

О негативности отделимых нумераций полей конечной характеристики

Н.Х. Касымов, Н.Р. Каримова, И.А. Ходжамуратова

Аннотация. Установлено, что эффективно невырожденная нумерация любого поля конечной характеристики является негативной.

Ключевые слова: отделимая нумерация поля, эффективно порожденная топология, негативность и позитивность, непрерывность.

DOI: 10.26907/2949-3919.2025.2.19-31

Введение

Следуя Ю.Л. Ершову [1] дадим определение нумерованной универсальной алгебры эффективной сигнатуры $\sigma = \langle =, f_0^{m_0}, f_1^{m_1}, \dots \rangle$ (где m_i – число аргументов функции, в которую интерпретируется функциональный символ $f_i^{m_i}$ и отображение $h : n \mapsto m_n$ вычислимо).

Определение 1. Алгоритмическим представлением (или нумерацией) универсальной алгебры $\mathfrak{A} = \langle A; g_0, g_1, \dots \rangle$ сигнатуры σ называется всякое отображение $\nu : \omega \rightarrow A$ множества натуральных чисел ω на основное множество A алгебры $\mathfrak{A}$, для которого выполнено следующее условие:

существует двухместная вычисляемая функция G такая, что для любого $n \in \omega$, любых $y_1, \dots, y_{m_n}$ имеет место равенство

$$g_n(\nu y_1, \dots, \nu y_{m_n}) = \nu G(n, c^{m_n}(y_1, \dots, y_{m_n})),$$

где c^{m_n} – канторовская функция нумерации всех упорядоченных последовательностей натуральных чисел длины m_n , т. е. $c^2(x, y) = [(x+y)^2 + 3x + y]/2$, $c^3(x_1, x_2, x_3) = c^2(c^2(x_1, x_2), x_3)$ и $c^{n+1}(x_1, \dots, x_{n+1}) = c^n(c^2(x_1, x_2), \dots, x_{n+1})$.

Другими словами, по ν -номерам элементов из A и номеру операции g_n можно эффективно найти некоторый ν -номер результата применения этой операции к данным элементам.

Благодарности. Работа выполнена в рамках реализации Программы развития Научно-образовательного математического центра Приволжского федерального округа (соглашение № 075-02-2025-1725/1).

Если $\nu : \omega \longrightarrow A$ – нумерация алгебры $\mathfrak{A}$, то пара $(\mathfrak{A}, \nu)$ называется нумерованной алгеброй. Отметим, что всякая не более чем счетная алгебра эффективной сигнатуры имеет нумерацию (см. [1]).

Ядром алгоритмического представления ν нумерованной алгебры $(\mathfrak{A}, \nu)$ будем называть эквивалентность $\{\langle x, y \rangle \mid \nu x = \nu y\}$. Если ν – представление, то его ядро будем обозначать через $\ker(\nu)$. Нумерация называется вычислимой (положительной, отрицательной), если ее ядро вычислимо (вычислимо перечислимо, коперечислимо).

Для фиксированной системы классической является проблема изучения различных ее алгоритмических представлений и соотношений между ними (см. работу [2] С.С. Гончарова и Ю.Л. Ершова), в частности, проблема существования хороших представлений (в первую очередь – вычисляемых) и их числа (в том числе единственности, с точностью до вычислимого изоморфизма).

С другой стороны, в ряде задач разумно фиксировать ядро представления и изучать общие свойства систем, обладающих представлениями с данным ядром. Этот подход представляется целесообразным с точки зрения теории алгоритмических представлений систем в целом ряде задач, в том числе в теоретической информатике (см. обзоры [3, 4]).

Близким к данному направлению является исследование алгоритмических свойств эквивалентностей на множестве натуральных чисел, которому в настоящее время уделяется большое внимание. Библиографию по этим вопросам можно найти в списках литературы к работам [5, 6]. К этой же проблематике тесно примыкают вопросы строения универсальных алгебр, представимых над эквивалентностями.

В сложных самоорганизующихся системах, по-видимому, важное значение имеет проблема распознавания. Если система задана своим алгоритмическим представлением, то с математической точки зрения это означает, что любая пара различных элементов отделяется алгоритмически определяемыми окрестностями. Важнейшими типами отделимых нумераций алгебр являются эффективно отделимые, т. е. такие, для которых существуют вычисляемые (в смысле [7]) семейства отделяющих вычислимо перечислимых множеств. Основания теории отделимо нумерованных множеств и связи между отделимостью и эффективной отделимостью были введены, развиты и исследованы Ю.Л. Ершовым (см. [7]).

Находясь в рамках парадигмы о существовании у нумерованной алгебры эффективной системы алгоритмически порождаемых окрестностей, достаточных для распознавания отделимости любой пары ее элементов, нужно отметить, что именно исследовавшееся Ю.Л. Ершовым в [7] наиболее общее понятие отделимой нумерации в случае нумераций универсальных алгебр можно трактовать как одно из математических уточнений понятия сложной развивающейся системы, интенционально заданной семейством представляющих вычисляемых функций вместе с ядрами гомоморфизмов (нумераций) и допускающей эффективное распознавание различия составляющих ее элементов путем отделения их подходящими алгоритмически определяемыми окрестностями.

Слово *эквивалентность* означает отношение эквивалентности на множестве натуральных чисел ω . Если η – эквивалентность, то множество $\alpha \subseteq \omega$ называется η -замкнутым,

если α является объединением подходящих η -классов (т. е. $x \in \alpha \wedge x = y \pmod{\eta} \Rightarrow y \in \alpha$).

Эквивалентность η называется вычислимо отделимой (отделимой), если для любых $x \neq y \pmod{\eta}$ существует вычислимо η -замкнутое множество, содержащее x и не содержащее y (существует такое вычислимо перечислимое η -замкнутое множество α , что $x \in \alpha \wedge y \notin \alpha$, либо $x \notin \alpha \wedge y \in \alpha$).

Если η – эквивалентность на ω , то семейство η -замкнутых вычислимых (вычислимо перечислимых) множеств задает базу вычислимой (перечислимой) топологии $\tau(\eta)_C$ (соответственно $\tau(\eta)_{CE}$) на фактор-множестве ω/η .

Пусть (N, ν) – нумерованное множество. Подмножество N_0 множества N называется ν -вычислимым (ν -перечислимым, ν -коперечислимым), если вычислимо (вычислимо перечислимое, коперечислимое) множество $\nu^{-1}N_0$. Если из контекста будет ясно, какая нумерация множества имеется в виду, то его подмножества будем называть просто *вычислимыми* (*перечислимыми*, *коперечислимыми*) без приставки ν . Нумерация ν называется эффективно невырожденной, если топологическое пространство, порожденное вычислимо перечислимыми подмножествами, нетривиально. Это равносильно тому, что для нумерованного множества (N, ν) существует его собственное подмножество N_0 , для которого $\nu^{-1}N_0$ вычислимо перечислимо.

С каждой нумерацией ν однозначно связано ее ядро (нумерационная эквивалентность), т. е. множество $\ker(\nu) = \{\langle x, y \rangle \mid \nu x = \nu y\}$ и говоря о тех или иных свойствах нумерации часто будем подразумевать наличие этих свойств для ядра. Нумерация называется вычислимо отделимой (отделимой), если вычислимо отделимо (отделимо) ее ядро.

Нумерация ν называется эффективно отделимой, если таково ее ядро $\ker(\nu)$, т. е. существует такое вычислимо семейство $\mathfrak{S}$ вычислимо перечислимых $\ker(\nu)$ -замкнутых множеств, что для любых $x, y \in \omega$ если $\nu x \neq \nu y$, то найдется $S \in \mathfrak{S}$ такое, что $\nu x \in \nu S \wedge \nu y \notin \nu S$, либо $\nu x \notin \nu S \wedge \nu y \in \nu S$ ([7]).

Таким образом, если отделимость обеспечивает T_0 -отделимость пространства, порожденного ν -перечислимыми подмножествами, то эффективная отделимость гарантирует существование вычислимой нумерации для подходящего семейства отделяющих множеств.

Если (A, μ) , (B, ν) – две нумерованные алгебры, то гомоморфизм $\varphi : A \rightarrow B$ называется морфизмом, если он эффективен на номерах, т. е. существует такая вычислимая функция f , что коммутативна диаграмма $\varphi\mu = \nu f$, что совершенно естественно с интенсиональной точки зрения. Поэтому все рассматриваемые нами гомоморфизмы являются морфизмами.

Важнейшими в рамках структурной теории вычислимо отделимых (отделимых) алгоритмических представлений универсальных алгебр являются негативные и эффективно отделимые алгебры, так как имеет место

Теорема 2. *Алгоритмическое представление универсальной алгебры вычислимо отделимо (отделимо) тогда и только тогда, когда она аппроксимируется негативными алгебрами (эффективно отделимыми алгебрами).*

Доказательства утверждений [теоремы 2](#) представлены в [3, 8].

Из этой теоремы непосредственно вытекают следующие факты:

Следствие 3. *Всякая вычислимо отделимая нумерация подпрямо неразложимой универсальной алгебры является негативной.*

Следствие 4. *Всякая вычислимо отделимая нумерация универсальной алгебры с артиновой решеткой конгруэнций является негативной.*

Следствие 5. *Всякая отделимая нумерация подпрямо неразложимой универсальной алгебры является эффективно отделимой.*

Следствие 6. *Всякая отделимая нумерация универсальной алгебры с артиновой решеткой конгруэнций является эффективно отделимой.*

В частности, эти следствия имеют место для конгруэнц-простых универсальных алгебр, в том числе для полей. При этом, для вычислимо отделимых нумераций подпрямо неразложимых универсальных алгебр наличие нетривиального вычислимого подмножества обеспечивает негативность этой нумерации (см. [3]), а для отделимых нумераций, аналогично, наличие нетривиального вычислимо перечислимого подмножества обеспечивает эффективную отделимость нумерации (см. [8]). Важно отметить существование подпрямо неразложимых алгебр с артиновыми решетками конгруэнций, которые обладают эффективно отделимыми, но не негативными нумерациями (см. [9]). Простейшей алгеброй такого рода является унарная алгебра предшествования P ($P = \langle \omega; p \rangle$, где $p(n+1) = n$ и $p(0) = 0$), которая обладает отделимой (а значит и эффективно отделимой), но не негативной (и, очевидно, тем более не позитивной) нумерацией.

В рамках этого направления отметим следующий принципиальный открытый вопрос:

существует ли отделимая конгруэнц-простая универсальная алгебра, которая лежит в классе $E \setminus (\Sigma_1^0 \cup \Pi_1^0)$ (где E – класс эффективно отделимых эквивалентностей)?

Фундаментальность понятия поля в математике не требует обоснования, в связи с чем актуальным представляется изучение естественных алгоритмических представлений полей, в том числе их эффективно отделимых нумераций и нахождение условий, при которых эффективно отделимые нумерации являются негативными. Отметим, что негативные нумерации универсальных алгебр являются важнейшими среди среди равномерно вычислимо отделимых нумераций, которые присутствуют в любой m -степени (см. [10]). В настоящей работе мы показываем, что всякая эффективно невырожденная нумерация любого поля конечной характеристики является негативной.

Далее, если не оговорено противное, под топологическим пространством на фактормножестве ω/η по эквивалентности η будем подразумевать перечислимо порожденное пространство $\tau(\eta)_{CE}$. Случай $\tau(\eta)_C$ -пространства, порожденного η -замкнутыми вычислимыми подмножествами будет оговариваться отдельно. Очевидно, что топология $\tau(\eta)_{CE}$ не

слабее топологии $\tau(\eta)_C$, так как вычислимость есть частный случай вычислимой перечислимости.

1. Топологические пространства над вычислимо отделимыми эквивалентностями

Сформулируем самые сильные свойства отделимости для вычислимо отделимых нумераций (см. [11]):

Предложение 7. *Для произвольной эквивалентности η на ω следующие условия равносильны:*

- 1) η является вычислимо отделимой эквивалентностью;
- 2) $\tau(\eta)_C$ -пространство совершенно нормально и вполне несвязно.

Прежде всего отметим следующий важный факт, касающийся вычислимо отделимо нумерованных универсальных алгебр.

Предложение 8. *Операции любой нумерованной алгебры непрерывны в вычислимо отделимо порожденном пространстве.*

Доказательство. Пусть $(\omega/\eta; \mathfrak{F})$ – произвольная η -алгебра (т. е. алгебра, представимая над η). Заметим, что мы не предполагаем вычислимости семейства $\mathfrak{F}$ вычислимых функций, для которых η является конгруэнцией. Если f – вычислимая функция одного переменного, то утверждение предложения очевидно, так как прообраз вычислимого множества является таковым же. Допустим, что $f \in \mathfrak{F}$ и число аргументов n операции f не меньше двух. Зафиксируем набор $\bar{x} = \langle x_1, \dots, x_n \rangle$. Нужно показать, что для любого η -замкнутого вычислимого множества Y , содержащего число $f(x_1, \dots, x_n)$, существуют такие η -замкнутые вычислимые множества $X_1 \ni x_1, \dots, X_n \ni x_n$, что $f(X_1, \dots, X_n) \subseteq Y$. Возьмем полный f -прообраз X множества Y , т. е. $X = \{\bar{u} \mid f(\bar{u}) \in Y\}$. Очевидно, что X – непустое вычислимое множество кортежей длины n , если вычислимо множество Y . Зафиксируем любую геделевскую нумерацию всех наборов из ω^n .

Будем строить множества $X_1, \dots, X_n$ и $Z \subseteq X$ по шагам:

Шаг 0. $X_1^0 = \{x_1\}, \dots, X_n^0 = \{x_n\}$ и $Z^0 = \emptyset$.

Шаг $s + 1$. Пусть $\bar{z} = \langle z_1, \dots, z_n \rangle$ – первый кортеж из X , не принадлежащий множеству $X_1^s \times \dots \times X_n^s \cup Z^s$. Если $(X_1^s \cup \{z_1\}) \times \dots \times (X_n^s \cup \{z_n\}) \subseteq X$, то полагаем $X_1^{s+1} = X_1^s \cup \{z_1\}, \dots, X_n^{s+1} = X_n^s \cup \{z_n\}$ и $Z^{s+1} = Z^s$ (при этом, может оказаться, что $X_i^{s+1} = X_i^s \cup \{z_i\}$ для некоторых $1 \leq i \leq n$), в противном случае $X_1^{s+1} = X_1^s, \dots, X_n^{s+1} = X_n^s$ и $Z^{s+1} = Z^s \cup \{\bar{z}\}$. Конец шага $s + 1$.

Теперь определим $X_k = \bigcup_{s \in \omega} X_k^s$, $1 \leq k \leq n$ и $Z = \bigcup_{s \in \omega} Z^s$.

По построению, вычислимое множество X распадается на две перечислимые дизъюнктные части – $X_1 \times \dots \times X_n$ и Z , откуда следует вычислимость прямого произведения. Заметим, что оба эти множества η -замкнуты, при этом, если какой-то набор $\langle z_1, \dots, z_n \rangle$

на некотором шаге распределяется по X_k , $1 \leq k \leq n$ (т.е. $z_1 \in X_1, \dots, z_n \in X_n$), то все наборы, η -эквивалентные этому набору, появляющиеся на более поздних шагах, распределяются таким же образом. Корректность конструкции легко показать индукцией по шагам построения. $\square$

Важно отметить, что предъявленное выше доказательство [предложения 7](#) не проходит для вычислимо перечислимо порожденных топологий, в связи с чем возникает открытый в настоящее время вопрос: *можно ли в формулировке [предложения 7](#) заменить вычислимо отдельно порожденные пространства на отдельно порожденные пространства?*

Подчеркнем, что эффективная отделимость эквивалентности означает, что она лежит в классе Π_2^0 арифметической иерархии, хотя не имеет в ней четкой “координатизации”, так как существуют как эффективно отделимые эквивалентности вне класса Δ_2^0 , так и Δ_2^0 -эквивалентности, не являющиеся эффективно отделимыми, однако как Σ_1^0 -эквивалентности, так и Π_1^0 -эквивалентности лежат в классе эффективно отделимых эквивалентностей (см. [7]).

2. Эффективно невырожденные представления полей

Исходя из вышесказанного отображение $\nu : \omega \longrightarrow F$ на основное множество не более чем счетного поля $\langle F; +, \bullet, \rangle$ называется алгоритмическим представлением этого поля, если существуют две такие вычислимые функции f, g , что $\nu x + \nu y = \nu f(x, y)$ и $\nu x \bullet \nu y = \nu g(x, y)$ для всех $x, y \in \omega$.

Если η – эквивалентность на ω , то поле F называется представимым над η (или η -полем), если существует вычислимая алгебра кольцевой сигнатуры $R = \langle \omega; +, \bullet \rangle$ с вычислимыми операциями $+, \bullet$, для которых η является конгруэнцией (т.е. имеют место следующие импликации: $x_0 = y_0 \pmod{\eta} \wedge x_1 = y_1 \pmod{\eta} \Rightarrow x_0 + x_1 = y_0 + y_1 \pmod{\eta}$ и $x_0 = y_0 \pmod{\eta} \wedge x_1 = y_1 \pmod{\eta} \Rightarrow x_0 \bullet x_1 = y_0 \bullet y_1 \pmod{\eta}$) такая, что F изоморфно фактор-алгебре $\langle \omega/\eta; +, \bullet \rangle$ вычислимой алгебры $R = \langle \omega; +, \bullet \rangle$ по конгруэнции η .

Заметим, что алгебра R может и не быть кольцом. В частности, в R могут не выполняться законы ассоциативности и коммутативности. Важно лишь то, что существует гомоморфизм из R на F , являющийся морфизмом, который и является алгоритмическим представлением ν , где $\nu(x) = \{x\}/\eta$ – естественный проектирующий гомоморфизм.

Определение 9. Алгоритмическое представление ν универсальной алгебры A называется эффективно невырожденным, если существует нетривиальное ν -перечислимое подмножество $A_0 \subseteq A$.

Напомним, что унарная термальная операция с фиксированными элементами алгебры в качестве параметров называется трансляцией.

Определение 10. Универсальная алгебра называется трансляционно полной, если всякая пара различных ее элементов переводится в любую другую пару различных элементов подходящей трансляцией.

Заметим, что любая трансляционно полная универсальная алгебра является конгруэнц-простой. Обратное неверно.

Определение 11. Универсальная алгебра называется трансляционно предполной, если существует такая пара ее различных элементов, в которую переводится любая пара различных элементов подходящей трансляцией.

Очевидно, что всякая трансляционно предполная универсальная алгебра подпрямона неразложима. Обратное неверно.

Предложение 12. *Всякое T_2 -отделимое представление трансляционно предполной алгебры является негативным.*

Доказательство. Пусть (A, ν) – T_2 -отделимо нумерованная трансляционно предполная алгебра и пара различных элементов $\langle a, b \rangle$ этой алгебры трансляционно достижима из любой пары различных элементов. Тогда эта пара содержится и в любой ее ненулевой конгруэнции (т. е. A подпрямона неразложима). Зафиксируем ν -номера этих элементов, скажем $\nu t = a, \nu n = b$. По условию существуют такие $\ker(\nu)$ -замкнутые перечислимые непесекающиеся множества α и β , что $t \in \alpha$ и $n \in \beta$.

Через T_ν обозначим перечислимое множество всех трансляций алгебры A , заданных соответствующими вычислимыми представлениями операций этой алгебры в нумерации ν . Тогда $x \neq y \Leftrightarrow \exists t \in T_\nu (t(x) \in \alpha \wedge t(y) \in \beta)$. $\square$

В [9] показано, что имеет место

Предложение 13. *Существует трансляционно предполная алгебра, обладающая таким T_1 -отделимым нехаусдорфовым эффективно отделимым алгоритмическим представлением ν , что операции этой алгебры непрерывны в перечислимой $\tau(\ker(\nu))_{SE}$ -топологии.*

Теорема 14. *Всякое тело является трансляционно полным.*

Доказательство. Пусть даны два произвольных различных элемента a, b тела F . Зафиксируем произвольную пару различных элементов c и d . Покажем, что существует такая трансляция $\lambda x[t(x)]$ (символ λ служит для стандартного λ -обозначения) тела F , которая переводит элемент a в c , а элемент b в d . Для этого определим следующее множество трансляций $T(a)$, имеющих очень простой вид линейных многочленов: $T(a) = \{\lambda x[f(x - a) + c] \mid f \in F\}$. Очевидно, что всякая трансляция $\lambda x[t(x)]$ из $T(a)$ переводит элемент a в c . В то же время, для любого $b \neq a$ найдется единственная трансляция $\lambda x[f_0(x - a) + c] \in T(a)$, которая переводит элемент b в d . Ясно, что этой трансляцией будет $\lambda x[f_0(x - a) + c]$ при $f_0 = (d - c)(b - a)^{-1}$. $\square$

Следствие 15. *Всякое поле является трансляционно полным.*

3. Эффективно отделимые нумерации полей в кольцевой сигнатуре с аддитивным обращением

В следующем утверждении мы рассматриваем поле в сигнатуре $\langle +, \bullet, - \rangle$, где “ $+$, $\bullet$ ” – операции сложения и умножения соответственно, а “ $-$ ” – одноместная операция взятия аддитивно обратного элемента.

Теорема 16. *Всякое эффективно невырожденное алгоритмическое представление любого тела в кольцевой сигнатуре с аддитивным обращением является негативным.*

Доказательство. Пусть $\langle F; +, \bullet, - \rangle$ – тело, ν – его эффективно невырожденная нумерация и $\oplus, \otimes, \ominus$ – вычислимые операции представляющие сложение, умножение и аддитивное обращение соответственно в нумерации ν . По условию существует нетривиальное ν -перечислимое подмножество $F_0 \subset F$. Положим $\alpha = \nu^{-1}F_0$. Зафиксируем элементы тела $c \in \nu(\omega \setminus \alpha)$ и $d \in \nu\alpha$.

Пусть теперь даны два произвольных различных элемента a, b тела F . По [теореме 14](#) существует такая трансляция t_b из $T(a) = \{\lambda x[f \bullet (x + (-a)) + c] \mid f \in F\}$, которая переводит элемент a в c при любом $f \in F$ и $t_b(b) = d$ при $f = (d + (-c)) \bullet (b + (-a))^{-1}$. Таким образом, для двух элементов a, b , заданных своими ν -номерами m, n соответственно в эффективно невырожденном представлении ν тела F с фиксированной перечислимой ν -окрестностью F_0 элемента d , не содержащей c , будем вычислять ν -номера для всех трансляций вида $\nu(k) \bullet (\nu(n) + (-\nu(m))) + \nu(l)$, где l – некоторый фиксированный ν -номер элемента c , пытаясь обнаружить их во множестве α , заставляя k пробегать множество всех ν -номеров элементов тела F . Если действительно $\nu m \neq \nu n$, то этот факт гарантированно подтвердится через конечное число шагов перечислением в α числа $k_0 \otimes (n \oplus (\ominus m)) \oplus l$, где k_0 – некоторый ν -номер элемента $(d + (-c)) \bullet (b + (-a))^{-1}$. Поэтому, для указанной выше трансляции t_b имеет место $t_b(a) = c \notin \nu\alpha$ при всех νk_0 и $t_b(b) = d \in \nu\alpha$ для $\nu k_0 = (d + (-c)) \bullet (b + (-a))^{-1}$, т. е. нумерация ν негативна. Формально,

$$\nu m \neq \nu n \iff \exists k [k \otimes (n \oplus (\ominus m)) \oplus l \in \alpha].$$

□

Следствие 17. *Всякое эффективно невырожденное представление любого поля в сигнатуре с операцией аддитивного обращения является негативным.*

Следствие 18. *Операции любого поля в сигнатуре с аддитивным обращением непрерывны относительно всякой эффективно невырожденной топологии над его алгоритмическим представлением.*

Отметим, что максимальное различие в топологиях $\tau(\eta)_C$ и $\tau(\eta)_{CE}$ наблюдается, например, для совершенных эквивалентностей (т. е. позитивных, не обладающих нетривиальными замкнутыми относительно этой эквивалентности вычислимыми подмножествами, [7]). При этом $\tau(\eta)_C$ -пространство тривиально, а $\tau(\eta)_{CE}$ – дискретно.

Для негативных эквивалентностей ситуация диаметрально противоположная, как показывает

Предложение 19 ([12]). *Если ν – негативная нумерация, то топологии $\tau(\eta)_C$ и $\tau(\eta)_{CE}$ совпадают.*

4. Эффективно отделимые нумерации полей конечной характеристики в кольцевой сигнатуре

Теорема 20. *Всякая эффективно невырожденная нумерация любого тела конечной характеристики является негативной.*

Доказательство. Идея основана на методе из теоремы 16, однако конечность характеристики позволяет обойтись без апеллирования к функции аддитивного обращения.

Пусть $\langle F; +, \bullet \rangle$ – тело конечной характеристики p , ν – его эффективно невырожденная нумерация и $\oplus, \otimes$ – вычислимые операции представляющие сложения и умножения соответственно в нумерации ν . Выше отмечалось, что всякая эффективно невырожденная нумерация любой конгруэнц-простой универсальной алгебры является эффективно отделимой (см. [8]). Поэтому существует нетривиальное ν -перечислимое подмножество $F_0 \subset F$. Пусть $\alpha = \nu^{-1}F_0$, т. е. α вычислимо перечислимо. Зафиксируем элементы $c \notin \nu\alpha$ и $d \in \nu\alpha$. Пусть теперь даны два произвольных различных элемента a, b тела F . Рассмотрим множество трансляций $T(a) = \{\lambda x[f \bullet ((p-1)a + x) + c] \mid f \in F\}$ тела F , каждая из которых переводит элемент a в c при любом $f \in F$ и $t(b) = d$ при $b \neq a$ для некоторого элемента $f \in F$. При этом, если $b \neq a$, то существует единственная трансляция $t_b \in T(a)$, которая переводит элемент b в элемент d . Таковой, как легко проверить, будет трансляция $\lambda x[f_0((p-1)a + x)]$ при $f_0 = (d - c) \bullet ((p-1)a + b)^{-1}$.

Заметим, что мы используем лишь факт существования элемента $d - c$ и среди вычислимых трансляций, представляющих трансляции поля F в нумерации ν , нет трансляций, в записи которых присутствует вычислимая функция, представляющая аддитивно обратную для поля F (вообще говоря, среди функций, представляющих на натуральных числах аддитивно обратную операцию поля, может и не быть вычислимых).

Пусть $\nu(l) = c$. Если $b \neq a$, то элемент $(p-1)a + b$ отличен от нулевого элемента поля F , а значит для него есть мультипликативно обратный элемент. В этом легко убедиться, так как из $(p-1)a + b = 0$ необходимо следует, что $b = a$ и потому для любых различных a, b элемент $(p-1)a + b$ является мультипликативно обратимым. Таким образом, для двух элементов a, b , заданных своими ν -номерами m, n соответственно в эффективно невырожденном представлении ν тела F с фиксированной перечислимой ν -окрестностью F_0 элемента d , не содержащей c , будем вычислять ν -номера для всех трансляций вида $\nu(k) \bullet ((p-1)\nu(m) + \nu(n)) + \nu(l)$, пытаясь обнаружить результат в множестве α , заставляя k пробегать множество всех ν -номеров элементов тела F . Если действительно $\nu m \neq \nu n$, то этот факт гарантированно подтвердится через конечное число шагов перечислением

в α числа $k_0 \otimes ((p-1)t \oplus n) \oplus l$, где k_0 – некоторый ν -номер элемента $d \bullet ((p-1)a + b)^{-1}$. Поэтому, для указанной выше трансляции $t_b \in T(a)$ имеет место $t_b(a) = c \notin \nu\alpha$ при всех $k_0 \in \omega$ и $t_b(b) = d \in \nu\alpha$ для $\nu k_0 = (d - c) \bullet ((p-1)a + b)^{-1}$, что и означает негативность ν , так как

$$\nu t \neq \nu n \iff \exists k [k \otimes ((p-1)t \oplus n) \oplus l \in \alpha]. \quad \square$$

Следствие 21. *Нумерация поля конечной характеристики негативна тогда и только тогда, когда она эффективно невырожденная.*

В связи с теоремой 20 и следствием 21 возникает принципиальный вопрос:

всякая ли эффективно невырожденная нумерация любого тела (произвольной характеристики) является негативной (в кольцевой сигнатуре без аддитивного обращения)?

Список литературы

- [1] Ю.Л. Ершов, *Проблемы разрешимости и конструктивные модели*, Наука, М., 1980.
- [2] С.С. Гончаров, Ю.Л. Ершов, *Конструктивные модели*, Научная книга, Новосибирск, 1999.
- [3] Н.Х. Касымов, *Рекурсивно отделимые нумерованные алгебры*, УМН **51** (3), 145–176 (1996).
DOI: <https://doi.org/10.4213/rm971>
- [4] Н.Х. Касымов, Р.Н. Дадажанов, Ф.Н. Ибрагимов, *Отделимые алгоритмические представления классических систем и их приложения*, СМФН **67** (4), 707–754 (2021).
URL: <https://doi.org/10.22363/2413-3639-2021-67-4-707-754>
- [5] U. Andrews, S. Lempp, J.S. Miller, K.M. Ng, L.S. Mauro, A. Sorbi, *Universal computably enumerable equivalence relations*, J. Symb. Logic **79** (1), 60–88 (2014).
DOI: <http://doi.org/10.1017/jsl.2013.8>
- [6] U. Andrews, D.F. Belin, L. San Mauro, *On the structure of computable reducibility on equivalence relations of natural numbers*, J. Symb. Logic **88** (3), 1038–1063 (2023).
DOI: <https://doi.org/10.1017/jsl.2022.28>
- [7] Ю.Л. Ершов, *Теория нумераций*, Наука, М., 1977.
- [8] Н.Х. Касымов, *О гомоморфизмах на эффективно отделимые алгебры*, Сиб. матем. журн. **57** (1), 47–66 (2016).
DOI: <https://doi.org/10.17377/smzh.2016.57.105>
- [9] Н.Х. Касымов, А.С. Морозов, И.А. Ходжамуратова, *О T_1 -отделимых нумерациях подпрямых неразложимых алгебр*, Алгебра и логика **60** (4), 400–424 (2021).
DOI: <https://doi.org/10.33048/alglog.2021.60.402>
- [10] Н.Х. Касымов, *Нумерованные алгебры с равномерно рекурсивно отделимыми классами*, Сиб. матем. журн. **34** (5), 85–102 (1993).

URL: <https://www.mathnet.ru/rus/smj836>

- [11] Н.Х. Касымов, *Аксиомы делимости и разбиения натурального ряда*, Сиб. матем. журн. **34** (3), 81–85 (1993).

URL: <https://www.mathnet.ru/rus/smj1654>

- [12] Н.Х. Касымов, Ф.Н. Ибрагимов, *Отделимые нумерации тел и эффективная вложенность в них колец*, Сиб. матем. журн. **60** (1), 82–94 (2019).

DOI: <https://doi.org/10.33048/smzh.2019.60.107>

Надимулла Хабибуллаевич Касымов

Национальный университет Узбекистана им. Мирзо Улугбека,
ул. Университетская, д. 4, г. Ташкент, 100174, Республика Узбекистан,
e-mail: nadim59@mail.ru

Нодира Рузимат кизи Каримова

Национальный университет Узбекистана им. Мирзо Улугбека,
ул. Университетская, д. 4, г. Ташкент, 100174, Республика Узбекистан,
E-mail: nodirakarimova@bk.ru

Индира Азатовна Ходжамуратова

Ташкентский международный университет финансового управления и технологий,
ул. Малая Кольцевая, д. 6А, г. Ташкент, 100121, Республика Узбекистан,
E-mail: indiraazatovna@mail.ru

Negativity of effectively separable numberings of fields the finite characteristic

N.Kh. Kasymov, N.R. Karimova, I.A. Khodzhamuratova

Abstract. We establish that the effectively non-degenerate numbering of any field of the finite characteristic is negative.

Keywords: separable numbering of field, effectively generated topology, negativity and positivity, continuity.

DOI: 10.26907/2949-3919.2025.2.19-31

References

- [1] Yu.L. Ershov, *Decidability problems and constructive models*, Nauka, M., 1980 [in Russian].
- [2] S.S. Goncharov, Yu.L. Ershov, *Constructive models*, Siberian School of Algebra and Logic. Consultants Bureau, New York, 2000.
- [3] N.Kh. Kasymov, *Recursively separable enumerated algebras*, Russian Math. Surveys **51** (3), 509–538 (1996).
DOI: <https://doi.org/10.1070/RM1996v051n03ABEH002913>
- [4] N.Kh. Kasymov, R.N. Dadazhanov, F.N. Ibragimov, *Separable algorithmic representations of classical systems and their applications*, J. Math. Sci. **278** (3), 476–519 (2024).
DOI: <https://doi.org/10.1007/s10958-024-06934-3>
- [5] U. Andrews, S. Lempp, J.S. Miller, K.M. Ng, L.S. Mauro, A. Sorbi, *Universal computably enumerable equivalence relations*, J. Symb. Logic **79** (1), 60–88 (2014).
DOI: <http://doi.org/10.1017/jsl.2013.8>
- [6] U. Andrews, D.F. Belin, L. San Mauro, *On the structure of computable reducibility on equivalence relations of natural numbers*, J. Symb. Logic **88** (3), 1038–1063 (2023).
DOI: <https://doi.org/10.1017/jsl.2022.28>
- [7] Yu.L. Ershov, *Theory of numberings*, Nauka, M., 1977 [in Russian].
- [8] N.Kh. Kasymov, *Homomorphisms onto effectively separable algebras*, Siberian Math. J. **57** (1), 36–50 (2016).
DOI: <https://doi.org/10.1134/S0037446616010055>

Acknowledgements. The work is performed under the development program of Volga Region Mathematical Center (agreement no. 075-02-2025-1725/1).

- [9] N.Kh. Kasymov, A.S. Morozov, I.A. Khodzhamuratova, *T_1 -separable numberings of sub-directly indecomposable algebras*, Algebra and Logic **60** (4), 263–278 (2021).
URL: <https://doi.org/10.1007/s10469-021-09651-x>
- [10] N.Kh. Kasymov, *Enumerated algebras with uniformly recursive-separable classes*, Siberian Math. J. **34** (5), 869–882 (1993).
DOI: <https://doi.org/10.1007/BF00971403>
- [11] N.Kh. Kasymov, *Separation axioms and partitions of the set of natural numbers*, Siberian Math. J. **34** (3), 468–471 (1993).
DOI: <https://doi.org/10.1007/BF00971221>
- [12] N.Kh. Kasymov, F.N. Ibragimov, *Separable enumerations of division rings and effective embeddability of rings therein*, Siberian Math. J. **60** (1), 62–70 (2019).
DOI: <https://doi.org/10.1134/S0037446619010075>

Nadimulla Khabibullaevich Kasymov

National University of Uzbekistan,
4 Universitetskaya str., Tashkent 100174, Republic of Uzbekistan,
e-mail: nadim59@mail.ru

Nodira Ruzimat kizi Karimova

National Universitet of Uzbekistan,
4 Universitetskaya str., Tashkent 100174, Republic of Uzbekistan,
E-mail: nodirakarimova@bk.ru

Indira Azatovna Khodzhamuratova

Tashkent International University of Financial Management and Technology,
6A Kichik Xalqa Yuli str., Tashkent 100121, Republic of Uzbekistan,
E-mail: indiraaazatovna@mail.ru