Том 3, Выпуск 2
Стр. 58–84 (2025)

УДК 510.643
MSC 03B45

Влияние аксиомы связности на сложность модальной логики

К.М. Мясников, А.В. Кудинов

Аннотация. Доказывается, что для слабо транзитивных логик с универсальной модальностью, проверку выполнимости формулы для которых можно произвести в PSPACE, добавление аксиомы связности не увеличивает сложность этой проверки, причем строится явный алгоритм, который решает эту задачу.

Ключевые слова: модальная логика, алгоритмическая сложность, аксиома связности, универсальная модальность, слабо транзитивные логики, задача выполнимости.

DOI: 10.26907/2949-3919.2025.2.58-84

Введение

В этой работе изучается вопрос алгоритмической сложности модальных логик с универсальной модальностью. Модальная логика широко используется как формализм для описания свойств различных структур, таких как графы, порядки, топологические пространства и динамические системы. При этом вопрос выполнимости формул во многих случаях остается разрешимым, что выгодно отличает модальную логику от логики предикатов, в которой гораздо чаще встречаются неразрешимость задачи выполнимости. Но базовый язык модальной логики, состоящий из одной модальности, которую чаще всего обозначают $\Box$, обладает ограниченной выразительной силой. В литературе встречаются различные способы усилить выразительную силу модального языка, сохраняющие при этом разрешимость. Одним из таких способов является обогащение языка универсальной модальностью (см. [1]). В частности, при таком обогащении оказывается возможным выразить свойство связности, не выразимой в базовом языке. Аксиома связности была предложена в работе В. Шехтмана [2]. В этой работе В. Шехтман доказал полноту логики S4.UC относительно класса связных шкал Крипке, класса связных топологических пространств и, более того, относительно произвольного связного плотного в себе сепарабельного метрического пространства. Топология – это только одна область применения модальной логики и аксиомы связности. Модальные логики связных структур могут представлять интерес и в других областях математики и теоретической информатики.

Поступила: 02.07.2024. Принята: 11.02.2025. Опубликована: 16.07.2025.

Под сложностью проблемы выполнимости некоторой модальной логики L в данной работе понимается сложность следующей массовой задачи: *по данной формуле A определить, выполнима ли формула A на некоторой шкале логики* L. При условии полноты логики L, эта задача является двойственной к задаче выводимости в логике, так как формула A выводима в L тогда и только тогда, когда формула $\neg A$ невыполнима на шкале логики L. Одной из первых работ о сложности проблемы выполнимости для модальных логик с универсальной модальностью является работа Е. Гемаспаандры [3]. В ней автор показывает, что существуют такие разрешимые модальные логики, добавление универсальной модальности к которым приводит к неразрешимости. Но в случае, когда исходная логика транзитивна, например $\mathsf{S4}$, добавление универсальной модальности не приводит к увеличению сложности. В частности, логики $\mathsf{S4.U}$, $\mathsf{K4.U}$ и $\mathsf{D4.U}$ являются PSPACE-полными.

В данной работе мы сосредоточим внимание на алгоритмической сложности проблемы выполнимости модальных формул в языке с универсальной модальностью на классе связных шкал Крипке. Шкала Крипке называется *связной*, если она слабо связна как ориентированный граф.

Мы будем рассматривать расширения логики

$$\mathsf{wK4} = \mathsf{K} + \Box p \wedge p \to \Box\Box p.$$

Эта логика полна относительно класса слабо транзитивных шкал, т. е. шкал, в которых рефлексивное замыкание отношения R транзитивно.

Для модальной логики L минимальное расширение этой логики универсальной модальностью мы будем обозначать $\mathsf{L.U}$. Аксиоматизация логики $\mathsf{L.U}$ приведена в [1]. Формула

$$AC = \boxed{u}((\Box p \wedge p) \vee (\Box\neg p \wedge \neg p)) \to (\boxed{u}p \vee \boxed{u}\neg p)$$

выражает свойство связности шкалы. Логику, расширенную этой аксиомой, мы будем обозначать $\mathsf{L.UC} = \mathsf{L.U} + AC$.

Основным результатом работы является то, что если задача выполнимости в классе конечных шкал некоторой слабо транзитивной логики L лежит в PSPACE, то и задача выполнимости в классе конечных шкал логики $\mathsf{L.UC}$ лежит в PSPACE.

В частности, из этого следует, что логики $\mathsf{wK4.UC}$, $\mathsf{K4.UC}$, $\mathsf{D4.UC}$ и $\mathsf{S4.UC}$ являются PSPACE полными. Принадлежность к PSPACE для $\mathsf{wK4}$ была доказана в [4].

1. Определения и известные результаты

1.1. Синтаксис

Определение 1. Пусть $\mathcal{I}$ – множество, которое понимается как множество индексов модальных операторов, $\mathcal{P}$ – множество переменных. Множество $\mathcal{L}(\mathcal{I})$ модальных формул определяется рекурсивно:

- если $p \in \mathcal{P}$, то $p \in \mathcal{L}(\mathcal{I})$;

- если $\phi, \psi \in \mathcal{L}(\mathcal{I})$, то $(\phi \wedge \psi), \neg\phi \in \mathcal{L}(\mathcal{I})$;
- если $\phi \in \mathcal{L}(\mathcal{I})$, $a \in \mathcal{I}$, то $[a]\phi \in \mathcal{L}(\mathcal{I})$.

Зачастую $\mathcal{I}$ будет опускаться.

Также под модальным оператором $\langle a \rangle$ будем понимать $\neg[a]\neg$, а формулы $\phi \vee \psi$ и $\phi \to \psi$ выражаются через конъюнкцию и отрицание. Мы также будем опускать скобки, если их можно восстановить, пользуясь ассоциативностью и стандартным приоритетом операций.

В данной работе будут использоваться операторы $\Box$, $\Diamond$, $\boxed{u}$, $\Diamond_{u}$, $\boxed{*}$, $\Diamond_{*}$, через $\mathcal{L}$ будем обозначать язык с операторами $\Box$, $\Diamond$; через $\mathcal{L}_{\boxed{u}}$ – с операторами $\Box$, $\Diamond$, $\boxed{u}$, $\Diamond_{u}$; через $\mathcal{L}_{\boxed{*}}$ – с операторами $\Box$, $\Diamond$, $\boxed{*}$, $\Diamond_{*}$; через $\mathcal{L}_{\boxed{u}\boxed{*}}$ – с операторами $\Box$, $\Diamond$, $\boxed{u}$, $\Diamond_{u}$, $\boxed{*}$, $\Diamond_{*}$.

Определение 2. *Длиной* (*или размером*) *формулы* ϕ будем называть количество ее подформул (различные вхождения одной подформулы считаем столько раз, сколько этих вхождений), и обозначать через $|\phi|$.

Определение 3. *$\mathcal{I}$-модальной логикой* будем называть множество формул, являющееся подмножеством $\mathcal{L}(\mathcal{I})$, содержащее все тавтологии логики высказываний, аксиомы $[a](p \to q) \to ([a]p \to [a]q)$, где $a \in \mathcal{I}$, p и q – переменные, и замкнутое относительно правил вывода Sub $\left(\dfrac{\phi(p)}{\phi(\psi)}\right)$, Modus Ponens $\left(\dfrac{\phi, \phi \to \psi}{\psi}\right)$ и Nec $\left(\dfrac{\phi}{[a]\phi}\right)$, где $a \in \mathcal{I}$.

Минимальную модальную логику с одним модальным оператором будем обозначать K. Через $\mathsf{L} + A$, где L – модальная логика, A – множество формул, будем обозначать наименьшую логику, содержащую все формулы из $\mathsf{L} \cup A$. Если ϕ – формула, будем обозначать $\mathsf{L} + \{\phi\}$ через $\mathsf{L} + \phi$.

1.2. Семантика. В данной работе мы будем работать в основном с классами конечных шкал. Следствия основных результатов работы, касающиеся сложности проблем выводимости в модальных логиках, мы обсудим в разделе 6.

Определение 4. Будем называть *$\mathcal{I}$-шкалой Крипке* пару $F = \langle W, \{R_a\}_{a \in \mathcal{I}} \rangle$, где W – непустое множество, элементы которого называются мирами, и для каждого $a \in \mathcal{I}$ $R_a \subseteq W \times W$ – отношение достижимости. Множество W называется *носителем* F.

Замечание 5. В этой работе чаще всего будут встречаться конечные шкалы, поэтому, если не сказано иное, будем считать, что шкалы конечны.

Определение 6. *Моделью* называется пара $M = \langle F, V \rangle$, где $F = \langle W, \{R_a\}_{a \in \mathcal{I}} \rangle$ – шкала Крипке, $V : \mathcal{P} \to 2^W$ – оценка, причем $V(p)$ понимается как множество миров, в которых p истинна. Отношение истинности ($\models$) формул в мирах данной модели определяется по индукции:

- если $p \in \mathcal{P}$ – переменная, то $M, w \models p \iff w \in V(p)$;
- $M, w \models \phi \wedge \psi \iff M, w \models \phi$ и $M, w \models \psi$;
- $M, w \models \neg\phi \iff M, w \not\models \phi$;

- $M, w \models [a]\phi \iff \forall w' \; (wR_a w' \Rightarrow M, w' \models \phi)$.

Замечание 7. Из определения модальности $\langle a \rangle$ следует, что

$$M, w \models \langle a \rangle \phi \iff \exists w' \; (wR_a w' \wedge M, w' \models \phi).$$

Будем говорить, что формула ϕ *верна в модели* M ($M \models \phi$), если $\forall w \; M, w \models \phi$, и *выполнима в модели* M, если $\exists w \; M, w \models \phi$.

Будем говорить, что формула ϕ *общезначима в шкале* F ($F \models \phi$), если $\forall V \; \langle F, V \rangle \models \phi$, и *выполнима в шкале* F, если существует V, такая что ϕ выполнена в $\langle F, V \rangle$.

Будем говорить, что формула ϕ *общезначима в классе шкал* $\mathcal{F}$, если $\forall F \in \mathcal{F} \; (F \models \phi)$, и *выполнима в классе шкал* $\mathcal{F}$, если существует $F \in \mathcal{F}$, такая, что ϕ выполнима в F.

Определение 8. *Сужением шкалы* $F = \langle W, \{R_a\}_{a \in \mathcal{I}} \rangle$ *на множество* $W' \subseteq W$ будем называть шкалу $\langle W', \{R_a \cap (W' \times W')\}_{a \in \mathcal{I}} \rangle$ и обозначать через $F|_{W'}$.

Определение 9. *Сужение модели* $M = \langle F, V \rangle$ *на множество* $W' \subseteq W$*, где* W *– множество миров* F будем называть модель $\langle F|_{W'}, V' \rangle$, где $V'(p) = V(p) \cap W'$ для всех $p \in \mathcal{P}$, и обозначать через $M|_{W'}$.

1.3. Универсальный и транзитивный операторы, связность. Здесь и далее считаем, что в рассматриваемых нами шкалах есть одно отношение R, которое мы будем называть базовым, и соответствующий модальный оператор $\Box$. Также шкалы могут содержать порожденные R универсальное и/или рефлексивно-транзитивное замыкание (определены ниже). Наличие этих отношений в каждом случае будет обозначено явно. Свойства шкалы, такие как слабая связность, транзитивность, рефлексивность и другие будут относиться только к отношению R.

Определение 10. Пусть $F = \langle W, R \rangle$ – шкала Крипке. Будем писать $F_{\boxed{u}} = \langle W, \{R, R_u\} \rangle$, где $R_u = W \times W$. Оператор, соответствующий отношению R_u, будем обозначать $\boxed{u}$.

Определение 11. Пусть $F = \langle W, R \rangle$ – шкала Крипке. Будем писать $F_{\boxed{*}} = \langle W, \{R, R^*\} \rangle$, где

$$wR^*w' \iff \exists (w_1, w_2, \ldots, w_n) \; w_1 = w \wedge w_n = w' \wedge w_i R w_{i+1}, \quad (n \geqslant 1),$$

т. е. R^* – рефлексивно-транзитивное замыкание R. Модальность, соответствующую отношению R^*, будем обозначать $\boxed{*}$.

Также обозначим $F_{\boxed{u}\boxed{*}} = \langle W, \{R, R_u, R^*\} \rangle$. Если $\mathcal{F}$ – класс шкал, то $\mathcal{F}_{\boxed{u}} = \{F_{\boxed{u}} |_F \in \mathcal{F}\}$, аналогично для $\mathcal{F}_{\boxed{*}}, \mathcal{F}_{\boxed{u}\boxed{*}}$.

Определение 12. Шкала $F = \langle W, \{R_a\}_{a \in \mathcal{I}} \rangle$ называется *слабо связной по отношениям* $\{R_b\}_{b \in \mathcal{J}}$ (где $\mathcal{J} \subseteq \mathcal{I}$), если для любых w, w' существуют $w_1, w_2, \ldots, w_n$ такие, что $w = w_1$, $w' = w_n$, а также для всех i от 1 до $n-1$ выполнено $w_i R_b w_{i+1}$, или $w_{i+1} R_b w_i$ для некоторого $b \in \mathcal{J}$ (причем для разных i могут подойти разные $b \in \mathcal{J}$). Такое отношение между вершинами w, w' назовем *отношением слабой достижимости*.

Лемма 13. *Отношение слабой достижимости является отношением эквивалентности.*

Доказательство оставим читателю.

Если $\mathcal{C}$ – класс шкал с базовым отношением R и, возможно, с порожденными универсальным и/или транзитивным отношениями, то определим

$$\mathcal{C}^{AC} = \{F \in \mathcal{C} \mid F \text{ – слабо связно по } R\}.$$

Определение 14. Введем отношение эквивалентности на шкале F с базовым отношением R: $w \sim_R w' \iff (wR^*w' \wedge w'R^*w)$. Классы эквивалентности по этому отношению будем называть *сгустками*. Проще говоря, сгустки – компоненты сильной связности ориентированного графа с ребрами R.

Определение 15. Сгусток F' в шкале F называется *максимальным*, если для любых w', w из того, что $w' \in F'$ и $w'Rw$, следует, что $w \in F'$.

Определение 16. Подшкала F' шкалы $F = \langle W, R\rangle$ называется *порожденной*, если

$$\forall w' \in F' \ \forall w \in F \ (w'R^*w \Rightarrow w \in F').$$

Определение 17. Подшкала F' шкалы F называется *корневой* с корнем w, если

$$\forall w' \in F \ (wR^*w' \iff w' \in F').$$

Замечание 18. Корневая подшкала всегда является порожденной.

Определение 19. Шкала F называется *слабо транзитивной*, если для всех $x, y, z \in F$

$$xRy \wedge yRz \wedge x \neq z \Rightarrow xRz.$$

1.4. Связь логик и классов шкал

Определение 20. Пусть $\mathcal{C}$ – класс шкал Крипке. *Логикой* класса $\mathcal{C}$ называют множество формул

$$Log(\mathcal{C}) = \{A \mid \forall F \in \mathcal{C} \ (F \models A)\}.$$

Определение 21. Пусть L – $\mathcal{I}$-логика. *Классом $\mathcal{I}$-шкал, порожденных* L, называют

$$Fr(\mathsf{L}) = \{F = \langle W, \{R_a\}_{a\in\mathcal{I}}\rangle \mid \forall \phi \in \mathsf{L} \ F \models \phi\}.$$

Классом конечных $\mathcal{I}$-шкал называют

$$Fr_{fin}(\mathsf{L}) = \{F \mid F \in Fr(L) \text{ и } F \text{ – конечна}\}.$$

Определение 22. Функция $f : W \to U$ называется *p-морфизмом* шкалы $F = \langle W, \{R_a\}_{a \in \mathcal{I}} \rangle$ на шкалу $G = \langle U, \{S_a\}_{a \in \mathcal{I}} \rangle$, если

1) f является сюръекцией;
2) $xR_ay \Rightarrow f(x)S_af(y)$ (монотонность);
3) $f(x)S_au \Rightarrow \exists y\ f(y) = u$ и xR_ay (поднятие).

Обозначение: $f : F \twoheadrightarrow G$.

Следующая теорема хорошо известна (см. [5]).

Теорема 23 (о p-морфизме). *Пусть $F \twoheadrightarrow G$. Тогда $Log(F) \subseteq Log(G)$.*

Определение 24. Шкалы $F_1 = \langle W_1, \{R^1_a\}_{a \in \mathcal{I}} \rangle$ и $F_2 = \langle W_2, \{R^2_a\}_{a \in \mathcal{I}} \rangle$ называются *изоморфными* (обозначается $F_1 \cong F_2$), если существует биекция $f : W_1 \to W_2$ со свойством

$$\forall a \in \mathcal{I}\ wR^1_aw' \iff f(w)R^2_af(w').$$

Определение 25. Логика L называется *полной по Крипке относительно класса $\mathcal{F}$*, если $Log(\mathcal{F}) = \mathsf{L}$.

Если логика L полна по Крипке относительно класса $\mathcal{F}$, то $\phi \in \mathsf{L}$ равносильно общезначимости ϕ во всех шкалах класса $\mathcal{F}$, что в свою очередь равносильно невыполнимости $\neg\phi$ в классе $\mathcal{F}$. Таким образом, задачи выполнимости и общезначимости – двойственные.

1.5. Логики и аксиомы. В этой работе нас будут интересовать слабо транзитивные шкалы и логики классов таких шкал. Наименьшей такой логикой является $\mathsf{wK4} = \mathsf{K} + (p \wedge \Box p) \to \Box\Box p$. Полнота этой логики относительно класса всех слабо транзитивных шкал была доказана в [6]. Финитная аппроксимируемость $\mathsf{wK4}$ была доказана в [7].

Среди таких логик есть широко известные логики, такие как логика класса всех транзитивных шкал $\mathsf{K4} = \mathsf{K} + \Box p \to \Box\Box p$ и логика класса всех рефлексивно-транзитивных шкал $\mathsf{S4} = \mathsf{K4} + \Box p \to p$. Соответствующие теоремы о полноте можно найти в [8].

Теорема 26. *Аксиома AC (см. введение) общезначима в шкале $F = \langle W, \{R, R_u\} \rangle$ тогда и только тогда, когда шкала F слабо связна по отношению R.*

Доказательство импликации слева направо. Докажем контрапозицию, т. е. если F не слабо связна, то AC не общезначима. Из того, что F не слабо связна следует, что $W = W_1 \sqcup W_2$, где $W_1, W_2 \neq \varnothing$, W_1, W_2 – объединения классов эквивалентности отношения слабой достижимости. Рассмотрим оценку V на шкале F, такую, что $V(p) = W_1$. Тогда в модели $M = \langle F, V \rangle$ опровергается аксиома AC, так как в любом мире ее посылка верна, а заключение – нет.

Доказательство импликации справа налево. Предположим, что AC не общезначима. Следовательно, существует оценка V шкалы F (обозначим $M = \langle F, V \rangle$) и мир $w_0 \in F$ такие, что:

1) $M, w_0 \models \boxed{u}((\Box p \wedge p) \vee (\Box\neg p \wedge \neg p))$, т. е. $\forall w\ M, w \models (\Box p \wedge p) \vee (\Box\neg p \wedge \neg p)$;
2) $M, w_0 \not\models \boxed{u} p \vee \boxed{u}\neg p$, т. е. $\exists u_1\ M, u_1 \models p$ и $\exists u_2\ M, u_2 \models \neg p$.

Из пункта 1 следует, что если wRw', то выполнено $\Box p \wedge p$ или $\Box\neg p \wedge \neg p$, следовательно, выполнена равносильность $M, w \models p \iff M, w' \models p$.

Но, по определению слабой связности, найдется путь между u_1 и u_2. Используя наблюдение выше, индукцией по длине пути легко доказать, что $M, u_1 \models p \iff M, u_2 \models p$, что противоречит пункту 2. $\Box$

1.6. Сложностные классы. Формальные определения понятий теории сложностей можно найти в [9], здесь мы дадим лишь неформальные определения сложностных классов PSPACE и $\mathsf{NPSPACE}$.

Определение 27. Множество формул Ω лежит в классе PSPACE, если существует машина Тьюринга M_T и многочлен $p(n)$ такие, что:

- $M_T(\phi) = \begin{cases} 1, & \text{если } \phi \in \Omega, \\ 0 & \text{иначе;} \end{cases}$
- на входе длины n машина M_T использует не более $p(n)$ клеток на ленте.

Определение 28. Множество формул Ω лежит в классе $\mathsf{NPSPACE}$, если существует алгоритм (машина Тьюринга) M_T и многочлен $p(n)$, такие, что:

- если $w \in \Omega$, то $\exists s : |s| < p(|w|) \wedge M_T(w, s) = 1$;
- если $w \notin \Omega$, то $\forall s : |s| < p(|w|) \Rightarrow M_T(w, s) = 0$;
- на входе длины n машина M_T использует только полиномиальное от n количество клеток на ленте.

Доказательство следующей теоремы также можно найти в [9].

Теорема 29. $\mathsf{PSPACE} = \mathsf{NPSPACE}$.

Если $\mathcal{C}$ – класс шкал, то через $\mathcal{C} - sat$ будем обозначать множество выполнимых в этом классе формул:

$$\{\phi \mid \phi \text{ выполнима в } \mathcal{C}\}.$$

2. Вытянутые шкалы

В этом разделе будет строиться преобразование шкалы, сохраняющее выполнимость данной формулы и общезначимость всех формул, приводящее ее в удобный вид. Построение и доказательство во многом повторяет доказательство [2, теорема 14], но с несколькими важными изменениями, благодаря которым оно будет работать не только для $\mathsf{S4}$-шкал, но и для произвольной шкалы.

Также в этом разделе будем считать, что шкалы унимодальны, т. е. имеют лишь одно отношение R. Будем отождествлять шкалу с ориентированным графом (имеется ребро из x в y, если xRy).

Определение 30. Шкалу $F = \langle W, R\rangle$ назовем *вытянутой*, если найдутся такие

$$F_1 = F|_{W_1}, \quad F_2 = F|_{W_2}, \ldots, \; F_n = F|_{W_n},$$
$$\widehat{F}_1 = F|_{\widehat{W}_1}, \quad \widehat{F}_2 = F|_{\widehat{W}_2}, \ldots, \; \widehat{F}_m = F|_{\widehat{W}_m},$$
$$1 = i_0 < i_1 < i_2 < \cdots < i_{m-1} < i_m = n,$$

удовлетворяющие условиям:

1) $W_1 \cup W_2 \cup \ldots \cup W_n = W$;
2) все F_i – корневые порожденные подшкалы;
3) все $\widehat{F}_i$ – непересекающиеся максимальные сгустки;
4) если $i \neq j$, то $F_i \cap F_j = \begin{cases} \widehat{F}_k, & \text{если } i_{k-1} \leqslant i \leqslant i_k \text{ и } i_{k-1} \leqslant j \leqslant i_k, \\ \varnothing & \text{иначе.} \end{cases}$

Подшкалы $F_{i_1}, F_{i_2}, \ldots, F_{i_{m-1}}$ будем называть *основными*, все остальные F_i – *висячими*, $\widehat{F}_i$ – *связующими сгустками.*

Неформально говоря, вытянутая шкала – это шкала, составленная из последовательности корневых порожденных подшкал, причем соседние сцеплены по сгустку и никаких других пересечений не имеющие. Пример изображен на рис. 1.

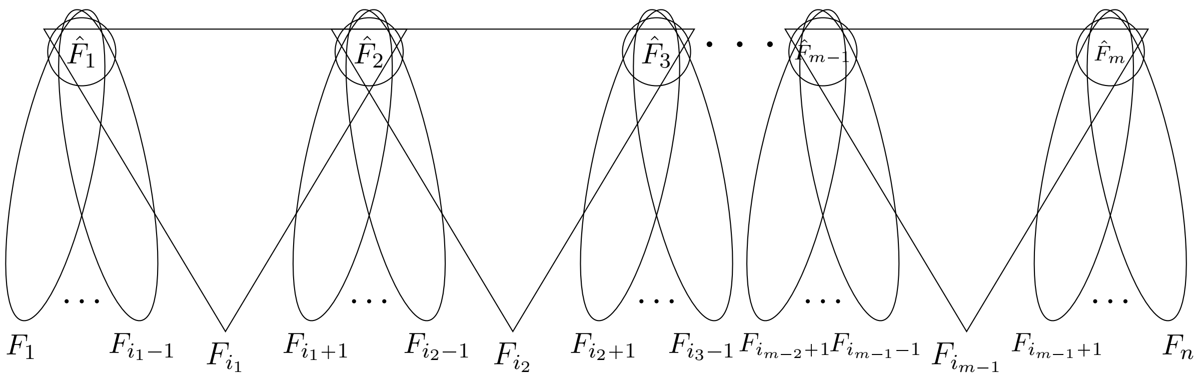

Рис. 1. Вытянутая шкала

Теорема 31. *Пусть* L *– логика,* $\mathcal{F} = Fr_{fin}(\mathsf{L})$, $F \in \mathcal{F}_{\boxed{u}}$, $F = \langle W, \{R, R_u\}\rangle$ *– слабо связная по* R. *Тогда найдется вытянутая шкала* $F' \in \mathcal{F}_{\boxed{u}}$ *такая, что существует p-морфизм* $f : F' \twoheadrightarrow F$.

Доказательство. В этом доказательстве будем считать, что в шкале есть лишь одно отношение R. В полученной шкале тривиальным образом определим отношение $R'_u = W \times W$, и легко заметить, что свойства p-морфизма для универсальных отношений выполнены.

Порожденную отношением R шкалу с корнем w обозначим $F{\uparrow}w = F|_{\{w' \mid wR^*w'\}}$. Рассмотрим ориентированный граф $sk(F)$ без петель, вершинами которого являются сгустки шкалы F, ребро ведет из одной вершины в другую, если из одной из вершин первого сгустка ведет ребро в одну из вершин второго сгустка. Заметим, что полученный граф является ациклическим. Сгусток будем являться максимальным (см. определение 15), если у соответствующей ему вершины графа $sk(F)$ нет исходящих ребер, и будем называть минимальным – если нет входящих. Из ацикличности и конечности графа $sk(F)$ следует, что из каждого сгустка (и, соответственно, из каждого мира шкалы F) достижим некоторый максимальный сгусток, а также каждый максимальный сгусток достижим из некоторого минимального сгустка.

Выделим по представителю из каждого минимального сгустка, и выпишем их в последовательность $w_1, w_2, \dots, w_n$ так, чтобы все представители встречались хотя бы по одному разу и чтобы $F{\uparrow}w_i \cap F{\uparrow}w_{i+1} \neq \varnothing$. Это возможно, так как из слабой связности шкалы F между любыми двумя ее мирами есть путь, состоящий из прямых и обратных ребер (ребер отношений R и R^{-1}). Обозначим через W_i носитель шкалы $F{\uparrow}w_i$. Тогда $F{\uparrow}w_i = F|_{W_i}$.

Заметим, что $F{\uparrow}w$ замкнуто относительно R, т. е. если $w' \in F{\uparrow}w$ и $w'Rw''$, то $w'' \in F{\uparrow}w$. Тогда, так как $F{\uparrow}w_i \cap F{\uparrow}w_{i+1} \neq \varnothing$, то $F{\uparrow}w_i \cap F{\uparrow}w_{i+1}$ содержит некоторый максимальный сгусток. Для каждого i, такого что $1 \leqslant i \leqslant n-1$, зафиксируем некоторый такой максимальный сгусток. Пусть его миры образуют множество $\widetilde{W}_i$ и $\widetilde{F}_i = F|_{\widetilde{W}_i}$. Таким образом, $\widetilde{F}_i \subseteq F{\uparrow}w_i$ и $\widetilde{F}_i \subseteq F{\uparrow}w_{i+1}$.

Рассмотрим множество $T = \{(w,i) \mid w \in W_i\}$. Определим на T отношение эквивалентности $\sim$ как наименьшее отношение, при котором выполняются следующие условия

$$(w,i) \sim (w,i+1), \text{ если } w \in \widetilde{W}_i.$$

Таким образом, при $i < j$

$$(w,i) \sim (w,j) \iff w \in \widetilde{W}_i \text{ и } \widetilde{W}_i = \widetilde{W}_{i+1} = \ldots = \widetilde{W}_{j-1}.$$

Мирами шкалы F' будут классы эквивалентности ${}^{T}\!/_{\sim}$. Класс эквивалентности, порожденный (w,i), будем обозначать $[w,i]$. Отношение R' определим так: $[w,i]R'[w',i]$, если wRw'. Определим функцию f: $f([w,i]) = w$. Это определение корректно, так как если $(w^1,i) \sim (w^2,j)$, то $w^1 = w^2$. Эта функция является p-морфизмом, так как $[w,i]R'[w',i] \iff wRw'$, а также является сюръективной, благодаря выбору $w_1, w_2, \dots, w_n$ как порождающего набора.

Предположим, что $F' \notin \mathcal{F}$. Из этого следует, что не все формулы из L общезначимы в F, т. е. найдутся $\phi \in \mathsf{L}$, а также мир $[w^0, i^0]$ такие, что $F', [w^0, i^0] \not\models \phi$. Но из условия $[w,i]R'[w',i] \iff wRw'$, а также из определения $\sim$ следует, что $F'{\uparrow}[w,i] \cong F{\uparrow}w$. Таким образом, $F, w^0 \not\models \phi$, что противоречит условию $F \in \mathcal{F}$.

Покажем, что F' – вытянутая. Для этого построим множества миров $W'_1, W'_2, \dots, W'_n$,

$\widehat{W}'_1, \widehat{W}'_2, \ldots, \widehat{W}'_m$, а также индексы $i_1, i_2, \ldots, i_{m-1}$, задающие основные подшкалы из определения 30.

Число n определено выше как размер последовательности $w_1, w_2, \ldots, w_n$. Пусть $I = \{i \mid \widetilde{W}_{i-1} \neq \widetilde{W}_i\}$. Тогда определим $i_1, i_2, \ldots, i_{m-1}$ как набор элементов множества I, выписанных в возрастающем порядке, соответственно $m = |I|+1$. Доопределим i_0 и i_m как 1 и n соответственно. Это можно сделать, поскольку $1, n \notin I$, так как $\widetilde{W}_0$ и $\widetilde{W}_n$ не определены.

Определим W'_i как носитель $F'{\uparrow}[w_i, i]$, $\widehat{W}'_j$ – как носитель $F'{\uparrow}[\widetilde{w}_{i_{j-1}}, i_{j-1}]$, где $\widetilde{w}_i$ – некоторый представитель $\widetilde{W}_i$. В силу максимальности $\widetilde{W}_{i_{j-1}}$, имеем равенство $\widehat{W}'_j = \widetilde{W}_{i_{j-1}}$. Проверим определение вытянутой шкалы:

Пункт 1 верен, так как $w_1, w_2, \ldots, w_n$ – порождающий набор.

Пункт 2 верен по построению W'_i.

Пункт 3. $\widehat{W}'_j$ являются сгустками, так как $\widehat{W}'_j \cong \widetilde{W}_{i_{j-1}}$ по построению.

Также, по построению последовательности $\{i_j\}$, $[\widetilde{w}_{i_j}, i_j] \nsim [\widetilde{w}_{i_k}, i_k]$ при $j \neq k$, следовательно, $\widehat{W}'_j \cap \widehat{W}'_k = \varnothing$.

Пункт 4. Из определения последовательности $\{i_j\}_{j=1}^{m-1}$ следует, что

$$\widetilde{W}_{i_j} = \widetilde{W}_{i_j+1} = \ldots = \widetilde{W}_{i_{j+1}-1}.$$

Также, так как $i_j, i_{j+1} \in I$, то $\widetilde{W}_{i_j-1} \neq \widetilde{W}_{i_j}$, а также $\widetilde{W}_{i_{j+1}-1} \neq \widetilde{W}_{i_{j+1}}$. Следовательно, если $w \in \widetilde{W}_{i_j}$, то

$$(w, i_{j-1}) \nsim (w, i_j) \sim (w, i_j + 1) \sim \ldots \sim (w, i_{j+1} - 1) \sim (w, i_{j+1}) \nsim (w, i_{j+1} + 1).$$

Таким образом, нетривиальными классами эквивалентности по отношению $\sim$ в точности являются множества

$$\left\{(w, k) \mid w \in \widetilde{W}_{i_j}, i_j \leqslant k \leqslant i_{j+1}\right\}.$$

Из этого следует, что при $i \neq j$ пересечением F'_i и F'_j могут являться либо $\widehat{W}'_k$, либо $\varnothing$, причем первое выполнено в том и только том случае, когда $i, j \in [i_{k-1}; i_k]$, что в точности соответствует третьему пункту определения. $\square$

Замечание 32. Пусть $c \in \mathbb{N}$. Тогда теорему 31 можно усилить, наложив такое ограничение на шкалу F': для любой ее подшкалы F'_i найдется не менее c подшкал F'_j среди $F'_1, F'_2, \ldots, F'_n$ таких, что $f(F'_i) = f(F'_j)$.

Доказательство. В доказательстве достаточно вместо последовательности $w_1, w_2, \ldots w_n$ рассмотреть последовательность

$$\underbrace{w_1, w_1, \ldots, w_1}_{c\text{ раз}},\ \underbrace{w_2, w_2, \ldots, w_2}_{c\text{ раз}},\ \ldots,\ \underbrace{w_n, w_n, \ldots, w_n}_{c\text{ раз}}.$$

$\square$

3. Проверка наличия подшкалы

Для использования вытянутых подшкал в алгоритме необходимо будет научиться проверять существование модели, удовлетворяющей некоторому свойству (а именно, истинность некоторой формулы) и при этом содержащей в себе определенные подмодели (этими подмоделями будут связующие сгустки). В этом разделе будет решен этот вопрос.

Для начала сведем интересующую нас проблему к проблеме выполнимости формулы в классе $\mathcal{F}_{\boxed{u}\boxed{*}}$.

Лемма 33. *Пусть $\mathcal{F} = Fr_{fin}(\mathsf{L})$, $\widehat{F} \in \mathcal{F}_{\boxed{u}}$ – некоторая шкала, $\widehat{M} = \langle \widehat{F}, \widehat{V} \rangle$, ϕ – формула вида $\eta_1 \wedge \boxed{u}\eta_2 \wedge \boxed{u}\eta_3 \wedge \ldots \wedge \boxed{u}\eta_l$, где формулы $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_l$ не содержат модальность $\boxed{u}$. Тогда существует такая формула ψ, которую можно построить за полиномиальное от длины ϕ и мощности $\widehat{F}$ время, что выполнимость ψ в классе $\mathcal{F}_{\boxed{u}\boxed{*}}$ равносильна одновременному выполнению следующих условий*:

1) $\exists M = \langle F, V \rangle$, *где* $F \in \mathcal{F}_{\boxed{u}}$ *– корневая*;
2) $\exists W' \subseteq F\ M|_{W'} = \widehat{M}$, $F|_{W'}$ *– порожденная подшкала* F;
3) $\exists w \in F\ M, w \models \phi$.

Доказательство. Обозначим $p_1, p_2, \ldots, p_m$ – переменные формулы ϕ, n – размер $\widehat{F}$, а $g, v_1, v_2, \ldots, v_n$ – переменные, не участвующие в ϕ.

Построим формулу, которая выполнима тогда и только тогда, когда в шкале есть порожденная подшкала $\widehat{F}$. Обозначим за $\widehat{w}_1, \widehat{w}_2, \ldots, \widehat{w}_n$ миры $\widehat{F}$. Опишем требование $M|_{W'} = \widehat{M}$ с помощью формулы:

$$\psi_1 = \diamondsuit_{*} g \wedge \boxed{u}(g \to \Box g).$$

Переменная g будет верна в тех мирах, которые образуют порожденную подшкалу $\widehat{F}$.

$$\psi_2 = \boxed{u}(\neg g \to (\neg v_1 \wedge \neg v_2 \wedge \ldots \wedge \neg v_n)) \wedge \boxed{u}(g \to ((v_1 \wedge \neg v_2 \wedge \ldots \wedge \neg v_n) \vee$$
$$\vee (\neg v_1 \wedge v_2 \wedge \neg v_3 \wedge \ldots \wedge \neg v_n) \vee \ldots \vee (\neg v_1 \wedge \neg v_2 \wedge \ldots \wedge \neg v_{n-1} \wedge v_n))) \wedge$$
$$\wedge \diamondsuit_{*} v_1 \wedge \diamondsuit_{*} v_2 \wedge \ldots \wedge \diamondsuit_{*} v_n.$$

Переменные $v_1, v_2, \ldots, v_n$ кодируют миры, соответствующие мирам $\widehat{F}$ с теми же номерами.

$$\psi_3 = \boxed{u} \bigwedge_{i=1}^{n} \left(\bigwedge_{\widehat{w}_i \widehat{R} \widehat{w}_j} (v_i \to \Diamond v_j) \wedge \bigwedge_{\neg \widehat{w}_i \widehat{R} \widehat{w}_j} (v_i \to \Box \neg v_j) \right).$$

Формула ψ_3 описывает ребра графа $\widehat{F}$, гарантируя $F|_{W'} = \widehat{F}$.

$$\psi_4 = \boxed{u} \bigwedge_{i=1}^{n} \left(\bigwedge_{w_i \in \widehat{V}(p_k)} (v_i \to p_k) \wedge \bigwedge_{w_i \notin \widehat{V}(p_k)} (v_i \to \neg p_k) \right).$$

Формула ψ_4 описывает значения переменных $p_1, p_2, \ldots, p_k$ в требуемой подшкале.

Таким образом, формула $\psi_1 \wedge \psi_2 \wedge \psi_3 \wedge \psi_4$ верна в тех и только тех моделях, в которых найдется подмодель $\widehat{M}$ (строго доказано ниже). Тогда искомая формула ψ выглядит следуюшим образом:

$$\psi = \Diamond_{*}\eta_1 \wedge \bigwedge_{i=2}^{l} \boxed{u}\eta_i \wedge \psi_1 \wedge \psi_2 \wedge \psi_3 \wedge \psi_4.$$

Из определения ψ видно, что время ее построения на машине Тьюринга не превышает полинома от входных данных.

Пусть модель M удовлетворяет условиям 1–3 из формулировки леммы. Изменим значениями переменных $g, v_1, v_2, \ldots, v_n$ в модели M. Заметим, что, так как все эти переменные не участвуют в ϕ, то такое изменение не повлияет на условия 1–3.

1) g истинна в мирах W';
2) v_i истинна в i-м мире подшкалы $\widehat{F}$.

Покажем, что в этой измененной модели формула ψ будет истинна в корне шкалы F:

1) ψ_1 истинна, так как $\widehat{F}$ – порожденная подшкала и g истинна в точности на точках шкалы $\widehat{F}$.
2) ψ_2 истинна благодаря выбору оценки для v_i.
3) ψ_3 истинна, так как для $w_i, w_j \in \widehat{W}$ верно, что $M, w_i \models v_i$, и $M, w_i \models \Diamond v_j \Leftrightarrow w_i R w_j$.
4) ψ_4 истинна, так как $M|_{W'} = \widehat{M}$.
5) $\Diamond_{*}\eta_1$ и $\boxed{u}\eta_i$ при $i \geqslant 2$ истинны, так как $\exists w \in F : M, w \models \phi$.

Пусть теперь формула ψ выполнена в мире $\widetilde{w}$ модели $\widetilde{M}' = \langle \widetilde{F}', \widetilde{V}' \rangle$, где $\widetilde{F}' \in \mathcal{F}_{\boxed{u}\boxed{*}}$. Заметим, что из того, что η_i не содержат модальности $\boxed{u}$, следует, что все модальности $\boxed{u}$ в формуле ψ стоят на верхнем уровне и связаны конъюнкцией, поэтому если $\boxed{u}\xi$ – подформула ψ, то $\widetilde{M}', \widetilde{w} \models \boxed{u}\xi$. Таким образом, получаем, что ψ также выполнена в мире $\widetilde{w}$ модели $\widetilde{M}'_{\widetilde{w}*}$ (так же, как и выше, под этим обозначением понимаем сужение на миры, достижимые из $\widetilde{w}$). Обозначим $\widetilde{M} = \widetilde{M}'_{\widetilde{w}*}$, причем $\widetilde{M} = \langle \widetilde{F}, \widetilde{V} \rangle$, $\widetilde{F} = \langle \widetilde{W}, \{\widetilde{R}, \widetilde{R}_u, \widetilde{R}^*\} \rangle$.

Обозначим $\widetilde{W}_i = \{\widetilde{u} \in \widetilde{W} \mid \widetilde{M}, \widetilde{u} \models v_i\}$. Определим

$$\widetilde{W}_F = \bigcup_{i=1}^{n} \widetilde{W}_i, \qquad \widetilde{W}_m = \widetilde{W} \backslash \widetilde{W}_F.$$

Модель $\widetilde{M} = \langle \widetilde{F}, \widetilde{V} \rangle$ обладает следующими свойствами:

1) из истинности формулы ψ_2 следует, что все $\widetilde{W}_i \neq \varnothing$, $\widetilde{W}_i \cap \widetilde{W}_j = \varnothing$ при $i \neq j$, а также $\widetilde{W}_F$ – это в точности множество тех миров, в которых истинна g;
2) из истинности формулы ψ_1 следует, что шкала $\widetilde{F}|_{\widetilde{W}_F}$ является порожденной подшкалой $\widetilde{F}$;
3) по построению формулы ψ_3 для всех i, j выполнено:
   - если $\widehat{w}_i \widehat{R} \widehat{w}_j$, то $\forall \widetilde{u}_i \in \widetilde{W}_i \ \exists \widetilde{u}_j \in \widetilde{W}_j : \ \widetilde{u}_i \widetilde{R} \widetilde{u}_j$,
   - если $\neg \widehat{w}_i \widehat{R} \widehat{w}_j$, то $\forall \widetilde{u}_i \in \widetilde{W}_i \ \forall \widetilde{u}_j \in \widetilde{W}_j : \ \neg \widetilde{u}_i \widetilde{R} \widetilde{u}_j$;
4) если $\widetilde{u}_i \in \widetilde{W}_i$, то $\widetilde{M}, \widetilde{u}_i \models p_k \iff \widehat{M}, \widehat{w}_i \models p_k$.

Построим шкалу F. Множество миров W определим как множество классов эквивалентности $\widetilde{W} \big/ \sim$, где

$$\widetilde{w}_1 \sim \widetilde{w}_2 \iff \widetilde{w}_1 = \widetilde{w}_2 \text{ или } \exists i\ \widetilde{w}_1, \widetilde{w}_2 \in \widetilde{W}_i.$$

Для $i \in \{1, \dots, n\}$ обозначим через w_i класс эквивалентности, соответствующий $\widetilde{W}_i$, через W_m – множество классов эквивалентности, соответствующих $\widetilde{W}_m$, т. е. $W_m = W \backslash \{w_1, \dots w_n\}$. Заметим, что элементы W_m однозначно соответствуют элементам $\widetilde{W}_m$. Если $u \in W_m$, будем обозначать соответствующий элемент $\widetilde{W}_m$ через $\widetilde{u}$. Определим отношение R следующим образом:

1) если $u, u' \in W_m$, то $uRu' \iff \widetilde{u}\widetilde{R}\widetilde{u}'$;
2) если $u \in W_m$, то $uRw_i \iff \exists \widetilde{u}_i \in \widetilde{W}_i\ \widetilde{u}\widetilde{R}\widetilde{u}_i$;
3) $w_iRw_j \iff \widehat{w}_i\widehat{R}\widehat{w}_j \iff \forall \widetilde{w}_i \in \widetilde{W}_i\ \exists \widetilde{w}_j \in \widetilde{W}_j\ \widetilde{w}_i\widetilde{R}\widetilde{w}_j$ (из свойства 3 модели $\widetilde{M}$).

Итого, $F = \langle W, \{R, R_u\}\rangle$, где $R_u = W \times W$. Таким образом, из определения R следует, что существует p-морфизм $f : \langle \widetilde{W}, \{\widetilde{R}, \widetilde{R}_u\}\rangle \twoheadrightarrow F$, определенный так:

- если $u \in W_m$, то $f(\widetilde{u}) = u$;
- если $\widetilde{w}_i \in \widetilde{W}_i$, то $f(\widetilde{w}_i) = w_i$.

Таким образом, из теоремы 23 следует, что $F \in \mathcal{F}_{\boxed{u}}$.

Определим оценку V на F для переменных $p_1, p_2, \dots, p_m$ следующим образом:

- $F, V, w_i \models p_k \iff \forall \widetilde{w}_i \in \widetilde{W}_i : \widetilde{M}, \widetilde{w}_i \models p_k \iff \widehat{M}, \widehat{w}_i \models p_k$;
- если $u \in W_m$, то $F, V, u \models p_k \iff \widetilde{M}, \widetilde{u} \models p_k$.

Докажем, что модель $M = \langle F, V\rangle$ удовлетворяет условию теоремы.

1) $F \in \mathcal{F}_{\boxed{u}}$ – доказано выше;
2) в качестве W' возьмем $\{w_1, w_2, \dots w_n\}$. Тогда из определения отношения R следует, что $w_iRw_j \iff \widehat{w}_i\widehat{R}\widehat{w}_j$, т. е. $F|_{W'} = \widehat{F}$. Из определения оценки V получаем, что

$$M, V, w_i \models p_k \iff \widehat{M}, \widehat{w}_i \models p_k;$$

таким образом, $M|_{W'} = \widehat{M}$;
3) из определения оценки V p-морфизм f обладает следующим свойством:

$$\widetilde{M}, \widetilde{u} \models p_k \iff M, f(\widetilde{u}) \models p_k.$$

Используя индукцию по построению формулы, получаем, что для любой формулы ξ, содержащей только переменные $p_1, p_2, \dots, p_m$, верно

$$\widetilde{M}, \widetilde{u} \models \xi \iff M, f(\widetilde{u}) \models \xi.$$

Таким образом, по построению формулы ψ в некотором мире $\widetilde{w}_1$ модели $\widetilde{M}$ истинна η_1, а также во всех мирах $\widetilde{M}$ выполнены формулы η_i, при $i \in \{2, 3, \dots, l\}$.

Из этого следует, что

$$\widetilde{M}, f(\tilde{u}) \models \eta_1 \wedge \bigwedge_{i=1}^{l} \boxed{u}\eta_i = \phi,$$

т. е. требуемое условие выполнено. $\square$

Следствие 34. *Пусть $\mathcal{F} = Fr_{fin}(\mathsf{L})$, $F^1, F^2 \in \mathcal{F}_{\boxed{u}\boxed{*}}$ – некоторые шкалы, $M^1 = \langle F^1, V^1 \rangle$, $M^2 = \langle F^2, V^2 \rangle$, ϕ – формула вида $\eta_1 \wedge \boxed{u}\eta_2 \wedge \boxed{u}\eta_3 \wedge \ldots \wedge \boxed{u}\eta_l$, где $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_l$ имеют только модальность $\Box$. Тогда существует такая формула ψ, которую можно построить за полиномиальное время от суммы размеров ϕ, F^1, F^2, что выполнимость ψ в классе $\mathcal{F}_{\boxed{u}\boxed{*}}$ равносильна*

1) $\exists M = \langle F, V \rangle$, *где* $F \in \mathcal{F}_{\boxed{u}}$;
2) $\exists W^1 \subseteq F$ $M|_{W^1} = M^1$, $F|_{W^1}$ *– порожденная подшкала* F;
3) $\exists W^2 \subseteq F$ $M|_{W^2} = M^2$, $F|_{W^2}$ *– порожденная подшкала* F;
4) $W^1 \cap W^2 = \varnothing$;
5) $\exists w \in F$ $M, w \models \phi$.

Доказательство. Аналогично лемме 33 по модели M^1 построим формулы $\psi_1^1, \psi_2^1, \psi_3^1, \psi_4^1$, переменные обозначим как $g^1, v_1^1, v_2^1, \ldots, v_{n^1}^1$, а по модели M^2 – формулы $\psi_1^2, \psi_2^2, \psi_3^2, \psi_4^2$, соотвествующие переменные обозначим через $g^2, v_1^2, v_2^2, \ldots, v_{n^2}^2$.

Тогда искомой формулой будет

$$\psi = \langle * \rangle \eta_1 \wedge \bigwedge_{i=2}^{l} \boxed{u}\eta_i \wedge \psi_1^1 \wedge \psi_2^1 \wedge \psi_3^1 \wedge \psi_4^1 \wedge \psi_1^2 \wedge \psi_2^2 \wedge \psi_3^2 \wedge \psi_4^2.$$

Доказательство полностью повторяет доказательство леммы 33. $\square$

Пусть A, B – множества формул. Дадим определения сводимостей $\leqslant_p$ и $\leqslant_{ctt}^{NP}$.

Определение 35. $A \leqslant_p B$, если существует полиномиально вычислимая f такая, что

$$\phi \in A \iff f(\phi) \in B.$$

Определение 36 (см. [3])**.** $A \leqslant_{ctt}^{NP} B$, если существует недетерменированная машина Тьюринга M такая, что $x \in A$ тогда и только тогда, когда на каком-то вычислении на входе x, M выводит $y_1\#y_2\#\ldots\#y_k$ и $\{y_1, y_2, \ldots, y_k\} \subseteq B$.

Научимся избавляться от модальностей $\boxed{u}$ и $\boxed{*}$. Для избавления от $\boxed{u}$ применим [3, теорема 4.1]. Из нее следуют следующие результаты:

Утверждение 37. *Пусть L – логика, $\mathcal{F} = Fr_{fin}(\mathsf{L})$. Тогда $\mathcal{F}_{\boxed{u}\boxed{*}} - sat \leqslant_{ctt}^{NP} \mathcal{F}_{\boxed{*}}$.*

Утверждение 38. *Пусть L – логика, $\mathcal{F} = Fr_{fin}(\mathsf{L})$. Тогда $\mathcal{F}_{\boxed{u}} - sat \leqslant_{ctt}^{NP} \mathcal{F}_{\boxed{*}}$.*

Далее, научимся избавляться от модальности $\boxed{*}$ в слабо транзитивных шкалах. Следующая лемма практически очевидна, так как R совпадает с R^* с точностью до рефлексивных петель, но для полноты ниже приведено ее доказательство.

Лемма 39. *Пусть* $\mathsf{L} \supseteq \mathsf{wK4}$, $\mathcal{F} = Fr_{fin}(\mathsf{L})$. *Тогда* $\mathcal{F}_{\boxed{*}} - sat \leqslant_p \mathcal{F} - sat$.

Доказательство. Пусть $\phi \in \mathcal{L}(R, R^*)$. Пусть $Sub(\phi)$ – множество всех подформул ϕ. Так как $\mathsf{L} \supseteq \mathsf{wK4}$, то для любой $F \in \mathcal{F}_{\boxed{*}}$ выполнено

$$\forall x, y \in F \; xR^*y \iff xRy \vee x = y.$$

Построим рекурсивное преобразование $f : \mathcal{L}(R, R^*) \to \mathcal{L}(R)$ по следующему правилу:

$$f(p) = p, \text{ где } p \in \mathcal{P},$$
$$f(\psi \wedge \eta) = f(\psi) \wedge f(\eta),$$
$$f(\neg\psi) = \neg f(\psi),$$
$$f(\Box\psi) = \Box f(\psi),$$
$$f(\boxed{*}\psi) = \Box p_\psi \wedge p_\psi.$$

Тогда

$$g(\phi) = f(\phi) \wedge \Box \bigwedge_{\boxed{*}\xi \in Sub(\phi)} (p_\xi \leftrightarrow f(\xi)) \wedge \bigwedge_{\boxed{*}\xi \in Sub(\phi)} (p_\xi \leftrightarrow f(\xi))$$

является искомым сведением. Функция g полиномиально вычислима, так как $|f(\phi)| \leqslant 2|\phi|$, а также $|Sub(\phi) \leqslant |\phi|$.

Если ϕ является $\mathcal{F}_{\boxed{u}}$-выполнимой, то $g(\phi)$ истинна в модели на той же шкале с оценкой V', так что $V'(p_\xi) = V(\xi)$, и $V'(p) = V(p)$ для остальных переменных.

Если $g(\phi)$ выполнима в модели $M = \langle F, V\rangle$ в мире w_r, то для $w \in F{\uparrow}w_r$ верно

$$M, w \models p_\xi \iff M, w \models \xi.$$

Из этого индукцией по построению формулы получим, что для $w \in F{\uparrow}w_r$ выполнено

$$M, w \models g(\phi) \iff M, w \models \phi,$$

что и требовалось. $\Box$

Из доказанных лемм вытекает следующий результат:

Теорема 40. *Пусть* $\mathsf{L} \supseteq \mathsf{wK4}$, $\mathcal{F} = Fr_{fin}(\mathsf{L})$ *и* $\mathcal{F} - sat \in \mathsf{PSPACE}$. *Тогда существует* PSPACE-*алгоритм, решающий следующую задачу: дана формула* ϕ *вида* $\eta_1 \wedge \boxed{u}\eta_2 \wedge \ldots \wedge \boxed{u}\eta_l$, *а также модели* M^1, M^2, *определить, существует ли такая модель* $M = \langle F, V\rangle$, *что*:

1) $F \in \mathcal{F}_{\boxed{u}}$;
2) $\exists W^1, W^2 \subset F : M|_{W^1} = M^1, M|_{W^2} = M^2$, *и* $W^1 \cap W^2 = \varnothing$;
3) ϕ *– истинна в некотором мире* M.

Доказательство. По следствию 34 построим формулу $\psi \in \mathcal{L}(R, R_u, R^*)$. Согласно утверждению 37 и лемме 39 получаем, что

$$\mathcal{F}_{\boxed{u}\boxed{*}} \leqslant^{NP}_{ctt} \mathcal{F}_{\boxed{*}} \leqslant_p \mathcal{F},$$

но так как $\leqslant^{NP}_{ctt}$ и $\leqslant_p$ сохраняют принадлежность PSPACE (см. [3]), и по условию $\mathcal{F} - sat \in$ PSPACE, получаем требуемое. □

Замечание 41. Если одна (или обе) из моделей M_1 или M_2 равна $\varnothing$, то считаем, что во втором условии теоремы 40 убрано соответствующее условие.

Определение 42. Формулу ϕ, удовлетворяющую условию теоремы 40, будем называть $\mathcal{F}_{\boxed{u}}$*-выполнимой с подмоделями* M^1, M^2. В случае, если $M^2 = \varnothing$, не будем различать понятия $\mathcal{F}_{\boxed{u}}$-выполнимости с подмоделями M^1 и $\varnothing$, а также $\mathcal{F}$-выполнимости с подмоделями M^1 и M^1, т. е. под $\mathcal{F}$-выполнимостью с подмоделями M и M понимаем либо выполненность теоремы при $M^1 = M$ и $M^2 = M$, либо с $M^1 = M$, $M^2 = \varnothing$.

4. Основная теорема

Теорема 43. *Пусть* $\mathsf{L} \supseteq \mathsf{wK4}$, $\mathcal{F} = Fr_{fin}(\mathsf{L})$ *и* $\mathcal{F} - sat \in$ PSPACE. *Тогда* $\mathcal{F}^{AC}_{\boxed{u}} - sat \in$ PSPACE.

План доказательства следующий: будем проверять выполнимость формулы на классе вытянутых шкал. Количество основных подшкал такой шкалы может оказаться экспоненциальным. Для того чтобы выполнить требуемую проверку, будет использован метод, примененный в доказательстве теоремы Савича (см. [9, глава 4]).

Лемма 44. *Пусть* $L \supseteq \mathsf{wK4}$, ϕ *–* $\mathcal{F}_{\boxed{u}}$*-выполнима,* $|\phi| = n$. *Тогда существует шкала* $F \in \mathcal{F}_{\boxed{u}}$*, размеры каждого сгустка которой не превосходят* $4n + 1$*, такая, что* ϕ *выполнима в* F.

Доказательство. Рассмотрим $F = \langle W, \{R, R_u\}\rangle$ – наименьшую по количеству миров шкалу, в которой выполнена ϕ, $M = \langle F, V\rangle$ – соответствующая модель. Докажем, что она удовлетворяет условию леммы. Предположим, что это не так, и найдется сгусток с мирами $w_1, w_2, \ldots, w_m$, где $m \geqslant 4n+2$. Обозначим $W_c = \{w_1, w_2, \ldots, w_m\}$. Из того, что $\mathsf{L} \supseteq \mathsf{wK4}$, следует, что

$$\forall i \forall j \ (i \neq j \to w_i R w_j), \tag{1}$$

а также,

$$\text{если } w \in W \backslash W_c \text{ и } wRw_i, \text{ то } \forall j \ wRw_j. \tag{2}$$

Рассмотрим ξ – подформулу ϕ. Обозначим

$$W_\xi = \{w_i \in W_c \mid M, w_i \models \xi\}.$$

Среди миров W_ξ отметим произвольные $\min(2, |W_\xi|)$ миров. Аналогично поступим с мирами $W_c \backslash W_\xi$. Тогда для любой ξ мы отметим не более четырех миров. Проделав эту операцию для всех ξ получим, что отмечено не более $4n$ миров. Не умаляя общности, пусть это будут миры $w_1, w_2, \ldots, w_{4n}$ (если было отмечено меньше $4n$ миров, то доотметим произвольные).

Докажем, что при удалении w_i из модели M, где $i > 4n$, истинность всех формул во всех мирах $W \backslash \{w_i\}$ не поменяется. Обозначим $M' = M|_{(W \backslash \{w_i\})}$. Предположим, что это не так, и значение некоторой формулы в каком-то мире поменялось. Из всех таких формул рассмотрим наименьшую по длине. Пусть это ϕ_0, истинность которой в мире w изменилась. По выбору ϕ_0, ни одна ее подформула не поменяла свое значение. Заметим, что ϕ_0 не могла иметь вид $\xi \wedge \eta$ или $\neg \xi$, так как в таком случае нашлась бы более короткая формула, значение которой изменилось. Таким образом, ϕ_0 имеет вид $\Box \psi$ или $\boxed{u}\psi$. Рассмотрим $\phi_0 = \Box \psi$, вариант $\boxed{u}\psi$ разбирается аналогично. Разберем два случая:

1) $M, w \models \Box \psi$, но $M', w \not\models \Box \psi$.
   Из $M, w \models \Box \psi$ следует, что

$$\forall w' \in W \;\; wRw' \Rightarrow M, w' \models \psi.$$

   Так как ψ – подформула ϕ_0, то

$$\forall w' \in W \backslash \{w_i\} \;\; wRw' \Rightarrow M', w' \models \psi.$$

   Таким образом, $M', w \models \Box \psi$, что противоречит предположению.

2) $M, w \not\models \Box \psi$, но $M', w \models \Box \psi$.
   Из $M', w \models \Box \psi$ следует, что

$$\forall w' \in W \backslash \{w_i\} \;\; wRw' \Rightarrow M', w' \models \psi.$$

   Из $M, w \not\models \Box \psi$ следует, что

$$\exists w' \in W \;\; wRw' \wedge M, w' \not\models \psi.$$

   Таким образом, из свойств (1) и (2) шкалы получаем, что $M, w_i \not\models \psi$, и для всех $u \in W_c$ таких, что $u \neq w_i$ и $u \neq w$, верно $M, w \models \psi$. Таким образом, по выбору отмеченных миров $w_1, w_2, \ldots, w_{4n}$ получаем, что $w_i \in \{w_1, w_2, \ldots, w_{4n}\}$, что противоречит выбору $i > 4n$. Таким образом, случай невозможен.

Итак, ни один из этих случаев невозможен, следовательно, требуемое свойство установлено.

Докажем теперь, что добавление рефлексивной петли к любому из миров w_i, где $i > 4n$, если ее там не было, также не меняет истинности ни одной из формул ни в одном мире. Пусть $F' = F \sqcup (w_i, w_i)$, $M' = \langle F', V \rangle$. Аналогично рассуждению выше, рассмотрим наименьшую формулу, которая поменяла свое значение. Пусть это формула ϕ_0, поменявшая свое значение в мире w. Также получаем, что $\phi_0 = \Box\psi$ или $\phi_0 = \boxed{u}\psi$, рассмотрим только первый вариант. Рассмотрим два случая:

1) $M, w \models \Box\psi$, но $M', w \not\models \Box\psi$.
Так как модель M' отличается от модели M только наличием рефлексивной петли (w_i, w_i), и согласно выбору ϕ_0 истинность ψ ни в одном из миров не поменялась, то $w = w_i$, и $M, w_i \not\models \psi$, и $\forall w_j \neq w_i\ M, w_j \models \psi$. Таким образом, w_i – отмеченная вершина, что противоречит выбору $i > 4n$.

2) $M, w \not\models \Box\psi$, но $M', w \models \Box\psi$.
Аналогично, получаем, что $w = w_i$. Тогда из $M', w \models \Box\psi$ следует, что
$$\forall w_j \neq w_i\ M, w_j \models \psi,$$
что противоречит $M, w \not\models \Box\psi$.

Итак, ни один из двух случаев не реализуется, следовательно, свойство установлено.

Перейдем к построению $\widehat{F}$, размер которой меньше размера F, и в которой выполнима ϕ. Пусть
$$\widehat{W} = W \backslash \{w_m\}, \quad \widehat{R} = (R \cap (\widehat{W} \times \widehat{W})) \cup (w_{m-1}, w_{m-1}), \quad \widehat{R}_u = \widehat{W} \times \widehat{W}, \quad \widehat{F} = \langle \widehat{W}, \{\widehat{R}, \widehat{R}_u\} \rangle.$$

Рассмотрим функцию $f : W \to \widehat{W}$ такую, что
$$f(w) = \begin{cases} w, \text{ если } w \neq w_m, \\ w_{m-1}, \text{ если } w = w_m. \end{cases}$$

Докажем, что она является p-морфизмом шкалы F на шкалу $\widehat{F}$. Сюръективность очевидна. Так как шкала F – слабо транзитивная, и w_{m-1} и w_m принадлежат одному сгустку, то выполнено
$$\forall w \notin \{w_{m-1}, w_m\}\ (wRw_{m-1} \iff wRw_m) \text{ и } (w_{m-1}Rw \iff w_mRw).$$

Также из определения $\widehat{R}$ следует, что если $w, w' \in W \backslash \{w_m\}$ и хотя бы один из миров w, w' не равен w_{m-1}, то
$$wRw' \iff w\widehat{R}w'.$$

Таким образом, достаточно проверить свойства p-морфизма только для $x, y \in \{w_{m-1}, w_m\}$. В этом случае свойства следуют из того, что $w_{m-1}Rw_m$, w_mRw_{m-1}, а также $w_{m-1}\widehat{R}w_{m-1}$.

Итак, $F \twoheadrightarrow \widehat{F}$. Тогда из теоремы 23 следует, что $\widehat{F} \in \mathcal{F}_{\boxed{u}}$. Определим оценку $\widehat{V}$ на $\widehat{F}$ следующим образом:
$$\widehat{V}(p) = V(p) \cap \widehat{W}, \text{ где } p \in \mathcal{P}.$$

Определим модель $\widehat{M} = \langle \widehat{F}, \widehat{V} \rangle$. Заметим, что $\widehat{M}$ получена из M следующим образом:

1) удаляем мир w_m;
2) добавляем рефлексивную петлю на мире w_{m-1}, если ее там не было.

Тогда, используя ранее доказанное, а также факт, что $m-1 > 4n$ и $m > 4n$, получаем, что для всех $w \in W \backslash \{w_m\}$ и ξ – подформул ϕ верно

$$M, w \models \xi \iff \widehat{M}, w \models \xi.$$

Таким, образом, мы нашли шкалу $\widehat{F}$, размер которой меньше размера F, и в которой выполнена формула ϕ. Итак, наше изначальное предположение неверно, и все сгустки F имеют размер не более $4n+1$. □

Замечание 45. Заметим, что в лемме 44 можно наложить условие вытянутости на шкалу. Для этого в доказательстве нужно рассмотреть наименьшую F среди вытянутых, а также заметить, что преобразование шкалы F в шкалу $\widehat{F}$ сохраняет вытянутость.

Определение 46. Обозначим $Cl(\phi)$ – множество всех подформул ϕ, замкнутое относительно взятия единичного отрицания, т. е. если $\xi \in Cl(\phi)$ и ξ не имеет вид $\neg\eta$, то $\neg\xi \in Cl(\phi)$.

Пусть $\phi \in \mathcal{L}(R, R_u)$ – некоторая формула. Обозначим

$$\Sigma_\phi = \{\xi \mid \boxed{u}\xi \in Cl(\phi)\}.$$

Пусть M – некоторая модель. Выберем некоторый мир $w \in W$ и определим

$$\Sigma^T_\phi(M) = \{\xi \in \Sigma_\phi \mid M, w \models \boxed{u}\xi\}.$$

Очевидно, что определение не зависит от выбора мира w, так как истинность формулы, начинающейся с $\boxed{u}$, не зависит от мира.

Также определим

$$\Sigma^F_\phi(M) = \{\xi \in \Sigma_\phi \mid M, w \not\models \boxed{u}\xi\} = \Sigma_\phi \backslash \Sigma^T_\phi(M).$$

Теорема 47. *Пусть* $\mathsf{L} \supseteq \mathsf{wK4}$, $\mathcal{F} = Fr_{fin}(\mathsf{L})$, $\phi \in \mathcal{L}(R, R_u)$. *Тогда* $\mathcal{F}^{AC}_{\boxed{u}}$*-выполнимость* ϕ *равносильна существованию модели* $M = \langle F, V\rangle$ *такой, что*

1) $F \in \mathcal{F}^{AC}_{\boxed{u}}$ – *вытянутая.*
2) *связующие сгустки* $\widehat{F}_1, \widehat{F}_2, \ldots, \widehat{F}_m$ *шкалы* F *имеют размер не более* $4n+1$, *где* $n = |\phi|$.
3) *для всякой* $\xi \in \Sigma^F_\phi(M) \cup \{\neg\phi\}$ *найдутся* $i_\xi, w_\xi \in W_{i_\xi}$ *(здесь* $W_1, W_2, \ldots, W_n$ *– из определения вытянутой шкалы) такие, что*

$$M|_{W_{i_\xi}}, w_\xi \models \neg\xi.$$

4) *все* i_ξ *из предыдущего пункта можно выбрать различными.*

Доказательство. Доказательство импликации справа налево очевидно, так как

$$M|_{W_{i_{\neg\phi}}}, w_{\neg\phi} \models \neg\neg\phi,$$

и из этого

$$M, w_{\neg\phi} \models \phi,$$

следовательно, ϕ является $\mathcal{F}^{AC}_{\boxed{u}}$-выполнимой.

Докажем импликацию слева направо. Пусть $M'' = \langle F'', V'' \rangle$ – модель, в которой выполнена ϕ, где $F'' \in \mathcal{F}^{AC}_{\boxed{u}}$. Воспользовавшись теоремой 31 и замечанием 32 к ней для шкалы F'' и $c = |\phi|$, найдем вытянутую шкалу F' и p-морфизм $f : F' \twoheadrightarrow F''$. Рассмотрим модель $M' = \langle F', V' \rangle$, где V' получен как прообраз V'' при действии f, а именно для каждой переменной p выполнено $V'(p) = f^{-1}(V''(p))$. Докажем, что для модели M выполнены условия 3) и 4) теоремы. Пункт 1 очевиден по построению.

Пусть $\xi \in \Sigma^F_\phi(M) \cup \{\neg\phi\}$. Тогда, по определению найдется $w'' \in F''$ такой, что

$$M'', w'' \models \neg\xi.$$

Рассмотрим некоторый прообраз $w' \in f^{-1}(w'')$. Пусть $w' \in W'_{j_\xi}$ (здесь $W'_1, w'_2, \ldots, W'_{n'}$ взяты из определения вытянутой шкалы). Тогда по построению модели M' выполнено

$$M', w' \models \neg\xi.$$

Согласно замечанию 32, получаем, что найдутся $i^1_\xi, i^2_\xi, \ldots, i^{|\phi|}_\xi$ такие, что $f(W'_{i^j_\xi}) = f(W'_{j_\xi})$. Тогда для каждого j найдется $w'_{i^j_\xi} \in W_{i^j_\xi}$, принадлежащий $f^{-1}(w'')$. Таким образом,

$$M', w'_{i^j_\xi} \models \neg\xi.$$

Заметим, что

$$\left|\Sigma^F_\phi(M) \cup \{\neg\phi\}\right| \leqslant |\Sigma_\phi| + 1 \leqslant |\phi|.$$

Из этого для каждого $\xi \in \Sigma^F_\phi(M) \cup \{\neg\phi\}$ можно выбрать i_ξ среди $i^1_\xi, i^2_\xi, \ldots, i^{|\phi|}_\xi$ так, чтобы все i_ξ были различны. Таким образом, для модели M выполнены условия 3) и 4) теоремы.

Построим модель M, воспользовавшись леммой 44. Тогда, воспользовавшись замечанием 45 и тем, что значения всех формул в модели M совпадают со значениями этих формул в соответствующих мирах M', получим, что M – искомая. □

Теперь перейдем к доказательству основной теоремы.

Доказательство теоремы 43. Пусть $\phi \in \mathcal{L}(R, R_u)$ – формула, $|\phi| = n$. Определим

$$\mathcal{M} = \{ M = \langle F, V \rangle \mid |F| \leqslant 4n + 1, V(p) = \varnothing \text{ для всех } p \text{ не входящих в } \phi \},$$

т. е. $\mathcal{M}$ – множество моделей размера не более $4n+1$.

Пусть ϕ является $\mathcal{F}^{AC}_{\boxed{u}}$-выполнимой. Тогда рассмотрим модель $M = \langle F, V \rangle$ из теоремы 47, а также индексы i_ξ. Пусть $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_k$ – некоторая нумерация $\Sigma^F_\phi(M) \cup \{\phi\}$. Через $F_1, F_2, \dots, F_l$ обозначим подшкалы из определения вытянутой шкалы, а связующие сгустки – через $\widehat{F}_1, \widehat{F}_2, \dots, \widehat{F}_m$.

Обозначим M^1_j и M^2_j – связующие сгустки, соответствующие $F_{i_{\xi_j}}$. Если $F_{i_{\xi_j}}$ – висячая подшкала (см. определении 30), то считаем $M^1_j = M^2_j$. Тогда, из теоремы 47 следует, что для всех j верно, что

$$\neg\xi_j \wedge \bigwedge_{\xi \in \Sigma^T_\phi(M)} \boxed{u}\xi$$

является $\mathcal{F}_{\boxed{u}}$-выполнимой с подмоделями M^1_j и M^2_j.

Рассмотрим граф $G_{\Sigma^T_\phi(M)}$, вершинами которого будут служить элементы $\mathcal{M}$. Две вершины графа $G_{\Sigma^T_\phi(M)}$, т. е. модели M^1 и M^2, соединены, если формула

$$\bigwedge_{\xi \in \Sigma^T_\phi(M)} \boxed{u}\xi$$

является $\mathcal{F}_{\boxed{u}}$-выполнимой с подмоделями M^1 и M^2. Заметим, что так как во всех мирах модели M истинны формулы вида $\boxed{u}\xi$ для $\xi \in \Sigma^T_\phi(M)$, то для всех j между $M|_{\widehat{F}_j}$ и $M|_{\widehat{F}_{j+1}}$ в графе $G_{\Sigma^T_\phi(M)}$ есть путь. Таким образом, M^2_j соединена ребром с M^1_{j+1}.

Итак, если ϕ является $\mathcal{F}_{\boxed{u}}$-выполнимой, то

1) Найдутся Σ^T, Σ^F такие, что
$$\Sigma^T \sqcup \Sigma^F = \Sigma_\phi,$$
$\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_k$ – некоторая нумерация $\Sigma^F \cup \{\neg\phi\}$.
2) Найдутся $M^1_1, M^2_1, M^1_2, M^2_2, \dots, M^1_k, M^2_k \in \mathcal{M}$ такие, что $\neg\xi_j \wedge \bigwedge_{\xi \in \Sigma^T} \boxed{u}\xi$ является $\mathcal{F}_{\boxed{u}}$-выполнимой с подмоделями M^1_j и M^2_j.
3) В графе G_{Σ^T} при всех j есть путь между M^2_j и M^1_{j+1}.

В обратную сторону, эти условия обеспечивают $\mathcal{F}^{AC}_{\boxed{u}}$-выполнимость ϕ, так как построенная по ним естественным образом модель удовлетворяет условию теоремы 47.

Построим недетерминированный алгоритм, работающий на полиномиальной памяти, проверяющий выполнение полученного нами условия. Сертификатом нашего алгоритма будем считать следующий кортеж:

$$\Sigma^T, \Sigma^F, \xi_1, \xi_2, \dots, \xi_k, M^1_1, M^2_1, M^1_2, M^2_2, \dots, M^1_k, M^2_k,$$

где

$$\Sigma^T \sqcup \Sigma^F = \Sigma_\phi,$$
$$\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_k \text{ – некоторая нумерация } \Sigma^F \cup \{\neg\phi\},$$
$$M^1_1, M^2_1, M^1_2, M^2_2, \dots, M^1_k, M^2_k \in \mathcal{M}.$$

Через $\mathcal{P}_\phi$ обозначим множество переменных формулы ϕ. Оценим размер $\mathcal{M}$:

$$|\mathcal{M}| \leqslant \sum_{i=1}^{4n+1} 2^{i^2} \cdot 2^{|\mathcal{P}|\cdot i} \leqslant 5n \cdot 2^{(5n)^2} \cdot 2^{|\mathcal{P}|\cdot 5n} \leqslant 5n \cdot 2^{(5n)^2} \cdot 2^{5n^2} \leqslant 5n \cdot 2^{30n^2}$$
$$\leqslant 2^{5n} \cdot 2^{30n^2} \leqslant 2^{35n^2}.$$

Введем преобразование формулы $\xi \to \xi'$, определенное рекурсивно по построению формулы:

$$p' = p, \text{ где } p \in \mathcal{P},$$
$$(\psi \wedge \eta)' = \psi' \wedge \eta',$$
$$(\neg\psi)' = \neg\psi',$$
$$(\Box\psi)' = \Box\psi',$$
$$(\boxed{u}\psi)' = \begin{cases} \top, & \text{если } \psi \in \Sigma^T, \\ \bot & \text{иначе.} \end{cases}$$

Введем предикат $Conn(u, v, t)$, верный, если между вершинами u и v графа G_{Σ^T} есть путь длины не более 2^t. Его вычисление будем производить рекурсивно.

1) если $t = 0$, то $Conn(u, v, t) \iff u = v$ или u и v соединены ребром. Проверка наличия ребра осуществляется при помощи теоремы 40, примененной к формуле

$$\bigwedge_{\xi \in \Sigma^T} \boxed{u}\xi'.$$

2) если $t > 0$, то

$$Conn(u, v, t) = \bigvee_{w \in G} \left(Conn(u, w, t-1) \wedge Conn(w, v, t-1)\right).$$

При таком построении ξ' не содержит модальности $\boxed{u}$.

Так как модель M такая, что $\Sigma_\phi^T(M) = \Sigma^T$, а $\Sigma_\phi^F(M) = \Sigma^F$, то истинности формул ξ и ξ' равносильны.

Если t полиномиально зависит от n, то приведенный алгоритм требует полиномиальной памяти, так как глубина рекурсии составляет t, и на каждом шаге рекурсии вычисления выполняются на полиномиальной памяти.

Таким образом, для любых $u, v \in \mathcal{M}$ верно, что

$$Conn(u, v, 35n^2) = 1 \iff \text{между } u \text{ и } v \text{ есть путь в } G_{\Sigma^T}.$$

Таким образом, запустив вычисление $Conn$ для всех M_j^2 и M_{j+1}^1, проверим условие 3. Условие 2 проверяется при помощи запуска k раз алгоритма из теоремы 40, примененной к формулам вида

$$\neg\xi_j' \wedge \bigwedge_{\xi\in\Sigma^T} \boxed{u}\xi'.$$

Условие 1 проверяется очевидно.

Таким образом, построен NPSPACE алгоритм, и применение теоремы 29 завершает доказательство. □

5. Связь с задачами выводимости в логиках

Определение 48. Модальная логика L называется *финитно аппроксимируемой* (для краткости будем писать ФА), если $\mathsf{L} = Log(Fr_{fin}(\mathsf{L}))$.

Теорема 49. *Логики* K4, D4, S4 *являются ФА и, более того, задача выполнимости в соответствующих классах конечных шкал является* PSPACE*-полной.*

Эта теорема содержит несколько классических результатов. Детали доказательства можно найти в [5].

Теорема 50. *Логика* wK4 *является ФА, а задача выполнимости в классе* $Fr_{fin}(\mathsf{wK4})$ *является* PSPACE*-полной.*

Для логики wK4 ФА была доказана в работе [7] с помощью фильтрации, а PSPACE-полнота задачи выполнимости для этой логики следует из теоремы в статье [4].

Теорема 51. *Если логика* $\mathsf{L} \in \{\mathsf{wK4}, \mathsf{K4}, \mathsf{D4}, \mathsf{S4}\}$*, то логики* L.U *и* L.UC *полны по Крипке и ФА.*

Доказательство. Все упомянутые логики каноничны, и все аксиомы связанные с универсальной модальностью тоже каноничны. Поэтому L.U – канонична и, значит, полна по Крипке.

Для доказательства ФА можно воспользоваться стандартным методом фильтрации (см. [5]). Дело в том, что универсальная модальность хорошо себя ведет с фильтрацией и все теоремы о фильтрации доказываются в присутствии универсальной модальности практически без изменений.

Для логики L.UC мы поступим аналогично [2]. Мы будем доказывать полноту и ФА логики L.UC одновременно, фильтруя конус канонической модели логики L.UC. Детали доказательства можно легко восстановить, так как оно такое же, как в [2]. □

Из теорем в этом разделе и теоремы 4 следует

Теорема 52. *Задачи принадлежности (выводимости) в логиках* wK4.UC*,* K4.UC*,* D4.UC*,* S4.UC *являются* PSPACE*-полными.*

6. Заключение

В этой работе впервые получено ограничение на вычислительную сложность класса модальных логик с аксиомой связности.

Для применения этого результата к соответствующей синтаксической задаче, т. е. к задаче проверки выводимости, достаточно полноты исследуемой логики по Крипке, а также наличия свойства финитной аппроксимируемости. В этом случае ϕ выводима тогда и только тогда, когда $\neg\phi$ не выполнима в соответствующем классе шкал.

В доказательстве результата существенно использовалась слабая транзитивность в двух местах:

1) В лемме 44 при доказательстве полиномиального (и даже линейного) ограничения на размер сгустков. В слабо транзитивном случае сгустки имеют очень простую структуру, что позволяет преобразовать их без влияния на истинность формулы. С другой стороны, такое ограничение требуется лишь для двух сгустков в шкале, что потенциально может ослабить требование слабой транзитивности.

2) В лемме 39 при замене модальности $\boxdot$ на $\Box$.

В связи с этим остается открытым вопрос о расширении класса логик, для которых верна теорема 43, а также о равенстве этого класса с классом всех логик, т. е. о существовании примера логики L, для которой $\mathsf{L.U}$-выполнимость лежит в PSPACE, а $\mathsf{L.UC}$-выполнимость – нет.

Список литературы

[1] V. Goranko, *Modal definability in enriched languages*, Notre Dame J. Formal Logic **31** (1), 81–105 (1990).
DOI: https://doi.org/10.1305/ndjfl/1093635335

[2] V. Shehtman, *"Everywhere" and "here"*, J. Appl. Non-Classical Logics **9** (2–3), 369–379 (2012).
DOI: https://doi.org/10.1080/11663081.1999.10510972

[3] E. Hemaspaandra, *The price of universality. Combining logics*, Notre Dame J. Formal Logic **37** (2), 174–203 (1996).
DOI: https://doi.org/10.1305/ndjfl/1040046086

[4] I. Shapirovsky, *Satisfiability problems on sums of Kripke frames*, ACM Trans. Comput. Log. **23** (3), art. 15 (2022).
DOI: https://doi.org/10.1145/3508068

[5] A. Chagrov, M. Zakharyaschev, *Modal Logic*, in: Oxford Logic Guides **35**, The Clarendon Press, Oxford University Press, New York, 1997.

[6] Л. Эсакиа, *Слабая транзитивность – реституция*, Логические исследования **8**, 244–255 (2001).
URL: https://logicalinvestigations.ru/article/view/186

[7] G. Bezhanishvili, L. Esakia, D. Gabelaia, *Spectral and T_0-spaces in d-semantics*, in: Lecture Notes in Comput. Sci. **6618**, Springer, Heidelberg, 16–29, 2011.
DOI: https://doi.org/10.1007/978-3-642-22303-7_2

[8] P. Blackburn, M. de Rijke, Y. Venema, *Modal Logic*, in: Cambridge Tracts in Theoretical Computer Science **53**, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2001.
DOI: https://doi.org/10.1017/CBO9781107050884

[9] S. Arora, B. Barak, *Computational complexity. A modern approach*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2009.
DOI: https://doi.org/10.1017/CBO9780511804090

Константин Максимович Мясников
Московский физико-технический институт,
Институтский переулок, д. 9, Долгопрудный, 141701, Россия,
e-mail: miasnikov.km@phystech.edu

Андрей Валерьевич Кудинов
Московский физико-технический институт,
Институтский переулок, д. 9, Долгопрудный, 141701, Россия,
e-mail: kudinov.andrey@gmail.com

Volume 3, Issue 2
pp. 58–84 (2025)

UDC 510.643
MSC 03B45

The influence of connectivity axiom on complexity of modal logic

K.M. Myasnikov, A.V. Kudinov

Abstract. We prove that for weakly transitive modal logics equipped with the universal modality whose satisfiability problem is already decidable in PSPACE, adding the connectivity axiom does not increase the complexity. Moreover, we present an algorithm that solves the satisfiability task within the same complexity class.

Keywords: modal logic, algorithmic complexity, connectivity axiom, universal modality, weakly transitive logics, satisfiability problem.

DOI: 10.26907/2949-3919.2025.2.58-84

References

[1] V. Goranko, *Modal definability in enriched languages*, Notre Dame J. Formal Logic **31** (1), 81–105 (1990).
DOI: https://doi.org/10.1305/ndjfl/1093635335

[2] V. Shehtman, *"Everywhere" and "here"*, J. Appl. Non-Classical Logics **9** (2–3), 369–379 (2012).
DOI: https://doi.org/10.1080/11663081.1999.10510972

[3] E. Hemaspaandra, *The price of universality. Combining logics*, Notre Dame J. Formal Logic **37** (2), 174–203 (1996).
DOI: https://doi.org/10.1305/ndjfl/1040046086

[4] I. Shapirovsky, *Satisfiability problems on sums of Kripke frames*, ACM Trans. Comput. Log. **23** (3), art. 15 (2022).
DOI: https://doi.org/10.1145/3508068

[5] A. Chagrov, M. Zakharyaschev, *Modal Logic*, in: Oxford Logic Guides **35**, The Clarendon Press, Oxford University Press, New York, 1997.

[6] L. Esakia, *Weak transitivity – a restitution*, Logical Investigations **8**, 244–255, (2001) [in Russian].
URL: https://logicalinvestigations.ru/article/view/186

Received: 02 July 2024. Accepted: 11 February 2025. Published: 16 July 2025.

[7] G. Bezhanishvili, L. Esakia, D. Gabelaia, *Spectral and T_0-spaces in d-semantics*, in: Lecture Notes in Comput. Sci. **6618**, Springer, Heidelberg, 16–29, 2011.
DOI: https://doi.org/10.1007/978-3-642-22303-7_2

[8] P. Blackburn, M. de Rijke, Y. Venema, *Modal Logic*, in: Cambridge Tracts in Theoretical Computer Science **53**, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2001.
DOI: https://doi.org/10.1017/CBO9781107050884

[9] S. Arora, B. Barak, *Computational complexity. A modern approach*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2009.
DOI: https://doi.org/10.1017/CBO9780511804090

Konstantin Maksimovich Myasnikov
Moscow Institute of Physics and Technology,
9 Institutskii av., Dolgoprudny 141701, Russia,
e-mail: miasnikov.km@phystech.edu

Andrey Valerievich Kudinov
Moscow Institute of Physics and Technology,
9 Institutskii av., Dolgoprudny 141701, Russia,
e-mail: kudinov.andrey@gmail.com