$. В этом случае элемент a является нильпотентным. Предположим, что $a^n = 0$, $a^{n-1} \neq 0$ и $n \geq 3$. Тогда $(a^{n-1})^2 = 0$, т.е. $[a^{n-1}]$ тоже является сильной вершиной, причем имеет петлю. Противоречие доказывает теорему. $\square$

Из теоремы следует, что если в сжатом графе делителей нуля некоторого конечного ассоциативного кольца есть сильная вершина без петли, то в этом графе обязательно содержится и причем единственная сильная вершина с петлей.

3. Дополнительные свойства сжатого графа делителей нуля

В этом разделе мы докажем некоторые свойства сжатого графа делителей нуля.

Определение сильной вершины можно ослабить, если говорить о некоторых выделенных вершинах в графе, для которых любая другая вершина графа смежна хотя бы с одной из выделенных вершин. Особую роль играют сильные вершины без петель. Если сильных вершин без петель в сжатом графе делителей нуля немного, то это накладывает ограничения на кольцо в случае, когда оно нильпотентное: дело в том, что идемпотенты как раз и образуют вершины без петель, а если такие вершины еще являются и сильными (или часть их), то многое можно сказать о радикале Джекобсона самого кольца. Такая ситуация часто возникала при описании графов делителей нуля порядка 4 в работе [6]. В первой теореме этого раздела как раз речь и пойдет о графе, в котором есть ровно две вершины без петель, причем они такие, что любая вершина с петлей смежна хотя бы с одной из этих двух вершин. Фактически теорема 3 продолжает [6, лемма 2.7].

Теорема 3. Пусть в графе $\Gamma_{\sim}(R)$ ровно две вершины без петель и порядок графа больше двух, причем любая вершина с петлей смежна хотя бы с одной из вершин без петли. Тогда выполняется одно из условий:

- 1) R – нильпотентное кольцо;
- 2) $R/J(R)$ – конечное поле;
- 3) в кольце R есть единица $1 = e_1 + e_2$, $R \cong GF(q_1) \oplus GF(q_2) \dot{+} e_1Re_2$, где e_i – единица поля $GF(q_i)$, $i = 1, 2$, и граф $\Gamma_{\sim}(R)$ является полным графом на трех вершинах, из которых только одна имеет петлю.

Доказательство. Если в кольце R нет единицы и оно не является нильпотентным, то согласно [6, лемма 2.9] в кольце R нет ортогональных идемпотентов, т. е. $R/J(R)$ является полем. Итак, мы можем считать, что кольцо R имеет единицу. Если единица не раскладывается в сумму попарно ортогональных идемпотентов, то $R/J(R)$ является полем [10]. Поскольку вершин без петель ровно две, то $1 = e_1 + e_2$, где e_1 и e_2 – ортогональные идемпотенты. В этом случае $R/J(R) \cong M_2(GF(q))$ или $R/J(R) \cong GF(q_1) \oplus GF(q_2)$. В первом случае $R \cong M_2(S)$ для некоторого локального кольца S [10]. Тогда в графе $\Gamma_{\sim}(R)$ есть минимум три вершины без петли: $[e_{11}]$, $[e_{22}]$ и $[e_{12} + e_{22}]$. Это все разные вершины, поскольку в треугольнике $[e_{21}] - [e_{22}] - [e_{11}] - [e_{21}]$ только вершина $[e_{11}]$ смежна с вершиной $[e_{12} + e_{22}]$. Противоречие. Значит, $R/J(R) \cong GF(q_1) \oplus GF(q_2)$, $R = e_1Re_1 \dot{+} e_1Re_2 \dot{+} e_2Re_1 \dot{+} e_2Re_2$, причем e_i – единица поля $GF(q_i)$, e_iRe_i – локальное кольцо, $i = 1, 2$. В силу коммутативности фактор-кольца $R/J(R)$ имеем $e_1Re_2 + e_2Re_1 \subseteq J(R)$. Поскольку $[e_1]$ и $[e_2]$ – две вершины без петель, причем любая вершина с петлей смежна хотя бы с одной из этих вершин, то по [6, лемма 2.7] e_1Re_1 и e_2Re_2 являются прямыми суммами конечных полей. Поскольку $1 = e_1 + e_2$, то e_1Re_1 и e_2Re_2 являются конечными полями. Элементы из множества $e_1Re_2^* + e_2Re_1^*$ не смежны ни с одной из вершин без петли $[e_1]$ и $[e_2]$. Значит, эти элементы содержатся в одной из этих вершин. Но поскольку $[e_1]$ и $[e_2]$ смежны, то снова получаем противоречие. Значит, $e_1Re_2 = (0)$ или $e_2Re_1 = (0)$. Будем считать,

что $e_2Re_1 = (0)$, т.е. $R = (e_1Re_1 \oplus e_2Re_2) \dot{+} e_1Re_2$. Тогда в графе $\Gamma_{\sim}(R)$ три вершины: $[e_1] = e_1Re_1^* + e_1Re_2$, $[e_2] = e_2Re_2^* + e_1Re_2$ и $[b] = e_1Re_2^*$, причем только вершина $[b]$ имеет петлю и все три вершины образуют треугольник. Мы как раз и получили случай 3 из [8, теорема 1]. $\square$

В следующей теореме фактически доказывается, что если сжатый граф делителей нуля $\Gamma_{\sim}(R)$ имеет достаточно маленький порядок (не более шести) и все его вершины с петлями, то сам граф является звездой, а кольцо R является локальным или нильпотентным с $J(R)^3 = (0)$. Этот факт поможет сократить перебор графов при дальнейшем описании графов порядков 5 и более, которые могут быть реализованы как сжатые графы делителей нуля некоторого конечного кольца.

Теорема 4. *Пусть в графе $\Gamma_{\sim}(R)$ все вершины имеют петли. Тогда кольцо R является локальным или нильпотентным, причем либо граф $\Gamma_{\sim}(R)$ является звездой и $J(R)^3 = (0)$, либо в графе $\Gamma_{\sim}(R)$ содержится более шести вершин.*

Доказательство. Если кольцо R является ненильпотентным без единицы, то его главный идемпотент e образует вершину без петли (в таком кольце все элементы являются делителями нуля [10]); противоречие. Следовательно, кольцо R является нильпотентным или содержит единицу. Если в кольце R существует единица 1 и $1 = e_1 + e_2 + \dots + e_n$, где e_i – попарно ортогональные идемпотенты, то вершина $[e_1]$ не имеет петли. Следовательно, единицу нельзя представить в виде суммы попарно ортогональных идемпотентов. Значит, кольцо R является локальным [10].

Заметим, что если граф $\Gamma_{\sim}(R)$ является звездой, у которой все вершины имеют петли, то $J(R)^3 = (0)$ [9]. Поэтому можем считать, что граф $\Gamma_{\sim}(R)$ не является звездой. Не нарушая общности, также можем полагать, что кольцо R является нильпотентным, поскольку в локальном случае $\Gamma_{\sim}(R) = \Gamma_{\sim}(J(R))$ [10]. Поскольку в нильпотентном кольце R все элементы в квадрате равны нулю, кольцо R является антикоммутативным, а следовательно, и коммутативным по нулю. Далее, в $\Gamma_{\sim}(R)$ есть сильная вершина с петлей. Обозначим ее через $[a]$. Напомним, что не может быть двух сильных вершин с петлями, поэтому в нашем случае в графе $\Gamma_{\sim}(R)$ существует единственная сильная вершина с петлей. Кроме того, в графе $\Gamma_{\sim}(R)$ не может существовать треугольников $[a] - [b] - [c] - [a]$, в которых вершины $[b]$ и $[c]$ не смежны больше ни с какими другими вершинами графа $\Gamma_{\sim}(R)$, кроме вершин этого треугольника. Действительно, в этом случае вершины $[b]$ и $[c]$ нужно объединить в одну висячую вершину с петлей. Поскольку $\Gamma_{\sim}(R)$ не является звездой, то в графе $\Gamma_{\sim}(R)$ должен быть треугольник $[a] - [b_1] - [b_2] - [a]$. Вершины $[b_1]$ и $[b_2]$ различны и смежны друг с другом. Поэтому должна существовать четвертая вершина $[b_3]$, которая смежна, например, с $[b_2]$ и не смежна с $[b_1]$. Если других вершин нет, то вершины $[a]$ и $[b_2]$ можно стянуть; противоречие. Следовательно, существует вершина $[b_4]$, не смежная с $[b_2]$. Итак, в графе $\Gamma_{\sim}(R)$ как минимум пять вершин. Далее, вершина $[b_1 + b_3]$ не смежна с вершинами $[b_1]$ и $[b_3]$, поэтому она и не может совпасть с вершинами $[a]$, $[b_1]$, $[b_2]$ и $[b_3]$. Поскольку $[b_1 + b_3]$ смежна с $[b_2]$, а вершина $[b_4]$ с $[b_2]$ не смежна, то

$[b_1 + b_3] \neq [b_4]$. Таким образом, $[b_1 + b_3]$ является шестой вершиной графа $\Gamma_{\sim}(R)$. Теперь рассмотрим вершину $[b_2 + b_4]$, которая не смежна с $[b_2]$ и $[b_4]$. Поэтому вершина $[b_2 + b_4]$ не может совпадать ни с одной из вершин $[b_1]$, $[b_2]$, $[b_3]$, $[b_4]$ и $[a]$. Наконец, $(b_1 + b_3)b_2 = 0$, а вершины $[b_2]$ и $[b_2 + b_4]$ не смежны, то $[b_1 + b_3] \neq [b_2 + b_4]$. Мы нашли седьмую вершину графа $\Gamma_{\sim}(R)$ – это вершина $[b_2 + b_4]$. Это доказывает теорему. $\square$

Список литературы

- [1] S.P. Redmond, *The zero-divisor graph of a noncommutative ring*, Int. J. Commut. Rings **1** (4), 203–211 (2002).
- [2] D.F. Anderson, P.S. Livingston, *The zero-divisor graph of a commutative ring*, J. Algebra **217** (2), 434–447 (1999).
DOI: <https://doi.org/10.1006/jabr.1998.7840>
- [3] N. Bloomfield, C. Wickham, *Local rings with genus two zero divisor graph*, Comm. Algebra **38** (8), 2965–2980 (2010).
DOI: <https://doi.org/10.1080/00927870903100093>
- [4] N. Bloomfield, *The zero divisor graphs of commutative local rings of order p^4 and p^3* , Comm. Algebra **41** (2), 765–775 (2013).
DOI: <https://doi.org/10.1080/00927872.2011.635619>
- [5] Е.В. Журавлев, А.С. Монастырева, *Сжатые графы делителей нуля конечных ассоциативных колец*, Сиб. матем. журн. **61** (1), 96–106 (2020).
DOI: <https://doi.org/10.33048/smzh.2020.61.106>
- [6] A.S. Monastyreva, *The compressed zero-divisor graphs of order 4*, J. Algebra Appl. **21**(9), art. 2250179 (2022).
DOI: <https://doi.org/10.1142/S0219498822501791>
- [7] А.А. Афанасьев, А.С. Монастырева, *Сжатые и частично сжатые графы делителей нуля конечных ассоциативных колец*, Сиб. матем. журн. **64** (2), 281–291 (2023).
DOI: <https://doi.org/10.33048/smzh.2023.64.204>
- [8] A.S. Monastyreva, *Finite non-nilpotent rings with complete compressed zero-divisor graphs*, Lobachevskii J. Math **41** (9), 1666–1671 (2020).
DOI: <https://doi.org/10.1134/S1995080220090206>
- [9] А.С. Монастырева, *Конечные кольца с ациклическими сжатыми графами делителей нуля*, Сиб. электрон. матем. изв. **21** (1), 405–416 (2024).
DOI: <https://doi.org/10.33048/semi.2024.21.030>
- [10] В.П. Елизаров, *Конечные кольца. Основы теории*, Гелиос АРВ, М., 2006.

Анна Сергеевна Монастырева

Алтайский государственный университет,

пр. Ленина, д. 61, г. Барнаул, 656049, Россия

e-mail: akuzmina1@yandex.ru

Some properties of compressed zero-divisor graph

A.S. Monastyreva

Abstract. We prove that if the compressed zero-divisor graph of a finite associative ring contains only one strong vertex then this vertex has a loop. Moreover, more properties of the compressed zero-divisor graph of a finite associative ring are proved.

Keywords: compressed zero-divisor graph, finite ring, associative ring, zero-divisor.

DOI: 10.26907/2949-3919.2025.1.52-63

References

- [1] S.P. Redmond, *The zero-divisor graph of a noncommutative ring*, Int. J. Commut. Rings **1** (4), 203–211 (2002).
- [2] D.F. Anderson, P.S. Livingston, *The zero-divisor graph of a commutative ring*, J. Algebra **217** (2), 434–447 (1999).
DOI: <https://doi.org/10.1006/jabr.1998.7840>
- [3] N. Bloomfield, C. Wickham, *Local rings with genus two zero divisor graph*, Comm. Algebra **38** (8), 2965–2980 (2010).
DOI: <https://doi.org/10.1080/00927870903100093>
- [4] N. Bloomfield, *The zero divisor graphs of commutative local rings of order p^4 and p^3* , Comm. Algebra **41** (2), 765–775 (2013).
DOI: <https://doi.org/10.1080/00927872.2011.635619>
- [5] E.V. Zhuravlev, A.S. Monastyreva, *Compressed zero-divisor graphs of finite associative rings*, Siberian Math. J. **61**(1), 76–84 (2020).
DOI: <https://doi.org/10.1134/S0037446620010061>
- [6] A.S. Monastyreva, *The compressed zero-divisor graphs of order 4*, J. Algebra Appl. **21**(9), art. 2250179 (2022).
DOI: <https://doi.org/10.1142/S0219498822501791>

Acknowledgements. The research was funded by the Russian Science Foundation (project no. 24-21-00155, <https://rscf.ru/project/24-21-00155/>).

Received: 30 September 2024. Accepted: 03 April 2025. Published: 24 April 2025.

- [7] A.A. Afanas'ev, A.S. Monastyreva, *Compressed and partially compressed zero-divisor graphs of finite associative rings*, Siberian Math. J. **64** (2), 281–291 (2023).
DOI: <https://doi.org/10.1134/s0037446623020040>
- [8] A.S. Monastyreva, *Finite non-nilpotent rings with complete compressed zero-divisor graphs*, Lobachevskii J. Math **41** (9), 1666–1671 (2020).
DOI: <https://doi.org/10.1134/S1995080220090206>
- [9] A.S. Monastyreva, *Finite rings with acyclic compressed zero-divisor graphs*, Sib. Electron. Math. Rep **21** (1), 405–416 (2024) [in Russian].
DOI: <https://doi.org/10.33048/semi.2024.21.030>
- [10] V.P. Elizarov, *Finite rings*, Gelios ARV, Moscow, 2006 [in Russian].

Anna Sergeevna Monastyreva

Altai State University,

61 Lenina av., Barnaul 656049, Russia,

e-mail: akuzmina1@yandex.ru