Том 3, Выпуск 2 УДК 517.982, 517.983
Стр. 85–135 (2025) MSC 28C20, 28D05, 37A05, 37K05

Формулы Фейнмана–Каца для решений эволюционных уравнений I. Обобщенные случайные процессы и семейства операторов

Ю.Н. Орлов, В.Ж. Сакбаев

Аннотация. Обобщенный случайный процесс со значениями в измеримом пространстве определяется как комплекснозначная конечная аддитивная цилиндрическая мера на пространстве траекторий со значениями в этом измеримом пространстве. Для получения представления решений эволюционных уравнений с помощью усреднения функционалов на пространстве траекторий обобщенного случайного процесса в нашей статье построено и исследовано биективное отображение пространства операторнозначных функций в множество комплекснозначных конечных аддитивных цилиндрических мер на пространстве траекторий. Получены предельные теоремы для обобщенных случайных процессов. Во второй части статьи будет рассмотрено применение построенного биективного отображения к заданию возмущенных полугрупп и эволюционных семейств операторов с помощью формулы Фейнмана–Каца.

Ключевые слова: случайный линейный оператор, случайный операторный процесс, конечно-аддитивная мера, слабая сходимость мер, центральная предельная теорема, марковские процессы, уравнение Колмогорова, формула Фейнмана–Каца.

DOI: 10.26907/2949-3919.2025.2.85-135

Введение

В статье приводится обзор по применению теории случайных процессов к эволюционным дифференциальным уравнения. Получены представления однопараметрических и двухпараметрических эволюционных семейств линейных операторов с помощью континуальных интегралов от функционалов на пространстве траекторий по комплекснозначным конечно-аддитивным мерам.

Предложен подход, основанный на расширении понятия случайного процесса со значениями в измеримом пространстве до цилиндрической комплекснозначной конечно-аддитивной меры на пространстве траекторий со значениями в измеримом пространстве.

Поступила: 23.10.2024. Принята: 02.05.2025. Опубликована: 16.07.2025.

Такое расширение понятия случайного процесса позволит применить метод континуального интегрирования Фейнмана–Каца для получения представлений произвольных однопараметрических полугрупп линейных операторов в гильбертовом пространстве с помощью цилиндрических мер типа меры Винера или псевдомеры Фейнмана.

Континуальное интегрирование используется [1, 2] при получении решения задачи Коши для возмущенного потенциалом уравнения диффузии. Построение на пространстве траекторий вероятностной меры, заданной на порожденной цилиндрическими множествами в пространстве траекторий сигма-алгебре, потребовало привлечения теоремы Колмогорова о согласованных распределениях [3] и конструкции Лебега продолжения меры [1].

Р. Фейнман предложил конструкцию континуального интегрирования для полугрупп, порождаемых уравнением Шредингера [4, 5], однако строгое математическое обоснование интегрирования по комплекснозначной конечно-аддитивной не обладающей ограниченной вариацией мере Фейнмана потребовало значительного развития математического аппарата [2, 6]. Мы предлагаем расширить применение формулы Фейнмана–Каца, распространив ее на возмущения не только полугрупп, порождаемых оператором Лапласа, но и произвольных сильно непрерывных полугрупп. Для этой цели нам потребуется заменить случайные процессы, соответствующие распределениям вероятностных мер, на процессы, соответствующие распределениям конечно-аддитивных комплекснозначных цилиндрических мер.

В работах Фейнмана предложено использовать комплекснозначные меры на пространстве траекторий для получения представлений решения уравнения Шредингера и его возмущений посредством потенциала. Отсутствие у рассмотренных Фейнманом мер на пространстве траекторий свойства счетной аддитивности и неограниченность их вариации стало существенной проблемой в развитии подхода, основанного на применении методов континуального интегрирования в квантовой механике ([2, 7]). В работе Э. Нельсона [6] с помощью теоремы Троттера об аппроксимации полугрупп итерациями операторнозначных функций было дано обоснование применения к описанию решения уравнения Шредингера подхода континуального интегрирования функционалов на пространстве траекторий в конфигурационном пространстве, определяемых действием в лагранжевой форме. В работах О.Г. Смолянова, Е.Т. Шавгулидзе [2, 8] было дано описание пространства функций, интегрируемых по комплекснозначной конечно-аддитивной мере Фейнмана и развиты применения интегрирования по таким мерам к описанию решений задач Коши для уравнений квантовой механики и свойств оператора Шредингера. В некоторых случаях комплекснозначную конечно-аддитивную меру удается продолжить до счетно-аддитивной меры ограниченной вариации [9].

Введение комплекснозначных конечно-аддитивных мер с неограниченной вариацией позволило расширить область применимости методов континуального интегрирования с эволюционных уравнений, описывающих диффузионные процессы, на эволюционные уравнения, описывающие квантовую динамику [2]. Как показано в работах [10, 11], комплекснозначные цилиндрические меры на пространстве траекторий позволяют описать произвольную полугруппу, действующую в гильбертовом пространстве функций, квадратично интегрируемых по неотрицательной мере на том измеримом пространстве, в котором принимают значения траектории.

В рамках предложенного метода сопоставления обобщенного случайного процесса эволюционному семейству операторов исследована биекция между пространством заданных на вещественной полупрямой операторнозначных функций и множеством марковских стационарных цилиндрических мер на пространстве траекторий. На пространстве операторнозначных функций и пространстве цилиндрических мер введены топологии, обеспечивающие секвенциальную непрерывность биективного отображения и обратного к нему. Для случая процессов со значениями в конечномерном евклидовом пространстве решение этой задачи описывалось в [12]. Подобная схема была применена к случайным процессам со значениями в пространстве матриц [13, 14].

Каждому параболическому уравнению второго порядка может быть поставлено в соответствие стохастическое дифференциальное уравнение, решением которого является некоторый диффузионный процесс [3, 15]. Изучению дифференциальных уравнений в бесконечномерных пространствах с точки зрения теории вероятностей посвящены публикации [16–20]. При этом соответствующие переходные вероятности диффузионного процесса составляют ядро интегрального эволюционного оператора [2, 20, 21]. Так, например, построение эволюционных уравнений для математического ожидания функций от случайного блуждания часто используется для исследования уравнения Фоккера–Планка–Колмогорова (ФПК) в конечномерных пространствах [16, 22–24]. Математическими ожиданиями функционалов от марковских случайных процессов с субординацией и масштабированных гауссовских процессов задаются решения интегро-дифференциальных уравнений с дробными производными, описывающими аномальную диффузию [25, 26].

В теории случайных процессов используются различные определения сходимости. В работе Ю.В. Прохорова [27] сходимость последовательности случайных процессов определялась как слабая сходимость конечных борелевских мер в соответствующих функциональных пространствах. Помимо исследования слабой сходимости мер в полных метрических пространствах, в работе [27] были приведены также необходимые и достаточные условия компактности семейства мер. Систематическое изложение предельных теорем для случайных процессов и их применение в статистике содержится в [28]. Асимптотические задачи теории случайных сред рассмотрены в работе [29]. Функциональный подход к формулировке предельных теорем с уточнениями был освещен в статье [30].

В нашей статье устанавливаются предельные теоремы для случайных процессов, основанные на обобщении слабой сходимости мер. Сходимость по распределению композиций независимых операторов случайного сдвига определяется с помощью обобщенной слабой сходимости соответствующих мер. Слабая сходимость мер рассматривается как поточечная сходимость операторов свертки с мерой, действующих в пространстве непрерывных ограниченных функций, наделенном топологией поточечной сходимости [31, 32]. Обобщенная слабая сходимость мер задается аналогичным образом, однако соответствующие операторы свертки действуют теперь в некотором локально выпуклом пространстве функций. В случае гильбертова пространства квадратично интегрируемых функций приведен ряд примеров последовательности случайных преобразований [33, 34], для которых имеет место сходимость сверток с функциями из этого пространства.

Для широкого класса композиций случайных операторов обобщенная сходимость по распределению устанавливается с помощью теоремы Чернова об аппроксимации полугрупп [35, 36]. В частности, центральная предельная теорема для композиций операторов случайного сдвига может быть получена на основе теоремы Чернова [33, 37], при этом предельное распределение определяется через предельную полугруппу преобразований.

В работе рассмотрены случайные процессы, принимающие значения как в локально компактных топологических группах, к примеру, в пространстве линейных ограниченных операторов на конечномерном евклидовом пространстве [33], так и не локально компактных группах, например, в сепарабельном гильбертовом пространстве (см. [38, 39]). Однако, при отказе от свойства локальной компактности возникает проблема с построением меры, продолжающей понятие объема в конечномерных пространствах [40]. По теореме Вейля [41, 42] не существует нетривиальной локально конечной, σ-конечной, счетно-аддитивной, борелевской левоинвариантной меры на топологической группе, не являющейся локально компактной. Жертвуя по крайней мере одним из перечисленных свойств можно получать аналоги меры Лебега в бесконечномерных пространствах. При работе с операторным аналогом слабой сходимости, предложенным в статье [33], потребуются именно трансляционно инвариантные меры, поскольку они гарантируют равномерную ограниченность семейства операторов сдвига аргумента на произвольный вектор.

Трансляционно инвариантная локально-конечная σ-конечная мера на гильбертовом пространстве построена в [43, 44] по схеме Жордана: сначала мера определяется на системе брусов, являющихся бесконечномерными аналогами прямоугольников. Как и в конечномерном случае, заданная на системе брусов неотрицательная функция множества аддитивна и инвариантна относительно сдвига, что позволило продолжить ее до трансляционно инвариантной меры, заданной на кольце, порожденном брусами.

Построение в бесконечномерном пространстве счетно-аддитивной трансляционно инвариантной меры сталкивается с проблемами, которые преодолеваются либо отказом от условия локальной конечности и σ-конечности ([45–48]), либо отказом от счетной аддитивности. Построенная в работах [43, 44] мера помимо того, что не является счетно-аддитивной, не определена на всех борелевских множествах, задана на специальном кольце. Ввиду этой проблемы будет предложен аппарат для исследования случайных процессов, применимый к измеримым пространствам с произвольным кольцом подмножеств.

В операторном подходе к слабой сходимости особая роль отводится теореме Чернова [36] об усреднении операторнозначных отображений. Продемонстрировано, что теорема Чернова не только представляет собой обобщенный аналог центральной предельной теоремы для сумм векторнозначных процессов, но и позволяет получить аппроксимации в слабом смысле случайного процесса, разрешающего уравнение ФПК. С помощью теоремы Чернова были получены предельные теоремы типа центральной предельной теоремы и закона больших чисел в статье [37] для последовательности композиций случайных матриц, а также продемонстрированы их приложения к теории систем линейных дифференциальных стохастических уравнений. Работа [49] посвящена предельным теоремам на алгебраических структурах. В [33] операторный аналог слабой сходимости мер был адаптирован для мер на пространствах операторов.

Среди работ, посвященных изучению случайных линейных операторов и характеристик связанных с ними распределений, отметим статью В.И. Оселедеца [50], где без ограничений на коммутативный случай рассматриваются случайные блуждания на локально компактной группе в приложении к эргодическим теоремам. Также выделим статью А.В. Скорохода [51], в которой сформулирован операторный аналог процесса с независимыми приращениями, а также общий метод для оценки поведения произведения одинаково распределенных независимых сомножителей. В работах [34, 37, 52] получен аналог закона больших чисел для композиции случайных линейных операторов, сформулированы достаточные условия его выполнения и приведены примеры его нарушения.

Настоящая статья представляет обзор, основанный на исследованиях авторов [10–13, 32, 33], в котором приводятся полные доказательства формулируемых утверждений.

Опишем структуру статьи. В разделе 1 предложены обобщенные определения случайных величин и случайных процессов. Случайные процессы в силу теоремы Колмогорова о согласованных распределениях представляются вероятностными мерами на пространстве траекторий. Определение случайного процесса в некотором конфигурационном пространстве расширено до цилиндрической комплекснозначной конечно-аддитивной меры, заданной на некоторой цилиндрической алгебре пространства траекторий со значениями в конфигурационном пространстве.

Раздел 2 посвящен построению соответствия между операторнозначными функциями, действующими в подходящем функциональном пространстве, и цилиндрическими мерами. Определена биекция пространства операторнозначных функций на множество цилиндрических мер. Рассмотрены связи между свойствами стационарности и марковости обобщенных случайных процессов и соответствующих им мер и полугрупповым свойством операторнозначных функций.

В разделе 3 исследована обобщенная сходимость по распределению как случайных величин. На пространстве операторнозначных функций и пространстве цилиндрических мер введены топологии, обеспечивающие секвенциальную непрерывность биективного отображения из раздела 2 и обратного к нему. Показано, что теорема Чернова играет роль предельной теоремы, описывающей сходимость по распределению последовательностей обобщенных случайных процессов к некоторому строго марковскому, стационарному обобщенному цилиндрическому процессу.

Применение рассмотренной в части I статьи биекции к получению представления формулами Фейнмана–Каца полугрупп и эволюционных семейств операторов, описывающих решений эволюционных уравнений, будет реализовано в части 2. Будут описаны пространства функций на множестве траекторий, интегрируемых по мерам из подходящего подпространства в пространстве цилиндрических мер. Посредством континуальных интегралов будут заданы решения линейных дифференциальных и дифференциально-разностных уравнений.

1. Случайные процессы и меры на пространстве траекторий

Введем вероятностное пространство $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ и дадим несколько определений. Через Ω обозначено некоторое множество, $\mathcal{F}$ является σ-алгеброй, а $\mathbb{P}$ – вероятностной мерой. Пусть E – некоторое множество и $\mathcal{R}$ – кольцо его подмножеств. Пусть $\mathcal{A}$ – σ-алгебра подмножеств E, порожденная кольцом $\mathcal{R}$. Рассмотрим измеримое пространство $(E, \mathcal{A})$.

Определение 1. *Случайной величиной* называется измеримое отображение ξ из вероятностного пространства $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ в измеримое пространство $(E, \mathcal{A})$, т. е. такое отображение ξ, что

$$\forall A \in \mathcal{A}: \ \xi^{-1}(A) \in \mathcal{F}.$$

Определение 2. *Распределением* случайной величины ξ называется конечно аддитивная мера μ_ξ на пространстве E, определяемая согласно

$$\mu_\xi(A) = \mathbb{P}(\xi^{-1}(A)), \quad A \in \mathcal{A}.$$

Определение 3. *Случайным процессом* (или *случайной функцией*) со значениями в измеримом пространстве $(E, \mathcal{A})$ называется семейство случайных величин $\{\xi(t, \bullet), t \in T\}$ со значениями в измеримом пространстве $(E, \mathcal{A})$ и определенных на одном и том же вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.

Аналогично тому, как мы перешли от описания случайных величин к порожденным ими распределениям, случайный процесс можно рассматривать с точки зрения его *конечномерных распределений* или как некоторую *меру*.

Пусть задан случайный процесс $\{\xi(t, \bullet),\ t \in T\}$. Рассмотрим произвольный конечный набор индексов $\{t_1, \dots, t_n\}$, и построим для него наименьшую σ-алгебру $\mathcal{A}^n$, содержащее все множества вида $A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n$, где $A_k \in \mathcal{A}$, $k = 1, \dots, n$.

Определение 4. Для всякого конечного набора временных индексов $\{t_1, \dots, t_n\} \subset T$ *конечномерное распределение* $P_{t_1,\dots,t_n}$ случайного процесса ξ определяется, как распределение случайного вектора $\vec{\xi}(\vec{t}, \bullet) = (\xi(t_1, \bullet), \xi(t_2, \bullet), \dots, \xi(t_n, \bullet))$, т. е. мера на измеримом пространстве $(E^n, \mathcal{A}^n)$.

Корректность данного определения обусловлена тем, что для каждого $t \in T$ имеет место $\xi(t, \bullet) \in \mathcal{A}$, а значит, если $A_k \in \mathcal{A}$ при $k = 1, \dots, n$, то выполняется

$$\vec{\xi}_{\vec{t}}^{\,-1}(A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n) = \bigcap_{k=1}^{n} \xi_{t_k}^{-1}(A_k) \in \mathcal{F}. \tag{1.1}$$

И поскольку операция взятия прообраза коммутирует со всеми теоретико множественными операциями, то условие (1.1) будет выполняться для любого множества, принадлежащего алгебре $\mathcal{A}^n$. При этом

$$P_{t_1,\ldots,t_n}(A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n) = \mathbb{P}\left(\xi_{\vec{t}}^{-1}(A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n)\right).$$

По аддитивности можно продолжить $P_{t_1,\ldots,t_n}$ на всю алгебру $\mathcal{A}^n$.

Лемма 5. *Случайный процесс $\xi(t,\bullet)$ в смысле определения 3 задан в том и только том случае, если для любого $N \in \mathbb{N}$, для произвольных $t_1,\ldots,t_N \in T$ и произвольных $B_k \in \mathcal{A}$, где $k = 1,\ldots,N$, имеет место включение*

$$\Theta_{B_1,\ldots,B_N}^{t_1,\ldots,t_N} \equiv \{\omega \in \Omega \,|\, \xi(t_k,\omega) \in B_k \subset E,\ k = 1,\ldots,N\} \in \mathcal{F}.$$

Доказательство. Пусть заданы всевозможные $\Theta_{B_1,\ldots,B_N}^{t_1,\ldots,t_N}$ для $N \in \mathbb{N}$. Тогда, в частности, для любого $t \in T$ и для каждого $B \in \mathcal{A}$ имеем $\Theta_B^t \in \mathcal{F}$, а это и значит, что для всякого фиксированного значения параметра t отображение $\xi(t,\omega)$ есть случайная величина. Импликация в обратную сторону является следствием того, что операция взятия прообраза коммутирует с теоретико-множественными операциями, в частности, с пересечением, а алгебра (как семейство множеств) замкнута относительно операции конечного пересечения. □

Определение 6. *Траекторией случайного процесса* называется такая детерминированная функция

$$\xi_{\omega_0} : T \to E : \quad \xi_{\omega_0}(t) = \xi(t,\omega_0) \in E,$$

для произвольного $t \in T$ при некотором фиксированном $\omega_0 \in \Omega$.

Обозначим через $\mathcal{M}(T,E)$ множество всех возможных отображений, которые в момент времени $t \in T$ принимают значение во множестве E. В случае изучения случайных процессов со значениями в одном пространстве E, соответствующее пространство траекторий будем записывать как $\mathcal{M}(T,E)$.

Рассмотрим на пространстве $\mathcal{M}(T,E)$ так называемые *цилиндрические множества*, т. е. множества вида

$$\begin{gathered} C_{B_0,\ldots,B_n}^{t_0,\ldots,t_n} = \{\gamma \in \mathcal{M}(T,E) \,|\, \gamma(t_k) \in B_k,\ k = 0,\ldots,n\}, \\ n \in \mathbb{N}_0, \quad 0 \leqslant t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_n < +\infty, \quad B_k \in \mathcal{A}, \quad k = 1,\ldots,n. \end{gathered} \tag{1.2}$$

Набор множеств $\vec{B} = (B_0,\ldots,B_n)$ в выражении (1.2) называется *базой* цилиндрического множества, а набор чисел $\vec{t} = (t_0,\ldots,t_n)$ – *временными индексами* цилиндрического множества. Совокупность всех цилиндрических множеств обозначим через $\mathcal{C}yl$. В этих обозначениях сформулируем и докажем следующее утверждение.

Лемма 7. *Множество $\mathcal{C}yl$ образует полуалгебру.*

Доказательство. Согласно определению полуагебры, необходимо проверить, что для произвольных цилиндрических множеств $C_{\vec{B}}^{\vec{t}}$ и $C_{\vec{A}}^{\vec{s}}$ выполняются условия

$$C_{\vec{B}}^{\vec{t}} \cap C_{\vec{A}}^{\vec{s}} \in \mathcal{C}yl, \tag{1.3}$$

$$C_{\vec{B}}^{\vec{t}} \setminus C_{\vec{A}}^{\vec{s}} = \bigsqcup_{k=1}^{K} C_{\vec{D}_k}^{\vec{\tau}_k}, \quad \forall k = 1, \ldots, K : C_{\vec{D}_k}^{\vec{\tau}_k} \in \mathcal{C}yl. \tag{1.4}$$

Сперва докажем, что имеет место (1.3). Отметим, что если $\vec{t}$ и $\vec{s}$ не совпадают, то каждое из множеств временных индексов можно дополнить до более широкого множества временных индексов $\vec{\tau}$, основываясь на свойстве

$$C_{B_0,\ldots,B_m,E_t,B_{m+1},\ldots,B_n}^{t_0,\ldots,t_m,\ t,\ t_{m+1},\ldots,t_n} = C_{B_0,\ldots,B_m,B_{m+1},\ldots,B_n}^{t_0,\ldots,t_m,\ t_{m+1},\ldots,t_n} = C_{\vec{B}}^{\vec{t}},$$

для произвольного $C_{\vec{B}}^{\vec{t}} \in \mathcal{C}yl$. Следовательно, без ограничения общности будем полагать, что $\vec{t} = \vec{s}$. Находим

$$C_{\vec{B}}^{\vec{t}} \cap C_{\vec{A}}^{\vec{s}} = C_{B_0\cap A_0,\ldots,B_n\cap A_n}^{t_0,\ldots,\ t_n} \in \mathcal{C}yl \ \Leftarrow\ B_k \cap A_k \in \mathcal{A}, \quad k = 1, \ldots, n.$$

Докажем теперь, что справедливо условие (1.4). Пусть выполнено

$$\vec{t} = \{t_{k_1}, \ldots, t_{k_N}\} \cup \{t_{j_1}, \ldots, t_{j_M}\}, \qquad \vec{s} = \{s_{l_1}, \ldots, s_{l_H}\} \cup \{s_{i_1}, \ldots, s_{i_M}\},$$
$$\vec{t} \cap \vec{s} = \{t_{j_1}, \ldots, t_{j_M}\} = \{s_{i_1}, \ldots, s_{i_M}\}.$$

Обозначим через $\mathcal{D}$ множество всех неупорядоченных выборок без повторений из множества временных индексов, определяемых $\vec{s}$. Произвольную такую выборку будем записывать как $\vec{d} = (d_1, \ldots, d_p)$, причем $d_1 < d_2 < \cdots < d_p$. Тогда мы утверждаем, что

$$C_{\vec{B}}^{\vec{t}} \setminus C_{\vec{A}}^{\vec{s}} = \bigsqcup_{\vec{d}\in\mathcal{D}} C_{\vec{D}_{\vec{d}}}^{\vec{\tau}_{\vec{d}}}, \tag{1.5}$$

где

$$C_{\vec{D}_{\vec{d}}}^{\vec{\tau}_{\vec{d}}} = \left\{ \gamma \in \mathcal{M}(T,E) \ : \ \begin{cases} \gamma(t_{k_j}) \in B_{k_j},\ j = 1, \ldots, N, \\ \gamma(s_{l_j}) \in A_{l_j},\ s_{l_j} \in \vec{d}, \\ \gamma(s_{i_p}) \in A_{i_p} \cap B_{j_p},\ s_{i_p} = t_{j_p} \in \vec{d}, \\ \gamma(s_{l_j}) \in E \setminus A_{l_j},\ s_{l_j} \notin \vec{d}, \\ \gamma(s_{i_p}) \in B_{j_p} \setminus A_{i_p},\ s_{i_p} = t_{j_p} \notin \vec{d}. \end{cases} \right\}.$$

По построению все множества

$$\left\{ C_{\vec{D}_{\vec{d}}}^{x_0,\vec{\tau}_{\vec{d}}},\ \ \vec{d} \in \mathcal{D} \right\}$$

попарно не пересекаются. Действительно, пусть даны две выборки $\vec{d}_1$ и $\vec{d}_2$ из множества временных индексов. Тогда существует по крайней мере один временной индекс d', принадлежащий ровно одной выборке. Без ограничения общности будем считать, что $d' \in \vec{d}_1$. Если $d' \in \vec{t} \cap \vec{s}$, то для $\gamma \in C^{\vec{\tau}_{\vec{d}_1}}_{\vec{D}_{\vec{d}_1}}$ будет выполнено $\xi(d') \in A_{d'} \cap B_{d'}$, однако, для всякого $\xi \in C^{\vec{\tau}_{\vec{d}_2}}_{\vec{D}_{\vec{d}_2}}$ выполнено $\gamma(d') \notin A_{d'}$, значит рассматриваемые цилиндрические множества не пересекаются. Аналогично дело обстоит в случае, когда $d' \notin \vec{t} \cap \vec{s}$. Кроме того, для всякого $\gamma \in C^{\vec{t}}_{\vec{B}} \setminus C^{\vec{s}}_{\vec{A}}$ найдется соответствующий набор временных индексов $\vec{d} \subset \vec{s}$, по которым в точности имеет место принадлежность $A_t, (t \in \vec{d})$. Таким образом, равенство (1.5) доказано. $\square$

Расширим полуалгебру цилиндрических множеств до так называемой *цилиндрической алгебры* согласно общей конструкции кольца, порожденного полукольцом. Данную алгебру будем обозначать с помощью $\mathcal{A}_{\mathcal{C}yl}$. Комплекснозначные конечно-аддитивные меры, определенные на цилиндрической алгебре мы будем называть *цилиндрическими мерами*. Пространство цилиндрических мер обозначим символом $a(\mathcal{M}(T,E), \mathcal{A}_{\mathcal{C}yl}) = a(\mathcal{A}_{\mathcal{C}yl})$.

Лемма 8. *Существует взаимнооднозначное соответствие между случайными процессами $\{\xi(t,\bullet),\ t \in T\}$ со значениями в измеримом пространстве $(E,\mathcal{A})$ и цилиндрическими мерами из пространства $a(\mathcal{M}(T,E), \mathcal{A}_{\mathcal{C}yl})$.*

Доказательство. Для любого случайного процесса $\xi(t,\,\omega) : T \times \Omega \to E$ определим сначала значение меры μ_ξ на цилиндрических множествах согласно

$$\mu_\xi(C^{\vec{t}}_{\vec{B}}) = \mathbb{P}\left(\bigcap_{k=1}^{n} \xi^{-1}_{t_k}(B_k)\right),$$

где

$$n \in \mathbb{N}_0, \quad 0 \leqslant t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n < +\infty, \quad B_k \in \mathcal{A},\ k = 1, \dots, n.$$

Далее мера продолжается по аддитивности на всю алгебру $\mathcal{A}_{\mathcal{C}yl}$. Обратно, по значениям цилиндрической меры определяется семейство всех конечномерных распределений. $\square$

Чтобы получить описание полугрупп и других семейств операторов в пространстве функций, заданных на множестве E, с помощью случайных процессов как мер на пространстве траекторий дадим следующее

Определение 9. Обобщенной случайной величиной со значениями в пространстве E называется конечно-аддитивная комплекснозначная мера, заданная на некоторой алгебре подмножеств пространства E.

Определение 10. Обобщенным цилиндрическим случайным процессом со значениями в пространстве E (или цилиндрической мерой) называется конечно-аддитивная комплекснозначная мера, заданная на алгебре $\mathcal{A}_{\mathcal{C}yl}$ подмножеств пространства $\mathcal{M}(T,E)$.

Введенное определение позволяет каждой C_0-полугруппе операторов, действующих в пространстве $L_2(E)$, сопоставить обобщенный случайный процесс.

2. Цилиндрические меры и операторнозначные функции

2.1. Мера Фейнмана и формула Фейнмана–Каца. В лемме 8 было установлено, что с каждым случайным процессом в смысле определения 3 можно связать некоторую цилиндрическую меру на пространстве траекторий, т. е. обобщенный случайный процесс в смысле определения 10. Теперь построим соответствие между некоторым классом цилиндрических мер из $a(\mathcal{M}(T,E),\mathcal{A}_{Cyl})$, отвечающих E-значным случайным процессам, и множеством операторнозначных функций, действующих в подходящем функциональном пространстве. При этом предлагаемая нами конструкция является обобщением конструкции, предложенной Р.П. Фейнманом [4,5] и разработанной впоследствии Э. Нельсоном [6], О.Г. Смоляновым [2,53] и другими авторами.

Прежде чем приступать к описанию конструкции, напомним основные моменты связанные с мерой Фейнмана, а также получим формулу Фейнмана–Каца для уравнения Шредингера с ограниченным возмущением.

Теорема 11 ([1, VIII.31]). *Пусть $\boldsymbol{H}$ – генератор сильно непрерывной полугруппы в банаховом пространстве X, а оператор $\boldsymbol{V}$ – линейный ограниченный оператор в X. Тогда $\boldsymbol{H}+\boldsymbol{V}$ является генератором сильно непрерывной полугруппы и*

$$\lim_{n\to\infty}\sup_{t\in[0,T]}\left\|\left(e^{t(\boldsymbol{H}+\boldsymbol{V})}-\left(e^{\frac{t}{n}\boldsymbol{H}}e^{\frac{t}{n}\boldsymbol{V}}\right)^n\right)u\right\|_X=0,\quad \forall T>0,\ u\in X. \tag{2.1}$$

Рассмотрим формулу Фейнмана–Каца, полученную с помощью формулы Троттера [14]. Пусть $E=\mathbb{R}$ и $\mathcal{A}$ – σ-алгебра борелевских подмножеств $\mathbb{R}$. Пусть $X=C_b(\mathbb{R})$. Пусть $\mathbf{H}=\boldsymbol{\Delta}$ – оператор Лапласа и $\mathbf{V}$ – оператор умножения на непрерывную ограниченную функцию $f\in C_b(\mathbb{R})$. Тогда в силу теоремы Троттера для любого $u\in X$

$$e^{t(\mathbf{H}+\mathbf{V})}u(x)=\int\limits_{M([0,t],E)}\exp\left[\int\limits_{\gamma}f(\gamma(s))ds\right]u(\gamma(t))dP^x(\gamma),\qquad v\in E. \tag{2.2}$$

Пусть $x\in E$. На пространстве траекторий $\mathcal{M}_x(\mathbb{R}_+,E)=\{\gamma\in\mathcal{M}(\mathbb{R}_+,E):\ \gamma(0)=x\}$, снабженном алгеброй цилиндрических подмножеств $\mathcal{A}_{Cyl}$, мера P^x определена равенством

$$\begin{aligned}\forall\, x\in E\quad &P^x(\{\gamma:\ \gamma(0)=x;\ \gamma(t\frac{j}{n})\in B_j,\ j=1,\dots,n\})\\ &=P^x\left(A^{0,\ \frac{1}{n}t,\dots,\frac{n-1}{n}t,\ t}_{\{x\},B_1,\dots,B_{n-1},B_n}\right)=\left(e^{\frac{t}{n}\Delta}\mathbf{P}_{B_1}e^{\frac{t}{n}\Delta}\cdots\mathbf{P}_{B_{n-1}}e^{\frac{t}{n}\Delta}\chi_{B_n}\right)(x).\end{aligned} \tag{2.3}$$

Следовательно, для каждого $B_0\in\mathcal{B}(\mathbb{R})$ $\forall\, n\in\mathbb{N},\ t>0,\ B_0,\dots,B_n\in\mathcal{B}(\mathbb{R})$ имеем

$$\int\limits_{B_0}P^x\left(A^{0,\ \frac{1}{n}t,\dots,\frac{n-1}{n}t,t}_{\{x\},B_1,\dots,B_{n-1},B_n}\right)d\lambda(x)=\left(\chi_{B_0},e^{\frac{t}{n}\Delta}\mathbf{P}_{B_1}\cdots\mathbf{P}_{B_{n-1}}e^{\frac{t}{n}\Delta}\chi_{B_n}\right). \tag{2.4}$$

Равенство (2.3) определяет на полуалгебре Cyl множеств пространства

$$\mathcal{M}_x(\mathbb{R}_+, E) = \{\gamma \in \mathcal{M}(\mathbb{R}_+, E): \ \gamma(0) = x\},$$

образованной цилиндрическими множествами вида

$$A^{0,\ \frac{1}{n}t,\dots,\frac{n-1}{n}t,\ t}_{\{x\},B_1,\dots,B_{n-1},B_n}) = \left\{\gamma \in \mathcal{M}_x(\mathbb{R}_+, E): \ \gamma\left(\frac{k}{n}t\right) \in B_k, \ k = 1,\dots,n\right\}, \ B_k \in \mathcal{A},$$

функцию множества, которая неотрицательна, нормированна и счетно-аддитивна. Ее продолжение по схеме Лебега–Каратеодори на σ-алгебру, порожденную полуалгеброй Cyl, совпадает с мерой Винера [1]. В частности, носитель меры Винера сосредоточен на функциях из пространства $C([0,t],E)$, что обосновывает существование интеграла в показателе эспоненты в подынтегральном выражении в (2.2).

Рассмотрим получение формулы Фейнмана–Каца из теоремы Троттера для возмущения уравнения Шредингера свободной частицы ограниченным непрерывным исчезающим на бесконечности потенциалом. Пусть $E = \mathbb{R}^d$, $X = L_2(\mathbb{R}) \equiv H$. Зададим операторы $\mathbf{H} : D(\mathbf{H}) \to L_2(E)$ и $\mathbf{V} : D(\mathbf{V}) \to L_2(E)$, которые действуют как

$$\mathbf{H}u = i\boldsymbol{\Delta}u, \ u \in H; \quad \mathbf{V}u(x) = -if(x)u(x), \ x \in E, \quad f \in C^0_b(E),$$

причем

$$D(\mathbf{H}) \cap D(\mathbf{V}) = D(\mathbf{H}) = \{u \in L_2(E) \,|\, \Delta u \in L_2(E)\}.$$

Рассмотрим следующую задачу Коши для возмущенного гамильтониана:

$$\frac{\partial}{\partial t}u(x,t) = (\mathbf{H} + \mathbf{V})u(x,t), \quad u(x,0) = u_0(x) \in D(\mathbf{H}). \tag{2.5}$$

Явный вид решения задачи (2.5) в форме континуального интеграла может быть получен с помощью теоремы Троттера.

Поскольку $\mathbf{V} \in B(X)$, а оператор Лапласа Δ является самосопряженным в гильбертовом пространстве $X = L_2(E)$, то $e^{t(\mathbf{H}+\mathbf{V})}$ представляет собой корректно определенную сильно непрерывную полугруппу [35], разрешающую задачу Коши (2.5).

Пусть $\mathcal{R}_b$ – σ-кольцо ограниченных борелевских подмножеств пространства E и $\mathcal{A}_b$ – σ-алгебра, порожденная $\mathcal{R}_b$. Пусть Cyl_b – полуалгебра подмножеств в пространстве $\mathcal{M}(\mathbb{R}_+, E)$ цилиндрических множеств вида (1.2) при $\mathcal{A} = \mathcal{A}_b$. Пусть $\mathcal{A}_{Cyl_b}$ – алгебра подмножеств в пространстве $\mathcal{M}(\mathbb{R}_+, E)$, порожденная полуалгеброй Cyl_b.

Поскольку f ограничена и непрерывна на E, множество $f(E)$ является ограниченным промежутком. Значит, для всякого натурального номера $r \in \mathbb{N}$ найдется разбиение $\tau_r = \{\Delta^r_1, \Delta^r_2, \dots, \Delta^r_{m_r}\}$ промежутка $f(E)$ на промежутки с мелкостью разбиения $|\tau_r| = \max\limits_{k=1,\dots,m_r} \mathrm{diam}(\Delta^r_k) < \frac{1}{r}$. Веберем для каждого $k = 1,\dots,m_r$ некоторое значение V^r_k функции, принадлежащее элементу разбиения Δ^r_k. В силу условия $f \in C^0_b(E)$ множества

$B_k^r = f^{-1}(\Delta_k^r)$ борелевские для всех $k = 0, 1, \ldots, m_r$ образуют дизъюнктное разбиение пространства E, т. е. $\bigsqcup\limits_{i=0}^{m_r} B_i^r = E \Rightarrow \sum_{i=0}^{m_r} \mathbf{P}_{B_i^r} = \mathbf{I}$, где $\mathbf{P}_B$ – оператор умножения на индикаторную функцию χ_B борелевского множества B. При этом $B_k^r \in \mathcal{R}_b$ для всех $k = 1, \ldots, m_r$. По построению имеет место следующее соотношение

$$\left| f(x) - \sum_{k=1}^{m_r} V_k^r \chi_{B_k^r}(x) \right| < \frac{1}{r}, \quad \forall\, x \in E.$$

Для каждого $r \in \mathbb{N}$ введем оператор

$$\mathbf{V}_r u(x) = \sum_{k=1}^{m_r} (-i) V_k^r \chi_{B_k^r}(x) u(x), \quad x \in E,\ u \in \mathbb{L}_2(E),$$

и операторнозначные полугруппы

$$\mathbf{U}_{\mathbf{V}_r}(t)u = e^{t(\mathbf{H}+\mathbf{V}_r)}u, \quad \mathbf{U}u = e^{t\mathbf{H}}u, \quad u \in \mathbb{L}_2(E).$$

Следовательно, последовательность $\mathbf{V}_r$ сходится в сильной операторной топологии к оператору $\mathbf{V}$; достаточно применить теорему Лебега о мажорируемой сходимости. Далее, мы докажем три леммы, позволяющие перейти в формуле (2.1) от генераторов $\mathbf{V}$ к генераторам $\mathbf{V}_r$ и аппроксимировать разрешающую полугруппу задачи Коши (2.5) итерациями полугрупп $e^{t\mathbf{V}_r}$, $t \geq 0$, и $\mathbf{U}$.

Напомним некоторые свойства сходимости последовательности ограниченных операторов в сильной операторной топологии.

Лемма 12. *Пусть $(\boldsymbol{A}_k)_{k\in\mathbb{N}}$ и $(\boldsymbol{B}_k)_{k\in\mathbb{N}}$ – последовательности ограниченных линейных операторов на банаховом пространстве X, причем имеет место $\boldsymbol{A}_k \overset{\tau_{SOT}}{\to} \boldsymbol{A}$ при $k \to \infty$, а $\boldsymbol{B}_k \overset{\tau_{SOT}}{\to} \boldsymbol{B}$ при $k \to \infty$, где $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B} \in B(X)$. Тогда*

$$\boldsymbol{A}_k \circ \boldsymbol{B}_k \overset{\tau_{SOT}}{\to} \boldsymbol{A} \circ \boldsymbol{B}, \quad k \to \infty.$$

Следствие 13. *Пусть $M \in \mathbb{N}$, и для каждого $m = 1, \ldots, M$ последовательность ограниченных линейных операторов $(\boldsymbol{A}_k^m)_{k\in\mathbb{N}}$ сходится в сильной операторной топологии к ограниченному линейному оператору $\boldsymbol{A}^m$. Тогда последовательность линейных ограниченных операторов $(\boldsymbol{A}_k^1 \circ \boldsymbol{A}_k^2 \circ \ldots \circ \boldsymbol{A}_k^M)_{k\in\mathbb{N}}$ поточечно сходится к линейному ограниченному оператору $\boldsymbol{A}^1 \circ \boldsymbol{A}^2 \circ \ldots \circ \boldsymbol{A}^M$.*

Лемма 14. *Пусть $(\boldsymbol{A}_k)_{k\in\mathbb{N}}$ – последовательность ограниченных линейных операторов на банаховом пространстве X, причем $\boldsymbol{A}_k \overset{\tau_{SOT}}{\to} \boldsymbol{A}$ при $k \to \infty$, где $\boldsymbol{A} \in B(X)$. Тогда $(e^{\boldsymbol{A}_k})_{k\in\mathbb{N}}$ и $e^{\boldsymbol{A}}$ являются ограниченными линейными операторами в пространстве X и, кроме того, выполняется*

$$e^{\boldsymbol{A}_k} \overset{\tau_{SOT}}{\to} e^{\boldsymbol{A}}, \quad k \to \infty.$$

Доказательство. Ограниченность очевидна, ведь

$$\left\|e^{\mathbf{A}}\right\| \leqslant e^{\|\mathbf{A}\|} \;\Rightarrow\; e^{\mathbf{A}} \in B(X);$$

Имея в виду поточечную сходимость последовательности операторов $(\mathbf{A}_k)_{k\in\mathbb{N}}$, по теореме Банаха–Штейнгауза получаем равномерную ограниченность данной последовательности некоторой константой $C > 0$. Значит,

$$\begin{aligned}
\left\|\left(e^{\mathbf{A}_k} - e^{\mathbf{A}}\right)u\right\| &\leqslant \left\|\sum_{n=0}^{N}\left(\frac{\mathbf{A}_k^n}{n!} - \frac{\mathbf{A}^n}{n!}\right)u\right\| + \left\|\sum_{n=N+1}^{\infty}\frac{\mathbf{A}_k^n}{n!}u\right\| + \left\|\sum_{n=N+1}^{\infty}\frac{\mathbf{A}^n}{n!}u\right\| \\
&\leqslant \sum_{n=0}^{N}\left\|\left(\frac{\mathbf{A}_k^n}{n!} - \frac{\mathbf{A}^n}{n!}\right)u\right\| + \sum_{n=N+1}^{\infty}\left(\frac{(\|\mathbf{A}_k\|^n + \|\mathbf{A}\|^n)\cdot\|u\|}{n!}\right) \\
&\leqslant \sum_{n=0}^{N}\left\|\left(\frac{\mathbf{A}_k^n}{n!} - \frac{\mathbf{A}^n}{n!}\right)u\right\| + \sum_{n=N+1}^{\infty}\left(\frac{(C^n + \|\mathbf{A}\|^n)\cdot\|u\|}{n!}\right). \qquad (2.6)
\end{aligned}$$

Второе слагаемое в последнем выражении (2.6) не зависит от k. Следовательно, в силу абсолютной сходимости ряда Тейлора функции экспоненты на всей вещественной прямой, для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $N = N(\varepsilon)$, что

$$\sum_{n=N+1}^{\infty}\left(\frac{(C^n + \|\mathbf{A}\|^n)\cdot\|u\|}{n!}\right) < \varepsilon.$$

Далее, каждое слагаемое из первой суммы стремится к нулю в силу следствия 13, а значит, существует такое $K = K(\varepsilon,\, N(\varepsilon))$, что для любого $k \geqslant K$ каждое из слагаемых меньше $\dfrac{\varepsilon}{N}$. Таким образом, для любого сколь угодно малого $\varepsilon > 0$ найдется номер $K \in \mathbb{N}$, начиная с которого, т. е. для любого $k \geqslant K$, будет выполнено

$$\left\|\left(e^{\mathbf{A}_k} - e^{\mathbf{A}}\right)u\right\| < 2\varepsilon,$$

что и требовалось доказать. □

Операторы $(\mathbf{V}_r)_{r\in\mathbb{N}}$ и $\mathbf{V}$ ограничены, причем

$$\|\mathbf{V}_r\| \leqslant \max_{k=1,\dots,m_r}|V_k^r|, \qquad \|\mathbf{V}\| \leqslant \sup_{x\in E}|f(x)|.$$

Тогда в силу леммы 14 операторы $\left(e^{\mathbf{V}_r}\right)_{r\in\mathbb{N}}$ и $e^{\mathbf{V}}$ являются ограниченными и последовательность $\left(e^{\mathbf{V}_r}\right)_{r\in\mathbb{N}}$ сходится в сильной операторной топологии к $e^{\mathbf{V}}$. Введенные операторы $(\mathbf{V}_r)_{r\in\mathbb{N}}$ и сильно непрерывные полугруппы $\left(e^{t\mathbf{V}_r}\right)_{r\in\mathbb{N}}$ пригодятся при работе с аппроксимациями решения задачи Коши (2.5), также как и следующая

Лемма 15. *Пусть $(\boldsymbol{A}_k)_{k\in\mathbb{N}}$ – последовательность ограниченных линейных операторов на банаховом пространстве, причем $\boldsymbol{A}_k \overset{\tau_{SOT}}{\to} \boldsymbol{A}$, где $\boldsymbol{A} \in B(X)$. И пусть $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ такова, что*

$\|u_k - u\| \to 0$ *при* $k \to \infty$. *Тогда* $\boldsymbol{A}_k u_k \to \boldsymbol{A} u$ *по норме банахова пространства* X.

Доказательство. По теореме Банаха–Штейнгауза существует неотрицательная константа $C > 0$ такая, что $\sup_{k\in\mathbb{N}} \|\mathbf{A}_k\| < C$. Значит, справедлива следующая оценка:

$$\|\mathbf{A}_k u_k - \mathbf{A} u\| \leqslant \|\mathbf{A}_k u_k - \mathbf{A}_k u\| + \|\mathbf{A}_k u - \mathbf{A} u\| \leqslant C\|u_k - u\| + \|\mathbf{A}_k u - \mathbf{A} u\|,$$

из которой следует доказываемое утверждение. $\square$

Применяя последовательно леммы 14 и 15, для произвольного $u \in L_2(E)$ получаем при любых $t \geq 0$, $n \in \mathbb{N}$ имеет место равенство

$$\mathbf{U}\left(\frac{t}{n}\right) e^{\frac{t}{n}\mathbf{V}} \ldots \mathbf{U}\left(\frac{t}{n}\right) e^{\frac{t}{n}\mathbf{V}} u = \lim_{r\to\infty} \mathbf{U}\left(\frac{t}{n}\right) e^{\frac{t}{n}\mathbf{V}_r} \ldots \mathbf{U}\left(\frac{t}{n}\right) e^{\frac{t}{n}\mathbf{V}_r} u,$$

где предел понимается в смысле L_2-нормы. Значит, согласно теореме 11 и леммам 14, 15, для каждого $u \in L_2(E)$ и любого $t \geq 0$ верно равенство:

$$\mathbf{U}_{\mathbf{V}} u = \lim_{n\to\infty} \lim_{r\to\infty} \mathbf{U}\left(\frac{t}{n}\right) e^{\frac{t}{n}\mathbf{V}_r} \ldots \mathbf{U}\left(\frac{t}{n}\right) e^{\frac{t}{n}\mathbf{V}_r} u. \tag{2.7}$$

Теперь мы “вооружились” всем необходимым для того, чтобы в некотором смысле “разнести” часть, соответствующую возмущению и часть, соответствующую свободной невозмущенной динамике. Условимся через $\sigma^n(m_r)$ обозначать совокупность всевозможных упорядоченных выборок с повторением длины n. Тогда согласно (2.7) при всех $t \geq 0$ и любых $u \in L_2(E)$ имеем

$$\begin{aligned}
\mathbf{U}_{\mathbf{V}}(t)u &= \lim_{n\to\infty} \lim_{r\to\infty} \mathbf{U}\left(\frac{t}{n}\right) e^{\frac{t}{n}\mathbf{V}_r} \ldots \mathbf{U}\left(\frac{t}{n}\right) e^{\frac{t}{n}\mathbf{V}_r} u \\
&= \lim_{n\to\infty} \lim_{r\to\infty} \sum_{\{j_0,\ldots,j_{n-1}\}\in\sigma^n(m_r)} \mathbf{U}\left(\frac{t}{n}\right) e^{\frac{t}{n}\mathbf{V}_r} \mathbf{P}_{B^r_{j_{n-1}}} \ldots \mathbf{P}_{B^r_{j_1}} \mathbf{U}\left(\frac{t}{n}\right) e^{\frac{t}{n}\mathbf{V}_r} \mathbf{P}_{B^r_{j_0}} u \\
&= \lim_{n\to\infty} \lim_{r\to\infty} \sum_{\{j_0,\ldots,j_{n-1}\}\in\sigma^n(m_r)} \mathbf{U}\left(\frac{t}{n}\right) e^{(-i)\frac{t}{n} V^r_{j_{n-1}}} \mathbf{P}_{B_{j_{n-1}}} \ldots \mathbf{P}_{B_{j_1}} \mathbf{U}\left(\frac{t}{n}\right) e^{(-i)\frac{t}{n} V^r_{j_0}} \mathbf{P}_{B_{j_0}} u \\
&= \lim_{n\to\infty} \lim_{r\to\infty} \sum_{\{j_0,\ldots,j_{n-1}\}\in\sigma^n(m_r)} e^{(-i)\frac{t}{n}\sum_{k=0}^{n-1} V^r_{j_k}} \mathbf{U}\left(\frac{t}{n}\right) \mathbf{P}_{B_{j_{n-1}}} \ldots \mathbf{P}_{B_{j_1}} \mathbf{U}\left(\frac{t}{n}\right) \mathbf{P}_{B_{j_0}} u.
\end{aligned} \tag{2.8}$$

В силу (2.8) для любой пары ограниченных борелевских множеств B_0 и B справедливо следующее равенство

$$\begin{aligned}
&(\chi_B, \mathbf{U}_{\mathbf{V}}(t)\chi_{B_0}) \\
&= \lim_{n\to\infty} \lim_{r\to\infty} \sum_{\{j_0,\ldots,j_{n-1}\}\in\sigma^n(m_r)} e^{(-i)\frac{t}{n}\sum_{k=0}^{n-1} V^r_{j_k}} \left(\chi_B, \mathbf{U}\left(\frac{t}{n}\right) \mathbf{P}_{B_{j_{n-1}}} \ldots \mathbf{P}_{B_{j_1}} \mathbf{U}\left(\frac{t}{n}\right) \mathbf{P}_{B_{j_0}} \chi_{B_0}\right)
\end{aligned}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\lim_{r\to\infty}\sum_{\{j_0,\dots,j_{n-1}\}\in\sigma^n(m_r)} e^{(-i)\frac{t}{n}\sum_{k=0}^{n-1}V^r_{j_k}}\,\mu_{\mathrm{U}}\left(C^{\,0,\quad \frac{t}{n},\dots,\frac{(n-1)t}{n},\quad t}_{B_{j_0}\cap B_0,\,B_{j_1},\dots,B_{j_{n-1}},\,B}\right). \quad (2.9)$$

Цилиндрическое множество в (2.9) из полуалгебры Cyl_b задается равенством

$$C^{\,0,\quad \frac{t}{n},\dots,\frac{(n-1)t}{n},\quad t}_{B_{j_0}\cap B_0,\,B_{j_1},\dots,B_{j_{n-1}},\,B}$$
$$= \left\{\gamma\in\mathcal{M}(T,\,E)\,|\,\gamma(t)\in B,\,\gamma\left(\frac{(n-1)t}{n}\right)\in B_{j_{n-1}},\dots,\gamma(0)\in B_{j_0}\cap B_0\right\},$$

а отображение $\mu_{\mathrm{U}}:\mathcal{A}_{\mathcal{C}yl_b}\to\mathbb{C}$ – комплекснозначная аддитивная функция множества, задаваемая на полуалгебре $\mathcal{C}yl_b$ посредством выражения

$$\mu_{\mathrm{U}}\left(C^{\,0,\quad \frac{t}{n},\dots,\frac{(n-1)t}{n},\quad t}_{B_{j_0}\cap B_0,\,B_{j_1},\dots,B_{j_{n-1}},\,B}\right) = \left(\chi_B,\,\mathbf{U}\left(\frac{t}{n}\right)\mathbf{P}_{B_{j_{n-1}}}\dots\mathbf{P}_{B_{j_1}}\mathbf{U}\left(\frac{t}{n}\right)\mathbf{P}_{B_{j_0}}\chi_{B_0}\right) \quad (2.10)$$

при условии $B_0, B\in\mathcal{R}_b$, есть мера Фейнмана. По аддитивности она может быть продолжена на всю цилиндрическую алгебру пространства траекторий. Корректность определения такой меры, в смысле ее свойства аддитивности, мы установим в разделе 2.3 в более общем случае. Предел при $r\to\infty$ фактически означает, что мелкость разбиения множества значений функции V стремится к нулю. Поскольку правомерность соотношения (2.9) обеспечивается выполнением условий теоремы Троттера, то для полученного предела мы можем ввести следующие обозначения интегрирования по конечно аддитивной мере, что и дает известную формулу Фейнмана–Каца:

$$(\chi_{B_n},\,\mathbf{U_V}(t)\chi_{B_0}) = \int\limits_{\mathcal{M}([0,t],E)} \overline{\chi}_B(\gamma(t))\;e^{\int\limits_0^t(-i)f(\gamma(s))\,\mathrm{d}s}\chi_{B_0}(\gamma(0))\,\mathrm{d}\mu_{\mathrm{U}}(\gamma). \quad (2.11)$$

Интегрирование в показателе экспоненты объясняется тем, что на каждой непрерывной траектории сумма в показателе экспоненты в формуле (2.9) доставляет в пределе интеграл Римана от непрерывной функции. Для произвольной траектории $\gamma\in\mathcal{M}([0,t],E)$ это не так и потому правая часть (2.11) является символом, обозначающим предел (2.9). Существование повторного предела (2.9) в случае выбора меры μ_F согласно (2.10) и функции $V\in C^0_b(E)$ гарантируется леммами 14, 15 и теоремой 11. Значит, приближение функции f ступенчатыми позволяет аппроксимировать действие операторной полугруппы $\mathbf{U_V}$ интегралами от линейных комбинаций индикаторных функций по мере (2.10).

Учитывая в (2.9) выражение для свободного пропагатора согласно [1]

$$\mathbf{U}(t)u(x) = \frac{1}{(4\pi it)^{\frac{d}{2}}}\int_E e^{\frac{i|x-y|^2}{4t}}u(y)\,\mathrm{d}y, \quad u(x)\in D(\mathbf{H}),$$

и полагая $x_n = x$, $u(x)\in D(\mathbf{H})$, нетрудно видеть, что имеет место предел, понимаемый в смысле L_2-нормы:

$$e^{t(\mathbf{H}+\mathbf{V})}u(x)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{ne^{\frac{3\pi}{2}}}{4\pi t}\right)^{\frac{dn}{2}}\int_E\cdots\int_E e^{\sum_{k=1}^n i\frac{t}{n}\left(\frac{|x_k-x_{k-1}|^2n^2}{4t^2}-f(x_{k-1})\right)}u(x_0)\,\mathrm{d}x_0\dots\mathrm{d}x_{n-1}.$$

Это формула есть явное выражение для итераций в формуле Троттера. Можно при этом также задать значение меры Фейнмана на произвольном цилиндрическом множестве с $B_0,\dots,B_{n-1},B\in\mathcal{R}_b$

$$\mu_{\mathrm{U}}\left(C^{0,\ \frac{t}{n},\dots,\frac{(n-1)t}{n},\ t}_{B_{j_0}\cap B_0,B_{j_1},\dots,B_{j_{n-1}},B}\right)=\left(\frac{ne^{\frac{3\pi}{2}}}{4\pi t}\right)^{\frac{dn}{2}}\int_B\int_{B_{j_{n-1}}}\cdots\int_{B_{j_0}}e^{\sum_{k=1}^n i\frac{|x_k-x_{k-1}|^2n}{4t}}\chi_{B_0}(x_0)\,\mathrm{d}x_0\dots\mathrm{d}x_n.$$

Полученная мера Фейнмана имеет следующие примечательные свойства: она не является счетно-аддитивной и имеет неограниченную вариацию [2] в отличие, например, от меры Винера, которая представляет собой классическую счетно-аддитивную нормированную меру на пространстве траекторий. Мера Винера играет такую же роль для уравнения теплопроводности, что и полученная мера Фейнмана для уравнения Шредингера. А поскольку мы изучаем как классические случайные процессы, так и процессы, отвечающие квантовой динамике, мы расширили понятие случайного процесса в определении 10.

В данной статье предложено применение формул Фейнмана–Каца к возмущениям произвольных сильно непрерывных полугрупп, действующих в гильбертовом пространстве. Обобщение изложенных в разделе 2.1 результатов на случай произвольной полугруппы $\mathbf{U}(t),\ t\geq 0$, действующей в гильбертовом пространстве $H=L_2(E,\mathcal{A},\lambda,\mathbb{C})$, основано на интегрировании функционалов в формуле Фейнмана–Каца по мере $\mu_{\mathbf{U}}$, определенной на алгебре цилиндрических подмножеств $\mathcal{A}_{Cyl}(\mathcal{M}(\mathbb{R}_+,E))$ равенством

$$\mu_{\mathbf{U}}(C^{t_0,\dots,t_m}_{B_0,\dots,B_m})=\left(\chi_{B_m},\mathbf{U}(t_m-t_{m-1})\mathbf{P}_{B_{m-1}}\cdots\mathbf{P}_{B_1}\mathbf{U}(t_1-t_0)\chi_{B_0}\right). \tag{2.12}$$

В случае $\mathbf{U}=e^{\mathbf{\Delta}t},\ t\geq 0$, равенство (2.12) связано с мерой Винера (2.3) равенством (2.4), а в случае $\mathbf{U}=e^{-i\mathbf{\Delta}t},\ t\geq 0$, (2.12) задает меру Фейнмана (2.10).

В разделе 2.4 (см. теорему 29) построено биективное отображение, которое позволяет каждой сильно непрерывной полугруппе (а не только полугруппе, порожденной оператором Лапласа Δ) ставить в соответствие цилиндрическую меру, т. е. случайный процесс в смысле определения 10. Данный формализм позволит описать процессы, принимающие значения не только в конечномерных евклидовых пространствах, но и в топологических группах, не являющихся локально компактными ([13]). Отметим, что в бесконечномерном пространстве вопрос самосопряженности оператора Лапласа (что существенно для применения теоремы Троттера) составляет нетривиальную проблему [38, 54–57].

2.2. Кольца и функции на пространстве значений процесса. Будем полагать, что на пространстве E выделено некоторое кольцо его подмножеств $\mathcal{R}$. Минимальную алгебру, порожденную данным кольцом $\mathcal{R}$, будем обозначать с помощью $\mathcal{A}(\mathcal{R})$. Напомним, что $A \in \mathcal{A}(\mathcal{R})$ если и только если, либо $A \in \mathcal{R}$, либо $E \setminus A \in \mathcal{R}$. Также будем считать, что задана комплекснозначная конечно-аддитивная неотрицательная мера $\lambda : \mathcal{R} \to \mathbb{C}$, которая обладает свойством локальной конечности. Существование окрестности конечной меры λ для всякой точки топологического векторного пространства E необходимо для того, чтобы построить вспомогательное пространство квадратично интегрируемых по мере λ функций. Для этого рассмотрим сперва линейное пространство конечных линейных комбинаций характеристических функций множеств из кольца $\mathcal{R}$:

$$S(\mathcal{R}) = \left\{ \sum_{k=1}^{N} \alpha_k \chi_{B_k} \,|\, N \in \mathbb{N},\ B_1, \ldots, B_n \in \mathcal{R} \right\}.$$

На нем определим полуторалинейную форму согласно

$$\begin{gathered}(\chi_{B_0},\, \chi_{B_1}) \overset{\text{def}}{=} \lambda(B_0 \cap B_1), \quad \forall\, B_0, B_1 \in \mathcal{R},\\ \left(\sum_{k=1}^{N} \alpha_k \chi_{B_k},\, \sum_{k=1}^{N'} \alpha'_k \chi_{B'_k} \right) \overset{\text{def}}{=} \sum_{k=1}^{N} \sum_{l=1}^{N'} \overline{\alpha}_k \alpha'_k (\chi_{B_k},\, \chi_{B'_l}),\\ \forall\, (B_k)_{k=1}^{N},\, (B_l)_{l=1}^{N'} \subset \mathcal{R}, \quad \forall\, (\alpha_k)_{k=1}^{N},\, (\alpha_l)_{l=1}^{N'} \subset \mathbb{C}.\end{gathered}$$

Функции $f, g \in S(\mathcal{R})$ назовем эквивалентными, если справедливо равенство $(f-g, f-g) = 0$. Факторизуя пространство $S(\mathcal{R})$ по данному отношению эквивалентности и затем пополняя его по норме, порожденной скалярным произведением, получаем гильбертово пространство $H = \mathbb{L}_2(E,\, \mathcal{R},\, \lambda,\, \mathbb{C})$, т. е. пространство квадратично интегрируемых по мере λ функций.

Далее, нам потребуется еще одно вспомогательное пространство – пространство линейных комбинаций над полем $\mathbb{C}$ характеристических функций попарно непересекающихся множеств из алгебры $\mathcal{A}(\mathcal{R})$:

$$S(\mathcal{A}(\mathcal{R})) = \left\{ \sum_{k=1}^{N} \alpha_k \chi_{B_k} \,|\, N \in \mathbb{N},\ B_1, \ldots,\, B_n \in \mathcal{A}(\mathcal{R}) : B_k \cap B_j = \varnothing, \ \ \forall\, k \neq j \right\}.$$

На этом пространстве введем полунорму

$$\|f\|_\infty = \sup\{c \in \mathbb{R} : \underline{\lambda}(f^{-1}(c)) > 0\}, \quad \underline{\lambda}(B) = \sup_{\substack{S \subset B \\ S \in \mathcal{R}}} \lambda(S). \tag{2.13}$$

Первые две аксиомы полунормы, очевидно, выполнены. Покажем, что полунорма (2.13) удовлетворяет неравенству треугольника. Пусть даны произвольные $f,\, g \in S(\mathcal{A}(\mathcal{R}))$:

$$f(x) = \sum_{k=1}^{N} \alpha_k \chi_{B_k}(x), \qquad g(x) = \sum_{l=1}^{M} \beta_l \chi_{A_l}(x).$$

Тогда

$$f(x)+g(x)=\sum_{k=1}^{N}\sum_{l=1}^{M}(\alpha_k+\beta_l)\chi_{B_k\cap A_l}(x).$$

Пусть $\|f\|_\infty=\alpha_{k_0}$, $\|g\|_\infty=\beta_{l_0}$. Тогда $\forall\, k\in\{1,\ldots,N\}:\alpha_k>\alpha_{k_0}$ имеет место $\underline{\lambda}(B_k)=0$, аналогично $\forall l\in\{1,\ldots,M\}:\beta_l>\beta_{l_0}$ имеет место $\underline{\lambda}(A_l)=0$. Следовательно, для таких $k\in 1,\,\ldots,\,m$ получаем $\underline{\lambda}(C)=0$, если $C=B_k\cap C'$, для всех $C'\in\mathcal{A}(\mathcal{R})$. То же верно и для множеств A_l.

Значит, указанные номера k, l могут не учитываться при нахождении полунормы $\|f+g\|_\infty$. Поэтому $\|f+g\|_\infty\leqslant\alpha_{k_0}+\beta_{l_0}=\|g\|_\infty+\|f\|_\infty$. Равенство достигается в случае, если имеет место неравенство $\underline{\lambda}(A_{l_0}\cap B_{k_0})>0$.

Производя процедуру факторизации, получим нормированное пространство

$$S^\infty_{\mathcal{A}}(E,\,\mathcal{R},\,\lambda,\,\mathbb{C})\overset{\mathrm{def}}{=}S(\mathcal{A}(\mathcal{R}))/\{f\in S(\mathcal{A}(\mathcal{R})):\|f\|_\infty=0\}.$$

Обозначим через $\mathbb{L}_\infty(E,\,\mathcal{R},\,\lambda,\,\mathbb{C})$ пополнение по норме $\|\cdot\|_\infty$ введенного пространства $S^\infty_{\mathcal{A}}(E,\,\mathcal{R},\,\lambda,\,\mathbb{C})$.

Лемма 16. *Пусть $f\in\mathbb{L}_\infty(E,\,\mathcal{R},\,\lambda,\,\mathbb{C})$. Тогда оператор $\boldsymbol{M}_f$ умножения на функцию f корректно задан на пространстве H, причем справедливо неравенство*

$$\|\mathbf{M}_f u\|_H\leqslant\|f\|_{\mathbb{L}_\infty}\|u\|_H. \tag{2.14}$$

Доказательство. Возьмем $f\in S^\infty_{\mathcal{A}}(E,\,\mathcal{R},\,\lambda,\,\mathbb{C})$, $u\in H$ и $u_n\in S(\mathcal{A}(\mathcal{R})):\|u_n-u\|\to 0$. Тогда если

$$f(x)=\sum_{k=1}^{N}\alpha_k\chi_{B_k}(x),\quad u_n(x)=\sum_{k=1}^{M_n}\beta^n_k\chi_{A^n_k}(x),\ \ A^n_k\cap A^n_j=\varnothing,\ k\neq j,$$

то имеет место равенство

$$\|f(x)u(x)\|^2=\left\|\sum_{k=1}^{N}\alpha_k\chi_{B_k}(x)u(x)\right\|^2=\lim_{n\to\infty}\left\|\sum_{k=1}^{N}\alpha_k\chi_{B_k}(x)u_n(x)\right\|^2$$
$$=\lim_{n\to\infty}\left\|\sum_{k=1}^{N}\alpha_k\chi_{B_k}(x)\sum_{k=1}^{M_n}\beta^n_k\chi_{A^n_k}(x)\right\|^2=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{N}\sum_{l=1}^{M_n}|\alpha_k|^2\cdot|\beta^n_l|^2\cdot\lambda_{A^n_l\cap B_k}.$$

Пусть теперь $\|f\|_\infty=\alpha_{k_0}$, тогда для любого $k\neq k_0$, либо $\alpha_k<\alpha_{k_0}$, либо $\underline{\lambda}(B_k)=0$. Следовательно справедлива оценка

$$\|f(x)u(x)\|^2\leqslant|\alpha_{k_0}|^2\|u\|^2. \tag{2.15}$$

Если $f\in\mathbb{L}_\infty(E,\,\mathcal{R},\,\lambda,\,\mathbb{C})$, то существует $\|\cdot\|_\infty$–фундаментальная последовательность $f_n\in S^\infty_{\mathcal{A}}(E,\,\mathcal{R},\,\lambda,\,\mathbb{C})$ такая, что $\|f_n-f\|_\infty\to 0$ при $n\to\infty$. Из неравенства (2.15) легко заключаем, что последовательность $\mathbf{M}_{f_n}$ также будет фундаментальной в пространстве $B(H)$, снабженном операторной нормой. Так как пространство H полно, то и пространство $B(H)$ тоже является полным, а значит фундаментальная последовательность $\mathbf{M}_{f_n}$ будет сходится по норме пространства $B(H)$, причем ее пределом будет оператор $\mathbf{M}_f$. На основании этого факта уже легко получить оценку

$$\|\mathbf{M}_f u\| \leqslant \|(\mathbf{M}_{f_n} - \mathbf{M}_f)u\| + \|\mathbf{M}_{f_n} u\| \leqslant \lim_{m\to\infty} \|\mathbf{M}_{f_n} - \mathbf{M}_{f_m}\| \cdot \|u\| + \|\mathbf{M}_{f_n} u\|$$
$$\leqslant \lim_{m\to\infty} \|f_n - f_m\| \cdot \|u\| + \|f_n\|_\infty \|u\|.$$

Осуществляя предельный переход n, $m \to \infty$, получаем требуемое неравенство (2.14). □

Введем пространство операторнозначных функций, которое будет нами использоваться для построения биективного отображения на пространстве цилиндрических мер. Обозначим символом $(\mathcal{M}(\mathbb{R}_+, B(H)), \tau)$ локально выпуклое пространство отображений положительной полуоси $[0, +\infty)$ в банахово пространство $B(H)$ линейных ограниченных операторов в H с топологией, определяемой следующим семейством функционалов:

$$\{\phi_{t,u,v} \mid t \in \mathbb{R}_+,\ u, v \in H\}, \qquad \phi_{t,u,v}(\mathbf{F}) = |(\mathbf{F}(t)u, v)|.$$

Однако, мы будем работать не со всем пространством $\mathcal{M}(\mathbb{R}_+, B(H))$, а только с его подпространством $\mathcal{M}_m(\mathbb{R}_+, B(H))$, состоящим из $B(H)$-значных функций на $\mathbb{R}_+ = [0, +\infty)$, значения которых в начальный момент времени принадлежат абелевой подалгебре $\mathcal{A}_m(H)$, содержащей линейные операторы вида $\mathbf{M}_f$, где $f \in \mathbb{L}_\infty(E, \mathcal{R}, \lambda, \mathbb{C})$. О необходимости такого ограничения для задания меры по операторнозначной функции см. раздел 2.3.

Введем пространство мультипликативно ступенчатых операторнозначных функций $S_\infty(\mathbb{R}_+, \mathbb{L}_\infty(E))$, где введено обозначение $\mathbb{L}_\infty(E) = \mathbb{L}_\infty(E, \mathcal{R}, \lambda, \mathbb{C})$. Операторнозначная функция $\mathbf{F}(t)$ принадлежит $S_\infty(\mathbb{R}_+, \mathbb{L}_\infty(E))$, если для каждого числа $T > 0$ существует такое конечное разбиение $[0, T] = \sqcup_{k=1}^K A_k$ отрезка $[0, T]$ на попарно непересекающиеся промежутки $A_1, \ldots, A_K$, что имеет место равенство

$$\mathbf{F}(t) = \sum_{k=1}^K \chi_{A_k}(t) \mathbf{M}_{f_k},$$

здесь $\mathbf{M}_{f_k}$ – оператор умножения на функцию f_k из пространства $\mathbb{L}_\infty(E, \mathcal{R}, \lambda, \mathbb{C})$, т. е. $\mathbf{M}_{f_k} u(x) = f_k(x) u(x)$, где $f_k(x) \in \mathbb{L}_\infty(E, \mathcal{R}, \lambda, \mathbb{C})$ при каждом $k \in \mathbb{N}$. Далее, пополняя пространство $S_\infty(\mathbb{R}_+, \mathbb{L}_\infty(E))$ по норме $\|\mathbf{F}(\cdot)\|_{\mathbb{L}_\infty(\mathbb{R}_+, \mathbb{L}_\infty(E))} = \sup_{s\in\mathbb{R}_+} ||\mathbf{F}(s)|_{\mathbb{L}_\infty(E, \mathcal{R}, \lambda, \mathbb{C})}|$, получаем банахово пространство $\mathbb{L}_\infty(\mathbb{R}_+, \mathbb{L}_\infty(E))$. Поскольку $f_k \in \mathbb{L}_\infty(E, \mathcal{R}, \lambda, \mathbb{C})$ при каждом $k \in \overline{1, K}$, то для всякого $N \in \mathbb{N}$ найдется простая функция

$$f_k^N(x) = \sum_{m=1}^{m_N^k} \alpha_m^{N,k} \chi_{B_m^{N,k}}(x),\ \ x \in E, \quad \alpha_m^{N,k} \in \mathbb{C},\ B_m^{N,k} \in \mathcal{A}(\mathcal{R}),$$

такая, что выполняется неравенство

$$\|f_k - f_k^N\|_{\mathbb{L}_\infty(E)} \leq \frac{1}{N}, \quad \forall\, k \in \overline{1, K}.$$

Для каждого $k \in \overline{1, K}$ введем последовательность линейных операторов $\mathbf{M}_{f_k^N}$, $N \in \mathbb{N}$. Тогда в силу леммы 16 для любого $k \in \overline{1, K}$ справедливо

$$\|\mathbf{M}_{f_k^N} u(x) - \mathbf{M}_{f_k} u(x)\|_H \leq \|f_k(x) - f_N^k(x)\|_{\mathbb{L}_\infty(E)}\, \|u\|_H \to 0, \quad N \to \infty.$$

Таким образом, справедлива

Лемма 17. *Пусть* $\mathbf{F} \in \mathbb{L}_\infty(\mathbb{R}_+, \mathbb{L}_\infty(E))$. *Тогда для любых* $T > 0$, $\epsilon > 0$ *существует разбиение отрезка* $[0, T]$ *на промежутки* $A_1, \ldots, A_m$ *и набор ступенчатых функций* $f_1, \ldots, f_m \in S^\infty_{\mathcal{A}}(E, \mathcal{R}, \lambda, \mathbb{C})$ *такие, что*

$$\sup_{t \in [0,T]} \|F(t) - \sum_{k=1}^m \chi_{A_k}(t) f_k\|_{\mathbb{L}_\infty(E, \mathcal{R}, \lambda, \mathbb{C})} < \epsilon.$$

2.3. Построение меры на $\mathcal{A}_{\mathcal{C}yl}$ по оператор-функции. Построим биекцию между пространством $\mathcal{M}_m(\mathbb{R}_+, B(H))$ и пространством $a(\mathcal{M}(\mathbb{R}_+, E),\ \mathcal{A}_{\mathcal{C}yl})$ конечно-аддитивных комплекснозначных мер, заданных на измеримом пространстве $(\mathcal{M}(\mathbb{R}_+ E),\ \mathcal{A}_{\mathcal{C}yl})$. Определим отображение

$$\mathbf{\Lambda} : \mathcal{M}_m(\mathbb{R}_+, B(H)) \to a(\mathcal{A}_{\mathcal{C}yl}), \qquad \mathbf{\Lambda}[\mathbf{F}] = \mu^{\mathbf{F}}, \qquad \mathrm{Im}\, \mathbf{\Lambda} = a_{\mathbf{\Lambda}}(\mathcal{A}_{\mathcal{C}yl}). \tag{2.16}$$

Сначала определим значение меры $\mu_{\mathbf{F}}$ на цилиндрических множествах из полуалгебры $\mathcal{C}yl$, которые обладают базой, содержащей только множества из кольца $\mathcal{R}$, по следующей формуле

$$\begin{gathered} \mu^{\mathbf{F}}\left(C^{\vec{t}}_{\vec{B}}\right) = \left(\chi_{B_n}, \mathbf{F}(t_n - t_{n-1})\mathbf{P}_{B_{n-1}} \cdots \mathbf{P}_{B_1}\mathbf{F}(t_1 - t_0)\chi_{B_0}\right), \\ n \in \mathbb{N}, \quad B_i \in \mathcal{R}, \quad \forall\, i = 0, \ldots, n. \end{gathered} \tag{2.17}$$

Здесь действующий в H оператор вида $\mathbf{P}_B$ есть оператор умножения на индикаторную функцию множества B из кольца $\mathcal{R}$.

Для $n = 0$ и произвольного $t_0 \geqslant 0$, принимая во внимание, что

$$\mathbf{F}(0) \in \mathcal{A}_m : \ \mathbf{F}(0)(\bullet) = f(x)(\bullet),$$

где $f \in \mathbb{L}_\infty(E,\ \mathcal{R},\ \lambda,\ \mathbb{C})$, положим

$$\mu^{\mathbf{F}}(C^{t_0}_B) = \begin{cases} (\chi_B,\, \mathbf{F}(0)\chi_B) = \displaystyle\int_B f(x)\,\mathrm{d}\lambda(x), \quad B \in \mathcal{R}, \\ M_0 - \left(\chi_{E\setminus B},\, \mathbf{F}(0)\chi_{E\setminus B}\right) = M_0 - \displaystyle\int_{E\setminus B} f(x)\,\mathrm{d}\lambda(x), \quad B \in \mathcal{A}(\mathcal{R}),\ B \notin \mathcal{R}. \end{cases} \tag{2.18}$$

Заметим, что константа $M_0 = \mu^{\mathbf{F}}(\mathcal{M}(E))$ может быть выбрана произвольно подобно константе интегрирования при выборе потенциала. Константа M_0 не имеет значения для построения биекции, поскольку, как мы убедимся далее, для того, чтобы восстановить по мере из образа отображения $\mathbf{\Lambda}$ операторнозначную функцию, нам потребуются только значения меры на тех цилиндрических множествах из полуалгебры $\mathcal{C}yl$, база которых содержит только множества, принадлежащие кольцу $\mathcal{R}$.

Пусть $C_{\vec{B}}^{\vec{t}} \in \mathcal{C}yl$ и будем считать, что $m \in \mathbb{N}$ максимальный номер среди тех, которые соответствуют множествам в базе $\vec{B}$, не входящим в кольцо $\mathcal{R}$. Тогда значение меры $\mu_{\mathbf{F}}$ на цилиндрическом множестве $C_{\vec{B}}^{\vec{t}}$ удовлетворяет следующему равенству:

$$\mu^{\mathbf{F}}\left(C_{B_0,\dots,B_{m-1},B_m,B_{m+1},\dots,B_n}^{t_0,\dots,t_{m-1},\ t_m,\ \ t_{m+1},\ \dots,t_n}\right) = \mu^{\mathbf{F}}\left(C_{B_0,\dots,B_{m-1},B_{m+1},\dots,B_n}^{t_0,\dots,t_{m-1},\ t_{m+1},\ \dots,t_n}\right) - \mu^{\mathbf{F}}\left(C_{B_0,\dots,B_{m-1},E\setminus B_m,B_{m+1},\dots,B_n}^{t_0,\dots,t_{m-1},\ t_m,\ \ t_{m+1},\ \dots,t_n}\right). \quad (2.19)$$

Таким образом, индуктивно разворачивая данную формулу, можно получить значение функции $\mu^{\mathbf{F}}$ на всех множествах из полукольца $\mathcal{C}yl$. Следующая лемма и ее следствие устанавливают, что данная функция действительно является цилиндрической мерой.

Лемма 18 ([10])**.** *Функция множества $\mu^{\mathbf{F}} : \mathcal{C}yl \to \mathbb{C}$ определяемая из (2.17)–(2.19) на полуалгебре $\mathcal{C}yl$ является аддитивной.*

Доказательство. Для любого $C_{\vec{B}}^{\vec{s}} \in \mathcal{C}yl$ рассмотрим его произвольное дизъюнктное разбиение на множества из полуалгебры. Докажем, что значение функции $\mu^{\mathbf{F}}$ на множестве $C_{\vec{B}}^{\vec{s}}$ равно сумме значений на элементах разбиения. Будем доказывать это в три этапа.

Докажем свойство для случая разбиения, состоящего только из двух непересекающихся множеств. Случай произвольного конечного разбиения сводится к случаю разбиения на два множества с помощью индукции.

I. Пусть при некотором $m \in \{0, 1, \dots, n\}$ множество $C_{\vec{B}}^{\vec{s}}$ удовлетворяет условию $B_m = A_m \bigsqcup C_m$, где A_m, $C_m \in \mathcal{A}(\mathcal{R})$ и $A_m \cap C_m = \varnothing$. Докажем, что в этом случае имеет место

$$\mu^{\mathbf{F}}\left(C_{\dots,\ A_m\sqcup C_m,\ \dots}^{\dots,\ s_m,\ \ \dots}\right) = \mu^{\mathbf{F}}\left(C_{\dots,\ A_m\ \dots}^{\dots,\ s_m,\dots}\right) + \mu^{\mathbf{F}}\left(C_{\dots,\ C_m,\ \dots}^{\dots,\ s_m,\ \dots}\right). \quad (2.20)$$

Возможны несколько различных ситуаций.

1) Пусть база цилиндрического множества $C_{\vec{B}}^{\vec{s}}$ включает только множества, содержащиеся в кольце $\mathcal{R}$. Тогда равенство (2.20) для $n \geqslant 1$ непосредственно следует из (2.17) и того, что для непересекающихся множеств A_m и C_m выполняется $\mathbf{P}_{A_m\sqcup C_m} = \mathbf{P}_{A_m} + \mathbf{P}_{C_m}$. Если $n = 0$, тогда из (2.18) может быть получена цепочка равенств:

$$\begin{aligned}
\mu^{\mathbf{F}}(C_{B_0}^{t_0}) &= (\chi_{A_0\sqcup C_0}(x),\, \mathbf{F}(0)\chi_{A_0\sqcup C_0}(x)) = (\chi_{A_0}(x) + \chi_{C_0}(x),\, \mathbf{F}(0)(\chi_{A_0}(x) + \chi_{C_0}(x))) \\
&= (\chi_{A_0}(x),\, \mathbf{F}(0)\chi_{A_0}(x)) + (\chi_{C_0}(x),\, \mathbf{F}(0)\chi_{C_0}(x)) + (\chi_{A_0}(x),\, \mathbf{F}(0)\chi_{C_0}(x)) + (\chi_{C_0}(x),\, \mathbf{F}(0)\chi_{A_0}(x)) \\
&= \mu^{\mathbf{F}}(C_{C_0}^{t_0}) + \mu^{\mathbf{F}}(C_{A_0}^{t_0}),
\end{aligned}$$

так как
$$(\chi_{C_0}(x),\, \mathbf{F}(0)\chi_{A_0}(x)) = (\chi_{A_0}(x),\, \mathbf{F}(0)\chi_{C_0}(x)) = \int\limits_{A_0\cap C_0} f(x)\,\mathrm{d}\lambda(x) = 0.$$
Именно здесь для нас важно условие $\mathbf{F}(0)\in\mathcal{A}_m(H)$.

2) Будем полагать, что $B_m\in\mathcal{R}$, но в базе имеются множества, которые не принадлежат кольцу. В этом случае свойство аддитивности будем устанавливать индукционно по количеству таких множеств. Применим метод математической индукции. Пусть B_k для некоторого $k\in\{0,1,\dots n\}$, $k\neq m$, есть единственное множество в базе, дополнение которого принадлежит кольцу $\mathcal{R}$. Тогда при помощи (2.19) применим результаты первого пункта и снова воспользовавшись (2.19) установим справедливость (2.20).

Предположение индукции: пусть при некотором $k\in\mathbb{N}$: $2\le k\le n-1$ равенство (2.20) имеет место для всех цилиндрических множеств, база которых содержит j множеств не принадлежащих кольцу $\mathcal{R}$, при $j=1,\dots,k-1$. Доказательство того, что свойство аддитивности выполняется и на цилиндрических множествах, база которых содержат ровно $j=k$ множеств не принадлежащих кольцу $\mathcal{R}$, производится аналогичным образом: применяем (2.19), для образовавшихся в результате этого множеств уже применимо предположение индукции, а далее группируем с учетом (2.19).

3) Теперь будем считать, что $B_m = A_m\bigsqcup C_m\notin\mathcal{R}$. Покажем, что ровно одно из множеств A_m и C_m содержится в кольце $\mathcal{R}$. Предположим противное. Тогда в соответствии с определением $\mathcal{A}(\mathcal{R})$ имеем $E\setminus A_m,\ E\setminus C_m\in\mathcal{R}$, и более того, $C_m\subset E\setminus A_m$ и $A_m\subset E\setminus C_m$, а значит выполнено

$$E = (E\setminus A_m)\cup(E\setminus C_m) = (E\setminus A_m)\cup((E\setminus C_m)\setminus(E\setminus A_m))\in\mathcal{R}.$$

Пришли к противоречию, что доказывает требуемое. Без ограничения общности будем считать,что $A_m\notin\mathcal{R}$. Этот случай также будем исследовать в несколько этапов.

3.1) Пусть $A_m\bigsqcup C_m = E$ и s_m находится среди временных индексов, соответствующих множествам из базы $\vec{B}$, которые не принадлежат кольцу $\mathcal{R}$. Тогда из (2.19) получаем

$$\begin{aligned}\mu^{\mathbf{F}}\left(C^{\dots,s_{m-1}\ ,s_m\ ,s_{m+1}\ ,\dots}_{\dots,B_{m-1},A_m,B_{m+1},\dots}\right) &= \mu^{\mathbf{F}}\left(C^{\dots,s_{m-1}\ ,s_{m+1}\ ,\dots}_{\dots,B_{m-1},B_{m+1},\dots}\right) - \mu^{\mathbf{F}}\left(C^{\dots,s_{m-1}\ ,s_m\ ,s_{m+1}\ ,\dots}_{\dots,B_{m-1},C_m,B_{m+1},\dots}\right)\\ &= \mu^{\mathbf{F}}\left(C^{\dots,s_{m-1}\ ,s_m,s_{m+1}\ ,\dots}_{\dots,B_{m-1}\ E\ \ ,B_{m+1},\dots}\right) - \mu^{\mathbf{F}}\left(C^{\dots,s_{m-1}\ ,s_m\ ,s_{m+1}\ ,\dots}_{\dots,B_{m-1},C_m,B_{m+1},\dots}\right).\end{aligned}$$

Откуда следует (2.20).

3.2) Положим теперь, что $A_m\bigsqcup C_m\neq E$ и s_m по-прежнему временной индекс, соответствующий множеству из базы $\vec{B}$, которое не содержится в кольце. Запишем теоретико-множественное соотношение

$$E = B_m\bigsqcup(E\setminus B_m) = A_m\bigsqcup\Big((E\setminus B_m)\bigsqcup C_m\Big),\quad (E\setminus B_m)\bigsqcup C_m\in\mathcal{R}.$$

Тогда на основе соотношения выше, равенства (2.19) и пункта 2), получаем выполнение условия аддитивности

$$\mu^{\mathbf{F}}\left(C^{\dots,s_{m-1},s_m,s_{m+1},\dots}_{\dots,B_{m-1},A_m,B_{m+1},\dots}\right)=\mu^{\mathbf{F}}\left(C^{\dots,s_{m-1},s_{m+1},\dots}_{\dots,B_{m-1},B_{m+1},\dots}\right)-\mu^{\mathbf{F}}\left(C^{\dots,s_{m-1},\quad s_m\quad,s_{m+1},\dots}_{\dots,B_{m-1},(E\setminus B_m)\bigsqcup C_m,B_{m+1},\dots}\right)$$
$$=\mu^{\mathbf{F}}\left(C^{\dots,s_{m-1},s_{m+1},\dots}_{\dots,B_{m-1},B_{m+1},\dots}\right)-\mu^{\mathbf{F}}\left(C^{\dots,s_{m-1},\ s_m\ ,s_{m+1},\dots}_{\dots,B_{m-1},(E\setminus B_m),B_{m+1},\dots}\right)-\mu^{\mathbf{F}}\left(C^{\dots,s_{m-1},s_m,s_{m+1},\dots}_{\dots,B_{m-1},C_m,B_{m+1},\dots}\right)$$
$$=\mu^{\mathbf{F}}\left(C^{\dots,s_{m-1},s_m,s_{m+1},\dots}_{\dots,B_{m-1},B_m,B_{m+1},\dots}\right)-\mu^{\mathbf{F}}\left(C^{\dots,s_{m-1},s_m,s_{m+1},\dots}_{\dots,B_{m-1},C_m,B_{m+1},\dots}\right).$$

Таким образом, если при некотором $m\in\{0,1,\dots,n\}$ множество $C^{\vec{s}}_{\vec{B}}$ удовлетворяет условию $B_m=A_m\bigsqcup C_m$, где $A_m,C_m\in\mathcal{A}(\mathcal{R})$ и $A_m\cap C_m=\varnothing$, то выполняется (2.20).

II. На следующей стадии доказательства мы рассмотрим конкретный вид разбиения цилиндрического множества $C^{\vec{s}}_{\vec{B}}$. Будем полагать, что для каждого $j\in\{1,\dots,n\}$ имеет место

$$B_j=\bigsqcup_{k=1}^{w}A^j_k. \tag{2.21}$$

Обозначим через Σ совокупность всех возможных отображений

$$\sigma:\{1,\dots,n\}\to\{1,\dots,w\}.$$

Тогда всякое цилиндрическое множество, содержащееся в выбранном дизъюнктном разбиении, имеет следующий вид

$$C^{\vec{s}}_{\vec{D}_\sigma}=C^{s_1,\quad\dots,\ s_j,\quad\dots,\ s_n}_{A^1_{\sigma(1)},\dots,\ A^j_{\sigma(j)},\dots,\ A^n_{\sigma(n)}}. \tag{2.22}$$

Воспользуемся результатом пункта I для $m=1$, затем для $m=2$, и так далее до $m=n$. Получим, что

$$\mu^{\mathbf{F}}\left(C^{\vec{s}}_{\vec{B}}\right)=\mu^{\mathbf{F}}\left(\bigsqcup_{\sigma\in\Sigma}C^{\vec{s}}_{\vec{D}_\sigma}\right)=\sum_{\sigma\in\Sigma}\mu^{\mathbf{F}}\left(C^{\vec{s}}_{\vec{D}_\sigma}\right).$$

III. Для завершения доказательства остается показать, что если множество $C^{\vec{s}}_{\vec{B}}\in\mathcal{C}yl$ может быть представлено как объединение конечного числа попарно непересекающихся цилиндрических множеств $C^{\vec{\tau}_\alpha}_{\vec{A}_\alpha}\in\mathcal{C}yl$, где $\alpha=1,\dots,M$, то тогда имеет место равенство

$$\sum_{\alpha=1}^{M}\mu^{\mathbf{F}}\left(C^{\vec{\tau}_\alpha}_{\vec{A}_\alpha}\right)=\mu^{\mathbf{F}}\left(\bigsqcup_{\alpha=1}^{M}C^{\vec{\tau}_\alpha}_{\vec{A}_\alpha}\right)=\mu^{\mathbf{F}}(C^{\vec{s}}_{\vec{B}}).$$

Мы вправе ограничиться рассмотрением ситуации, когда $\vec{\tau}_\alpha=\vec{s}$ при всех $\alpha=1,\dots,M$. Воспользовавшись свойствами полуалгебры, построим разбиение аналогичное (2.21), (2.22), которое бы было согласовано с разбиением $C^{\vec{t}}_{\vec{B}}=\bigsqcup_{\alpha=1}^{M}C^{\vec{\tau}_\alpha}_{\vec{A}_\alpha}$, или иначе говоря, являлось бы его измельчением:

$$C^{\vec{\tau}_\alpha}_{\vec{A}_\alpha}=\bigsqcup_{\sigma\in\Sigma_\alpha}C^{\vec{\tau}_\alpha}_{\vec{D}_\sigma},\quad\forall\,\alpha=1,\dots,M,$$

Это утверждение также легко доказать индукцией по количеству временных компонент. Теперь воспользуемся доказанным в пункте II и получим требуемое

$$\mu^{\mathbf{F}}(C^{\vec{s}}_{\vec{B}}) = \sum_{\sigma\in\Sigma}\mu^{\mathbf{F}}\left(C^{\vec{s}}_{\vec{D}_\sigma}\right) = \sum_{\alpha=1}^{M}\sum_{\sigma\in\Sigma_\alpha}\mu^{\mathbf{F}}\left(C^{\vec{s}}_{\vec{D}_\sigma}\right) = \sum_{\alpha=1}^{M}\mu^{\mathbf{F}}\left(C^{\vec{\tau_\alpha}}_{\vec{A}_\alpha}\right). \qquad \square$$

Теорема 19. *Конечно-аддитивная функция множества $\mu^{\boldsymbol{F}}$ имеет единственное продолжение до конечно-аддитивной меры на алгебре $\mathcal{A}_{\mathcal{C}yl}$. Отображение (2.16)*

$$\mathbf{\Lambda} : \mathcal{M}_m(\mathbb{R}_+, B(H)) \to a(\mathcal{A}_{\mathcal{C}yl}),$$

определяемое условиями (2.17)–(2.19), инъективно.

Доказательство. По стандартной процедуре продолжения конечно-аддитивной функции с полуалгебры на порожденную алгебру получаем, что при каждом $\mathbf{F}\in\mathcal{M}_m(\mathbb{R}_+, B(H))$ заданная условиями (2.17)–(2.19) аддитивная функция $\mu^{\mathbf{F}}: \ Cyl\to\mathbb{C}$ однозначно продолжается до комплекснозначной конечно-аддитивной меры $\mu^{\mathbf{F}} = \mathbf{\Lambda}(\mathbf{F})\in a(\mathcal{A}_{Cyl})$.

Докажем инъективность отображения Λ. Пусть $\mathbf{F}_1(t)\neq\mathbf{F}_2(t)$ для некоторого $t\geq 0$. Тогда в силу того, что пространство $S(\mathcal{R})$ всюду плотно в пространстве H, получаем $\mathbf{F}_1(t)|_{S(\mathcal{R})}\neq\mathbf{F}_2(t)|_{S(\mathcal{R})}$. Поскольку всякий ограниченный оператор на гильбертовом пространстве однозначно определяется своей квадратичной формой, то получаем, что найдется $f\in S(\mathcal{R})$ такая, что $(f, \mathbf{F}_1(t)f)\neq(f, \mathbf{F}_2(t)f)$. А в силу того, что f представима в виде конечной линейной комбинации индикаторных функций множеств из кольца, получаем, что найдутся множества $B_1', B_2'\in\mathcal{R}$:

$$\mu^{\mathbf{F}_1}\left(C^{\,0,t}_{\,B_1',B_2'}\right) = (\chi_{B_2'}, \mathbf{F}_1(t)\chi_{B_1'}) \neq (\chi_{B_2'}, \mathbf{F}_2(t)\chi_{B_1'}) = \mu^{\mathbf{F}_2}\left(C^{\,0,t}_{\,B_1',B_2'}\right). \qquad \square$$

2.4. Построение оператор-функции по цилиндрической мере на $\mathcal{A}_{\mathcal{C}yl}$. Восстановим операторнозначную функцию по заданной мере $\mu\in a_{\mathbf{\Lambda}}(\mathcal{A}_{\mathcal{C}yl})$. Дадим некоторые определения, которые в дальнейшем сыграют ключевую роль.

Пусть $S(\mathcal{R})$ – пространство простых $\mathcal{R}$-измеримых функций $E\to\mathbb{C}$, являющихся линейными комбинациями индикаторных функций множеств из кольца $\mathcal{R}$. Для произвольного числа $n\in\mathbb{N}$, произвольного набора неотрицательных чисел $t_0, t_1, \ldots, t_n$ таких, что $t_0\leq t_1\leq\ldots\leq t_n$, и произвольного набора множеств $B_1,\ldots B_{n-1}\in\mathcal{A}(R)$ рассмотрим полуторалинейную форму $\beta^{t_0,t_1,\ldots,t_n}_{\mu;\,B_1,\ldots,B_{n-1}}$ на линейном пространстве $S(\mathcal{R})$, заданную на упорядоченной паре (χ_{B_0}, χ_{B_n}) индикаторных функций $B_0, B_n\in\mathcal{R}$ равенством

$$\beta^{t_0,t_1,\ldots,t_n}_{\mu;\ B_1,\ldots,B_{n-1}}(\chi_{B_0}, \chi_{B_n}) = \mu\left(C^{t_0,t_1,\ldots,t_n}_{B_0,B_1,\ldots,B_n}\right) \tag{2.23}$$

и продолженную на пространство $S(\mathcal{R})$ по условию полуторалинейности.

Заметим, что тогда из условия (2.23) при $n=1$ и $t_1=t_0$ следует, что при $n=0$ для произвольного $t_0>0$ на линейном пространстве $S(\mathcal{R})$ полуторалинейная форма $\beta^{t_0}_{\mu}$

определена с помощью равенств

$$\beta_\mu^{t_0}(\chi_{B_0}, \chi_{B_n}) = \mu\left(C^{t_0}_{B_0\bigcap B_1}\right), \quad B_0, B_1 \in \mathcal{R}. \tag{2.24}$$

Для непрерывного продолжения полуторалинейных форм с плотного в пространстве H подпространства $S(\mathcal{R})$ на все пространство H достаточно потребовать от меры μ обладания следующим свойством.

Определение 20. Цилиндрическую меру μ из $a(\mathcal{A}_{\mathcal{C}yl})$ назовем *непрерывной по базе*, если она удовлетворяет следующим условиям

$$\begin{gathered}\forall\ n \in \mathbb{N},\ \forall\ t_0 \le \dots \le t_n \in \mathbb{R}_+,\ \ \exists\, M \in (0, +\infty): \quad \forall\ B_1, \dots, B_{n-1} \in \mathcal{A}(\mathcal{R}),\\ \sup_{u,v\in S(\mathcal{R}):\ \|u\|_H=\|v\|_H=1} \left|\beta^{t_0,t_1,\dots,t_n}_{\mu;\ B_1,\dots,B_{n-1}}(u,v)\right| \le M\,\|u\|_H\,\|v\|_H.\end{gathered} \tag{2.25}$$

Заметим, что из условия (2.25) при $n = 1$ и $t_0 = t_1$ следует, что для любого $t_0 \ge 0$ существует число $M \in (0, +\infty)$ такое, что

$$\sup_{u,v\in S(\mathcal{R}):\ \|u\|_H=\|v\|_H=1} \left|\beta^{t_0}_{\mu}(u,v)\right| \le M\,\|u\|_H\,\|v\|_H.$$

Семейство непрерывных по базе цилиндрических мер, заданных на алгебре $\mathcal{A}_{\mathcal{C}yl}$, будем обозначать через $a^{Bc}(\mathcal{A}_{\mathcal{C}yl})$.

Определение 21. Мера $\mu \in a(\mathcal{A}_{\mathcal{C}yl})$ называется *стационарной*, если для всякого $\tau > 0$ и любого $n \in \mathbb{N}$ для произвольных $0 \le t_0 \le \dots \le t_n$ и $B_0, B_1, \dots, B_n \in \mathcal{A}(\mathcal{R})$ имеет место равенство

$$\mu\left(C^{t_0,\dots,t_n}_{B_0,\dots,B_n}\right) = \mu\left(C^{t_0+\tau,\dots,t_n+\tau}_{B_0,\dots,B_n}\right).$$

Множество стационарных цилиндрических мер, заданных на алгебре $\mathcal{A}_{\mathcal{C}yl}$, обозначается символом $a^S(\mathcal{A}_{\mathcal{C}yl})$.

Замечание 22. Поясним предварительно: свойство непрерывности по базе цилиндрической меры позволяет получить ограниченную полуторалинейную форму в H, значения которой на индикаторных функциях суть значения цилиндрической меры на множествах из $\mathcal{C}yl$. По ограниченной полуторалинейной форме однозначно восстанавливается многопараметрическая операторнозначная функция. Далее, свойство стационарности предоставит возможность осуществить переход к однопараметрической оператор-функции.

Лемма 23. *Всякая мера $\mu \in \mathrm{Im}\boldsymbol{\Lambda} = a_{\boldsymbol{\Lambda}}(\mathcal{A}_{\mathcal{C}yl})$ является непрерывной по базе и стационарной, т. е.*

$$a_{\boldsymbol{\Lambda}}(\mathcal{A}_{\mathcal{C}yl}) \subset a^{Bc}(\mathcal{A}_{\mathcal{C}yl}) \bigcap a^S(\mathcal{A}_{\mathcal{C}yl}) \equiv a^{Bc,S}(\mathcal{A}_{\mathcal{C}yl}).$$

Доказательство. Действительно, пусть $\mathbf{F} \in \mathcal{M}_m(\mathbb{R}_+, B(H))$ и $\mu^{\mathbf{F}} = \boldsymbol{\Lambda}(\mathbf{F})$. Тогда при $n = 0$ для любого $t_0 \ge 0$ в силу (2.18) имеем

$$\beta^{t_0}_{\mu^{\mathbf{F}}}(\chi_{B_0}, \chi_{B_1}) = \mu^{\mathbf{F}}\left(C^{t_0}_{D_0\bigcap B_1}\right) = \left(\chi_{B_0\bigcap B_1}, \mathbf{F}(0)\chi_{B_0\bigcap B_1}\right)$$

согласно (2.24) при любых $B_0, B_1 \in \mathcal{R}$. Следовательно, форма $\beta_{\mu^{\mathbf{F}}}^{t_0}$ удовлетворяет условию (2.25). Поскольку нормы проекторов $\mathbf{P}_B$ не превосходят единицы, то для любых $B_1, \dots, B_{n-1} \in \mathcal{A}(\mathcal{R})$ и для произвольного набора временных индексов $0 \leq t_0 < \dots < t_n$ выполняется следующее неравенство

$$\left|(\chi_{B_n}, \mathbf{F}(s_n - s_{n-1})\mathbf{P}_{B_{n-1}} \dots \mathbf{P}_{B_1}\mathbf{F}(s_1 - s_0)\chi_{B_0})\right| \\ \leqslant \prod_{k=1\dots n} \|\mathbf{F}(s_k - s_{k-1})\|_{B(H)} \sqrt{\lambda(B_0)\lambda(B_n)}. \quad (2.26)$$

Пусть $u = \sum_{k=1}^{n} \delta_k \chi_{D_k}$, $v = \sum_{k=1}^{n} \beta_k \chi_{B_k} \in S(\mathcal{R})$ при некоторых $\delta_j, \beta_i \in \mathbb{C}$ и $D_j, B_i \in \mathcal{R}$. Тогда по определению продолжения функции (2.23) на пространство $S(\mathcal{R})$ по условию полуторалинейности справедливо равенство

$$\beta_{\mu;\, B_1,\dots,B_{n-1}}^{t_0,\dots,t_n}(u, v) = (u, \mathbf{F}(s_n - s_{n-1})\mathbf{P}_{B_{n-1}} \dots \mathbf{P}_{B_1}\mathbf{F}(s_1 - s_0)v)$$

и, следовательно, справедлива оценка

$$\left|(u, \mathbf{F}(s_n - s_{n-1})\mathbf{P}_{B_{n-1}} \dots \mathbf{P}_{B_1}\mathbf{F}(s_1 - s_0)v)\right| \leqslant \prod_{k=1\dots n} \|\mathbf{F}(s_k - s_{k-1})\|_{B(H)} \|u\|_H \|v\|_H, \quad (2.27)$$

доказывающая непрерывность по базе меры $\mu^{\mathbf{F}}$. Стационарность меры $\mu^{\mathbf{F}}$ следует из условий (2.17), (2.18). □

Теорема 24. *Мера $\mu \in a^{Bc}(\mathcal{A}_{\mathcal{C}yl})$ задает двухпараметрическое семейство ограниченных линейных операторов $\mathbf{U}_\mu(t_1, t_2)$, $t_1, t_2 \geq 0$, в пространстве H.*

Доказательство. Для произвольно зафиксированных $0 \leq t_0, \dots, t_n$ и $B_1, \dots, B_{n-1} \in \mathcal{R}$ функционал (2.23) определяет ограниченную (2.25) полуторалинейную форму на пространстве $S(\mathcal{R})$, а значит может быть по непрерывности продолжен единственным образом до ограниченной полуторалинейной формы $\beta_{\mu;\, B_1,\dots,B_{n-1}}^{t_0,t_1,\dots,t_n}$ на всем H. Следовательно (см. [58]), с ограниченной полуторалинейной формой $\beta_{\mu;\, B_1,\dots,B_{n-1}}^{t_0,t_1,\dots,t_n}$ ассоциирован ограниченный линейный оператор $\mathbf{U}_{\mu;\, B_1,\dots,B_{n-1}}^{t_0,\dots,t_n}$, действующий в H, по формуле:

$$\left(g,\, \mathbf{U}_{\mu;\, B_1,\dots,B_{n-1}}^{t_0,\dots,t_n} f\right) = \beta_{\mu;\, B_1,\dots,B_{n-1}}^{t_0,t_1,\dots,t_n}(f,\, g), \quad f, g \in H.$$

При этом существует зависящая от выбранных $t_0 \leq \dots \leq t_n \in \mathbb{R}_+$ постоянная $M \in (0, +\infty)$ такая, что для любых $B_1, \dots, B_{n-1} \in \mathcal{A}(\mathcal{R})$ выполняется неравенство

$$\left\|\mathbf{U}_{\mu;\, B_1,\dots,B_{n-1}}^{t_0,\dots,t_n}\right\|_{B(H)} \leq M.$$

В частности, для $n = 1$ мы получаем

$$\left(\chi_{B_1},\, \mathbf{U}_\mu^{t_0,t_1}\chi_{B_0}\right) = \beta_\mu^{t_0,t_1}(\chi_{B_0}, \chi_{B_1}) = \mu\left(C_{B_0,\, B_1}^{t_0,\, t_1}\right), \quad C_{B_0,\, B_1}^{t_0,\, t_1} \in \mathcal{C}yl. \quad (2.28)$$

Таким образом, можно построить двухпараметрическую операторнозначную функцию $\mathbf{U}_\mu : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \to B(H)$ при любых $t_0, t_1 \in \mathbb{R}_+ :\ t_0 < t_1$, которая в силу взаимно однозначного соответствия между ограниченными полуторалинейными формами в H и ограниченными линейными операторами из $B(H)$, а также ввиду всюду плотности пространства $S(\mathcal{R})$ в пространстве H, однозначно определяется равенством (2.28) по значениям

$$(\chi_{B_1}, \mathbf{U}_\mu(t_0,\, t_1)\chi_{B_0}) = \mu\left(C^{t_0,\, t_1}_{B_0,\, B_1}\right), \quad \forall\, B_0, B_1 \in \mathcal{R};\ \ t_0, t_1 \in \mathbb{R}_+,\ \ t_0 \le t_1. \tag{2.29}$$

□

Множества мер $a^S(\mathcal{A}_{\mathcal{C}yl})$ и $a^{Bc}(\mathcal{A}_{\mathcal{C}yl})$ являются, как нетрудно проверить, линейными подпространствами в пространстве мер $a(\mathcal{A}_{\mathcal{C}yl})$. Рассмотрим линейное пространство $a^{S,Bc}(\mathcal{A}_{Cyl}) = a^S(\mathcal{A}_{\mathcal{C}yl}) \cap a^{Bc}(\mathcal{A}_{\mathcal{C}yl})$.

Теорема 25. *Равенство*

$$\mathbf{V}(\mu) = \mathbf{F}_\mu, \quad \mu \in a^{S,Bc}(\mathcal{A}_{Cyl}),$$

где

$$\mathbf{F}_\mu(t) = \mathbf{U}_\mu(0,\, t), \quad t \ge 0, \tag{2.30}$$

задает на линейном пространстве $a^{S,Bc}(\mathcal{A}_{Cyl})$ *линейное отображение*

$$\mathbf{V}:\ a^{S,Bc}(\mathcal{A}_{Cyl}) \to \mathcal{M}_m(\mathbb{R}_+, B(H)).$$

Доказательство. В силу стационарности меры μ двухпараметрическое семейство ограниченных линейных операторов, заданное условием (2.29), удовлетворяет равенству

$$\mathbf{U}_\mu(0,\, t) = \mathbf{U}_\mu(\tau,\, t+\tau), \quad \tau, t \ge 0.$$

Следовательно, равенство (2.30) определяет операторнозначное отображение

$$\mathbf{F}_\mu \in \mathcal{M}(\mathbb{R}_+, B(H)).$$

Значение операторнозначного отображения при $t = 0$ в силу (2.30) и (2.29) обладает свойством

$$(\chi_{B_0}, \mathbf{F}_\mu(0)\chi_{B_1}) = \mu\left(C^{0,\ 0}_{B_0, B_1}\right) = \mu\left(C^{0}_{B_0 \bigcap B_1}\right) = \left(\chi_{B_0 \bigcap B_1}, \mathbf{F}_\mu(0)\chi_{B_0 \bigcap B_1}\right). \tag{2.31}$$

Остается доказать, что заданный равенством (2.31) оператор $\mathbf{F}_\mu(0)$ самосопряжен и принадлежит алгебре $\mathcal{A}_m$.

В силу (2.31), $\mathbf{F}_\mu(0) \in B(H)$ и $(\mathbf{F}_\mu(0)\chi_{B_0'}, \chi_{B_0''}) = 0$ для любых $B_0', B_0'' \in \mathcal{R}$ таких, что $B_0' \bigcap B_0'' = \varnothing$. Тогда оператор $\mathbf{F}_\mu(0)$ симметричен на плотном в пространстве H подпространстве $S(\mathcal{R})$. Симметричный плотно определенный оператор $\mathbf{F}_\mu(0)$ ограничен и допускает продолжение по непрерывности на пространство H, которое является ограниченным самосопряженным оператором.

Далее, для всякой функции $u \in S(\mathcal{R})$ вида $u = \sum\limits_{k=1}^{n} \alpha_k \chi_{B_k}$ при некоторых $n \in \mathbb{N}$, $\alpha_j \in \mathbb{C}$, $B_j \in \mathcal{R}$ и для всякого множества $B \in \mathcal{R}$ из условия (2.31) получаем, что справедлива цепочка равенств

$$(u,\, \mathbf{F}_\mu(0)\mathbf{P}_B u) = \sum_{j,k=1}^{n} \alpha_k \bar{\alpha}_j \left(\chi_{B_k},\, \mathbf{F}_\mu(0)\chi_{B_j \cap B}\right) = \sum_{k=1}^{n} |\alpha_k|^2 \left(\chi_{B_k \cap B},\, \mathbf{F}_\mu(0)\chi_{B_k \cap B}\right)$$
$$= \sum_{k=1}^{n} |\alpha_k|^2 \left(\chi_{B_k \cap B},\, \mathbf{F}_\mu(0)\chi_{B_k}\right) = (\mathbf{P}_B u,\, \mathbf{F}_\mu(0)u) = (u,\, \mathbf{P}_B \mathbf{F}_\mu(0)u)\,.$$

Из равенства квадратичных форм операторов на всюду плотном подпространстве $S(\mathcal{R})$ следует их равенство на всем гильбертовом пространстве H:

$$\mathbf{F}_\mu(0)\mathbf{P}_B = \mathbf{P}_B \mathbf{F}_\mu(0) \quad \forall\, B \in \mathcal{R}.$$

Значит, оператор $\mathbf{F}^\mu(0)$ принадлежит коммутанту абелевой алгебры $\mathcal{A}_m(H)$, где $H = \mathbb{L}_2(E, \mathcal{R}, \lambda, \mathbb{C})$. Абелева алгебра операторов $\mathcal{A}_m(H)$ изоморфна алгебре $\mathbb{L}_\infty(E, \mathcal{R}, \lambda, \mathbb{C})$. Следовательно, она является алгеброй фон Неймана и совпадает со своим вторым коммутантом. А поскольку алгебра $\mathcal{A}_m(H)$ коммутативна, то ее коммутант совпадает с ее вторым коммутантом. Поэтому $\mathbf{F}^\mu(0) \in \mathcal{A}_m(H)$. $\square$

Таким образом, по значениям цилиндрической меры $\mu \in a^{S,\,Bc}(\mathcal{A}_{Cyl})$ на двувременных и одновременных цилиндрах построена операторнозначная функция $\mathbf{F}_\mu \in \mathcal{M}_m(\mathbb{R}_+, B(H))$. Отображение $a^{S,\,Bc}(\mathcal{A}_{Cyl}) \to \mathcal{M}_m(\mathbb{R}_+, B(H))$ линейно, но не инъективно. Для получения инъективного отображения сузим область определения до класса мер, значения которых на произвольных цилиндрических множествах восстанавливаются по значениям на двувременных и одновременных цилиндрических множествах.

Определение 26. Непрерывную по базе меру μ из семейства $a^{Bc}((\mathcal{A}_{\mathcal{C}yl}))$ будем называть *марковской*, если

$$\mathbf{U}_{\mu;\, B_{m+1},\, \ldots,\, B_{n-1}}^{t_m,\, \ldots,\, t_{n-1},\, t_n}\, \mathbf{P}_{B_m} \mathbf{U}_{\mu;\, B_1,\, \ldots\, B_{m-1}}^{t_0,\, \ldots\, t_{m-1},\, t_m} = \mathbf{U}_{\mu;\, B_1,\, \ldots B_{n-1}}^{t_0,\, \ldots\, t_n},$$
$$\forall\, t_0, \ldots, t_n :\, 0 \le t_0 < \ldots < t_m < \ldots\, t_n; \quad \forall\, B_1, \ldots, B_{n-1} \in \mathcal{R}. \tag{2.32}$$

Если условие (2.32)) выполнено при всех $B_1, \ldots, B_{n-1} \in \mathcal{A}_{\mathcal{R}}$, то мера μ называется строго марковской.

Через $a^M((\mathcal{A}_{\mathcal{C}yl}))$ $(a^{M^*}((\mathcal{A}_{\mathcal{C}yl})))$ обозначим совокупность марковских (строго марковских) цилиндрических мер, заданных на цилиндрической алгебре $\mathcal{A}_{\mathcal{C}yl}$. В наших обозначениях имеем $a^{M^*}((\mathcal{A}_{\mathcal{C}yl})) \subset a^M((\mathcal{A}_{\mathcal{C}yl})) \subset a^{Bc}((\mathcal{A}_{\mathcal{C}yl}))$.

Замечание 27. Данное свойство позволяет получать значения многовременной операторнозначной функции $\mathbf{U}_{\mu;\, B_0,\, \ldots B_{n-1}}^{t_0,\, \ldots\, t_n}$ по значениям двувременных оператор-функций $\mathbf{U}_\mu(t_0, t_1)$,

$t_0, t_1 \in \mathbb{R}_+$. Например, значения меры на цилиндрах с трехвременными основаниями задаются равенством $\mathbf{U}^{t_0,t_1,t_2}_{\mu;\,B_1} = \mathbf{U}^{t_1,t_2}_{\mu}\,\mathbf{P}_{B_1}\,\mathbf{U}^{t_0,t_1}_{\mu}$ при любом $B_1 \in \mathcal{A}_R$. Продолжение меры на всю алгебру $\mathcal{A}_{Cyl}$ может быть проведено с применением индукциии.

Лемма 28. *Всякая мера из множества* $a_{\mathbf{\Lambda}}(\mathcal{A}_{Cyl})$ *является марковской.*

Доказательство. Если $\mu \in a_{\mathbf{\Lambda}}(\mathcal{A}_{Cyl})$, то существует функция $\mathbf{F} \in \mathcal{M}_m(\mathbb{R}_+, B(H))$ такая, что $\mu = \mathbf{\Lambda}(\mathbf{F}) \equiv \mu^{\mathbf{F}}$. Для произвольно зафиксированных $0 \le t_0, \dots, t_n$ и $B_1, \dots, B_{n-1} \in \mathcal{R}$ рассмотрим многопараметрическое отображение $\mathbf{U}^{t_0, \dots t_n}_{\mu^{\mathbf{F}};\, B_0, \dots B_{n-1}}$, порожденное цилиндрической мерой $\mu^{\mathbf{F}} \in a_{\mathbf{\Lambda}}(\mathcal{A}_{Cyl})$. Тогда для произвольных $B_0, B_n \in \mathcal{R}$ имеем

$$\left(\chi_{B_n},\, \mathbf{U}^{t_0, \dots, t_n}_{\mu^{\mathbf{F}};\, B_1, \dots, B_{n-1}} \chi_{B_0}\right) = \mu^{\mathbf{F}}\left(C^{\vec{t}}_{\vec{B}}\right) = (\chi_{B_n}, \mathbf{F}(t_n - t_{n-1}) \dots \mathbf{P}_{B_1}\mathbf{F}(t_1 - t_0)\chi_{B_0})\,.$$

Полученное равенство имеет место для индикаторных функций произвольных множеств $B_0, B_n \in \mathcal{R}$. По линейности скалярного произведения в H можно заключить, что оно будет выполняться и для произвольных функций $f, g \in S(\mathcal{R})$. В виду того, что $S(\mathcal{R})$ всюду плотно в H получаем равенство

$$\begin{aligned}\mathbf{U}^{t_0, \dots, t_n}_{\mu^{\mathbf{F}};\, B_1, \dots, B_{n-1}} &= \left[\mathbf{F}(t_n - t_{n-1})\mathbf{P}_{B_{n-1}} \dots \mathbf{F}(t_{m+1} - t_m)\right] \mathbf{P}_{B_m} \left[\mathbf{F}(t_m - t_{m-1}) \dots \mathbf{P}_{B_1}\mathbf{F}(t_1 - t_0)\right] \\ &= \mathbf{U}^{\;t_m, \dots, t_{n-1}, t_n}_{\mu^{\mathbf{F}};\, B_{m+1}, \dots, B_{n-1}} \mathbf{P}_{B_m} \mathbf{U}^{\;t_0, \dots t_{m-1}, t_m}_{\mu^{\mathbf{F}};\, B_1, \dots B_{m-1}}, \end{aligned} \tag{2.33}$$

означающее выполнение условия марковости для меры $\mu^{\mathbf{F}}$. □

Исследуем отображение, обратное к инъективному отображению $\mathbf{\Lambda}$.

Теорема 29. *Образ* $a_{\mathbf{\Lambda}}(\mathcal{C})$ *отображения* $\mathbf{\Lambda}$ *совпадает с пространством* $a^{Bc,S,M}(\mathcal{A}_{Cyl})$. *Определенное равенством* (2.30) *отображение* $\mathbf{V} : a^{Bc,S,M}(\mathcal{A}_{Cyl}) \to \mathcal{M}_m(\mathbb{R}_+, B(H))$ *является обратным к биектиному отображению* $\mathbf{\Lambda} : \mathcal{M}_m(\mathbb{R}_+, B(H)) \to a_{\mathbf{\Lambda}}(\mathcal{A}_{Cyl})$.

Доказательство. Согласно леммам 23, 28 имеем $\mathrm{Im}\mathbf{\Lambda} = a_{\mathbf{\Lambda}}(\mathcal{A}_{Cyl}) \subset a^{Bc,S,M}(\mathcal{A}_{Cyl})$. Кроме того, из (2.33) и теоремы 25 следует, что если $\mu^{\mathbf{F}} \in \mathrm{Im}\mathbf{\Lambda}$, то $\mathbf{F}_{\mu^{\mathbf{F}}}(t) = \mathbf{F}(t)$, т. е.

$$\mathbf{V} \circ \mathbf{\Lambda} = \mathbf{I} \,:\, \mathcal{M}_m(\mathbb{R}_+, B(H)) \to \mathcal{M}_m(\mathbb{R}_+, B(H)).$$

Согласно теореме 25 имеет место вложение $\mathrm{Im}(\mathbf{V}) \subset \mathcal{M}_m(\mathbb{R}_+, B(H))$. Для некоторой меры $\mu \in a^{Bc,S,M}(\mathcal{A}_{Cyl})$ рассмотрим цилиндрическую меру $\mathbf{\Lambda} \circ \mathbf{V}(\mu) = \mu^{\mathbf{V}(\mu)}$. Нам нужно установить равенство мер μ и $\mu^{\mathbf{V}(\mu)}$. А так как обе меры обладают свойством марковости (2.32) (согласно лемме 28), достаточно установить равенство их значений на произвольном двувременном и одновременном цилиндрическом множестве из полукольца $\mathcal{C}yl$. Для любого двупараметрического $C^{t_0, t_1}_{B_0, B_1} \in \mathcal{C}yl$ и всякого одновременного $C^{t}_{B} \in \mathcal{C}yl$ при помощи (2.29), (2.30) и (2.31) имеем

$$\mu^{\mathbf{V}(\mu)}\left(C^{t_0, t_1}_{B_0, B_1}\right) = (\chi_{B_1},\, \mathbf{V}(\mu)[t_1]\chi_{B_0}) = \mu^{\mathbf{V}(\mu)}\left(C^{t_0, t_1}_{B_0, B_1}\right),$$

$$\mu^{\mathbf{V}(\mu)}\left(C_B^t\right) = (\chi_B,\, \mathbf{V}(\mu)\chi_B) = \mu\left(C_B^t\right).$$

Значит, $\mu = \mathbf{\Lambda}(\mathbf{V}(\mu))$ и $\mu \in a_{\mathbf{\Lambda}(\mathcal{A}_{\mathbf{Cyl}})}$, и поэтому $a_{\mathbf{\Lambda}}(\mathcal{A}_{\mathcal{C}yl}) = a^{Bc,S,M}(\mathcal{A}_{\mathcal{C}yl})$. □

Лемма 30. *Функция* $\mathbf{F} \in \mathcal{M}_m$, *удовлетворяющая условию* $\mathbf{F}(0) = \mathbf{I}$, *является однопараметрической полугруппой тогда и только тогда, когда мера* $\mu^{\mathbf{F}} = \mathbf{\Lambda}(\mathbf{F})$ *является строго марковской.*

Доказательство. Если функция $\mathbf{F}$ является однопараметрической полугруппой, то из (2.33) следует выполнение (2.32) при произвольных $B_1, \ldots, B_{n-1} \in \mathcal{A}_{\mathcal{R}}$. В обратную сторону утверждение леммы следует из (2.32) при $n = 2$, $m = 1$ и $B_1 = E$. □

3. Сходимость случайных процессов

3.1. Обобщенная слабая сходимость случайных векторов. Пусть E – векторное пространство, $\mathcal{R}$ – кольцо подмножеств, а $\mathcal{A}(\mathcal{R})$ – минимальная алгебра, порожденная кольцом $\mathcal{R}$. Будем рассматривать случайные величины, распределения которых суть конечно-аддитивные меры ограниченной вариации, определенные на данном кольце множеств $\mathcal{R}$. Банахово пространство таких мер договоримся обозначать через $ba(E,\, \mathcal{R})$. Нам потребуется усреднять операторы сдвига аргумента, заданные на подходящем функцональном пространстве. В качестве пространства функций бесконечномерного аргумента для представления алгебры операторов сдвига предлагается брать пространство функций, квадратично интегрируемых по некоторой неотрицательной конечно-аддитивной мере λ, заданной на кольце множеств $\mathcal{R}$. Тогда гарантировать равномерную ограничесть семейства операторов сдвига аргумента на вектор может тот факт, что функциональное пространство строится относительно трансляционно инвариантной меры:

$$\|\mathbf{S}_h f\|^2 = \left\|\mathbf{S}_h\left(\sum_{k=1}^{n} \alpha_k \chi_{B_k}(x)\right)\right\|^2 = \sum_{k,\,j=1}^{n} \alpha_k \overline{\alpha}_j (\chi_{B_j+h}(x),\, \chi_{B_k+h}(x))$$
$$= \sum_{k,\,j=1}^{n} \alpha_k \overline{\alpha}_j \lambda(B_j \cap B_k) = \sum_{k=1}^{n} |\alpha_k|^2 \lambda(B_k) = \|f\|^2, \quad \forall\, f \in S(\mathcal{R}).$$

Следовательно, чтобы применять операторный подход для анализа операторов сдвига на случайные векторы гильбертова пространства E, меру на E для построения пространства представления стоит выбрать трансляционно инвариантной. Выбор трансляционно инвариантной меры на пространстве E приводит к необходимости рассмотрения конечно-аддитивных мер, определенных на некотором кольце $\mathcal{R}$ подмножеств пространства E.

Пусть $\mathcal{X}$ – некоторое локально-выпуклое пространство $\mathcal{R}|\mathcal{B}(\mathbb{C})$-измеримых функций, инвариантное относительно оператора сдвига аргумента на произвольный вектор пространства E. Здесь $\mathcal{B}(\mathbb{C})$ – борелевская σ-алгебра множеств в $\mathbb{C}$.

Определение 31. *Оператором свертки с мерой* $\mu \in a(E, \mathcal{R})$ назовем линейный ограниченный оператор Φ_μ, действующий на пространстве $\mathcal{X}$ по формуле

$$\Phi_\mu u(x) = \int_E u(x-y)\,\mathrm{d}\mu(y) \quad \forall\, u \in \mathcal{X},\ \forall\, x \in E, \tag{3.1}$$

при условии, что зависящий от параметра интеграл (3.1) существует.

Замечание 32. Если μ представляет собой распределение случайной величины ξ, то оператор (3.1) есть ни что иное, как математическое ожидание оператора $S_\xi : \mathcal{X} \to \mathcal{X}$ сдвига на случайный вектор ξ (пространство $\mathcal{X}$ инвариантно относительно оператора сдвига аргумента на произвольный вектор пространства E). Для счетно-аддитивных мер и измеримых относительно соответствующих σ-алгебр функций это утверждение является следствием [17, теорема 3.6.1]. Распишем для случая конечно-аддитивных мер и ограниченных $\mathcal{R}|\mathcal{B}(\mathbb{C})$-измеримых функций из $\mathcal{X}$:

$$(\mathbb{E}\mathbf{S}_\xi)u(x) = \int\limits_\Omega u(x-\xi(\omega))\,\mathrm{d}\mathbb{P}(\omega) = \int_\Omega f\circ\xi(\omega)\,\mathrm{d}\mathbb{P}(\omega) = \lim_{|\tau|\to 0}\sum_{j=1}^N a_j \mathbb{P}\left((f\circ\xi)^{-1}(\Delta_j)\right).$$

Здесь

$$f\circ\xi(\Omega) = \bigsqcup_{j=1}^N \Delta_j, \quad a_j \in \Delta_j,\ j=1,\dots,N, \quad \tau = \{\Delta_1,\dots,\Delta_N\}, \quad |\tau| = \max_{k=1,\dots,N} \operatorname{diam}(\Delta_k),$$

$$(\mathbb{E}S_\xi)u(x) = \lim_{N\to\infty}\sum_{j=1}^N a_j \mathbb{P}\circ\xi^{-1}\left(f^{-1}(\Delta_j)\right) = \int_E u(x-y)\,\mathrm{d}\mu(y).$$

Если рассматриваемая функция неограничена, но измерима и интегрируема по указанной мере, то в качестве отрезка $[A,\, B]$ берем последовательность $[A_N,\, B_N]$ такую, что $A_N \to -\infty$ и $B_N \to +\infty$ при $N \to \infty$. Для каждого номера $N \in \mathbb{N}$ повторяем рассуждения и, затем, переходим к пределу, что обосновано в силу предположения об интегрируемости функции.

Обозначим согласно $\mathcal{L}(\mathcal{X})$ локально-выпуклое пространство линейных ограниченных операторов на $\mathcal{X}$, а через $ba_{\mathcal{X}}(E, \mathcal{R})$ – подпространство мер, для которых свертка с мерой функций из $\mathcal{X}$ определена. Если $ba_{\mathcal{X}}(E, \mathcal{R})$ непусто, то имеем отображение

$$\Psi :\ ba_{\mathcal{X}}(E, \mathcal{R}) \to \mathcal{L}(\mathcal{X}) :\ \Psi(\mu) = \Phi_\mu.$$

Определение 33. Последовательность мер $(\mu_n)_{n=1}^\infty \subset ba_{\mathcal{X}}(E, \mathcal{R})$ называется сходящейся $(\mathcal{L}(\mathcal{X}(E)),\, \tau)$-*слабо* к мере $\mu \in ba(E, \mathcal{R})$, если последовательность операторов $\Phi_{\mu_n} = \Psi(\mu_n)$, действующих в пространстве $\mathcal{X}(E)$ согласно (3.1), сходится в пространстве $\mathcal{L}(\mathcal{X}(E))$, снабженном некоторой топологией τ, к оператору $\Phi_\mu = \Psi(\mu)$.

Определение 34. Последовательность случайных величин (ξ_n) называется сходящейся

$(\mathcal{L}(\mathcal{X}(E)),\, \tau)$-*слабо по распределению* к случайной величине ξ, если последовательность мер $(\mu_n)_{n=1}^{\infty} \subset ba_{\mathcal{X}}(E,\, \mathcal{R})$, где

$$\mu_n(A) = \mathbb{P} \circ \xi_n^{-1}(A), \quad \forall\, A \in \mathcal{R},$$

сходится $(\mathcal{L}(\mathcal{X}(E)),\, \tau)$-*слабо* к мере μ, определяемой по формуле

$$\mu(A) = \mathbb{P} \circ \xi^{-1}(A), \quad \forall\, A \in \mathcal{R}.$$

В статье [33] теорема 2 показывает, что определение 33 является обобщением *слабой сходимости радоновых мер*, если в качестве $\mathcal{X}$ выбрать пространство непрерывных и ограниченных функций на метрическом пространстве E, снабженное топологией поточечной сходимости, а в качестве топологии на пространстве $\mathcal{L}(\mathcal{X})$ принять сильную операторную топологию τ_{SOT}.

Такое обобщение понятия слабой сходимости мер позволяет индуцировать топологии вида $\Psi^{-1}(\tau)$ на пространстве мер по топологии на пространстве операторов $\mathcal{L}(\mathcal{X})$. При этом классическая слабая топология на пространстве мер является частным случаем в общей схеме. К примеру, зафиксируем в качестве топологии на пространстве операторов $\mathcal{L}(\mathcal{X})$ сильную операторную топологию. Тогда, если топология на пространстве $\mathcal{X}$ определяется семейством полунорм $\{\phi_\alpha,\, \alpha \in \mathcal{I}\}$, то $\mathcal{X}$-слабая топология $\tau_{\mathcal{X}}^{w}$ на пространстве $ba_{\mathcal{X}}(E,\, \mathcal{R})$ задается семейством функционалов $\{\Phi_{\alpha,\, u},\, \alpha \in \mathcal{I},\, u \in \mathcal{X}\}$, действие которых для каждой меры $ba_{\mathcal{X}}(E,\, \mathcal{R})$ дается формулой

$$\Phi_{\alpha,\, u}(\mu) = \phi_\alpha \left(\int_E u(x-y)\, \mathrm{d}\mu(y) \right), \quad \alpha \in \mathcal{I},\ u \in \mathcal{X}.$$

Различные топологии на пространстве мер и взаимосвязи между ними были исследованы в работе [33].

Замечание 35. В последней статье приведен пример последовательности распределений на конечномерном евклидовом пространстве E, сходящихся $(\mathbb{L}_2(E),\, \tau_w)$-слабо, но не сходящихся $C_b(E)$-слабо.

3.2. Обобщенная слабая сходимость случайных процессов

Определение 36. Последовательность случайных процессов $\{\xi_n(t,\, \bullet),\ t \in T\}$, задаваемых согласно определению 10, сходится $(\mathcal{L}(\mathcal{X}_t(E_t)),\, \tau_t)$-*слабо поточечно*, если для любого временного индекса $t \in T$ имеет место $(\mathcal{L}(\mathcal{X}_t(E_t)),\, \tau_t)$-слабая сходимость по распределению последовательности $\xi_n(t)$ случайных величин к случайной величине $\xi(t)$.

Теорема Чернова позволяет исследование сходимости мер свести к вопросу о сходимости операторнозначных отображений

Теорема 37 ([36], Чернов)**.** *Пусть X – банахово, а $B(X)$ – снабженное операторной нормой банахово пространство линейных ограниченных операторов, действующих на X. Рассмотрим сильно непрерывную операторнозначную функцию $\boldsymbol{F}\colon [0,\ \infty) \to B(X)$, удовлетворяющую следующим условиям:*

- $\boldsymbol{F}(0) = \boldsymbol{I}$;
- *найдется такое $a \in \mathbb{R}$, что $\|\boldsymbol{F}(t)\|_{B(X)} \leqslant e^{at}$ при всех $t \geqslant 0$;*
- *существует линейный плотно определенный оператор $\boldsymbol{A} : D(\boldsymbol{A}) \to X$, для которого имеет место равенство $\boldsymbol{A} = \lim\limits_{t\to 0} \frac{\boldsymbol{F}(t)-\boldsymbol{I}}{t}$ в смысле сильной операторной топологии.*

Тогда, если оператор $\boldsymbol{A}$ замыкаем и его замыкание является генератором сильно непрерывной полугруппы $\boldsymbol{U}(t)$, $t \geqslant 0$, то для любого $f \in X$ и произвольного $T > 0$ имеет место

$$\lim_{n\to\infty} \left\{ \sup_{t\in[0,\,T]} \left\| \left(\left(\boldsymbol{F}\left(\frac{t}{n}\right)\right)^n - \boldsymbol{U}(t) \right) f \right\|_X \right\} = 0.$$

Пусть $\mathcal{X}$ – некоторое банахово пространство $\mathcal{R}$-измеримых функций, инвариантное относительно оператора сдвига аргумента на произвольный вектор пространства E.

Теорема 38. *Пусть $\xi(t,\bullet)_{t\geqslant 0}$ – случайный процесс в смысле определения 3, принимающий значения в некотором векторном пространстве E с кольцом $\mathcal{R}$; пусть также $\xi_n(t,\bullet)_{t\geqslant 0}$ – последовательность случайных процессов таких, что процессы независимы в совокупности и для любых $n \in \mathbb{N}$ и $t \geqslant 0$ имеет место*

$$\mathbb{P} \circ \xi^{-1}(A) = \mathbb{P} \circ \xi_n^{-1}(A), \quad \forall\, A \in \mathcal{A}(\mathcal{R}).$$

Пусть для каждого $t \geqslant 0$ отображение $u \to \mathbf{F}(t)u = \mathbb{E}(\mathbf{S}_{\xi(t)}u)$ является корректно определенным на пространстве $\mathcal{X}$. Если операторнозначная функция $\mathbf{F}(t)$, $t \geqslant 0$, удовлетворяет условиям теоремы Чернова, то последовательность случайных процессов

$$\left\{ \eta_n(t) = \xi_n\left(\frac{t}{n}\right) + \dots + \xi_1\left(\frac{t}{n}\right),\ \ t \geqslant 0 \right\}$$

$(B(\mathcal{X}), \tau_{sot})$-слабо сходится по распределению к марковскому цилиндрическому случайному процессу, являющемуся образом полугруппы $\exp(\mathbf{F}'(0)t)$, $t \geqslant 0$, при отображении $\boldsymbol{\Lambda}$.

Доказательство. Для всякого $t \geqslant 0$ и для любого $f \in \mathcal{X}$ имеет место равенство

$$\mathbb{E}(\mathbf{S}_{\xi_n(t)} \circ \dots \circ \mathbf{S}_{\xi_1(t)} f) = \mathbb{E}(f(x - \xi_1(t) - \dots - \xi_n(t))) = \int_\Omega f(x - \xi_1(t,\,\omega) - \dots - \xi_n(t,\,\omega))\, \mathrm{d}\mathbb{P}(\omega)$$
$$= \int\limits_{E\times\dots\times E} f(x - y_1 \dots - y_n)\, \mathrm{d}\mu_{1,\dots,n}(\vec{y}) = \int\limits_{E\times\dots\times E} g_{f,x}(y_1 + \dots + y_n)\, \mathrm{d}\mu_{1,\dots,n}(\vec{y}).$$

Поскольку интеграл определен корректно, то в случае ограниченной функции f интеграл можно выразить через предел интегральных сумм при измельчении множества значений

$$g_{f,x}(E)=\bigsqcup_{j=1}^{N}\Delta_j\subset\mathbb{C},\quad a_j\in\Delta_j,\ \ j=1,\dots,N,$$
$$\tau=\{\Delta_1,\dots,\Delta_N\},\quad |\tau|=\max_{k=1\dots N}\operatorname{diam}(\Delta_k),$$

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(\mathbf{S}_{\xi_n(t)}\circ\dots\circ\mathbf{S}_{\xi_1(t)}f)&=\lim_{|\tau|\to 0}\sum_{k=1}^{N}a_k\mu_{1,\dots,n}\left\{\vec{y}\in E\times\dots\times E\mid y_1+\dots+y_n\in g_{f,x}^{-1}(\Delta_k)\right\}\\
&=\lim_{|\tau|\to 0}\sum_{k=1}^{N}a_k\int_E \mathrm{d}\mu_1(y_1)\int_E \mathrm{d}\mu_2(y_2)\cdots\int_E \mathrm{d}\mu_n(y_n)\chi_{g_{f,x}^{-1}(\Delta_k)-y_1-\dots-y_{n-1}}(y_n)\\
&=\lim_{|\tau|\to 0}\sum_{k=1}^{N}a_k\int_E \mathrm{d}\mu_1(y_1)\int_E \mathrm{d}\mu_2(y_2)\cdots\int_E \mathrm{d}\mu_n(y_n)\chi_{g_{f,x}^{-1}(\Delta_k)}(y_1+\dots+y_{n-1}+y_n)\\
&=\int_E \mathrm{d}\mu_1(y_1)\int_E \mathrm{d}\mu_2(y_2)\cdots\int_E \mathrm{d}\mu_n(y_n)g_{f,x}(y_1+\dots+y_{n-1}+y_n)\\
&=\int_E \mathrm{d}\mu_1(y_1)\int_E \mathrm{d}\mu_2(y_2)\cdots\int_E \mathrm{d}\mu_n(y_n)f(x-y_1-\dots-y_{n-1}-y_n)\\
&=\mathbb{E}\mathbf{S}_{\xi_n(t)}\circ\dots\circ\mathbb{E}\mathbf{S}_{\xi_1(t)}f=(\mathbf{F}(t))^n f.\end{aligned}$$

Подобно тому, как это оговаривалось в замечании 32, результат можно распространить на случай неограниченных измеримых функций, если интегралы выше для них корректно определены. Отметим, что для случая счетно-аддитивных борелевских нормированных мер этот результат можно найти в [59]. Поскольку в условиях теоремы мы предполагаем, что оператор $\mathbf{F}(t)$ удовлетворяет условиям теоремы Чернова, то, обозначив замыкание оператора $\mathbf{A}$, фигурирующего в теореме 37, через $\mathbf{F}'(0)$, получаем, что для любого $f\in\mathcal{X}$ и всякого $T>0$:

$$\lim_{n\to\infty}\sup_{t\in[0,T]}\left\|\mathbb{E}\left(\mathbf{S}_{\xi_n(\frac{t}{n})+\dots+\xi_1(\frac{t}{n})}f\right)-\exp(\mathbf{F}'(0)t)f\right\|_{\mathcal{X}}=0.$$

Последнее означает $(\mathcal{L}(\mathcal{X}),\ \tau_{SOT})$-слабую сходимость по распределению последовательности случайных процессов $\left\{\eta_n(t)=\xi_n\left(\dfrac{t}{n}\right)+\dots+\xi_1\left(\dfrac{t}{n}\right),\ t\geqslant 0\right\}$ к марковскому процессу $\{\eta(t),\ t\geqslant 0\}$, соответствующему полугруппе $\exp(\mathbf{F}'(0)t)$, $t\geqslant 0$, причем

$$\exp(\mathbf{F}'(0)t)f=\mathbb{E}(\mathbf{S}_{\eta(t)}f).$$

Последнее означает, что η является обобщенным цилиндрическим процессом, представимым комплекснозначной конечно-аддитивной мерой $\mu_\eta=\mathbf{\Lambda}(\exp(\mathbf{F}'(0)t))$ в соответствии с определением 10. При этом в силу теоремы 29 и леммы 30 процесс η обладает свойствами стационарности и строгой марковости. □

Замечание 39. Для последовательности композиций независимых случайных операторов сдвига на вектор евклидова пространства утверждение теоремы включает утверждение центральной предельной теоремы для сумм независимых случайных векторов, если в качестве пространства $X(E)$ выбрать пространство $C_b(E)$ с топологией поточечной сходимости [32, 33].

3.3. Цилиндрически поточечная сходимость случайных процессов.

Пусть $\{\xi(t,\bullet),\ t\in\mathbb{R}_+\}$ – обобщенный случайный процесс со значениями в пространстве E. При этом для всякого $t\geq 0$, $\xi(t)$ есть случайная величина со значением в E. Пусть ему соответствует цилиндрическая мера μ_ξ, заданная на цилиндрической алгебре $\mathcal{A}_{\mathcal{C}yl}$ пространства траекторий $\mathcal{M}(\mathbb{R}_+,E)$.

Определение 40 ([43, 44])**.** Последовательность обобщенных случайных векторнозначных процессов $\xi_n(t)$ сходится *цилиндрически поточечно* к обобщенному процессу $\xi(t)$, если для всякого цилиндрического множества $C_{\vec{B}}^{\vec{t}}\in\mathcal{C}yl$ имеет место

$$\lim_{n\to\infty}\mu_{\xi_n}\left(C_{\vec{B}}^{\vec{t}}\right)=\mu_\xi\left(C_{\vec{B}}^{\vec{t}}\right). \tag{3.2}$$

В силу свойства аддитивности цилиндрических мер сразу получаем, что из предельного соотношения (3.2) будет следовать аналогичное для любого множества, принадлежащего цилиндрической алгебре $\mathcal{A}_{\mathcal{C}yl}$. Отметим также, что

$$\mu_\xi\left(C_{\vec{B}}^{\vec{t}}\right)=\mathbb{P}\circ\vec{\xi}_{\vec{t}}^{-1}(B_1\times B_2\times\cdots\times B_n)=P_{t_1,\ldots,t_n}(B_1\times B_2\times\cdots\times B_n).$$

Таким образом, цилиндрически поточечная сходимость процесса эквивалентна поточечной сходимости конечномерных распределений на алгебрах $\mathcal{A}_{t_1,\ldots,t_n}$. Заметим, что даже для классических вероятностных борелевских мер на метрическом пространстве из слабой сходимости последовательности мер не следует сходимость их значений на всяком бэровском множестве, согласно [60, пример 8.1.4]. С другой стороны, по теореме Александрова [60] слабая сходимость последовательности вероятностных мер эквивалентна сходимости последовательности их значений на всяком борелевском множестве непрерывности, т. е. множестве с границей меры нуль. Так, с точки зрения классической теории вероятностей цилиндрически поточечная сходимость сильнее классической сходимости последовательности случайных процессов в смысле конечномерных распределений.

Теорема 41. *Пусть* $\{\mu_n\}:\ \mathbb{N}\to a^{Bc,S,M}(\mathcal{A}_{\mathcal{C}yl})$ *– последовательность обобщенных цилиндрических случайных процессов со значениями в измеримом пространстве* $(E,\mathcal{A}(\mathcal{R}))$*. Тогда из поточечной на алгебре* $\mathcal{A}_{\mathcal{C}yl}$ *сходимости последовательности* $\{\mu_n\}$ *к непрерывному по базе стационарному марковскому процессу* $\mu\in a^{Bc,S,M}(\mathcal{A}_{\mathcal{C}yl})$ *следует поточечная* *на полуоси $\mathbb{R}_+$ сходимость в слабой операторной топологии последовательность операторнозначных функций $(\mathbf{V}(\mu_{\xi_n}))_{n=1}^{\infty}$ к операторнозначной функции $\mathbf{V}(\mu_\xi)$. Если последовательность оператор-функций $\{\mathbf{F}_k\} : \mathbb{N} \to \mathcal{M}_m(\mathbb{R}_+, B(H))$ сходится к оператор-функции $\mathbf{F} \in \mathcal{M}_m(\mathbb{R}_+, B(H))$ в сильной операторной топологии поточечно на полуоси $\mathbb{R}_+$, то имеет место поточечная сходимость соответствующих им обобщенных цилиндрических процессов $\{\mathbf{\Lambda}(\boldsymbol{F}_k)\}$ на алгебре $\mathcal{A}_{\mathcal{C}yl}$ к обобщенному процессу $\mathbf{\Lambda}(\boldsymbol{F})$.*

Доказательство. Докажем, что из поточечной на $\mathcal{A}_{Cyl}$ сходимости последовательности $\{\mu_{\xi_n}\}: \ \mathbb{N} \to a^{Bc,S,M}(\mathcal{A}_{Cyl})$ к предельной мере μ_ξ следует сходимость в слабой операторной топологии последовательности $\{\mathbf{V}(\mu_{\xi_n})(t)\}$ к оператору $\mathbf{V}(\mu_\xi)(t)$ при каждом $t \geq 0$. Сходимость $\mathbf{V}(\mu_{\xi_n})$ к $\mathbf{V}(\mu_\xi)$ при $n \to \infty$ в слабой операторной топологии поточечно на полуоси $\mathbb{R}_+$ в силу всюду плотности множества $S(E, \mathcal{R}, \mathbb{C})$ в пространстве H равносильна тому, что

$$\lim_{k\to\infty} (\chi_{B_1}, \mathbf{V}(\mu_{\xi_k})[t]\, \chi_{B_0}) = (\chi_{B_1}, \mathbf{V}(\mu_\xi)[t]\, \chi_{B_0}) \quad \forall\, t \geqslant 0, \ \ \forall\, B_0\, B_1 \in \mathcal{R}.$$

В силу теоремы 29 и свойства стационарности (определение 21) рассматриваемых цилиндрических мер, это эквивалентно следующему:

$$\lim_{k\to\infty} \mu_{\xi_k} \left(C^{0,\ t}_{B_0,\, B_1}\right) = \mu \left(C^{0,\ t}_{B_0,\, B_1}\right), \quad \forall\, t \geqslant 0, \ \ \forall\, B_0, B_1 \in \mathcal{R}.$$

Последнее равенство следует из поточечной сходимости цилиндрических мер.

Докажем вторую часть утверждения. Пусть $\mathbf{F}_k(t)$ сходится в сильной операторной топологии к $\mathbf{F}(t)$ при каждом $t \geq 0$. Докажем, что тогда $\lim\limits_{k\to\infty} \mu^{\mathbf{F}_k}(C) = \mu^{\mathbf{F}}(C)$ при любых $C \in \mathcal{A}_{Cyl}$. Принимая во внимание аддитивность меры на алгебре $\mathcal{A}_{\mathcal{C}yl}$, а также соотношения (2.17) и (2.19), достаточно проверить утверждение для цилиндрических множеств с базой, включающей только множества из кольца $\mathcal{R}$. Напомним, что тогда значения цилиндрических мер определяются как

$$\mu^{\mathbf{F}_k} \left(C^{\vec{s}}_{\vec{B}}\right) = \left(\chi_{B_n}, \mathbf{F}_k(s_n - s_{n-1})\mathbf{P}_{B_{n-1}} \dots \mathbf{P}_{B_1}\mathbf{F}_k(s_1 - s_0)\chi_{B_0}\right),$$
$$n \in \mathbb{N}, \ \ B_i \in \mathcal{R}, \ \ \forall\, i = 0, \dots, n.$$

Значит, поточечная сходимость цилиндрических мер $\mu^{\mathbf{F}_k}$ к мере $\mu^{\mathbf{F}}$ следует из леммы 15 и следствия 13. □

3.4. Связь обобщенной слабой и поточечной сходимости. Установим связь между обобщенной слабой сходимостью векторнозначных и операторнозначных процессов с одной стороны, и цилиндрической поточечной сходимостью соответствующих им цилиндрических мер с другой. Пусть E – сепарабельное гильбертово пространство. Если E конечномерно, то мы фиксируем кольцо $\mathcal{R}_L$ измеримых по Лебегу ограниченных множеств, а также $\mathcal{A}(\mathcal{R}_L)$ минимальную алгебру, порожденную кольцом $\mathcal{R}_L$. В случае бесконечномерного пространства все менее тривиально, поскольку не существует меры Лебега, т. е. нетривиальной, счетно-аддитивной, σ-конечной, локально конечной и трансляционно инвариантной борелевской меры на бесконечномерных нормированных пространствах [41]. Однако, лишаясь одного из этих свойств, можно получить аналоги меры Лебега. Поскольку, как уже отмечалось ранее, нас интересуют трансляционно инвариантные и σ-конечные меры, необходимо отказаться от свойства счетной-аддитивности. Для того, чтобы в дальнейшем иметь возможность применять развиваемую теорию, рассмотрим конечно-аддитивную меру, удовлетворяющую заявленным требованиям. С подробным описанием ее построения и свойств можно ознакомиться в работах [34,44]. Мы же сейчас дадим краткий обзор. Итак, пусть E – бесконечномерное сепарабельное гильбертово пространство.

Определение 42. *Брусом* в пространстве E назовем такое множество $\Pi \subset E$, что существует ортонормированный базис $\mathcal{E}$ в пространстве E, в котором координаты элементов множества Π удовлетворяют условию

$$\Pi = \{x \in E : (x,\, e_j) = x_j \in [a_j,\, b_j)\ \forall\, j \in \mathbb{N}\}, \quad -\infty < a_j < b_j < +\infty, \quad j \in \mathbb{N}.$$

Брус является непустым множеством в том и только в том случае, если $\sum\limits_{j=1}^{\infty} c_j^2 < +\infty$, где $c_j = \inf\limits_{x \in [a_j,\, b_j)} |x|,\ j \in \mathbb{N}$.

Определение 43. Брус называется *измеримым*, если он либо пустой, либо следующий ряд для него сходится:

$$\sum_{j=1}^{\infty} \max\{0,\, \ln(b_j - a_j)\}.$$

Фиксируем некоторый ОНБ $\mathcal{E}$ в пространстве E. Обозначим с помощью $\mathcal{K}_1(\mathcal{E})$ совокупность всех измеримых брусов, ребра которых сонаправлены векторам некоторого ортонормированного базиса $\mathcal{E}$ в пространстве E. Пусть $r_{\mathcal{E}}$ – кольцо подмножеств пространства E, порожденное семейством множеств $K_1(\mathcal{E})$.

Лемма 44 ([43, 44])**.** *Семейство $\mathcal{K}_1(\mathcal{E})$ не образует полукольца. Тем не менее, всякая теоретико множественная разность элементов множества $\mathcal{K}_1(\mathcal{E})$ может быть представлена в виде счетного объединения элементов из семейства $\mathcal{K}_1(\mathcal{E})$.*

Введем следующее семейство множеств

$$\mathcal{K}_2(\mathcal{E}) = \left\{ \Pi \setminus \bigcup_{k=1}^{n} \Pi_k \,\middle|\, \Pi,\, \Pi_1, \ldots \Pi_n \in \mathcal{K}_1(\mathcal{E}), \ \ n \in \mathbb{N} \right\}$$

и совокупность $\mathcal{K}_3(\mathcal{E})$ всех возможных конечных объединений множеств из $\mathcal{K}_2(\mathcal{E})$.

Лемма 45 ([43])**.** *Семейство $\mathcal{K}_3(\mathcal{E})$ является полукольцом, а семейство $\mathcal{K}_3(\mathcal{E})$ является кольцом для любого произвольно выбранного ортонормированного базиса $\mathcal{E}$, при этом $\mathcal{K}_3(\mathcal{E}) = r_{\mathcal{E}}$.*

Зададим аддитивную функцию множества $\lambda_{\mathcal{E}}^1$ на семействе $\mathcal{K}_1(\mathcal{E})$ согласно

$$\lambda_{\mathcal{E}}^1(\varnothing) = 0, \quad \lambda_{\mathcal{E}}^1(\Pi) = \exp\left(\sum_{j=1}^{\infty} \ln(b_j - a_j)\right). \tag{3.3}$$

Лемма 46 ([43]). *Функция множества $\lambda_{\mathcal{E}} : K_1(\mathcal{E}) \to [0, +\infty)$, определенная равенством (3.3), является аддитивной на семействе $K_1(\mathcal{E})$, и инвариантной относительно сдвига на любой вектор пространства E.*

По аддитивности данная функция единственным образом может быть продолжена до конечно-аддитивной меры $\lambda_{\mathcal{E}}^2$ на кольце $\lambda_{\mathcal{E}}^3 : \mathcal{K}_3(\mathcal{E}) \to \mathbb{C}$, причем $\lambda_{\mathcal{E}}^3|_{\mathcal{K}_1} = \lambda_{\mathcal{E}}^1$.

Определение 47. Множество $A \subset E$ назовем *$\lambda_{\mathcal{E}}$-измеримым*, если для всякого $\varepsilon > 0$ найдутся множества $A_1, A_2 \in \mathcal{K}_3(\mathcal{E})$, удовлетворяющие соотношениям

$$A_1 \subset A \subset A_2, \quad \lambda_{\mathcal{E}}^3(A_2 \setminus A_1) < \varepsilon.$$

Лемма 48 ([43]). *Семейство $\mathcal{K}(\mathcal{E})$, которое включает все $\lambda_{\mathcal{E}}$-измеримые множества, образует кольцо.*

Определим *внутреннюю меру* и *внешнюю меру* как функции, заданные на множестве 2^E, которые при любом $A \subset E$ удовлетворяют

$$\underline{\lambda}_{\mathcal{E}}(A) = \sup_{\substack{B \in \mathcal{K}_3(\mathcal{E}) \\ B \subset A}} \lambda_{\mathcal{E}}^3(B) \quad \text{и} \quad \overline{\lambda}_{\mathcal{E}}(A) = \inf_{\substack{B \in \mathcal{K}_3(\mathcal{E}) \\ A \subset B}} \lambda_{\mathcal{E}}^3(B).$$

Кроме того, для каждого $A \in \mathcal{K}(\mathcal{E})$ выполняется $\underline{\lambda}_{\mathcal{E}}(A) = \overline{\lambda}_{\mathcal{E}}(A)$. Распространим однозначно меру $\lambda_{\mathcal{E}}$ на все кольцо $\mathcal{K}(\mathcal{E})$ так, что $\lambda_{\mathcal{E}}(A) = \underline{\lambda}_{\mathcal{E}}(A) = \overline{\lambda}_{\mathcal{E}}(A)$.

Лемма 49 ([38]). *Пусть B_R – шар радиуса R в пространстве E.*

- *Если $R < \frac{1}{\sqrt{2}}$, то $\underline{\lambda}_{\mathcal{E}}(B_R) = \overline{\lambda}_{\mathcal{E}}(B_R) = \lambda_{\mathcal{E}}(B_R) = 0$;*
- *Если $R > \frac{1}{\sqrt{2}}$, то $\overline{\lambda}_{\mathcal{E}}(B_R) = +\infty$ и $\underline{\lambda}_{\mathcal{E}}(B_R) = 0$.*

Предложенная мера является неотрицательной, конечно-аддитивной, при этом не счетно-аддитивной, трансляционно инвариантной, локально конечной, σ-конечной и полной. Тем не менее, ввиду отсутствия свойства счетной аддитивности, ее продолжение по схеме Лебега–Каратеодори невозможно, поскольку верхняя мера Каратеодори обращается в нуль на всяком измеримом брусе [44]. Для данной меры корректно определено пространство $H = \mathbb{L}_2(E, \mathcal{K}_{\mathcal{E}, \lambda_{\mathcal{E}}}\mathbb{C})$ квадратично интегрируемых по мере $\lambda_{\mathcal{E}}$ функций [43].

Вернемся теперь к случайным процессам и сформулируем теорему, которая позволит установить связь между сходимостью цилиндрических мер и обобщенной слабой сходимостью, соответствующих им процессов.

Теорема 50. *Пусть последовательность E-значных случайных процессов $\{\xi_n(t),\, t \geqslant 0\}$ сходится $(B(H), \tau_{SOT})$-слабо поточечно к векторнозначному процессу $\{\xi(t),\, t \geqslant 0\}$. Тогда последовательность цилиндрических мер $(\mu_n = \mathbf{V}(\mathbf{F}_n))_{n=1}^{\infty}$, заданных на цилиндрической алгебре $\mathcal{A}_{\mathcal{C}yl}$ пространства траекторий $\mathcal{M}(\mathbb{R}_+, E)$, сходится поточечно к мере $\mu = \mathbf{V}(\mathbf{F})$, где*

$$\mathbf{F}_n(t)u(x) = \mathbb{E}\left(\boldsymbol{S}_{\xi_n(t)}u(x)\right), \quad и \quad \mathbf{F}(t)u(x) = \mathbb{E}\left(\boldsymbol{S}_{\xi(t)}u(x)\right)$$

для любого $t \geqslant 0$ и для всякой $u \in H$.

Доказательство. Сразу отметим, что в силу трансляционной инвариантности меры $\lambda_{\mathcal{E}}$ оператор-функции $\mathbf{F}_n(t)$ и $\mathbf{F}(t)$ корректно определены (семейство операторов сдвига равномерно ограничено, а меры, задающие распределения процессов, имеют ограниченные вариации). Из обобщенной $(B(H), \tau_{SOT})$-слабой сходимости имеем для произвольного $t \in \mathbb{R}_+$

$$\lim_{n\to\infty} \|\mathbb{E}(\mathbf{S}_{\xi_n(t)}u) - \mathbb{E}(\mathbf{S}_{\xi(t)}u)\|_H = 0.$$

Значит, $\mathbf{F}_n(t)$ сходится в сильной операторной топологии к оператору $\mathbf{F}(t)$. Но тогда по теореме 41 имеем поточечную на алгебре $\mathcal{A}_{\mathcal{C}yl}$ сходимость последовательности цилиндрических мер $(\mu_n = \mathbf{V}(\mathbf{F}_n))_{n=1}^{\infty}$ к мере $\mu = \mathbf{V}(\mathbf{F})$. □

3.5. К случайным блужданиям в гильбертовом пространстве. Пусть $\mathbf{D} \in B(E)$ – неотрицательный ядерный оператор с ортонормированным базисом собственных векторов $\mathcal{E}$. Любой оператор $\mathbf{D}$ указанного класса определяет центрированную счетную аддитивную гауссову меру $\nu_{\mathbf{D}}$ на пространстве E такую, что мера $\nu_{\mathbf{D}}$ имеет ковариационный оператор $\mathbf{D}$.

Оператор сдвига на вектор $h \in E$ определен на пространстве $\mathcal{H} = L_2(E, \mathcal{K}_{\mathcal{E}}, \lambda_{\mathcal{E}}, \mathbb{C})$ равенством

$$\mathbf{S}_h u(x) = u(x - h).$$

Для каждого $h \in H$ оператор $\mathbf{S}_h$ принадлежит банаховому пространству $B(\mathcal{H})$ действующих в пространстве H ограниченных линейных операторов, наделенному операторной нормой. При этом $\mathbf{S}_h$ является унитарным оператором в пространстве $\mathcal{H}$.

Пусть h – случайный вектор пространства E распределение которого задает мера ν. Тогда среднее значение $\mathbf{U} \in B(\mathcal{H})$ оператора случайного сдвига $\mathbf{S}_h$ задается интегралом Петтиса

$$\int\limits_E \mathbf{S}_h d\nu(h) = \mathbf{U} \quad \Leftrightarrow \quad (\mathbf{U}f, g) = \int\limits_E (\mathbf{S}_h f, g) d\nu(h)\ \forall f, g \in H.$$

Согласно [61], справедлива

Теорема 51. *Пусть $\mathbf{D} \in B(E)$ – неотрицательный ядерный оператор с ортонормированным базисом из собственных векторов $\mathcal{E}$. Тогда однопараметрическое семейство опе-*

раторов

$$\mathbf{U}_t = \int\limits_E \mathbf{S}_h d\nu_{t\mathbf{D}}(h),\ t \geq 0, \tag{3.4}$$

является однопараметрической полугруппой самосопряженных сжатий в пространстве $\mathcal{H}$. *Полугруппа* $\mathbf{U}_t$, $t \geq 0$, *сильно непрерывна тогда и только тогда, когда оператор* $\mathbf{D}^{\frac{1}{2}}$ *является ядерным.*

Следствие 52. *Пусть выполнены условия теоремы 51. Тогда генератор* $\boldsymbol{\Delta}$ *полугруппы (3.4) является неположительным оператором в пространстве* $\mathcal{H}$.

Согласно теореме 51 инвариантная мера дает возможность описать случайные блуждания в гильбертовом пространстве E посредством самосопряженного оператора Лапласа–Вольтерра $\boldsymbol{\Delta}$ в пространстве $L_2(E, \mathcal{R}_{\mathcal{E}}, \lambda_{\mathcal{E}}, \mathbb{C})$.

4. Заключение

Обобщенный случайный процесс отождествлен с цилиндрической мерой, заданной на цилиндрической алгебре подмножеств в пространстве траекторий. Получены предельные теоремы для обобщенных случайных процессов. Построено биективное соответствие между комплекснозначными конечно аддитивными мерами, заданными на цилиндрических алгебрах $\mathcal{A}_{\mathcal{C}yl}$, и операторнозначными функциями, действующими в подходящем функциональном пространстве. В части 2 с помощью построенной в настоящей статье биекции будут получены формулы Фейнмана–Каца для решений эволюционных уравнений с постоянными и переменными операторными коэффициентами.

Список литературы

[1] M. Reed, B. Simon, *Methods of modern mathematical physics.* II: *Fourier analysis, self-adjointness.* Academic Press, New York–London, 1975.

[2] О.Г. Смолянов, Е.Т. Шавгулидзе, *Континуальные интегралы*, URSS, М., 2015.

[3] А.Д. Вентцель, *Курс теории случайных процессов*, Наука. Физматлит, М., 1996.

[4] R.P. Feynman, *An operation calculus having applications in quantum electrodynamics*, Phys. Rev. (2), **84**, 108–128 (1951).
DOI: https://doi.org/10.1103/PhysRev.84.108

[5] R.P. Feynman, *Space-time approach to non-relativistic quantum mechanics*, Rev. Modern Physics **20**, 367–387 (1948).
DOI: https://doi.org/10.1103/RevModPhys.20.367

[6] E. Nelson, *Feynman integrals and the Schrodinger equation*, J. Mathematical Phys. **5** (3), 332–343 (1964).
DOI: https://doi.org/10.1063/1.1704124

[7] B. Simon, *Functional integration and quantum physics*, Academic Press, New York–London, 1979.

[8] Е.Т. Шавгулидзе, *Специальные самосопряженные расширения дифференциальных операторов Шредингера с помощью интегралов Фейнмана*, Докл. РАН **348** (6), 743–745 (1996).
URL: https://www.mathnet.ru/rus/dan4093

[9] В.П. Маслов, А.М. Чеботарев, *Определение континуального интеграла Фейнмана в P-представлении*, Докл. АН СССР **229** (1), 37–38 (1976).
URL: https://www.mathnet.ru/rus/dan40458

[10] Yu.N. Orlov, V.Z. Sakbaev, E.V. Shmidt, *Compositions of random processes in a Hilbert space and its limit distribution*, Lobachevskii J. Math. **44** (4), 1432–1447 (2023).
DOI: http://doi.org/10.1134/S1995080223040212

[11] Yu.N. Orlov, V.Z. Sakbaev, *Feynman–Kac formulas for difference-differential equations of retarded type*, Lobachevskii J. Math. **45** (6), 2567–2576 (2024).
DOI: https://doi.org/10.1134/S1995080224602790

[12] V.Zh. Sakbaev, N. Tsoy, *Analogue of Chernoff theorem for cylindrical pseudomeasures*, Lobachevskii J. Math. **41** (12), 2369–2382 (2020).
DOI: https://doi.org/10.1134/S1995080220120306

[13] V.Zh. Sakbaev, E.V. Shmidt, V. Shmidt, *Limit distribution for compositions of random operators*, Lobachevskii J. Math. **43** (7), 1740–1754 (2022).
DOI: https://doi.org/10.1134/S199508022210033X

[14] В.П. Маслов, *Комплексные марковские цепи и континуальный интеграл Фейнмана*, Наука, М., 1976.

[15] А.В. Булинский, А.Н. Ширяев, *Теория случайных процессов*, Физматлит, М., 2005.

[16] В.И. Богачев, Н.В. Крылов, М. Рёкнер, *Эллиптические и параболические уравнения для мер*, УМН **64** (6), 5–116 (2009).
DOI: https://doi.org/10.4213/rm9326

[17] В.И. Богачев, *Основы теории меры. Том* 1, Регулярная и хаотическая динамика, Москва–Ижевск, 2003.

[18] Ю.Л. Далецкий, С.В. Фомин, *Меры и дифференциальные уравнения в бесконечномерных пространствах*, Наука, М., 1983.

[19] L. Accardi, Y.G. Lu, I.V. Volovich, *Quantum theory and its stochastic limit*, Springer-Verlag, Berlin, 2002.
DOI: https://doi.org/10.1007/978-3-662-04929-7

[20] Ю.Н. Орлов, В.Ж. Сакбаев, О.Г. Смолянов, *Формулы Фейнмана для нелинейных эволюционных уравнений*, Доклады Академии Наук **477** (3), 271–275 (2017).

DOI: https://doi.org/10.7868/S0869565217330027

[21] T. Liggett, *Interacting particle systems*, Springer-Verlag, Berlin, 2005.
DOI: https://doi.org/10.1007/b138374

[22] А.Д. Вентцель, М.И. Фрейдлин, *Флуктуации в динамических системах под действием малых случайных возмущений*, Наука, М., 1979.

[23] Е.Б. Дынкин, *Марковские процессы*, Наука, М., 1963.

[24] J. Zinn-Justin, *Path integrals in quantum mechanics*, Oxford University Press, Oxford, 2010.
DOI: https://doi.org/10.1093/acprof:oso/9780198566748.001.0001

[25] C. Bender, Ya.A. Butko, *Stochastic solutions of generalized time-fractional evolution equations*, Fract. Calc. Appl. Anal. **25** (2), 488–519 (2022).
DOI: https://doi.org/10.1007/s13540-022-00025-3

[26] C. Bender, M. Bormann, Ya.A. Butko, *Subordination principle and Feynman–Kac formulae for generalized time-fractional evolution equations*, Fract. Calc. Appl. Anal. **25** (5), 1818–1836 (2022).
DOI: https://doi.org/10.1007/s13540-022-00082-8

[27] Ю.В. Прохоров, *Сходимость случайных процессов и предельные теоремы теории вероятностей*, Теория вероятн. и ее примен. **1** (3), 177–238 (1956).
URL: https://www.mathnet.ru/rus/tvp4997

[28] Ж. Жакод, А.Н. Ширяев, *Предельные теоремы для случайных процессов. Т.* 1–2, Физматлит, М. 1994.

[29] А.Д. Вентцель, С.А. Молчанов, В.Н. Тутубалин, *Асимптотические задачи теории вероятностей и теории случайных сред*, Теория вероятн. и ее примен. **35** (1), 27–34 (1990).
URL: https://www.mathnet.ru/rus/tvp903

[30] А.Д. Вентцель, *Уточнение функциональной центральной предельной теоремы для стационарных процессов*, Теория вероятн. и ее примен. **34** (3), 451–464 (1989).
URL: https://www.mathnet.ru/rus/tvp1295

[31] В. Феллер, *Введение в теорию вероятностей и ее приложения. Т.* II, Мир, М., 1984.

[32] Дж. Гоф, Ю.Н. Орлов, В.Ж. Сакбаев, О.Г. Смолянов, *Рандомизированное квантование гамильтоновых систем*, Докл. РАН. Матем., информ., проц. упр. **498**, 31–36 (2021).
DOI: https://doi.org/10.31857/S2686954321030085

[33] Yu.N. Orlov, V.Z. Sakbaev, E.V. Shmidt, *Operator approach to weak convergence of measures and limit theorems for random operators*, Lobachevskii J. Math. **42** (10), 2413–2426 (2021).

DOI: https://doi.org/10.1134/S1995080221100188

[34] V.Zh. Sakbaev, *Averaging of random flows of linear and nonlinear maps*, J. Phys.: Conf. Ser. **990**, art. 012012 (2018).
DOI: https://doi.org/10.1088/1742-6596/990/1/012012

[35] В.И. Богачев, О.Г. Смолянов, *Действительный и функциональный анализ: Университетский курс*, Регулярная и хаотическая динамика, Москва-Ижевск, 2009.

[36] P.R. Chernoff, *Note on product formulas for operator semigroups*, J. Functional Analysis **2** (2), 238–242 (1968).
DOI: https://doi.org/10.1016/0022-1236(68)90020-7

[37] M.A. Berger, *Central limit theorem for products of random matrices*, Trans. Amer. Math. Soc. **285** (2), 777–803 (1984).
DOI: https://doi.org/10.1090/S0002-9947-1984-0752503-3

[38] В.М. Бусовиков, В.Ж. Сакбаев, *Пространства Соболева функций на гильбертовом пространстве с трансляционно инвариантной мерой и аппроксимации полугрупп* Изв. РАН. Сер. матем. **84** (4), 79–109 (2020).
DOI: https://doi.org/10.4213/im8890

[39] В.Ж. Сакбаев, *Усреднение случайных блужданий и меры на гильбертовом пространстве, инвариантные относительно сдвигов*, ТМФ **191** (3), 473–502 (2017).
DOI: https://doi.org/10.4213/tmf9153

[40] В.И. Авербух, О.Г. Смолянов, С.В. Фомин, *Обобщенные функции и дифференциальные уравнения в линейных пространствах.* I. *Дифференцируемые меры*, Тр. ММО **24**, 133–174 (1971).
URL: https://www.mathnet.ru/rus/mmo249

[41] А. Вейль, *Интегрирование в топологических группах и его применение*, Изд-во иностранной литературы, М., 1950.

[42] А.М. Вершик, *Существует ли мера Лебега в бесконечномерном пространстве?*, Тр. МИАН **259**, 256–281 (2007).
URL: https://www.mathnet.ru/rus/tm579

[43] В.Ж. Сакбаев, *Случайные блуждания и меры на гильбертовом пространстве, инвариантные относительно сдвигов и поворотов*, Итоги науки и техн. Соврем. мат. и ее прил. Темат. обз. **140**, 88–118 (2017).
URL: https://www.mathnet.ru/rus/into237

[44] V.Zh. Sakbaev, *Flows in infinite-dimensional phase space equipped with a finitely-additive invariant measure*, Mathematics **11** (5), art. 1161 (2023).
DOI: https://doi.org/10.3390/math11051161

[45] R. Baker, *Lebesgue measure on* $\mathbb{R}^\infty$, Proc. Amer. Math. Soc. **113** (4), 1023–1029 (1991).
DOI: https://doi.org/10.1090/S0002-9939-1991-1062827-X

[46] R.L. Baker, *Lebesgue measure on $\mathbb{R}^\infty$. II*, Proc. Amer. Math. Soc. **132** (9), 2577–2591 (2004).
DOI: https://doi.org/10.1090/S0002-9939-04-07372-1

[47] T. Gill, A. Kirtadze, G. Pantsulaia, A. Plichko, *Existence and uniqueness of translation invariant measures in separable Banach spaces*, Funct. Approx. Comment. Math. **50** (2), 401–419 (2014).
DOI: http://doi.org/10.7169/facm/2014.50.2.12

[48] D.V. Zavadsky, *Инвариантные относительно сдвигов меры на пространствах последовательностей*, Тр. МФТИ **9** (4), 142–148 (2017).

[49] У. Гренандер, *Вероятности на алгебраических структурах*, Мир, М. 1966.

[50] В.И. Оселедец, *Марковские цепи, косые произведения и эргодические теоремы для "общих" динамических систем*, Теория вероятн. и ее примен. **10** (3), 551–557 (1965).
URL: https://www.mathnet.ru/rus/tvp554

[51] А.В. Скороход, *Произведения независимых случайных операторов*, УМН **38** (4), 255–280 (1983).
URL: https://www.mathnet.ru/rus/rm2956

[52] Ю.Н. Орлов, В.Ж. Сакбаев, О.Г. Смолянов, *Формулы Фейнмана и закон больших чисел для случайных однопараметрических полугрупп*, Тр. МИАН **306**, 210–226 (2019).
DOI: https://doi.org/10.4213/tm4003

[53] O.G. Smolyanov, A.G. Tokarev, A. Truman, *Hamiltonian Feynman path integrals via the Chernoff formula*, J. Math. Phys. **43** (10), 5161–5171 (2002).
DOI: https://doi.org/10.1063/1.1500422

[54] H.H. Kuo, N. Obata, K. Saito, *Diagonalization of the Lévy Laplacian and related stable processes*, Infin. Dimens. Anal. Quantum Probab. Relat. Top. **5** (3), 317–331 (2002).
DOI: https://doi.org/10.1142/S0219025702000882

[55] I.D. Remizov, *Quasi-Feynman formulas – a method of obtaining the evolution operator for the Schrödinger equation*, J. Funct. Anal. **270** (12), 4540–4557 (2016).
DOI: https://doi.org/10.1016/j.jfa.2015.11.017

[56] B.O. Volkov, *Levy Laplacian on manifold and Yang-Mills heat flow*, Lobachevskii J. Math. **40** (10), 1619–1630 (2019).
DOI: https://doi.org/10.1134/S1995080219100305

[57] B.O. Volkov, *Lévy Laplacians and instantons on manifolds*, Infin. Dimens. Anal. Quantum Probab. Relat. Top. **23** (2), art. 2050008 (2020).
DOI: https://doi.org/10.1142/S0219025720500083

[58] Т. Като, *Теория возмущений линейных операторов*, Мир, М., 1972.

[59] П. Биллингсли, *Сходимость вероятностных мер*, Наука, М., 1977.

[60] В.И. Богачев, *Основы теории меры. Том* 2, Регулярная и хаотическая динамика, Москва–Ижевск, 2003.

[61] Д.В. Завадский, В.Ж. Сакбаев, *Диффузия на гильбертовом пространстве, снабженном трансляционно и ротационно инвариантной мерой*, Тр. МИАН **306**, 112–130 (2019).
DOI: https://doi.org/10.4213/tm3999

Юрий Николаевич Орлов
Институт Прикладной Математики им. М.В. Келдыша РАН,
Миусская пл., д. 4, г. Москва, 125047, Россия,
e-mail: ov3159f@yandex.ru

Всеволод Жанович Сакбаев
Институт Прикладной Математики им. М.В. Келдыша РАН,
Миусская пл., д. 4, г. Москва, 125047, Россия,
e-mail: fumi2003@mail.ru

Volume 3, Issue 2
pp. 85–135 (2025)

UDC 517.982, 517.983
MSC 28C20, 28D05, 37A05, 37K05

Feynman–Kac formulas for solutions of evolution equations. Part I. Generalized random processes and operator families

Yu.N. Orlov, V.Zh. Sakbaev

Abstract. A generalized random process with values in a measurable space is defined as a complex-valued finite additive cylindrical measure on the space of trajectories with values in the measurable space. Using this extension of the concept of a random process, we aim to obtain a representation of solutions to the evolutionary equation by averaging functionals on the space of trajectories of a random process. For this purpose, a bijective mapping of the space of operator valued functions into a set of complex valued finite additive cylindrical measures on the trajectory space is constructed and investigated. Limit theorems for generalized random processes are obtained. In the second part of the survey, the application of the constructed bijective mapping to the obtaining of perturbed semigroups and evolutionary families of operators in the form of Feynman–Kac formulas will be considered.

Keywords: random linear operator, random operator valued process, finitely additive measure, weak convergence of measures, central limit theorem, Markov process, Kolmogorov equation, Feynman–Kac formula.

DOI: 10.26907/2949-3919.2025.2.85-135

References

[1] M. Reed, B. Simon, *Methods of modern mathematical physics.* II: *Fourier analysis, self-adjointness*, Academic Press, New York–London, 1975.

[2] O.G. Smolyanov, E.T. Shavgulidze, *Continual integrals*, URSS, M., 2015 [in Russian].

[3] A.D. Venttsel', *Course of random prosesses theory*, Nauka. Fizmatlit, M., 1996 [in Russian].

[4] R.P. Feynman, *An operation calculus having applications in quantum electrodynamics*, Phys. Rev. (2), **84**, 108–128 (1951).
DOI: https://doi.org/10.1103/PhysRev.84.108

[5] R.P. Feynman, *Space-time approach to non-relativistic quantum mechanics*, Rev. Modern Physics **20**, 367–387 (1948).
DOI: https://doi.org/10.1103/RevModPhys.20.367

Received: 23 October 2024. Accepted: 02 May 2025. Published: 16 July 2025.

[6] E. Nelson, *Feynman integrals and the Schrodinger equation*, J. Mathematical Phys. **5** (3), 332–343 (1964).
DOI: https://doi.org/10.1063/1.1704124

[7] B. Simon, *Functional integration and quantum physics*, Academic Press, New York–London, 1979.

[8] E.T. Shavgulidze, *Special selfadjoint extensions of Schrödinger differential operators by means of Feynman integrals*, Dokl. Akad. Nauk 348 (6), 743–745 (1996) [in Russian].
URL: https://www.mathnet.ru/rus/dan4093

[9] V.P. Maslov, A.M. Chebotarev, *The definition of Feynman's functional integral in the P-representation*, Dokl. Akad. Nauk SSSR **229** (1), 37–38 (1976).
URL: https://www.mathnet.ru/rus/dan40458

[10] Yu.N. Orlov, V.Z. Sakbaev, E.V. Shmidt, *Compositions of random processes in a Hilbert space and its limit distribution*, Lobachevskii J. Math. **44** (4), 1432–1447 (2023).
DOI: http://doi.org/10.1134/S1995080223040212

[11] Yu.N. Orlov, V.Z. Sakbaev, *Feynman–Kac formulas for difference-differential equations of retarded type*, Lobachevskii J. Math. **45** (6), 2567–2576 (2024).
DOI: https://doi.org/10.1134/S1995080224602790

[12] V.Zh. Sakbaev, N. Tsoy, *Analogue of Chernoff theorem for cylindrical pseudomeasures*, Lobachevskii J. Math. **41** (12), 2369–2382 (2020).
DOI: https://doi.org/10.1134/S1995080220120306

[13] V.Zh. Sakbaev, E.V. Shmidt, V. Shmidt, *Limit distribution for compositions of random operators*, Lobachevskii J. Math. **43** (7), 1740–1754 (2022).
DOI: https://doi.org/10.1134/S199508022210033X

[14] V.P. Maslov, *Complex Markov chains and continual Feynman integral*, Nauka, M., 1976 [in Russian].

[15] A.V. Bulinskii, A.N. Shiryaev, *Random processes theory*, Fizmatlit, M., 2005.

[16] V.I. Bogachev, N.V. Krylov, M. Röckner, *Elliptic and parabolic equations for measures*, Russian Math. Surveys **64** (6), 973–1078 (2009).
DOI: https://doi.org/10.1070/RM2009v064n06ABEH004652

[17] V.I. Bogachev, *Measure theory. Vol.* I, Springer-Verlag, Berlin, 2007.
DOI: https://doi.org/10.1007/978-3-540-34514-5

[18] Yu.L. Daletskii, S.V. Fomin, *Measures and differential equations in infinite-dimensional space*, Kluwer Academic Publishers Group, Dordrecht, 1991.

[19] L. Accardi, Y.G. Lu, I.V. Volovich, *Quantum theory and its stochastic limit*, Springer-Verlag, Berlin, 2002.
DOI: https://doi.org/10.1007/978-3-662-04929-7

[20] Yu.N. Orlov, V.Zh. Sakbaev, O.G. Smolyanov, *Feynman formulas for nonlinear evolution equations*, Dokl. Math. **96** (3), 574–577 (2017).
DOI: https://doi.org/10.1134/S1064562417060126

[21] T. Liggett, *Interacting particle systems*, Springer-Verlag, Berlin, 2005.
DOI: https://doi.org/10.1007/b138374

[22] A.D. Venttsel', M.I. Freidlin, *Fluctuations in dynamical systems subject to small random perturbations*, Nauka, M., 1979 [in Russian].

[23] E.B. Dynkin, *Markov processes. Vols.* I, II, Springer-Verlag, Berlin, 1965.
DOI: https://doi.org/10.1007/978-3-662-00031-1
DOI: https://doi.org/10.1007/978-3-662-25360-1

[24] J. Zinn-Justin, *Path integrals in quantum mechanics*, Oxford University Press, Oxford, 2010.
DOI: https://doi.org/10.1093/acprof:oso/9780198566748.001.0001

[25] C. Bender, Ya.A. Butko, *Stochastic solutions of generalized time-fractional evolution equations*, Fract. Calc. Appl. Anal. **25** (2), 488–519 (2022).
DOI: https://doi.org/10.1007/s13540-022-00025-3

[26] C. Bender, M. Bormann, Ya.A. Butko, *Subordination principle and Feynman–Kac formulae for generalized time-fractional evolution equations*, Fract. Calc. Appl. Anal. **25** (5), 1818–1836 (2022).
DOI: https://doi.org/10.1007/s13540-022-00082-8

[27] Yu.V. Prokhorov, *Convergence of random processes and limit theorems in probability theory*, Theory Probab. Appl. **1** (2), 157–214 (1956).
DOI: https://doi.org/10.1137/1101016

[28] J. Jacod, A.N. Shiryaev, *Limit theorems for stochastic processes*, Springer-Verlag, Berlin, 2003.
DOI: https://doi.org/10.1007/978-3-662-05265-5

[29] S.A. Molchanov, V.N. Tutubalin, A.D. Ventzel', *Asymptotic problems in probability theory and the theory of random media*, Theory Probab. Appl. **35** (1), 87–93 (1990).
DOI: https://doi.org/10.1137/1135008

[30] A.D. Venttsel', *Refinement of the central limit theorem for stationary processes*, Theory Probab. Appl. **34** (3), 402–415 (1989).
DOI: https://doi.org/10.1137/1134049

[31] W. Feller, *An introduction to probability theory and its applications. Vol.* II, John Wiley & Sons, New York-London-Sydney, 1971.

[32] J. Gough, Yu.N. Orlov, V.Z. Sakbaev, O.G. Smolyanov, *Random quantization of Hamiltonian systems*, Dokl. Math. **103** (3), 122–126 (2021).
DOI: https://doi.org/10.1134/S106456242103008X

[33] Yu.N. Orlov, V.Z. Sakbaev, E.V. Shmidt, *Operator approach to weak convergence of measures and limit theorems for random operators*, Lobachevskii J. Math. **42** (10), 2413–2426 (2021).
DOI: https://doi.org/10.1134/S1995080221100188

[34] V.Zh. Sakbaev, *Averaging of random flows of linear and nonlinear maps*, J. Phys.: Conf. Ser. **990**, art. 012012 (2018).
DOI: https://doi.org/10.1088/1742-6596/990/1/012012

[35] V.I. Bogachev, O.G. Smolyanov, *Real and functional analysis*, Springer, Cham, 2020.
DOI: https://doi.org/10.1007/978-3-030-38219-3

[36] P.R. Chernoff, *Note on product formulas for operator semigroups*, J. Functional Analysis **2** (2), 238–242 (1968).
DOI: https://doi.org/10.1016/0022-1236(68)90020-7

[37] M.A. Berger, *Central limit theorem for products of random matrices*, Trans. Amer. Math. Soc. **285** (2), 777–803 (1984).
DOI: https://doi.org/10.1090/S0002-9947-1984-0752503-3

[38] V.M. Busovikov, V.Zh. Sakbaev, *Sobolev spaces of functions on Hilbert space endowed with shift-invariant measures and approximations of semigroups*, Izv. Math. **84** (4), 694–721 (2020).
DOI: https://doi.org/10.1070/IM8890

[39] V.Zh. Sakbaev, *Averaging of random walks and shift-invariant measures on Hilbert space*, Theoret. and Math. Phys. **191** (3), 886–909 (2017).
DOI: https://doi.org/10.1134/S0040577917060083

[40] V.I. Averbukh, O.G. Smolyanov, S.V. Fomin, *Generalized functions and differential equations in linear spaces.* I. *Differentiable measures*, Tr. Mosk. Mat. Obs. **24**, 133–174 (1971) [in Russian].
URL: https://www.mathnet.ru/rus/mmo249

[41] A. Weil, *L'intégration dans les groupes topologiques et ses applications*, Hermann, Paris, 1940 [in French].

[42] A.M. Vershik, *Does there exist a Lebesgue measure in the infinite-dimensional space?*, Proc. Steklov Inst. Math. **259**, 248–272 (2007).
DOI: https://doi.org/10.1134/S0081543807040153

[43] V.Zh. Sakbaev, *Random walks and measures on Hilbert space that are invariant with respect to shifts and rotations*, J. Math. Sci. **241** (4), 469–500 (2019).
DOI: https://doi.org/10.1007/s10958-019-04438-z

[44] V.Zh. Sakbaev, *Flows in infinite-dimensional phase space equipped with a finitely-additive invariant measure*, Mathematics **11** (5), art. 1161 (2023).
DOI: https://doi.org/10.3390/math11051161

[45] R. Baker, *Lebesgue measure on* $\mathbb{R}^\infty$, Proc. Amer. Math. Soc. **113**(4), 1023–1029 (1991).
DOI: https://doi.org/10.1090/S0002-9939-1991-1062827-X

[46] R.L. Baker, *Lebesgue measure on* $\mathbb{R}^\infty$*. II*, Proc. Amer. Math. Soc. **132** (9), 2577–2591 (2004).
DOI: https://doi.org/10.1090/S0002-9939-04-07372-1

[47] T. Gill, A. Kirtadze, G. Pantsulaia, A. Plichko, *Existence and uniqueness of translation invariant measures in separable Banach spaces*, Funct. Approx. Comment. Math. **50** (2), 401–419 (2014).
DOI: http://doi.org/10.7169/facm/2014.50.2.12

[48] D.V. Zavadsky, *Shift-invariant measures on sequence spaces*, Proc. MIPT **9** (4), 142–148 (2017) [in Russian].

[49] U. Grenander, *Probabilities on algebraic structures*, John Wiley & Sons, New York-London, 1968.

[50] V.I. Oseledets, *Markov chains, skew products and ergodic theorems for "general" dynamic systems*, Theory Probab. Appl. **10** (3), 499–504 (1965).
DOI: https://doi.org/10.1137/1110062

[51] A.V. Skorokhod, *Products of independent random operators*, Russ. Math. Surv. **38** (4), 291–318 (1983).
DOI: https://doi.org/10.1070/RM1983v038n04ABEH004213

[52] Yu.N. Orlov, V.Zh. Sakbaev, O.G. Smolyanov, *Feynman formulas and the law of large numbers for random one-parameter semigroups*, Proc. Steklov Inst. Math. **306**, 196–211 (2019).
DOI: https://doi.org/10.1134/S0081543819050171

[53] O.G. Smolyanov, A.G. Tokarev, A. Truman, *Hamiltonian Feynman path integrals via the Chernoff formula*, J. Math. Phys. **43** (10), 5161–5171 (2002).
DOI: https://doi.org/10.1063/1.1500422

[54] H.H. Kuo, N. Obata, K. Saito, *Diagonalization of the Lévy Laplacian and related stable processes*, Infin. Dimens. Anal. Quantum Probab. Relat. Top. **5** (3), 317–331 (2002).
DOI: https://doi.org/10.1142/S0219025702000882

[55] I.D. Remizov, *Quasi-Feynman formulas – a method of obtaining the evolution operator for the Schrödinger equation*, J. Funct. Anal. **270** (12), 4540–4557 (2016).
DOI: https://doi.org/10.1016/j.jfa.2015.11.017

[56] B.O. Volkov, *Levy Laplacian on manifold and Yang-Mills heat flow*, Lobachevskii J. Math. **40** (10), 1619–1630 (2019).
DOI: https://doi.org/10.1134/S1995080219100305

[57] B.O. Volkov, *Lévy Laplacians and instantons on manifolds*, Infin. Dimens. Anal. Quantum Probab. Relat. Top. **23** (2), art. 2050008 (2020).

DOI: https://doi.org/10.1142/S0219025720500083

[58] T. Kato, *Perturbation theory for linear operators*, Grundlehren Math. Wiss. **132**, Springer-Verlag, Berlin-New York, 1976.

[59] P. Billingsley, *Convergence of probability measures*, John Wiley & Sons, Inc., New York, 1999.

[60] V.I. Bogachev, *Measure theory. Vol.* II, Springer-Verlag, Berlin, 2007.
DOI: https://doi.org/10.1007/978-3-540-34514-5

[61] V.Zh. Sakbaev, D.V. Zavadskii, *Diffusion on a Hilbert space equipped with a shift- and rotation-invariant measure*, Proc. Steklov Inst. Math. **306** (1), 102–119 (2019).
DOI: https://doi.org/10.1134/S0081543819050109

Yuri Nikolaevich Orlov
Keldysh Institute of Applied Mathematics (Russian Academy of Sciences),
4 Miysskaya sq., Moscow 125047, Russia,
e-mail: ov3159f@yandex.ru

Vsevolod Zhanovich Sakbaev
Keldysh Institute of Applied Mathematics (Russian Academy of Sciences),
4 Miysskaya sq., Moscow 125047, Russia,
e-mail: fumi2003@mail.ru