

Классы Леви квазимногообразий 2-нильпотентных групп

С.А. Шахова

Аннотация. Классом Леви $L(\mathcal{M})$, порожденным классом групп $\mathcal{M}$, называется класс всех групп, в которых нормальное замыкание каждой циклической подгруппы принадлежит $\mathcal{M}$. Пусть p – простое число, $p \neq 2$, s – натуральное число, $s \geq 2$, и $s > 2$ при $p = 3$; H_{p^s} – свободная ранга 2 группа в многообразии nilпотентных ступени ≤ 2 групп экспоненты p^s с коммутантом экспоненты p ; Z – бесконечная циклическая группа; $q\{H_{p^s}, Z\}$ – квазимногообразие, порожденное множеством групп $\{H_{p^s}, Z\}$. В работе найден базис квазитождеств класса Леви $L(q\{H_{p^s}, Z\})$ и установлено, что существует континуальное множество квазимногообразий $\mathcal{K}$ таких, что $L(\mathcal{K}) = L(q\{H_{p^s}, Z\})$.

Ключевые слова: квазимногообразие, класс Леви, nilпотентная группа.

DOI: 10.26907/2949-3919.2025.1.64-77

Введение

Для произвольного класса групп $\mathcal{M}$ обозначим через $L(\mathcal{M})$ класс всех групп G , в которых нормальное замыкание $\langle a \rangle^G$ каждого элемента a из G принадлежит классу групп $\mathcal{M}$. Класс $L(\mathcal{M})$ называется классом Леви, порожденным $\mathcal{M}$. Самое первое исследование классов Леви, а точнее, изучение свойств групп, покрываемых системой абелевых нормальных подгрупп вида $\langle a \rangle^G$, было предпринято в [1]. Из этой работы следует, что класс Леви всех абелевых групп является многообразием 2-энгелевых групп. Классы Леви nilпотентных групп изучались, например, в [2–6]. В [4], в частности, доказано, что если $\mathcal{M}$ – квазимногообразие групп, то $L(\mathcal{M})$ – также квазимногообразие групп. Для многообразий этот факт был установлен в [7]. К настоящему моменту достаточно подробно изучены классы Леви почти абелевых квазимногообразий nilпотентных групп.

Для каждого простого числа p и натурального числа s рассмотрим группы, имеющие в многообразии $\mathcal{N}_2$ nilпотентных ступени не выше двух группы следующие представления:

$$H_p = \langle x, y; [x, y]^p = 1 \rangle, \quad H_{p^s} = \langle x, y; x^{p^s} = y^{p^s} = [x, y]^p = 1 \rangle.$$

Заметим сразу, что при $s = 1$ будем писать H_{p^1} , подчеркивая отличие этой группы от группы H_p .

Пусть, как обычно, $F_2(\mathcal{N}_2)$ – свободная в многообразии $\mathcal{N}_2$ группа ранга 2; $q\mathcal{K}$ – квазимногообразие, порожденное классом групп $\mathcal{K}$. Будем писать qG , если $\mathcal{K} = \{G\}$. Согласно [8] квазимногообразия qH_{p^s} (исключая qH_{2^1}), qH_p , $qF_2(\mathcal{N}_2)$, где p пробегает множество простых чисел, а s пробегает множество натуральных чисел, составляют полный список почти абелевых квазимногообразий nilпотентных групп, т.е. неабелевых квазимногообразий nilпотентных групп, чьи собственные подквазимногообразия являются абелевыми.

В [9] доказано, что для любого простого p , $p \neq 2$, $L(qH_{p^1})$ совпадает с многообразием nilпотентных ступени не выше трех групп экспоненты p , а $L(qF_2(\mathcal{N}_2))$ – это квазимногообразие nilпотентных ступени не выше трех групп без кручения. В [10] и [11] для любого простого p , $p \neq 2$, и натурального s , $s \geq 2$, найдены системы квазитождеств от бесконечного числа переменных, задающие соответственно классы Леви $L(qH_p)$ и $L(qH_{p^s})$. В [12] установлено, что квазимногообразие $L(qH_{p^s})$ конечно аксиоматизируемо. В [13] доказано, что квазимногообразие $L(qH_p)$ имеет конечный аксиоматический ранг, т.е. может быть задано системой квазитождеств от конечного числа переменных.

Пусть $\mathcal{K}^{p^s}$ – квазимногообразие nilпотентных ступени не выше двух групп с коммутантом экспоненты p , в которых элементы порядка p^k при $k < s$ содержатся в центре группы, где p – простое число, $p \neq 2$, s – натуральное число, $s \geq 2$, и $s > 2$ при $p = 3$. Нетрудно заметить, что $qH_{p^s} \subseteq \mathcal{K}^{p^s}$, $qH_p \subseteq \mathcal{K}^{p^s}$. В [14] найдена бесконечная серия квазитождеств от двух переменных, задающая $L(\mathcal{K}^{p^s})$ в многообразии $\mathcal{N}_3$ nilпотентных ступени не выше трех групп. Это позволило доказать в [15], что в $\mathcal{K}^{p^s}$ существует континуальное множество квазимногообразий $\mathcal{K}$ таких, что $L(\mathcal{K}) = L(qH_{p^s})$.

Пусть p – простое число, $p \neq 2$, s – натуральное число, $s \geq 2$, и $s > 2$ при $p = 3$. В нашей работе найден базис квазитождеств квазимногообразия $L(q\{H_{p^s}, Z\})$, и доказано существование континуального множества квазимногообразий, каждое из которых порождает класс Леви, совпадающий с $L(q\{H_{p^s}, Z\})$, где Z – бесконечная циклическая группа.

1. Предварительные замечания

Используемые в работе сведения из теории групп можно найти в [16], а из теории квазимногообразий групп – в [17–19].

Всюду в работе p – простое число, $p \neq 2$, $s \geq 2$, $s \in \mathbf{N}$, где $\mathbf{N} = \{1, 2, \dots\}$ – множество натуральных чисел; $\mathbf{P}$ – множество простых чисел. Для целых чисел a, b и $c \in \mathbf{N}$ запись $a \equiv b(c)$ означает, что остаток от деления $a - b$ на c равен 0.

В работе также используются следующие обозначения: $[a, b] = a^{-1}b^{-1}ab$; $\langle a_1, a_2, \dots \rangle$ – группа, порожденная элементами $a_1, a_2, \dots$; Z_n – циклическая группа порядка n ; Z – бесконечная циклическая группа; $\langle a \rangle^G = \langle g^{-1}ag \mid g \in G \rangle$ – нормальное замыкание в группе G циклической подгруппы, порожденной элементом a ; $|g|$ – порядок элемента g ; G' – коммутант группы G ; $G \cong H$ – группы G и H изоморфны.

Пусть N – нормальная подгруппа группы G (обозначим $N \trianglelefteq G$), G/N – факторгруппа группы G по нормальной подгруппе N . Через $\bar{g}$ обозначим образ элемента $g \in G$

при естественном гомоморфизме $G \rightarrow G/N$.

Через $L_q(\mathcal{N})$ обозначим решетку подквазимногообразий, содержащихся в квазимногообразии $\mathcal{N}$. Пусть $\mathcal{K}_1, \mathcal{K}_2 \in L_q(\mathcal{N})$. Решеточные операции в $L_q(\mathcal{N})$ выглядят так: $\mathcal{K}_1 \wedge \mathcal{K}_2 = \mathcal{K}_1 \cap \mathcal{K}_2$, $\mathcal{K}_1 \vee \mathcal{K}_2$ – пересечение всех квазимногообразий, содержащих $\mathcal{K}_1, \mathcal{K}_2$.

Нам потребуется признак принадлежности конечно-определенной группы G квазимногообразию $q\mathcal{K}$, являющийся частным случаем [8, теорема 3]:

конечно определенная в квазимногообразии $\mathcal{N}$ группа G принадлежит квазимногообразию $q\mathcal{K}$ ($\mathcal{K} \subseteq \mathcal{N}$) тогда и только тогда, когда для любого элемента $g \in G$, $g \neq 1$, существует гомоморфизм φ_g группы G в некоторую группу из класса $\mathcal{K}$ такой, что $\varphi_g(g) \neq 1$.

Условимся при написании тождеств и квазитождеств кванторы всеобщности опускать.

Пусть p – простое число, $p \neq 2$, $s \in \mathbb{N}$, $s \geq 2$. Обозначим через $\mathcal{K}^p$ многообразие, заданное в $\mathcal{N}_2$ тождеством

$$[x, y]^p = 1, \quad (1)$$

и пусть $\mathcal{K}^{p^s}$ – квазимногообразие, заданное в $\mathcal{K}^p$ квазитождеством

$$x^{p^{s-1}} = 1 \rightarrow [x, y] = 1, \quad (2)$$

$\mathcal{K}_3^{p^s}$ – квазимногообразие, заданное в $\mathcal{K}^{p^s}$ квазитождеством

$$x^{p^{s+1}} = 1 \rightarrow x^{p^s} = 1, \quad (3)$$

$\mathcal{K}_{3,4}^{p^s}$ – квазимногообразие, заданное в $\mathcal{K}_3^{p^s}$ квазитождествами

$$x^q = 1 \rightarrow x = 1, \quad (4)$$

где q пробегает множество простых чисел, $q \neq p$.

Пусть $\mathcal{N}^{p^s}$ – квазимногообразие, заданное в $\mathcal{K}_{3,4}^{p^s}$ квазитождеством

$$x^p = [y, z] \rightarrow [y, z] = 1, \quad (5)$$

$\widehat{\mathcal{N}}^{p^s}$ – квазимногообразие, заданное в $\mathcal{N}^{p^s}$ тождеством

$$x^{p^s} = 1. \quad (6)$$

Очевидно, что квазитождества (3), (4) являются следствиями тождества (6).

Из квазитождеств (3), (4) следует, что если группа $G \in \mathcal{K}_{3,4}^{p^s}$, $g \in G$, $|g| < \infty$, то $|g| = p^t$ для некоторого t , $0 \leq t \leq s$, т. е. для любого $n \in \mathbb{N}$ в группе G истинно следующее квазитождество:

$$x^n = 1 \rightarrow x^{p^s} = 1. \quad (7)$$

Индукцией по n легко проверить, что в $\mathcal{N}_2$ для любого $n \in \mathbf{N}$ истинно тождество

$$(xy)^n = x^n y^n [y, x]^{\frac{n(n-1)}{2}},$$

из которого по (1) при $n = p$ следует истинность в $\mathcal{K}^p$ тождества

$$(xy)^p = x^p y^p. \quad (8)$$

Нам понадобится следующая

Лемма 1 ([15, лемма 1]). *Если $H = \langle a, a_1, \dots, a_n \rangle$, $H \in \widehat{\mathcal{N}}^{p^s}$, $\langle a_1, \dots, a_n \rangle$ – абелева группа, то $H \in qH_{p^s}$, где $p \in \mathbf{P}$, $p \neq 2$, $s \in \mathbf{N}$, $s \geq 2$.*

Лемма 2. *Если $H = \langle a, a_1, \dots, a_n \rangle$, $H \in \mathcal{N}^{p^s}$, $\langle a_1, \dots, a_n \rangle$ – абелева группа, то $H \in q\{H_{p^s}, Z\}$, где $p \in \mathbf{P}$, $p \neq 2$, $s \in \mathbf{N}$, $s \geq 2$.*

Доказательство. Если группа H – абелева, то утверждение леммы верно. Пусть H – неабелева группа, $H^{p^s} = \{h^{p^s} \mid h \in H\}$. Из (1), (8) вытекает, что $H^{p^s} \trianglelefteq H$. Проверим, что $\overline{H} = H/H^{p^s} \in \widehat{\mathcal{N}}^{p^s}$.

Поскольку (6) истинно в $\overline{H}$, то (3), (4) истинны в $\overline{H}$.

Предположим, что $\overline{x}^{p^{s-1}} = \overline{1}$ для $\overline{x} \in \overline{H}$. Тогда $x^{p^{s-1}} = h^{p^s}$ для некоторого $h \in H$, $(xh^{-p})^{p^{s-1}} = 1$. Согласно (1), (2) для любого $y \in H$ верны равенства $[xh^{-p}, y] = [x, y] = 1$, что доказывает истинность (2) в группе $\overline{H}$.

Если $\overline{x}^p = [\overline{y}, \overline{z}]$ для $\overline{x}, \overline{y}, \overline{z} \in \overline{H}$, то $x^p = [y, z]h^{p^s}$, $(xh^{-p^{s-1}})^p = [y, z]$. Так как (5) истинно в H , то $[y, z] = 1$, и (5) истинно в $\overline{H}$.

По лемме 1 $\overline{H} \in qH_{p^s}$. Из истинности формул (1), (7) в группе H получаем, что $H/H' \in q\{H_{p^s}, Z\}$. Поскольку любой элемент из H' можно записать в виде $[a, h]$ для некоторого элемента $h \in H$, то в силу квазитожества (5) верно $H' \cap H^{p^s} = \langle 1 \rangle$. По признаку принадлежности получаем, что $H \in q\{H_{p^s}, Z\}$. $\square$

Пусть $\mathcal{F}^p$ – многообразие, заданное в $\mathcal{N}_3$ тождеством

$$[x, y, x]^p = 1. \quad (9)$$

Так как тождество $[x, y, x] = [y, x, x]^{-1}$ истинно в $\mathcal{N}_3$, то тождество (9) эквивалентно в $\mathcal{N}_3$ тождеству $[x, y, y]^p = 1$.

Индукцией по n легко показать, что в многообразии $\mathcal{N}_3$ для любого $n \in \mathbf{N}$ истинно тождество

$$[x, y^n] = [x, y]^n [x, y, y]^{\frac{n(n-1)}{2}}, \quad (10)$$

из которого при $n = p$, $p \neq 2$, по (9) получаем, что в $\mathcal{F}^p$ истинно тождество

$$[x, y^p] = [x, y]^p. \quad (11)$$

Возведем обе части (10) в степень p . Из (9) следует, что в $\mathcal{F}^p$ для любого $n \in \mathbf{N}$ истинно тождество

$$[x, y^n]^p = [x, y]^{np}. \quad (12)$$

На самом деле, и в этом легко убедиться, тождество (12) истинно для любого $n \in \mathbf{Z}$.

Пусть $\mathcal{F}^{p^s}$ – квазимногообразие, заданное в $\mathcal{F}^p$ квазитождеством

$$[x, y]^{p^{s-1}} = 1 \rightarrow [x, y, x] = 1, \quad (13)$$

$\mathcal{F}_3^{p^s}$ – квазимногообразие, заданное в $\mathcal{F}^{p^s}$ квазитождеством (3),

$\mathcal{F}_{3,4}^{p^s}$ – квазимногообразие, заданное в $\mathcal{F}_3^{p^s}$ квазитождеством (4).

Нам потребуются следующие леммы из [14].

Лемма 3. В $L(\mathcal{K}^{p^s})$ истинно тождество $[x, y, z]^{3p} = 1$, где $p \in \mathbf{P}$, $p \neq 2$, $s \in \mathbf{N}$, $s \geq 2$.

Лемма 4. В многообразии $\mathcal{F}^p$ истинно тождество

$$[x, y, z]^{3p} = 1.$$

Лемма 5. В $\mathcal{F}^p$ при $p \neq 3$ для любого $k \in \mathbf{N}$ истинно тождество

$$\prod_{i=1}^k [x, x_i]^{3p} = \left[x, \prod_{i=1}^k x_i \right]^{3p},$$

а в $\mathcal{F}^3$ для любого $k \in \mathbf{N}$ истинно тождество

$$\prod_{i=1}^k [x, x_i]^3 = \left[x, \prod_{i=1}^k x_i \prod_{1 \leq i < j \leq k} [x_i, x_j] \right]^3.$$

В силу легко проверяемых коммутаторных тождеств

$$[xy, z] = [x, z][x, z, y][y, z], \quad [x, yz] = [x, z][x, y][x, y, z], \quad (14)$$

из леммы 4 вытекает, что если хотя бы одно из целых чисел k, l, m делится на p при $p \neq 3$, и делится на 9 при $p = 3$, то в квазимногообразии $\mathcal{F}^p$ истинны тождества

$$[x^k y^l, z^m] = [x^k, z^m][y^l, z^m], \quad [x^k, y^l z^m] = [x^k, y^l][x^k, z^m]. \quad (15)$$

Кроме того, из тождеств (14) следует, что в многообразии $\mathcal{N}_2$ истинны следующие тождества, выражающие используемое в дальнейших рассуждениях свойство линейности коммутаторов веса 2:

$$[xy, z] = [x, z][y, z], \quad [x, yz] = [x, y][x, z].$$

2. Основной результат

Пусть $\mathcal{M}^{p^s}$ – квазимногообразие, заданное в $\mathcal{F}_{3,4}^{p^s}$ квазитождеством

$$[x, z]^p = [x, y, x] \rightarrow [x, y, x] = 1, \quad (16)$$

а при $p = 3$ – ещё и квазитождеством

$$x^{3^{s-1}}[x, z]^3 = [x, y, x] \rightarrow [x, y, x] = 1. \quad (17)$$

Теорема 6. Пусть $p \in \mathbf{P}$, $p \neq 2$, $s \in \mathbf{N}$, $s \geq 2$, и $s > 2$ при $p = 3$, $\mathcal{K}$ – квазимногообразие групп, $q\{H_{p^s}, Z\} \subseteq \mathcal{K} \subseteq \mathcal{N}^{p^s}$. Тогда $L(\mathcal{K}) = \mathcal{M}^{p^s}$.

Доказательство. В [14, следствие 1] установлено, что $L(\mathcal{K}_3^{p^s}) = \mathcal{F}_3^{p^s}$. Из определения класса Леви сразу вытекает, что $L(\mathcal{K}_{3,4}^{p^s}) = \mathcal{F}_{3,4}^{p^s}$, и имеют место следующие включения:

$$L(\mathcal{K}) \subseteq L(\mathcal{N}^{p^s}) \subseteq L(\mathcal{K}_{3,4}^{p^s}).$$

Покажем, что $L(\mathcal{N}^{p^s}) \subseteq \mathcal{M}^{p^s}$. Достаточно проверить, что квазитождество (16), а при $p = 3$ ещё и квазитождество (17), истинны в классе $L(\mathcal{N}^{p^s})$. Пусть $G \in L(\mathcal{N}^{p^s})$, и для некоторых элементов x, y, z из группы G выполнено равенство $[x, z]^p = [x, y, x]$, которое можно записать в виде $(x^{-1}x^z)^p = [x^{-1}x^y, x]$. По определению класса Леви группа $\langle x \rangle^G \in \mathcal{N}^{p^s}$. В силу квазитождества (5) $[x^{-1}x^y, x] = 1$. Значит квазитождество (16) истинно в G . Пусть $p = 3$ и для некоторых элементов x, y, z из группы G выполнено равенство $x^{3^{s-1}}[x, z]^3 = [x, y, x]$, которое по (8) можно записать в виде

$$x^{3^{s-1}}(x^{-1}x^z)^3 = (x^{3^{s-2}}x^{-1}x^z)^3 = [x^{-1}x^y, x].$$

В силу квазитождества (5) $[x^{-1}x^y, x] = 1$. Значит квазитождество (17) истинно в G .

Итак, доказано, что $L(\mathcal{N}^{p^s}) \subseteq \mathcal{M}^{p^s}$. Значит $L(\mathcal{K}) \subseteq \mathcal{M}^{p^s}$.

Осталось установить, что $\mathcal{M}^{p^s} \subseteq L(\mathcal{K})$. Рассмотрим конечно-порожденную группу $G \in \mathcal{M}^{p^s}$. Докажем, что для любого элемента $a \in G$ выполнено $\langle a \rangle^G \in \mathcal{K}$. Обозначим $H = \langle a \rangle^G$. Можно считать, что $H = \langle a, a_1, \dots, a_n \rangle$, где $a_1 = [a, g_1], \dots, a_n = [a, g_n]$ для некоторых элементов $g_1, \dots, g_n$ группы G . Поскольку $\mathcal{M}^{p^s} \subseteq \mathcal{F}_{3,4}^{p^s}$, то из равенства $L(\mathcal{K}_{3,4}^{p^s}) = \mathcal{F}_{3,4}^{p^s}$ вытекает, что $H \in \mathcal{K}_{3,4}^{p^s} \subseteq \mathcal{N}_2$. Покажем, что H удовлетворяет условиям леммы 2. Достаточно проверить, что (5) истинно в H .

Произвольные элементы $x, y, z \in H$ можно представить в виде

$$x = a^l \prod_{i=1}^n a_i^{l_i} \prod_{i=1}^n [a, a_i]^{\alpha_i}, \quad y = a^m \prod_{i=1}^n a_i^{m_i} \prod_{i=1}^n [a, a_i]^{\beta_i}, \quad z = a^k \prod_{i=1}^n a_i^{k_i} \prod_{i=1}^n [a, a_i]^{\gamma_i}$$

для некоторых целых значений переменных $l, l_i, \alpha_i, m, m_i, \beta_i, k, k_i, \gamma_i$.

Используя линейность коммутатора веса 2 в многообразии $\mathcal{N}_2$ и линейность комму-

татора веса 3 в многообразии $\mathcal{N}_3$, можно записать

$$[y, z] = \left[a, \left(\prod_{i=1}^n g_i^{k_i} \right)^{-m} \left(\prod_{i=1}^n g_i^{m_i} \right)^k, a \right].$$

Предположим, что $x^p = [y, z]$, т.е. левая часть квазитождества (5) истинна. Коммутируя обе части равенства с произвольным элементом $g \in G$ и используя (11), получим равенство $[x^p, g] = [x, g]^p = 1$, верное для любого элемента $g \in G$. Так как квазитождество (13) истинно в группе G , то $[x, g, x] = 1$. Поскольку $[x, g, x] = [a, g, a]^{l^2} = 1$, то при $l \not\equiv 0(p)$, ввиду истинности тождества (9), получаем, что $[a, g, a] = 1$ для каждого элемента $g \in G$. Значит $[y, z] = 1$.

Предположим, что $l \equiv 0(p)$. Учитывая (1), применяя формулы (8) и (12), запишем верные равенства

$$x^p = \left(a^l \prod_{i=1}^n a_i^{l_i} \prod_{i=1}^n [a, a_i]^{\alpha_i} \right)^p = a^{lp} \prod_{i=1}^n a_i^{l_i p} = a^{lp} \prod_{i=1}^n [a, g_i]^{l_i p} = a^{lp} \prod_{i=1}^n [a, g_i^{l_i}]^p.$$

Пусть $p \neq 3$. Учитывая истинность тождества из леммы 5, а также истинность квазитождества (4), получаем, что верно равенство

$$x^p = a^{lp} [a, \prod_{i=1}^n g_i^{l_i}]^p.$$

При $p = 3$ применяем тождество из леммы 5 и получаем, что верно равенство

$$x^3 = a^{3l} \left[a, \prod_{i=1}^n g_i^{l_i} \prod_{1 \leq i < j \leq n} [g_i^{l_i}, g_j^{l_j}] \right]^3.$$

Если $l = 0$, то из истинности (16) в группе G получаем $[y, z] = 1$.

Рассмотрим теперь случай $l \equiv 0(p)$, $l \neq 0$. Тогда имеем: $lp = l'p^\delta$, где $\delta \geq 2$, $l' \not\equiv 0(p)$.

Пусть $p \neq 3$. Равенство $x^p = [y, z]$ представляется в виде

$$a^{l'p^\delta} \left[a, \prod_{i=1}^n g_i^{l_i} \right]^p = \left[a, \left(\prod_{i=1}^n g_i^{k_i} \right)^{-m} \left(\prod_{i=1}^n g_i^{m_i} \right)^k, a \right].$$

Коммутируя обе части этого равенства с произвольным элементом $g \in G$ и применяя тождества (15), (11), (12), лемму 4, квазитождество (4), получим равенство

$$[a^{l'p^\delta}, g] = [a^{l'}, g]^{p^\delta} = [a, g]^{l'p^\delta} = 1.$$

Согласно (4) верно равенство $[a, g]^{p^\delta} = 1$.

Если $\delta \leq s - 1$, то по (13) $[a, g, a] = 1$ для любого $g \in G$. Следовательно, $[y, z] = 1$.

Пусть $\delta \geq s$. По (3) верно равенство $[a, g]^{p^s} = 1$ для любого $g \in G$. Возведем обе части равенства $x^p = [y, z]$ в степень $p^{\delta-1}$ и, применяя (8), (9), получим равенства

$$\left(a^{l' p^\delta} \left[a, \prod_{i=1}^n g_i^{l_i} \right]^p \right)^{p^{\delta-1}} = a^{l' p^{2\delta-1}} \left[a, \prod_{i=1}^n g_i^{l_i} \right]^{p^\delta} = a^{l' p^{2\delta-1}} = 1.$$

Согласно (4) имеем $a^{p^{2\delta-1}} = 1$. Применяя (3), получаем, что истинно равенство $a^{p^s} = 1$. Следовательно, равенство $x^p = [y, z]$ можно записать в виде

$$\left[a, \prod_{i=1}^n g_i^{l_i} \right]^p = \left[a, \left(\prod_{i=1}^n g_i^{k_i} \right)^{-m} \left(\prod_{i=1}^n g_i^{m_i} \right)^k, a \right].$$

Из (16) вытекает, что $[y, z] = 1$.

Пусть $p = 3$. Равенство $x^3 = [y, z]$ имеет вид

$$a^{l' 3^\delta} \left[a, \prod_{i=1}^n g_i^{l_i} \prod_{1 \leq i < j \leq n} [g_i^{l_i}, g_j^{l_j}] \right]^3 = \left[a, \left(\prod_{i=1}^n g_i^{k_i} \right)^{-m} \left(\prod_{i=1}^n g_i^{m_i} \right)^k, a \right].$$

Возведя обе части этого равенства в степень 3 и используя (8), (9) получим равенство

$$a^{l' 3^{\delta+1}} \left[a, \prod_{i=1}^n g_i^{l_i} \prod_{1 \leq i < j \leq n} [g_i^{l_i}, g_j^{l_j}] \right]^{3^2} = 1.$$

Коммутируя обе части этого равенства с произвольным элементом $g \in G$ и применяя (15), (11), (12) и лемму 4, получим, что выполнены равенства

$$[a^{l' 3^{\delta+1}}, g] = [a^{l'}, g]^{3^{\delta+1}} = [a, g]^{l' 3^{\delta+1}} = 1.$$

Отсюда по (4) вытекает, что $[a, g]^{3^{\delta+1}} = 1$.

Если $\delta < s - 1$, то по (13) имеем $[a, g, a] = 1$ для любого $g \in G$. Значит $[y, z] = 1$.

Пусть $\delta \geq s - 1$. Из (3) следует, что $[a, g]^{3^s} = 1$ для любого $g \in G$. Возведем обе части равенства $x^3 = [y, z]$ в степень 3^δ и, применяя (8), (9), получим равенства

$$a^{l' 3^{2\delta}} \left[a, \prod_{i=1}^n g_i^{l_i} \prod_{1 \leq i < j \leq n} [g_i^{l_i}, g_j^{l_j}] \right]^{3^{\delta+1}} = a^{l' 3^{2\delta}} = 1.$$

Теперь по (3), (4) получаем, что истинно равенство $a^{3^s} = 1$.

Если $\delta \geq s$, то равенство $x^3 = [y, z]$ принимает вид

$$\left[a, \prod_{i=1}^n g_i^{l_i} \prod_{1 \leq i < j \leq n} [g_i^{l_i}, g_j^{l_j}] \right]^3 = \left[a, \left(\prod_{i=1}^n g_i^{k_i} \right)^{-m} \left(\prod_{i=1}^n g_i^{m_i} \right)^k, a \right].$$

В силу квазитождества (13) получаем $[y, z] = 1$.

Осталось рассмотреть случай, когда $\delta = s - 1$. В этом случае равенство $x^3 = [y, z]$ запишется в виде

$$a^{l'3^{s-1}} \left[a, \prod_{i=1}^n g_i^{l_i} \prod_{1 \leq i < j \leq n} [g_i^{l_i}, g_j^{l_j}] \right]^3 = \left[a, \left(\prod_{i=1}^n g_i^{k_i} \right)^{-m} \left(\prod_{i=1}^n g_i^{m_i} \right)^k, a \right].$$

Возведем обе части равенства $x^3 = [y, z]$ в подходящую степень u , $u \not\equiv 0(3)$, и получим

$$a^{3^{s-1}} \left[a, \left(\prod_{i=1}^n g_i^{l_i} \prod_{1 \leq i < j \leq n} [g_i^{l_i}, g_j^{l_j}] \right)^u \right]^3 = \left[a, \left(\left(\prod_{i=1}^n g_i^{k_i} \right)^{-m} \left(\prod_{i=1}^n g_i^{m_i} \right)^k \right)^u, a \right].$$

Так как квазитождество (17) истинно в группе G , то получаем, что $[y, z]^u = 1$. Следовательно, $[y, z] = 1$.

Итак, установлено, что квазитождество (5) истинно в группе H . Согласно лемме 2 $H \in q\{H_{p^s}, Z\}$. Поскольку $q\{H_{p^s}, Z\} \subseteq \mathcal{K}$, имеем $H \in \mathcal{K}$. $\square$

Лемма 7. Если G – конечно-порожденная группа, $G \in \mathcal{K} \vee qZ$, $\mathcal{K} \in L_q(\hat{\mathcal{N}}^{p^s})$, $Z_{p^s} \in \mathcal{K}$, то $G/G^{p^s} \in \mathcal{K}$, $G/G' \in q\{Z_{p^s}, Z\}$, где $G^{p^s} = \langle g^{p^s} | g \in G \rangle$.

Доказательство. Очевидно, что $G^{p^s} \trianglelefteq G$. Обозначим $\bar{G} = G/G^{p^s}$. Рассмотрим произвольный элемент $\bar{h} \in \bar{G}'$, $\bar{h} \neq \bar{1}$. Тогда $\bar{h} = gG^{p^s}$ для некоторого $g \in G'$, $g \neq 1$. По признаку принадлежности существует гомоморфизм $\varphi_g : G \rightarrow M \in \mathcal{K}$ такой, что $\varphi_g(g) \neq 1$.

Положим $\bar{\varphi}_g(\bar{x}) = \varphi_g(x)$ для любого $\bar{x} \in \bar{G}$. Проверим, что отображение $\bar{\varphi}_g$ является гомоморфизмом группы $\bar{G}$ в группу M .

Прежде всего проверим корректность отображения. Пусть $\bar{x} = \bar{y}$. Тогда по (8) $x = yz^{p^s}$ для некоторых элементов $x, y, z \in G$. Используя (6), получаем верные равенства

$$\bar{\varphi}_g(\bar{x}) = \varphi_g(x) = \varphi_g(yz^{p^s}) = \varphi_g(y)\varphi_g(z)^{p^s} = \varphi_g(y) = \bar{\varphi}_g(\bar{y}).$$

Нетрудно убедиться, что $\bar{\varphi}_g$ – гомоморфизм, причем

$$\bar{\varphi}_g(\bar{h}) = \bar{\varphi}_g(\bar{g}) = \varphi_g(g) \neq 1.$$

Поскольку $\bar{G}' = G'G^{p^s}/G^{p^s}$, то по [16, теорема 4.2.3]

$$\bar{G}/\bar{G}' \cong G/(G'G^{p^s}).$$

Таким образом, $\overline{G}/\overline{G}' \in qZ_{p^s}$. По признаку принадлежности $\overline{G} \in \mathcal{K}$.

Пусть $\overline{g} \in G/G'$, $|\overline{g}| = m$. Из (1) получаем, что $g^{mp} = 1$. Согласно (7) $g^{p^s} = 1$. Значит $G/G' \in q\{Z_{p^s}, Z\}$. $\square$

Лемма 8. *Замкнутый интервал $[qZ_{p^s}, \widehat{\mathcal{N}}^{p^s}]$ решетки $L_q(\widehat{\mathcal{N}}^{p^s})$ квазимногообразий, содержащихся в $\widehat{\mathcal{N}}^{p^s}$, изоморфно вложим в замкнутый интервал $[q(Z_{p^s}, Z), \mathcal{N}^{p^s}]$ решетки $L_q(\mathcal{N}^{p^s})$.*

Доказательство. Покажем, что отображение $\varphi : L_q(\widehat{\mathcal{N}}^{p^s}) \rightarrow L_q(\mathcal{N}^{p^s})$, при котором для любого $\mathcal{K} \in L_q(\widehat{\mathcal{N}}^{p^s})$ выполняется $\varphi(\mathcal{K}) = \mathcal{K} \vee qZ$, является изоморфным вложением интервала $[qZ_{p^s}, \widehat{\mathcal{N}}^{p^s}]$ решетки $L_q(\widehat{\mathcal{N}}^{p^s})$ в решетку $L_q(\mathcal{N}^{p^s})$.

Проверим, что верно равенство $\varphi(\mathcal{K}_1 \wedge \mathcal{K}_2) = \varphi(\mathcal{K}_1) \wedge \varphi(\mathcal{K}_2)$, т. е.

$$(\mathcal{K}_1 \wedge \mathcal{K}_2) \vee qZ = (\mathcal{K}_1 \vee qZ) \wedge (\mathcal{K}_2 \vee qZ),$$

для произвольных квазимногообразий $\mathcal{K}_1, \mathcal{K}_2$ из интервала $[qZ_{p^s}, \widehat{\mathcal{N}}^{p^s}]$.

Пусть $G \in (\mathcal{K}_1 \vee qZ) \wedge (\mathcal{K}_2 \vee qZ)$, G – конечно-порожденная группа. По лемме 7 $G/G^{p^s} \in \mathcal{K}_1 \wedge \mathcal{K}_2$, $G/G' \in q\{Z_{p^s}, Z\}$.

Легко видеть, что $G^{p^s} \cap G' = \langle 1 \rangle$. Действительно, если $g \in G^{p^s} \cap G'$, то $g = x^{p^s} = y$ для некоторых элементов $x \in G$, $y \in G'$. По (1) $y^p = 1$. Значит $x^{p^{s+1}} = 1$, и по (3) $g = x^{p^s} = 1$.

По признаку принадлежности получаем, что $G \in (\mathcal{K}_1 \wedge \mathcal{K}_2) \vee qZ$. Значит

$$(\mathcal{K}_1 \vee qZ) \wedge (\mathcal{K}_2 \vee qZ) \subseteq (\mathcal{K}_1 \wedge \mathcal{K}_2) \vee qZ.$$

Обратное включение очевидно. Следовательно, φ – гомоморфизм.

Предположим, что $\varphi(\mathcal{K}_1) = \varphi(\mathcal{K}_2)$, т. е. верно следующее равенство: $\mathcal{K}_1 \vee qZ = \mathcal{K}_2 \vee qZ$. Если G – конечно-порожденная группа, $G \in \mathcal{K}_1$, то $G \in \mathcal{K}_1 \vee qZ = \mathcal{K}_2 \vee qZ$. По лемме 7 $G \in \mathcal{K}_2$. Значит $\mathcal{K}_1 = \mathcal{K}_2$, и φ – изоморфное вложение интервала $[qZ_{p^s}, \widehat{\mathcal{N}}^{p^s}]$ решетки $L_q(\widehat{\mathcal{N}}^{p^s})$ в решетку $L_q(\mathcal{N}^{p^s})$. $\square$

В [15, теорема 2] доказано, что замкнутый интервал $[qH_{p^s}, \widehat{\mathcal{N}}^{p^s}]$ решетки $L_q(\widehat{\mathcal{N}}^{p^s})$ содержит континуум различных квазимногообразий. Из леммы 8 вытекает, что замкнутый интервал $[q\{H_{p^s}, Z\}, \mathcal{N}^{p^s}]$ решетки $L_q(\mathcal{N}^{p^s})$ также содержит континуум квазимногообразий. По теореме 6 получаем, что верна следующая

Теорема 9. *Пусть $p \in \mathbf{P}$, $p \neq 2$, $s \geq 2$, и $s > 2$ при $p = 3$. Существует континуум различных квазимногообразий, каждое из которых порождает класс Леви, совпадающий с $L(q\{H_{p^s}, Z\})$.*

Список литературы

- [1] F.W. Levi, *Groups in which the commutator operation satisfies certain algebraic conditions*, J. Indian Math. Soc. (N.S.) **6**, 87–97 (1942).

- [2] L.C. Kappe, *On Levi-formations*, Arch. Math. **23**, 561–572 (1972).
DOI: <https://doi.org/10.1007/BF01304934>
- [3] L.C. Kappe, R.F. Morse, *Groups with 3-abelian normal closures*, Arch. Math. **51** (2), 104–110 (1988).
DOI: <https://doi.org/10.1007/BF01206466>
- [4] А.И. Будкин, *Квазимногообразия Леви*, Сиб. матем. журн. **40** (2), 266–270 (1999).
URL: <https://www.mathnet.ru/rus/smj148>
- [5] А.И. Будкин, *О классах Леви, порожденных нильпотентными группами*, Алгебра и логика **39** (6), 635–647 (2000).
URL: <https://www.mathnet.ru/rus/al245>
- [6] А.И. Будкин, Л.В. Таранина, *О квазимногообразиях Леви, порожденных нильпотентными группами*, Сиб. матем. журн. **41** (2), 270–277 (2000).
URL: <https://www.mathnet.ru/rus/smj1524>
- [7] R.F. Morse, *Levi-properties generated by varieties*, In: The mathematical legacy of Wilhelm Magnus: groups, geometry and special functions, Contemp. Math. **169**, 467–474 (1994).
DOI: <http://dx.doi.org/10.1090/conm/169/01675>
- [8] А.И. Будкин, В.А. Горбунов, *К теории квазимногообразий алгебраических систем*, Алгебра и логика **14** (2), 123–142 (1975).
URL: <https://www.mathnet.ru/rus/al1462>
- [9] В.В. Лодейщикова, *О квазимногообразиях Леви, порожденных нильпотентными группами*, Изв. АлтГУ (1), 26–29 (2009).
- [10] В.В. Лодейщикова, *О классах Леви, порожденных нильпотентными группами*, Сиб. матем. журн. **51** (6), 1359–1366 (2010).
URL: <https://www.mathnet.ru/rus/smj2166>
- [11] В.В. Лодейщикова, *О квазимногообразиях Леви экспоненты p^s* , Алгебра и логика **50** (1), 26–41 (2011).
URL: <https://www.mathnet.ru/rus/al473>
- [12] С.А. Шахова, *Об аксиоматическом ранге классов Леви*, Алгебра и логика **57** (5), 587–600 (2018).
DOI: <https://doi.org/10.33048/alglog.2018.57.506>
- [13] S.A. Shakhova, *The axiomatic rank of the Levi class generated by the almost Abelian quasivariety of nilpotent groups*, Lobachevskii J. Math. **41** (9), 1680–1683 (2020).
DOI: <https://doi.org/10.1134/S1995080220090243>
- [14] С.А. Шахова, *Классы Леви квазимногообразий групп с коммутантом экспоненты p* , Алгебра и логика **60** (5), 510–524 (2021).
DOI: <https://doi.org/10.33048/alglog.2021.60.504>

- [15] В.В. Лодейщикова, С.А. Шахова, *Классы Леви квазимногообразий nilпотентных групп экспоненты p^s* , Алгебра и логика **61** (1), 77–92 (2022).
DOI: <https://doi.org/10.33048/alglog.2022.61.104>
- [16] М.И. Каргаполов, Ю.И. Мерзляков, *Основы теории групп*, Наука, М., 1977.
- [17] А.И. Мальцев, *Алгебраические системы*, Наука, М., 1970.
- [18] А.И. Будкин, *Квазимногообразия групп*, Изд-во Алт. гос. ун-та, Барнаул, 2002.
- [19] В.А. Горбунов, *Алгебраическая теория квазимногообразий*, Науч. книга, Новосибирск, 1999.

Светлана Александровна Шахова

Алтайский государственный университет,
пр. Ленина, д. 61, г. Барнаул, 656049, Россия
e-mail: ssa@math.asu.ru

Levi classes of quasivarieties of 2-nilpotent groups

S.A. Shakhova

Abstract. The Levi class $L(\mathcal{M})$ generated by the class of groups $\mathcal{M}$ is the class of all groups in which the normal closure of each cyclic subgroup belongs to $\mathcal{M}$. Let p be a prime number, $p \neq 2$, s be a natural number, $s \geq 2$, and $s > 2$ for $p = 3$; H_{p^s} be a free group of rank 2 in the variety of nilpotent groups of class ≤ 2 of exponent p^s with commutator subgroup of exponent p ; Z is an infinite cyclic group; $q\{H_{p^s}, Z\}$ is a quasivariety generated by the set of groups $\{H_{p^s}, Z\}$. We find a basis of quasi-identities of the Levi class $L(q\{H_{p^s}, Z\})$ and establish that there exists a continuous set of quasivarieties $\mathcal{K}$ such that $L(\mathcal{K}) = L(q\{H_{p^s}, Z\})$.

Keywords: quasivariety, Levi class, nilpotent group.

DOI: 10.26907/2949-3919.2025.1.64-77

References

- [1] F.W. Levi, *Groups in which the commutator operation satisfies certain algebraic conditions*, J. Indian Math. Soc. (N.S.) **6**, 87–97 (1942).
- [2] L.C. Kappe, *On Levi-formations*, Arch. Math. **23**, 561–572 (1972).
DOI: <https://doi.org/10.1007/BF01304934>
- [3] L.C. Kappe, R.F. Morse, *Groups with 3-abelian normal closures*, Arch. Math. **51** (2), 104–110 (1988).
DOI: <https://doi.org/10.1007/BF01206466>
- [4] A.I. Budkin, *Levi quasivarieties*, Siberian Math. J. **40** (2), 225–228 (1999).
DOI: <https://doi.org/10.1007/s11202-999-0003-x>
- [5] A.I. Budkin, *Levi classes generated by nilpotent groups*, Algebra Logic **39** (1), 363–369 (1999).
DOI: <https://doi.org/10.1023/A:1010224301576>
- [6] A.I. Budkin, L. V. Taranina, *On Levi quasivarieties generated by nilpotent groups*, Siberian Math. J. **41** (2), 218–223 (2000).
DOI: <https://doi.org/10.1007/BF02674590>

- [7] R.F. Morse, *Levi-properties generated by varieties*, In: The mathematical legacy of Wilhelm Magnus: groups, geometry and special functions, Contemp. Math. **169**, 467–474 (1994). DOI: <http://dx.doi.org/10.1090/conm/169/01675>
- [8] A.I. Budkin, V.A. Gorbunov, *On the theory of quasivarieties of algebraic systems*, Algebra i Logika **14** (2), 123–142 (1975) [in Russian].
- [9] V.V. Lodeyshchikova, *On Levi quasivarieties generated by nilpotent groups*, Izv. AltGU (1), 26–29 (2009).
- [10] V.V. Lodeyshchikova, *The Levi classes generated by nilpotent groups*, Siberian Math. J. **51** (6), 1075–1080 (2010). DOI: <https://doi.org/10.1007/s11202-010-0105-5>
- [11] V.V. Lodeyshchikova, *Levi quasivarieties of exponent p^s* , Algebra Logic **50** (1), 17–28 (2011). DOI: <https://doi.org/10.1007/s10469-011-9121-1>
- [12] S.A. Shakhova, *The axiomatic rank of Levi classes*, Algebra Logic **57** (5), 381–391 (2018). DOI: <https://doi.org/10.1007/s10469-018-9510-9>
- [13] S.A. Shakhova, *The axiomatic rank of the Levi class generated by the almost Abelian quasivariety of nilpotent groups*, Lobachevskii J. Math. **41** (9), 1680–1683 (2020). DOI: <https://doi.org/10.1134/S1995080220090243>
- [14] S.A. Shakhova, *Levi classes of quasivarieties of groups with commutator subgroup of order p* , Algebra Logic **60** (5), 336–347 (2021). DOI: <https://doi.org/10.1007/s10469-021-09659-3>
- [15] V.V. Lodeyshchikova, S.A. Shakhova, *Levi classes of quasivarieties of nilpotent groups of exponent p^s* , Algebra Logic **61** (1), 54–66 (2022). DOI: <https://doi.org/10.1007/s10469-022-09674-y>
- [16] M. I. Kargapolov, Ju.I. Merzljakov, *Fundamentals of the theory of groups*, Graduate Texts in Mathematics **62**, Springer-Verlag, New York–Berlin, 1979.
- [17] A.I. Mal'cev, *Algebraic Systems*, Springer-Verlag, New York–Heidelberg, 1973. DOI: <https://doi.org/10.1007/978-3-642-65374-2>
- [18] A.I. Budkin, *Quasivarieties of groups*, Izd-vo Altai State Univ., Barnaul, 2002 [in Russian].
- [19] V.A. Gorbunov, *Algebraic theory of quasivarieties*, Springer New York, New York, 1998.

Svetlana Aleksandrovna Shakhova

Altai State University,

61 Lenina av., Barnaul 656049, Russia,

e-mail: ssa@math.asu.ru