

Полуортогональные проекторы в унитарных C^* -алгебрах

А.М. Бикчентаев

Аннотация. Пусть $\mathcal{A}^{\text{sem}} = \{A \in \mathcal{A} : \operatorname{Re} A = A^*A\}$ – множество всех полуортогональных проекторов унитарной C^* -алгебры $\mathcal{A}$, I – единица $\mathcal{A}$. Формула $U = 2A - I$ ($A \in \mathcal{A}^{\text{sem}}$) задает биекцию между множеством $\mathcal{A}^{\text{sem}}$ и множеством всех изометрий из $\mathcal{A}$. Для любого натурального числа $n \geq 2$ существует некоммутативный многочлен степени n , который выдает полуортогональный проектор при подстановке произвольного набора $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{A}^{\text{sem}}$. Каждый элемент $A \in \mathcal{A}^{\text{sem}}$ гипонормален и лежит в единичном шаре C^* -алгебры $\mathcal{A}$. Если $A \in \mathcal{A}^{\text{sem}}$, то A^2 гипонормален. Если $A, A^2 \in \mathcal{A}^{\text{sem}}$, то A является проектором. Если $A \in \mathcal{A}^{\text{sem}}$ и $A = A^n$ для некоторого $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, то A является нормальным элементом, и A – проектор при $n = 2$.

Ключевые слова: гильбертово пространство, линейный оператор, полуортогональный проектор, изометрия, C^* -алгебра.

DOI: 10.26907/2949-3919.2025.2.4-18

Введение

Понятие полуортогонального проектора в $M_n(\mathbb{C})$ было введено и изучено в [1]. Различные свойства полуортогональных проекторов в контексте алгебры $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ всех линейных ограниченных операторов в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$, а затем и в контексте унитарных C^* -алгебр были исследованы в [2–4]. Пусть $\mathcal{A}^{\text{sem}} := \{A \in \mathcal{A} : \operatorname{Re} A = |A|^2\}$ – множество всех полуортогональных проекторов унитарной C^* -алгебры $\mathcal{A}$, A_1 – единичный шар $\mathcal{A}$, $\mathcal{A}^{\text{sa}}$ и $\mathcal{A}^{\text{pr}}$ – эрмитова часть и множество проекторов $\mathcal{A}$, соответственно. Перечислим полученные в нашей статье результаты. Формула $U := 2A - I$ ($A \in \mathcal{A}^{\text{sem}}$) задает биекцию между множествами $\mathcal{A}^{\text{sem}}$ и $\mathcal{A}^{\text{iso}} := \{A \in \mathcal{A} : A^*A = I\}$. Имеем $\mathcal{A}^{\text{sem}} \cap \mathcal{A}^{\text{sa}} = \mathcal{A}^{\text{pr}}$ (теорема 1). Каждый элемент $A \in \mathcal{A}^{\text{sem}}$ гипонормален (следствие 2). Для каждого набора элементов $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{A}^{\text{sem}}$ элемент

$$A := \frac{(2A_1 - I) \cdots (2A_n - I) + I}{2}$$

Благодарности. Работа выполнена в рамках реализации программы развития Научно-образовательного математического центра Приволжского федерального округа (соглашение № 075-02-2025-1725/1).

также лежит в множестве $\mathcal{A}^{\text{sem}}$ (следствие 3). Значит, для любого натурального числа $n \geq 2$ существует некоммутативный многочлен степени n , который выдает полуортогональный проектор при подстановке произвольного набора $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{A}^{\text{sem}}$. Имеем включение $\mathcal{A}^{\text{sem}} \subset \mathcal{A}_1$ (следствие 4). Пусть $A_1, \dots, A_n, A \in \mathcal{A}^{\text{sem}}$, $\lambda_1, \dots, \lambda_n > 0$ и $\lambda_1 + \dots + \lambda_n = 1$. Если $\lambda_1 A_1 + \dots + \lambda_n A_n = A$, то $A_1 = \dots = A_n = A$ (следствие 6). Имеем $\mathcal{A}^{\text{sem}} \cap \mathcal{A}^{\text{iso}} = \{I\}$ (следствие 7). Если $A \in \mathcal{A}$ с $\|A\| < 1$, то элемент $(I + A)/2$ является средним арифметическим нормальных полуортогональных проекторов из $\mathcal{A}$ (предложение 8). Для $A, B \in \mathcal{A}^{\text{sem}}$ пишем $A \leq_1 B$, если $A + A^* = A^* B + B^* A$. Отношение $\leq_1$ на $\mathcal{A}^{\text{sem}}$ является антисимметричным и рефлексивным. Его сужение на $\mathcal{A}^{\text{pr}}$ совпадает с обычным отношением частичного порядка $\leq$. В алгебре $\mathcal{B}(\mathcal{H})$, $\dim \mathcal{H} = +\infty$, существует гипонормальный оператор, квадрат которого не гипонормален [5, задача 209]. Если $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})^{\text{sem}}$, то A^2 гипонормален (теорема 22). Пусть $\mathcal{A}$ – унитарная C^* -алгебра. Если $A, A^2 \in \mathcal{A}^{\text{sem}}$, то $A \in \mathcal{A}^{\text{pr}}$ (теорема 23). Если $A \in \mathcal{A}^{\text{sem}}$ и $A = A^n$ для некоторого $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, то A является нормальным элементом, и $A \in \mathcal{A}^{\text{pr}}$ при $n = 2$ (теорема 24).

1. Обозначения и определения

C^* -алгеброй называется комплексная банахова $*$ -алгебра $\mathcal{A}$ такая, что $\|A^* A\| = \|A\|^2$ для всех $A \in \mathcal{A}$. Пусть $\mathcal{A}$ – унитарная C^* -алгебра с единицей I , $\mathcal{A}_1 := \{A \in \mathcal{A} : \|A\| \leq 1\}$ – единичный шар алгебры $\mathcal{A}$. Элемент $A \in \mathcal{A}$ называется *гипонормальным*, если $A^* A \geq A A^*$; *нормальным*, если $A^* A = A A^*$; *изометрией*, если $A^* A = I$; *коизометрией*, если $A A^* = I$. Положим

$$\begin{aligned} \mathcal{A}^{\text{iso}} &:= \{A \in \mathcal{A} : A^* A = I\}, & \mathcal{A}^{\text{u}} &:= \{A \in \mathcal{A} : A^* A = A A^* = I\}, \\ \mathcal{A}^{\text{pr}} &:= \{A \in \mathcal{A} : A = A^2 = A^*\}, & \mathcal{A}^{\text{pi}} &:= \{A \in \mathcal{A} : A^* A \in \mathcal{A}^{\text{pr}}\}. \end{aligned}$$

Для C^* -алгебры $\mathcal{A}$ через $\mathcal{A}^{\text{id}}$, $\mathcal{A}^{\text{sa}}$ и $\mathcal{A}^+$ будем обозначать ее подмножества идемпотентов ($A = A^2$), эрмитовых ($A^* = A$) элементов и положительных элементов, соответственно. Если $A \in \mathcal{A}$, то $|A| = \sqrt{A^* A} \in \mathcal{A}^+$ и $\text{Re } A = (A + A^*)/2 \in \mathcal{A}^{\text{sa}}$; $\text{S}(A) = (A - A^*)/2$ – косоэрмитова часть элемента A . Пусть

$$\mathcal{A}^{\text{sem}} := \{A \in \mathcal{A} : \text{Re } A = |A|^2\}$$

– множество всех полуортогональных проекторов унитарной C^* -алгебры $\mathcal{A}$. Если I – единица алгебры $\mathcal{A}$, то формула $S_P = 2P - I$ задает биекцию между $\mathcal{A}^{\text{id}}$ и множеством $\mathcal{A}^{\text{sym}}$ всех симметрий ($S^2 = I$) в $\mathcal{A}$.

Для $P, Q \in \mathcal{A}^{\text{pr}}$ будем писать $P \sim Q$ (эквивалентность Мюррея–фон Неймана), если $P = U^* U$ и $Q = U U^*$ для некоторого $U \in \mathcal{A}$. Проектор P в C^* -алгебре $\mathcal{A}$ называется *конечным*, если $P \sim Q \leq P$ влечет $Q = P$. Унитарная C^* -алгебра $\mathcal{A}$ называется *конечной*, если I является конечным проектором [6, гл. III, определение 1.3.1].

Следом на C^* -алгебре $\mathcal{A}$ называется такое отображение $\varphi : \mathcal{A}^+ \rightarrow [0, +\infty]$, что

$$\varphi(X + Y) = \varphi(X) + \varphi(Y), \quad \varphi(\lambda X) = \lambda\varphi(X) \quad \text{для всех } X, Y \in \mathcal{A}^+, \lambda \geq 0$$

(при этом $0 \cdot (+\infty) \equiv 0$); $\varphi(Z^*Z) = \varphi(ZZ^*)$ для всех $Z \in \mathcal{A}$. Для следа φ определим (см. [6, гл. II, II.6.7.3]) $\mathfrak{M}_\varphi^+ = \{X \in \mathcal{A}^+ : \varphi(X) < +\infty\}$. Ограничение $\varphi|_{\mathfrak{M}_\varphi^+}$ корректно продолжается по линейности до функционала на $\mathfrak{M}_\varphi = \text{lin}_{\mathbb{C}} \mathfrak{M}_\varphi^+$, который будем обозначать той же буквой φ . Такое продолжение позволяет отождествлять конечные следы (т.е. $\varphi(X) < +\infty$ для всех $X \in \mathcal{A}^+$) с положительными следовыми функционалами на $\mathcal{A}$.

Пусть $\mathcal{H}$ – гильбертово пространство над полем $\mathbb{C}$, $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ – $*$ -алгебра всех линейных ограниченных операторов в $\mathcal{H}$. Любую C^* -алгебру можно реализовать как C^* -подалгебру в $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ для некоторого гильбертова пространства $\mathcal{H}$ (теорема Гельфанда–Наймарка; см. [7, теорема 3.4.1]). Подпространство $\mathcal{K} \subset \mathcal{H}$ является *инвариантным* относительно оператора $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$, если $A\xi \in \mathcal{K}$ для каждого $\xi \in \mathcal{K}$. При $\dim \mathcal{H} = n < \infty$ алгебра $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ отождествляется с полной матричной алгеброй $\mathbb{M}_n(\mathbb{C})$.

2. Полуортогональные проекторы в унитарных C^* -алгебрах

Пусть $\mathcal{A}$ – унитарная C^* -алгебра.

Теорема 1. Формула $U := 2A - I$ ($A \in \mathcal{A}^{\text{sem}}$) задает биекцию между множествами $\mathcal{A}^{\text{sem}}$ и $\mathcal{A}^{\text{iso}}$. Имеем $\mathcal{A}^{\text{sem}} \cap \mathcal{A}^{\text{sa}} = \mathcal{A}^{\text{pr}}$.

Доказательство. Если $A \in \mathcal{A}^{\text{sem}}$, то

$$U^*U = (2A - I)^*(2A - I) = 4A^*A - 2A - 2A^* + I = I$$

и $U \in \mathcal{A}^{\text{iso}}$. Обратно, если $U \in \mathcal{A}^{\text{iso}}$, то для элемента $A = (U + I)/2$ имеем

$$|A|^2 = \frac{U^* + I}{2} \cdot \frac{U + I}{2} = \frac{U + U^* + 2I}{4} = \frac{U + I}{4} + \frac{U^* + I}{4} = \text{Re } A$$

и $A \in \mathcal{A}^{\text{sem}}$. Если $A \in \mathcal{A}^{\text{sem}}$ и $A = A^*$, то $A = |A|^2$ и $A \in \mathcal{A}^{\text{pr}}$. Включение $\mathcal{A}^{\text{pr}} \subset \mathcal{A}^{\text{sem}}$ очевидно. $\square$

Следствие 2. Каждый элемент $A \in \mathcal{A}^{\text{sem}}$ гипонормален.

Доказательство. Поскольку проектор $UU^* \leq I$, имеем

$$A^*A = \frac{U^* + U}{4} + \frac{1}{2}I \geq \frac{U + U^*}{4} + \frac{1}{4}UU^* + \frac{1}{4}I = AA^*.$$

Утверждение доказано. $\square$

Следствие 3. Для каждого набора элементов $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{A}^{\text{sem}}$ элемент

$$A := \frac{(2A_1 - I) \cdots (2A_n - I) + I}{2} \quad (1)$$

также лежит в множестве $\mathcal{A}^{\text{sem}}$.

Доказательство. В силу [теоремы 1](#) элементы $U_k := 2A_k - I$, $k = 1, \dots, n$, лежат в множестве $\mathcal{A}^{\text{iso}}$. Поскольку произведение любого конечного набора элементов из $\mathcal{A}^{\text{iso}}$ снова лежит в $\mathcal{A}^{\text{iso}}$, имеем $U := U_1 \cdots U_n \in \mathcal{A}^{\text{iso}}$. Для элемента $A := (U + I)/2$ выполнено равенство

$$(2A_1 - I) \cdots (2A_n - I) = 2A - I,$$

т. е. A из [\(1\)](#) лежит в множестве $\mathcal{A}^{\text{sem}}$. В частности, если $A_1, A_2, A_3 \in \mathcal{A}^{\text{sem}}$, то элементы

$$2A_1A_2 - A_1 - A_2 + I, \quad 4A_1A_2A_3 - 2A_1A_2 - 2A_1A_3 - 2A_2A_3 + A_1 + A_2 + A_3$$

лежат в $\mathcal{A}^{\text{sem}}$. Для $A_1 = A_2$ имеем $2A_1^2 - 2A_1 + I \in \mathcal{A}^{\text{sem}}$. □

Другими словами, для любого натурального числа $n \geq 2$ существует некоммутативный многочлен степени n , который выдает полуортогональный проектор при подстановке произвольного набора $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{A}^{\text{sem}}$.

Следствие 4. Имеем включение $\mathcal{A}^{\text{sem}} \subset \mathcal{A}_1$.

Доказательство. Если $A \in \mathcal{A}^{\text{sem}}$, то $2A - I \in \mathcal{A}^{\text{iso}}$ и

$$2\|A\| = \|2A - I + I\| \leq \|2A - I\| + \|I\| = 1 + 1 = 2$$

в силу неравенства треугольника для нормы $\|\cdot\|$. □

Лемма 5 ([8, гл. I, теорема 10.2]). Если C^* -алгебра $\mathcal{A}$ унитарна, то $A \in \mathcal{A}_1$ является крайней точкой множества $\mathcal{A}_1$ тогда и только тогда, когда A^*A (значит, и AA^*) является проектором и выполнено условие $(I - A^*A)\mathcal{A}(I - AA^*) = \{0\}$.

В частности, изометрии и коизометрии являются крайними точками множества $\mathcal{A}_1$.

Следствие 6. Пусть $A_1, \dots, A_n, A \in \mathcal{A}^{\text{sem}}$, $\lambda_1, \dots, \lambda_n > 0$ и $\lambda_1 + \dots + \lambda_n = 1$. Если

$$\lambda_1 A_1 + \dots + \lambda_n A_n = A, \quad (2)$$

то $A_1 = \dots = A_n = A$.

Доказательство. Пусть $A_1 = \frac{U_1 + I}{2}$, $\dots$, $A_n = \frac{U_n + I}{2}$, $A = \frac{U + I}{2}$ – представления [теоремы 1](#) с $U_1, \dots, U_n, U \in \mathcal{A}^{\text{iso}}$. Тогда из равенства [\(2\)](#) имеем $\lambda_1 U_1 + \dots + \lambda_n U_n = U$ и из [леммы 5](#) получаем $U_1 = \dots = U_n = U$. □

Следствие 7. Имеем $\mathcal{A}^{\text{sem}} \cap \mathcal{A}^{\text{iso}} = \{I\}$.

Доказательство. Если $A \in \mathcal{A}^{\text{sem}} \cap \mathcal{A}^{\text{iso}}$, то $\text{Re } A = |A|^2 = I^2 = I$ и

$$\frac{1}{2}A + \frac{1}{2}A^* = I.$$

Заметим, что I лежит в множестве $\text{extr } \mathcal{A}_1$ всех крайних точек множества $\mathcal{A}_1$. Так как A является изометрией, то A^* – коизометрия и поэтому $A, A^* \in \text{extr } \mathcal{A}_1$. Теперь из [леммы 5](#) получаем $A = A^* = I$. $\square$

Предложение 8. Если $A \in \mathcal{A}$ с $\|A\| < 1$, то элемент $(I + A)/2$ является средним арифметическим нормальных полуортогональных проекторов из $\mathcal{A}$.

Доказательство. Если $A \in \mathcal{A}$ с $\|A\| < (n - 2)n^{-1}$, то $A = \frac{1}{n}(U_1 + \dots + U_n)$ с некоторыми $U_1, \dots, U_n \in \mathcal{A}^u$ (см. [\[9\]](#)). Поэтому

$$A = \frac{2}{n} \left(\frac{U_1 + I}{2} + \dots + \frac{U_n + I}{2} \right) - I \quad \text{и} \quad \frac{A + I}{2} = \frac{1}{n} \left(\frac{U_1 + I}{2} + \dots + \frac{U_n + I}{2} \right).$$

Заметим, что $\frac{U_1 + I}{2}, \dots, \frac{U_n + I}{2} \in \mathcal{A}^{\text{sem}}$ и являются нормальными элементами. $\square$

Теорема 9. Для $A \in \mathcal{A}^{\text{sem}}$ следующие условия эквивалентны:

- (i) A нормален;
- (ii) $2A - I \in \mathcal{A}^u$;
- (iii) $A^* \in \mathcal{A}^{\text{sem}}$.

Доказательство. (i) $\Rightarrow$ (ii). Если A является нормальным элементом в $\mathcal{A}^{\text{sem}}$, то $U := 2A - I$ является нормальной изометрией в $\mathcal{A}$, см. [теорему 1](#). Следовательно, $U \in \mathcal{A}^u$.

(ii) $\Rightarrow$ (i). Каждый элемент $U \in \mathcal{A}^u$ нормален.

(i) $\Rightarrow$ (iii). Имеем $A + A^* = 2A^*A = 2AA^*$. $\square$

Следствие 10. Если C^* -алгебра $\mathcal{A}$ конечна, то каждый элемент $A \in \mathcal{A}^{\text{sem}}$ является нормальным.

Доказательство. Если C^* -алгебра $\mathcal{A}$ конечна, то все изометрии и коизометрии из $\mathcal{A}$ являются унитарными элементами. $\square$

Другие примеры, когда $A \in \mathcal{A}^{\text{sem}}$ является нормальным см., например, в [\[3, §4\]](#).

Теорема 11. Имеем $\mathcal{A}^{\text{sem}} \cap \mathcal{A}^{\text{pi}} = \mathcal{A}^{\text{pr}}$.

Доказательство. Для частичной изометрии $A \in \mathcal{A}^{\text{sem}}$ имеем $A + A^* = 2P$ с $P := A^*A \in \mathcal{A}^{\text{pr}}$. Поэтому декартово разложение элемента A есть $A = P + iB$ с $B \in \mathcal{A}^{\text{sa}}$ и $i \in \mathbb{C}$, $i^2 = -1$. Из равенства $(P - iB)(P + iB) = P$ получаем

$$i(PB - BP) = -B^2. \quad (3)$$

Умножив обе части равенства (3) слева и справа на проектор P , имеем $PB^2P = |BP|^2 = 0$. Поэтому $\|BP\| = \sqrt{\|BP\|^2} = 0$. Значит, $\|BP\| = \| |BP| \| = 0$ и $BP = 0$ в силу точности нормы $\|\cdot\|$. Теперь $PB = (BP)^* = 0$ и из (3) получаем $B^2 = |B|^2 = 0$. Так как

$$\| |B|^2 \| = \| |B| \|^2 = \|B\|^2 = 0,$$

получаем $B = 0$ и $A = P$, что и требовалось. $\square$

Предложение 12. Пусть $A \in \mathcal{A}^{\text{sem}}$ нормален и элемент $U := 2A - I$ представляется в виде произведения $U = S_1 S_2$ с некоторыми $S_1, S_2 \in \mathcal{A}^u \cap \mathcal{A}^{\text{sa}} (= \mathcal{A}^{\text{sym}} \cap \mathcal{A}^{\text{sa}})$. Тогда $A^* = S_1 A S_1$.

Доказательство. Очевидно,

$$2S_1 A S_1 - I = S_1(2A - I)S_1 = S_2 S_1 = (S_1 S_2)^* = 2A^* - I,$$

поэтому $A^* = S_1 A S_1$. Поскольку $S_k = 2P_k - I$ с $P_k = \frac{I + S_k}{2} \in \mathcal{A}^{\text{pr}}$, $k = 1, 2$, имеем

$$\begin{aligned} 2A - I &= (2P_1 - I)(2P_2 - I), \\ A &= 2P_1 P_2 - P_1 - P_2 + I. \end{aligned}$$

$\square$

Следствие 13. Пусть элемент A как в предложении 12. Тогда

- (i) если φ – след на C^* -алгебре $\mathcal{A}$ и $A \in \mathfrak{M}_\varphi$, то $\varphi(A) \in \mathbb{R}$;
- (ii) если $\mathcal{A} = \mathbb{M}_n(\mathbb{C})$, то определитель $\det(A) \in \mathbb{R}$.

Доказательство. (i). Имеем $A^* \in \mathfrak{M}_\varphi$ и $\varphi(A^*) = \overline{\varphi(A)} = \varphi(S_1 A S_1) = \varphi(S_1^2 A) = \varphi(A) \in \mathbb{R}$ в силу равенства $\varphi(XY) = \varphi(YX)$ для всех $X \in \mathcal{A}$ и $Y \in \mathfrak{M}_\varphi$ [7, гл. 6, упражнение 4]; черта сверху означает комплексное сопряжение.

(ii). Из теоремы об определителе произведения матриц и равенства $\det(X^*) = \overline{\det(X)}$ для всех $X \in \mathbb{M}_n(\mathbb{C})$ [10, гл. 0, §0.3, 0.3.1] получаем

$$\begin{aligned} \overline{\det(A)} &= \det(A^*) = \det(S_1 A S_1) = \det(S_1)^2 \det(A) = \det(S_1^2) \det(A) = \det(I) \det(A) \\ &= \det(A) \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Утверждение доказано. $\square$

Пример 14. Пусть $\mathcal{A} = \mathbb{M}_2(\mathbb{C})$ и

$$A_\varepsilon = \begin{pmatrix} \varepsilon & -\sqrt{\varepsilon - \varepsilon^2} \\ \sqrt{\varepsilon - \varepsilon^2} & \varepsilon \end{pmatrix} \quad \text{для } 0 \leq \varepsilon \leq 1. \quad (4)$$

Тогда $A_\varepsilon \in \mathcal{A}^{\text{sem}}$ и $U_\varepsilon := 2A_\varepsilon - I$ представляется в виде произведения $U_\varepsilon = S_1 S_2$ с матри-

цами

$$S_1 = \begin{pmatrix} 2t-1 & 2\sqrt{t-t^2} \\ 2\sqrt{t-t^2} & 1-2t \end{pmatrix}, \quad S_2 = \begin{pmatrix} 1-2t & 2\sqrt{t-t^2} \\ 2\sqrt{t-t^2} & 2t-1 \end{pmatrix}, \quad t := 2 - 2\sqrt{1-\varepsilon},$$

из $\mathcal{A}^u \cap \mathcal{A}^{sa}$, т. е. элемент A_ε удовлетворяет условию факторизации [предложения 12](#).

Пример 15. Если $\mathcal{A} = \mathcal{B}(\mathcal{H})$, $\dim \mathcal{H} \leq +\infty$, то $\{\|A\| : A \in \mathcal{A}^{\text{sem}}\} = [0, 1]$. Для каждого $\varepsilon \in [0, 1]$ определенный в [\(4\)](#) оператор A_ε удовлетворяет условию

$$A_\varepsilon^* A_\varepsilon = \varepsilon \operatorname{diag}(1, 1).$$

Поэтому $\varepsilon = \|A_\varepsilon^* A_\varepsilon\| = \|A_\varepsilon\|^2$ и $\|A_\varepsilon\| = \sqrt{\varepsilon}$, $0 \leq \varepsilon \leq 1$. Напомним, что

$$\{\|A\| : A \in \mathcal{A}^{\text{pr}}\} = \{0, 1\}, \quad \{\|A\| : A \in \mathcal{A}^{\text{id}}\} = \{0\} \cup [1, +\infty).$$

Предложение 16. Пусть $\mathcal{A}$ – унитарная C^* -алгебра. Формула $A^\perp := I - A$ ($A \in \mathcal{A}^{\text{sem}}$) задает инволюцию на множестве $\mathcal{A}^{\text{sem}}$. Имеем $A^* A^\perp := i \operatorname{Im} A$.

Доказательство. Очевидно, $(A^\perp)^\perp = A$ для всех $A \in \mathcal{A}^{\text{sem}}$ и

$$\begin{aligned} A^{\perp*} A^\perp &= I + A^* A - A - A^* = I - \frac{A + A^*}{2} = \frac{A^\perp + A^{\perp*}}{2} = \operatorname{Re}(A^\perp), \\ A^* A^\perp &= A^* - A^* A = A^* - \frac{A + A^*}{2} = \frac{A^* - A}{2} = i \frac{A^* - A}{2i} = i \operatorname{Im} A. \end{aligned}$$

Утверждение доказано. □

Из [теоремы 1](#) следует $A - A^\perp \in \mathcal{A}^{\text{iso}}$.

Предложение 17. Если элемент $A \in \mathcal{A}^{\text{sem}}$ обратим, то $\operatorname{Re}(A^{-1}) = I$. В частности, если $A^{-1} \in \mathcal{A}^{\text{sem}}$, то $A = I$.

Доказательство. Элемент $2A - I$ является изометрией, см. [теорему 1](#). Имеем соотношения

$$\begin{aligned} (2A - I)A^{-1} &= 2I - A^{-1}, \quad (A^{-1})^* = (A^*)^{-1}, \quad (2A^* - I)(2A - I) = I, \\ (A^{-1})^* &= (A^*)^{-1}(2A^* - I)(2A - I)A^{-1} = (2I - (A^{-1})^*)(2I - A^{-1}) \\ &= 4I - 2(A^{-1})^* - 2A^{-1} + (A^{-1})^* A^{-1}. \end{aligned}$$

Следовательно, $(A^{-1})^* + A^{-1} = 2I$ и $\operatorname{Re}(A^{-1}) = I$. В частности, если $A^{-1} \in \mathcal{A}^{\text{sem}}$, то $|A^{-1}| = I$, т. е. A^{-1} является обратимой изометрией; значит, $A^{-1} \in \mathcal{A}^u$. Таким образом, $A = (A^{-1})^{-1} = (A^{-1})^* \in \mathcal{A}^u$ и $A = I$ в силу [следствия 7](#). □

Теорема 18. Для $A, B \in \mathcal{A}^{\text{sem}}$ имеем следующие эквивалентности:

$$(i) \quad A + B \in \mathcal{A}^{\text{sem}} \Leftrightarrow A^* B + B^* A = 0;$$

- (ii) $A - B \in \mathcal{A}^{\text{sem}} \Leftrightarrow A^*B + B^*A = 2B^*B$;
 (iii) $A - B \in \mathcal{A}^+ \Leftrightarrow S(A) = S(B)$ и $B^*B \leq A^*A$.

Доказательство. Заметим, что

$$|X + Y|^2 + |X - Y|^2 = 2|X|^2 + 2|Y|^2 \text{ для всех } X, Y \in \mathcal{A}. \quad (5)$$

(i), $\Rightarrow$. Складывая почленно равенства $A + A^* = 2|A|^2$ и $B + B^* = 2|B|^2$, получаем $A + A^* + B + B^* = 2|A|^2 + 2|B|^2 = 2|A + B|^2$. Теперь из (5) имеем $|A + B|^2 = |A - B|^2$, т. е. $A^*B + B^*A = 0$.

(ii), $\Rightarrow$. Имеем

$$2|A - B|^2 = A^* - B^* + A - B = A^* + A - (B^* + B) = 2|A|^2 - 2|B|^2. \quad (6)$$

Из (5) с $X = A - B$ и $Y = B$ получаем $2|A - B|^2 + 2|B|^2 = |A|^2 + |A - 2B|^2$. Теперь отсюда и из (6) имеем $|A|^2 = |A - 2B|^2$, т. е. $A^*B + B^*A = 2B^*B$.

(iii), $\Rightarrow$. Имеем $A^* - B^* = (A - B)^* = A - B \in \mathcal{A}^+$, поэтому

$$2(A - B) = A + A^* - B - B^* = 2(A^*A - B^*B) \geq 0$$

и $B^*B \leq A^*A$. Очевидно, что

$$S(A) - S(B) = \frac{A - A^*}{2} - \frac{B - B^*}{2} = \frac{1}{2}((A - B) - (A^* - B^*)) = \frac{1}{2}((A - B) - (A - B)^*) = 0.$$

(iii), $\Leftarrow$. Имеем

$$\begin{aligned} A - B &= \frac{A - B + (A - B)^*}{2} + \frac{A - B - (A - B)^*}{2} = \frac{A + A^* - (B + B^*)}{2} + S(A) - S(B) \\ &= A^*A - B^*B \geq 0. \end{aligned}$$

Теорема доказана. $\square$

Пример 19. Если $A \in \mathcal{A}^{\text{sem}}$, то $A^\perp \in \mathcal{A}^{\text{sem}}$ в силу предложения 16 и $A + A^\perp = I \in \mathcal{A}^{\text{sem}}$. Предложение 16 дает

$$A^*A^\perp + A^\perp{}^*A = \frac{A^* - A}{2} + A - A^*A = \frac{A^* + A}{2} - A^*A = 0,$$

т. е. импликация “(i), $\Rightarrow$ ” теоремы 18 выполнена.

Для $A, B \in \mathcal{A}^{\text{sem}}$ пишем $A \leq_1 B$, если $A + A^* = A^*B + B^*A$. Например, для 3×3

полуортогональных бистохастических матриц

$$A = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

имеем $A \leq_1 B$, $A \leq_1 B^*$. Очевидно, $A = AB = AB^*$ является проектором.

Предложение 20. Пусть $A, B \in \mathcal{A}^{\text{sem}}$. Тогда

- (i) $0 \leq_1 A$, $A \leq_1 I$, $A \leq_1 A$;
- (ii) $A \leq_1 B \Leftrightarrow B^\perp \leq_1 A^\perp$;
- (iii) $A \leq_1 B^\perp \Leftrightarrow A^*B + B^*A = 0$ и при этом $A + B \in \mathcal{A}^{\text{sem}}$ в силу [теоремы 18](#);
- (iv) если $A \leq_1 B$, $B \leq_1 A$, то $A = B$;
- (v) если $A, B \in \mathcal{A}^{\text{pr}}$, то $A \leq_1 B \Leftrightarrow A \leq B$.

Доказательство. (iv). Из соотношений

$$A + A^* = A^*B + B^*A, \quad B + B^* = B^*A + A^*B$$

получаем $A + A^* = B + B^*$. Поэтому

$$|A - B|^2 = (A - B)^*(A - B) = A^*A + B^*B - A^*B - B^*A = \frac{A + A^*}{2} + \frac{A + A^*}{2} - A - A^* = 0$$

и $|A - B| = 0$. Следовательно, $\|A - B\| = \| |A - B| \| = 0$ и $A = B$.

(v), $\Rightarrow$. Имеем $2A = AB + BA \geq 0$, поэтому $AB = BA$ в силу [\[11, лемма 2\]](#). Следовательно, $A = AB$ и $A \leq B$.

(v), $\Leftarrow$. Если $A \leq B$, то $A = AB = BA$ и $2A = AB + BA$, т. е. $A \leq_1 B$. Предложение доказано. $\square$

Таким образом, отношение $\leq_1$ на $\mathcal{A}^{\text{sem}}$ является антисимметричным и рефлексивным. Его сужение на $\mathcal{A}^{\text{pr}}$ совпадает с обычным отношением частичного порядка $\leq$.

Теорема 21. Пусть $A \in \mathcal{A}^{\text{sem}}$ нормален. Тогда

$$A \leq_1 A^* \Leftrightarrow A^* \leq_1 A \Leftrightarrow A + A^* = A^2 + A^{*2} \Leftrightarrow A \in \mathcal{A}^{\text{pr}}.$$

Доказательство. Если $A \in \mathcal{A}^{\text{sem}}$ нормален, то $A^* \in \mathcal{A}^{\text{sem}}$, см. [теорему 9](#). Очевидно, $A \leq_1 A^* \Leftrightarrow A^* \leq_1 A \Leftrightarrow A + A^* = A^2 + A^{*2}$. Положим $A = (U + I)/2$ – представление теорем [1, 9](#) с $U \in \mathcal{A}^{\text{u}}$. Тогда равенство $A + A^* = A^2 + A^{*2}$ перепишется в виде

$$\frac{1}{2}U^2 + \frac{1}{2}U^{*2} = I.$$

Поскольку $U^2, U^{*2}, I \in \mathcal{A}^u$, из [леммы 5](#) имеем $U^2 = U^{*2} = I$. Умножив обе части равенства $U^2 = I$ слева на элемент U^* , получаем $U = U^*$. Следовательно, $U = 2P - I$ для некоторого $P \in \mathcal{A}^{pr}$. Таким образом, $A = P \in \mathcal{A}^{pr}$. $\square$

В алгебре $\mathcal{B}(\mathcal{H})$, $\dim \mathcal{H} = +\infty$, существует гипонормальный оператор, квадрат которого не гипонормален [[5](#), задача 209].

Теорема 22. Пусть $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})^{\text{sem}}$ и $P \in \mathcal{B}(\mathcal{H})^{pr}$. Тогда

- (i) A^2 гипонормален;
- (ii) если $P\mathcal{H}$ – инвариантное подпространство оператора A , то $AP \in \mathcal{B}(\mathcal{H})^{\text{sem}}$.

Доказательство. (i). Поскольку

$$\begin{aligned} 4|A^2|^2 &= 4A^{2*}A^2 = 4A^{*2}A^2 = 4A^*(A^*A)A = 2A^*(A + A^*)A \\ &= 2(A^*A)A + 2A^*(A^*A) = (A + A^*)A + A^*(A + A^*) \\ &= A^2 + 2A^*A + A^{*2} = A^2 + A + A^* + A^{*2}, \end{aligned} \quad (7)$$

условие гипонормальности оператора A^2 перепишется в виде неравенства

$$A^2 + A + A^* + A^{*2} \geq 4A^2A^{*2}. \quad (8)$$

Умножив обе части неравенства (8) на 4 и подставив $2A = V + I$ с подходящей изометрией V (см. [теорему 1](#)), с учетом равенств $V^*V = I$ и $VV^* = P \in \mathcal{B}(\mathcal{H})^{pr}$, получаем равносильное к (8) неравенство

$$5I \geq V^2V^{2*} + 2V^2V^* + 2VV^{*2} + 4VV^* - 2V - 2V^*,$$

вытекающее из соотношений

$$5I + 2V + 2V^* \geq 4I + P + 2V + 2V^* = (V + 2I)(V + 2I)^* \geq (V + 2I)P(V + 2I)^*.$$

(ii). Если $P \in \mathcal{B}(\mathcal{H})^{\text{id}}$, то $P\mathcal{H}$ является инвариантным подпространством оператора $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ тогда и только тогда, когда $AP = PAP$ [[12](#), гл. 0, теорема 0.1]. Для $P \in \mathcal{B}(\mathcal{H})^{pr}$ имеем $PA^* = (AP)^* = (PAP)^* = PA^*P$. Отсюда и из равенства $AP = PAP$ получаем $PA^*AP = PA^* \cdot AP = PA^*P \cdot PAP = PA^*PAP$. Заменяя здесь оператор A^*A на $\text{Re } A$, имеем

$$PAP + (PAP)^* = PAP + PA^*P = 2PA^*P \cdot PAP = 2(PAP)^*PAP,$$

т. е. $PAP = AP \in \mathcal{B}(\mathcal{H})^{\text{sem}}$. Таким образом, сужение полуортогонального проектора на его инвариантное подпространство также является полуортогональным проектором. $\square$

Теорема 23. Если $\mathcal{A}$ – унитарная C^* -алгебра и $A, A^2 \in \mathcal{A}^{\text{sem}}$, то $A \in \mathcal{A}^{pr}$.

Доказательство. Пусть $A = (U + I)/2$, $A^2 = (V + I)/2$ – представление [теоремы 1](#) с $U, V \in \mathcal{A}^{\text{iso}}$. Тогда

$$\left(\frac{U + I}{2}\right)^2 = \frac{V + I}{2},$$

поэтому $V = (U^2 + 2U - I)/2$. Равенство $V^*V = I$ перепишется в виде

$$\frac{1}{2}U^2 + \frac{1}{2}U^{*2} = I.$$

Поскольку U^2 – изометрия, элемент $U^{*2} = U^{2*}$ является коизометрией и из [леммы 5](#) имеем $U^2 = U^{*2} = I$. Умножив обе части равенства $U^2 = I$ слева на элемент U^* , получаем $U = U^*$. Следовательно,

$$A^* = \left(\frac{U + I}{2}\right)^* = \frac{U + I}{2} = A$$

и $A \in \mathcal{A}^{\text{pf}}$ в силу [теоремы 1](#). □

Теорема 24. Пусть $\mathcal{A}$ – унитарная C^* -алгебра. Если $A \in \mathcal{A}^{\text{sem}}$ и $A = A^n$ для некоторого $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, то A является нормальным элементом, и $A \in \mathcal{A}^{\text{pf}}$ при $n = 2$.

Доказательство. Пусть $A = (U + I)/2$ – представление [теоремы 1](#) с $U \in \mathcal{A}^{\text{iso}}$. Покажем, что $U \in \mathcal{A}^{\text{n}}$. Из равенства $A^n = A$ по формуле бинома Ньютона имеем

$$U^n + \binom{1}{n}U^{n-1} + \binom{2}{n}U^{n-2} + \dots + \binom{1}{n}U + I = 2^{n-1}(U + I), \quad (9)$$

где $\binom{k}{n}$ – число сочетаний из n по k . Умножив обе части равенства (9) слева на элемент $U^{*n} = U^{n*}$, получаем

$$I + \binom{1}{n}U^* + \binom{2}{n}U^{*2} + \dots + \binom{1}{n}(U^*)^{n-1} + U^{*n} = 2^{n-1}((U^*)^{n-1} + U^{*n}).$$

Переходя здесь к сопряженным элементам, с учетом равенства $X^{**} = X$, $X \in \mathcal{A}$, имеем

$$I + \binom{1}{n}U + \binom{2}{n}U^2 + \dots + \binom{1}{n}U^{n-1} + U^n = 2^{n-1}(U^{n-1} + U^n).$$

Отсюда и из (9) вытекает равенство

$$U + I = U^{n-1} + U^n. \quad (10)$$

Если $n = 2$, то из (10) получаем $U^2 = I$; умножив обе части последнего равенства слева на элемент U^* , имеем $U = U^*$. Поэтому $A = (U + I)/2 = (U^* + I)/2 = A^*$ и $A \in \mathcal{A}^{\text{pf}}$ в силу [теоремы 1](#). Если $n > 2$, то умножив обе части равенства (10) слева на элемент UU^* , получаем

$$U + UU^* = U^{n-1} + U^n,$$

что вместе с (10) дает $U + I = U + UU^*$. Следовательно, $UU^* = I (= U^*U)$ и U является унитарным элементом; в частности, U нормален. Поскольку $A = (U + I)/2$, элемент A также нормален. $\square$

Список литературы

- [1] J. Gross, G. Trenkler, S.-O. Troschke, *On semi-orthogonality and a special class of matrices*, Linear Algebra Appl. **289** (1–3), 169–182 (1999).
URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0024379597100027>
- [2] А.М. Бикчентаев, *Полуортогональные проекторы в гильбертовом пространстве*, в кн.: На рубеже веков. Научн.-исследов. ин-т матем. и механ. им. Н.Г. Чеботарева Казанск. гос. ун-та. 1998–2002 гг., с. 108–114, Изд-во Казан. матем. о-во, Казань, 2003.
- [3] А.М. Бикчентаев, *Идеальные F -нормы на C^* -алгебрах. II*, Изв. вузов. Матем. (3), 90–96 (2019).
DOI: <https://doi.org/10.26907/0021-3446-2019-3-90-95>
- [4] A.M. Bikchentaev, *Rearrangements of tripotents and differences of isometries in semifinite von Neumann algebras*, Lobachevskii J. Math. **40** (10), 1450–1454 (2019).
DOI: <https://doi.org/10.1134/S1995080219100068>
- [5] P.R. Halmos, *A Hilbert space problem book*, Graduate Texts in Math., vol. **19**. Springer, New York, 1982.
DOI: <https://doi.org/10.1007/978-1-4684-9330-6>
- [6] B. Blackadar, *Operator algebras, theory of C^* -algebras and von Neumann algebras*, Encyclopaedia of mathematical sciences **122**. Operator algebras and non-commutative geometry **3**. Springer-Verlag, Berlin, 2006.
DOI: <https://doi.org/10.1007/3-540-28517-2>
- [7] Дж. Мерфи, *C^* -алгебры и теория операторов*, Факториал, М., 1997.
- [8] M. Takesaki, *Theory of operator algebras. I*, Encyclopaedia of mathematical sciences **124**. Operator algebras and non-commutative geometry **5**. Springer-Verlag, Berlin, 2002.
URL: <https://link.springer.com/book/9783540422488>
- [9] U. Haagerup, R.V. Kadison, G.K. Pedersen, *Means of unitary operators, revisited*, Math. Scand. **100** (2), 193–197 (2007).
DOI: <https://doi.org/10.7146/math.scand.a-15021>
- [10] Р. Хорн, Ч. Джонсон, *Матричный анализ*, Мир, М., 1989.
- [11] А.М. Бикчентаев, *Об операторно монотонных и операторно выпуклых функциях*, Изв. вузов. Матем. (5), 70–74 (2016).
URL: <https://www.mathnet.ru/rus/ivm9113>

- [12] Н. Radjavi, P. Rosenthal, *Invariant subspaces*, Second edition. Dover Publications, Inc., Mineola, NY, 2003.

Айрат Мидхатович Бикчентаев

Казанский (Приволжский) федеральный университет,
Научно-образовательный математический центр ПФО,
ул. Кремлевская, д. 18, г. Казань, 420008, Россия,
e-mail: Airat.Bikchentaev@kpfu.ru

Semi-orthogonal projections in unital C^* -algebras

A.M. Bikchentaev

Abstract. Let $\mathcal{A}^{\text{sem}} = \{A \in \mathcal{A} : \operatorname{Re} A = A^*A\}$ be the set of all semi-orthogonal projections of the unital C^* -algebra $\mathcal{A}$, I be the identity of $\mathcal{A}$. The formula $U = 2A - I$ ($A \in \mathcal{A}^{\text{sem}}$) defines a bijection between the set $\mathcal{A}^{\text{sem}}$ and the set of all isometries from $\mathcal{A}$. For any natural number $n \geq 2$, there exists a non-commutative polynomial of degree n that yields a semi-orthogonal projection when substituted for an arbitrary set $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{A}^{\text{sem}}$. Each element $A \in \mathcal{A}^{\text{sem}}$ is hyponormal and lies in the unit ball of the C^* -algebra $\mathcal{A}$. If $A \in \mathcal{A}^{\text{sem}}$, then A^2 is hyponormal. If $A, A^2 \in \mathcal{A}^{\text{sem}}$, then A is a projection. If $A \in \mathcal{A}^{\text{sem}}$ and $A = A^n$ for some $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, then A is a normal element, and A is a projection for $n = 2$.

Keywords: Hilbert space, linear operator, semi-orthogonal projection, isometry, C^* -algebra.

DOI: 10.26907/2949-3919.2025.2.4-18

References

- [1] J. Gross, G. Trenkler, S.-O. Troschke, *On semi-orthogonality and a special class of matrices*, Linear Algebra Appl. **289** (1–3), 169–182 (1999).
URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0024379597100027>
- [2] A.M. Bikchentaev, *Semi-orthogonal projectors in a Hilbert space*, in: At the turn of the 20th–21st centuries, 108–114, Kazanskoe Matematicheskoe Obshchestvo, Kazan', 2003 [in Russian].
- [3] A.M. Bikchentaev, *Ideal F -norms on C^* -algebras. II*, Russian Math. (Iz. VUZ) **63** (3), 78–82 (2019).
DOI: <https://doi.org/10.3103/S1066369X19030071>
- [4] A.M. Bikchentaev, *Rearrangements of tripotents and differences of isometries in semifinite von Neumann algebras*, Lobachevskii J. Math. **40** (10), 1450–1454 (2019).
DOI: <https://doi.org/10.1134/S1995080219100068>
- [5] P.R. Halmos, *A Hilbert space problem book*, Graduate Texts in Math., vol. **19**. Springer, New York, 1982.
DOI: <https://doi.org/10.1007/978-1-4684-9330-6>

Acknowledgements. The work is performed under the development program of Volga Region Mathematical Center (agreement no. 075-02-2025-1725/1).

- [6] B.Blackadar, *Operator algebras, theory of C^* -algebras and von Neumann algebras*, Encyclopaedia of mathematical sciences **122**. Operator algebras and non-commutative geometry **3**. Springer-Verlag, Berlin, 2006.
DOI: <https://doi.org/10.1007/3-540-28517-2>
- [7] G.J. Murphy, *C^* -algebras and operator theory*. Academic Press, Inc., Boston, MA, 1990.
- [8] M. Takesaki, *Theory of operator algebras*. I, Encyclopaedia of mathematical sciences **124**. Operator algebras and non-commutative geometry **5**. Springer-Verlag, Berlin, 2002.
URL: <https://link.springer.com/book/9783540422488>
- [9] U. Haagerup, R.V. Kadison, G.K. Pedersen, *Means of unitary operators, revisited*, Math. Scand. **100** (2), 193–197 (2007).
DOI: <https://doi.org/10.7146/math.scand.a-15021>
- [10] R.A. Horn, C.R. Johnson, *Matrix analysis*. Second edition. Cambridge University Press, Cambridge, 2013.
DOI: <https://doi.org/10.1017/CBO9781139020411>
- [11] A.M. Bikchentaev, *On operator monotone and operator convex functions*, Russian Math. (Iz. VUZ) **60** (5), 61–65 (2016).
DOI: <https://doi.org/10.3103/S1066369X16050054>
- [12] H. Radjavi, P. Rosenthal, *Invariant subspaces*, Second edition. Dover Publications, Inc., Mineola, NY, 2003.

Airat Midkhatovich Bikchentaev

Kazan Federal University,
Volga Region Mathematical Center,
18 Kremlyovskaya str., Kazan 420008, Russia,
e-mail: Airat.Bikchentaev@kpfu.ru