Том 3, Выпуск 2
Стр. 136–144 (2025)

УДК 514.7
MSC 53C24, 53A05

Зависят ли свойства плоской замкнутой кривой от выбора точки начала ее обхода?

И.Х. Сабитов

Аннотация. Доказывается, что выбор точки начала обхода замкнутой кривой на плоскости влияет на свойства ее внешней геометрии.

Ключевые слова: замкнутая плоская кривая, обход, влияние выбора его начала.

DOI: 10.26907/2949-3919.2025.2.136-144

1. Пример с кардиоидой

Когда обсуждается вопрос об использовании замкнутой кривой в каком-нибудь рассуждении, обычно не задумываясь берут какую-нибудь подходящую ее параметризацию с согласованной по задаче ориентацией и начинают вычисления с удобной для расчетов точки. При этом, как правило, не учитывают, не влияет ли выбор точки начала обхода кривой на свойства кривой. Мы покажем, что если кривую рассматривать в функции ее натурального параметра, то изменение начальной точки обхода кривой влияет как на локальные, так и на глобальные геометрические характеристики кривой, за исключением случаев окружности. Другими словами, выбор точки начала обхода замкнутой кривой не изменяет ее внутреннюю геометрию, но изменяет ее внешнюю геометрию.

Рассмотрим сначала пример кардиоиды с параметрическим уравнением

$$x = a\sin\varphi(1-\cos\varphi), \quad y = -a\cos\varphi(1-\cos\varphi), \quad 0 \le \varphi \le 2\pi,$$

где числовой параметр $a > 0$. Мы выбрали этот пример, потому что для него легко перейти от углового параметра φ к натуральному параметру s:

$$s = 8a\sin^2\frac{\varphi}{4}, \quad 0 \le s \le 8a. \tag{1}$$

Далее, из (1) имеем

$$\varphi = 4\arcsin\sqrt{\frac{s}{8a}}, \quad \sin\varphi = \frac{(4a-s)\sqrt{s(8a-s)}}{8a^2}, \quad \cos\varphi = 1 - \frac{s(8a-s)}{8a^2}.$$

Поступила: 31.03.2025. Принята: 02.07.2025. Опубликована: 16.07.2025.

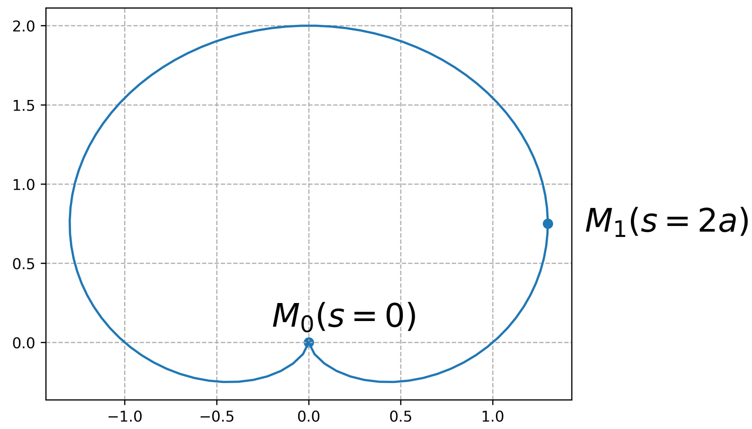

Рис. 1

На основании этих равенств легко находим значения $x(s), y(s)$ и их производных:

$$x(s) = (4a-s)\frac{\left(\sqrt{s(8a-s)}\right)^3}{64a^3}, \qquad y(s) = \frac{[s(8a-s)-8a^2]s(8a-s)}{64a^3}$$

$$x'(s) = \frac{(12a^2-8as+s^2)\sqrt{s(8a-s)}}{16a^3}, \tag{2}$$

$$y'(s) = -\frac{(4a-s)(s^2-8as+4a^2)}{16a^3}. \tag{3}$$

Из (2) и (3) выводим, что выполнено нужное для натуральной параметризации равенство

$$(x')^2(s) + (y')^2(s) = 1. \tag{4}$$

Пусть начало обхода кардиоиды в точке $M_0(0,0)$ при значении $s=0$ и возвращаемся в ту же точку при значении $s=8a$. Считаем, что функции $x(s), y(s)$ продолжаются по периодичности с периодом $T=8a$ на все значения s.

Сдвинем начало отсчета в точку $M_1\left(\frac{3\sqrt{3}a}{4}, \frac{3a}{4}\right)$ со значением $s=2a$. Радиус-вектор кривой с началом в новой точке обозначим как $\mathbf{r}^*(s)$. Натуральный аргумент s у кривой $\mathbf{r}^*(s)$ по-прежнему будет изменяться от 0 до $8a$. Новую кривую (см. рис 2) получаем как образ отображения отрезка $[0,8a]$ в R^2 со значениями координат $x^*(s), y^*(s)$. Имеем:

$$x^*(s) = \frac{(2a-s)[(s+2a)(6a-s)]^{3/2}}{64a^3}, \quad 0 \le s \le 6a$$

$$\frac{(10a-s)[(s-6a)(14a-s)]^{3/2}}{64a^3}, \quad 6a \le s \le 8a,$$

$$y^*(s) = \frac{(s+2a)(6a-s)[(s+2a)(6a-s)-8a^2]}{64a^3}, \quad 0 \le s \le 6a,$$

$$\frac{(s-6a)(14a-s)[(s-6a)(14a-s)-8a^2]}{64^3}, \quad 6a \le s \le 8a.$$

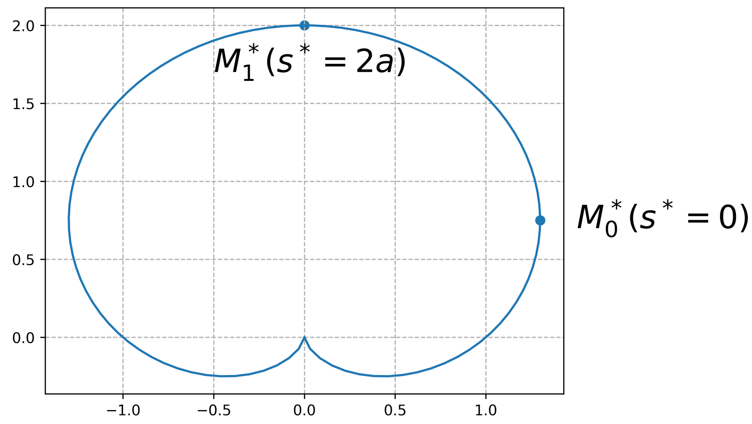

Рис. 2

Переименуем теперь M_1 в M_0^* с начальным значением параметра $s = 0$, как и положено в начале обхода. Тогда значению длины дуги, равной $2a$, при новом обходе будет соответствовать точка M_1^* с координатами $(x = 0, y = 2)$. Если новое положение кардиоиды получается из исходного ее положения просто движением, тогда по *определению движения* все расстояния на плоскости должны оставаться без изменения. Расстояние на плоскости между точками M_0 и M_1 равно $\frac{3}{2}a$, а расстояние между их образами M_0^* и M_1^* равно $\frac{\sqrt{13}}{2}a$.

Итак, по внутренней геометрии (т. е., по кривой) расстояния в парах (M_0, M_1) и (M_0^*, M_1^*) оба равны $2a$, а пространственные расстояния в них разные. Очевидно, равенство внутренних расстояний остается верным для всех пар точек, значит, перенос начальной точки отсчета приводит к появлению *нового* представления кардиоиды с координатами (x^*, y^*), нетривиально изометричного исходному ее изображению как образа, в обоих случаях, одного и того же отрезка $[0, 8a]$. Как множества точек в R^2, эти множества абсолютно идентичны, но как отображения они различны и их связывает нетривиальная изометрия между ними по равенству параметра s. Если изменение начала обхода кривой происходит непрерывно, то соответствующая деформация кривой будет нетривиальным *изгибанием* кривой, при котором дуги непрерывно переходят в дуги с теми же длинами, но с разными по длине хордами.

2. Основная теорема

То, что это так для всех кривых, кроме случая окружности, подтверждается следующей теоремой.

Теорема 1. *Для того, чтобы у замкнутой C^1-гладкой кривой равные по длине дуги имели равные по длине хорды, необходимо и достаточно, чтобы кривая была окружностью.*

Доказательство. Достаточность условия очевидна, проверим его необходимость. Пусть на кривой с натуральным уравнением $\mathbf{r} = \mathbf{r}(s)$ выделена некоторая дуга длины $\Delta s > 0$. Тогда расстояние на плоскости между концевыми точками $\mathbf{r}(s)$ и $\mathbf{r}(s+\Delta s)$ этой дуги равно

$$\sqrt{(\mathbf{r}(s+\Delta s) - \mathbf{r}(s))^2}$$

и оно при любом s зависит только от Δs. Обозначим эту зависимость как $f(\Delta s) > 0$. Тогда

$$(\mathbf{r}(s+\Delta s) - \mathbf{r}(s))^2 = f^2(\Delta s). \tag{5}$$

Обозначим для краткости Δs как t. Из уравнения (5) при $s = 0$ имеем

$$f^2(t) = (\mathbf{r}(t) - \mathbf{r}(0))^2,$$

так что уравнение (5) с учетом периодичности координат точек замкнутой кривой при всех t и s представится в виде

$$(\mathbf{r}(s+t) - \mathbf{r}(s))^2 = (\mathbf{r}(t) - \mathbf{r}(0))^2.$$

Продифференцируем это равенство по s. Получим

$$(\mathbf{r}(s+t) - \mathbf{r}(s)) \cdot (\mathbf{r}(s+t))'_s - \mathbf{r}'_s(s)) = 0.$$

Пусть длина замкнутой кривой равна $2L$. Выберем значение t для данного s, $0 < s < 2L$, таким, чтобы $s + t = 2L$. Тогда $\mathbf{r}(s+t) = \mathbf{r}(0)$ и мы при любом s имеем равенство

$$(\mathbf{r}(s) - \mathbf{r}(0)) \cdot (\mathbf{r}'(s) - \mathbf{r}'(0)) = 0. \tag{6}$$

Окружность $C : x^2 + y^2 = R^2$ с радиусом $R = \dfrac{L}{\pi}$ удовлетворяет равенству (6). Покажем, что любую другую C^1-гладкую кривую с той же длиной $2L$ и с тем же условием (6) можно движением совместить с окружностью $C : x = R\cos\dfrac{s}{R}$, $y = R\sin\dfrac{s}{R}$. Рассматриваемую кривую $\mathbf{r}(s) = (x(s), y(s))$ переносом можно расположить так, чтобы в данной системе координат ее точка со значением $s = 0$ имела за счет переноса координаты $(R, 0)$, а с использованием поворота вокруг этой точки добъемся, чтобы единичная касательная к кривой шла по вектору $(0, 1)$. Тогда

$$\mathbf{r}(0) = (R, 0), \quad \mathbf{r}'(0) = (0, 1) \tag{7}$$

и из (6) получаем равенство

$$(x(s) - R)\, x'(s) = y(s)\, (1 - y'(s)). \tag{8}$$

Возведем (8) в квадрат и учитывая (4), приходим к уравнению

$$(x-R)^2 = \frac{(1-y'(s))\,y^2}{1+y'(s)}, \tag{9}$$

Отсюда находим, что $y'(s)$ выражается через $x(s)$ и $y(s)$:

$$y'(s) = \frac{y^2-(x-R)^2}{y^2+(x-R)^2}. \tag{10}$$

Следовательно, существует вторая производная $y''(s)$ и для нее с учетом формул (8) и (9) имеем равенство

$$y''(s) = \frac{(y')^2(s)-1}{y(s)}. \tag{11}$$

Дальше можно поступить так: по начальным условиям (7) непосредственно находим, что функция $y = R\sin\dfrac{s}{R}$ удовлетворяет уравнению (11) или решаем это уравнение[1] с условиями (7) и находим его единственное решение $y = R\sin\dfrac{s}{R}$ и тем самым получаем доказательство теоремы. □

3. Перенос начала обхода и бесконечно малые изгибания кривой

Рассмотрим случай малого изменения точки начала обхода, т. е. кривую

$$\mathbf{r}(s+\varepsilon) = \mathbf{r}(s) + \varepsilon\mathbf{r}'(s) + o(\varepsilon).$$

Сначала сделаем важное замечание о структуре уравнения, описывающего б. м. (бесконечно малые) изгибания первого и более высоких порядков. В его обычной записи, по аналогии с записью для б. м. изгибаний поверхностей (см., например, [2, с. 101]), переход от исходного радиус-вектора $\mathbf{r}(s)$ к деформированному вектору $\mathbf{r}^*(s)$ должен быть вида

$$\mathbf{r}^*(s) = \mathbf{r}(s) + \varepsilon\mathbf{z}_1(s) + \varepsilon^2\mathbf{z}_2(s) + \ldots + \varepsilon^n\mathbf{z}_n + o(\varepsilon^n) \tag{12}$$

(мы не пишем в слагаемых числовой коэффициент 2, чтобы не усложнять толкование параметра ε). Изменение начала отсчета не изменяет само множество точек на кривой, поэтому мы хотим узнать, какое влияние оказывает на взаимосвязь между внутренней и внешней геометрией кривой перенос точки начала отсчета длины кривой.

По правилу действий с размерностными физическими и геометрическими величинами, над которыми проводятся операции сложения и вычитания, все они должны иметь одинаковую качественную и количественную размерность[2], а при их умножении должна

---

[1] Впрочем, в книге [1] в пункте (6.110) дано готовое его решение.

[2] Имеется в виду, что нельзя складывать, например, значение массы со значением времени и численные значения метров с численными значениями сантиметров.

появиться величина, размерность которой представляется как произведение размерностей сомножителей. С другой стороны, в теории б. м. изгибаний есть общепринятое понимание вектора поля б. м. изгибания 1-го порядка как мгновенной *скорости* изменения координат кривой или поверхности (см. работы [3, с. 308], [2, с. 101]), поэтому размерность поля $\mathbf{z}_1$ естественно толковать как $\dfrac{\mathrm{cm}}{\mathrm{sec}}$, а тогда параметр ε должен считаться временем и его размерность будет обозначаться sec, если размерность координат радиус-вектора $\mathbf{r}^*$ считается в сантиметрах. Далее, время мы стандартно будем обозначать символом t, а размерность скорости представляется как $\dfrac{\mathrm{cm}}{\mathrm{sec}}$.

Теорема 2. *Для C^2-гладкой кривой перенос точки начала отсчета ее длины приводит в общем случае к появлению ее нетривиального бесконечно малого изгибания. В случае окружности перенос начала обхода равносилен ее тривиальному б. м. изгибанию.*

Доказательство. Вектор б. м. изгибания обычно толкуется как скорость изменения радиус-вектора кривой (см. [3, с. 308]) и в соответствии с этим считаем, что положение новой начальной точки $\mathbf{r}(s+\Delta s)$ связано с полем $\mathbf{z}_1$ следующей частью формулы Тейлора

$$\mathbf{r}^*(s) = \mathbf{r}(s+\Delta s) = \mathbf{r}(s) + \mathbf{r}'(s)\Delta s + \frac{1}{2}\,\mathbf{r}''(s)\,(\Delta s)^2 + o(\Delta s)^2.$$

Тогда в соответствии с общетеоретическим представлением (12) имеем, что

$$\mathbf{z}_1(s) = \frac{1}{t}\,\mathbf{r}'(s)\,\Delta s$$

и размерность $\mathbf{z}_1$ будет $\dfrac{\mathrm{cm}}{\mathrm{sec}}$, как и положено для скорости.

Так как $\mathbf{r}'(s)$ единичный вектор, то $\mathbf{r}'^2(s) \equiv 1$, и дифференцированием получаем равенство $\mathbf{r}'(s)\,\mathbf{r}''(s) = 0$, что и дает нужное для поля б. м. изгибания $\mathbf{z}_1(s)$ уравнение

$$d\mathbf{r}\cdot d\mathbf{z}_1 = 0. \tag{13}$$

В случае окружности с уравнением

$$x(s) = R\cos\frac{s}{R}, \quad y(s) = R\sin\frac{s}{R}$$

имеем, что

$$t\,\mathbf{z}_1(s) = \left(-\sin\frac{s}{R}, \cos\frac{s}{R}\right)\Delta s = \frac{1}{R}\,(-y(s), x(s))\,\Delta s, \tag{14}$$

т. е. соответствующая часть деформации (12) имеет вид

$$\mathbf{r}^*(s) = (x(s), y(s)) + \frac{1}{R}\,(-y(s), x(s))\,\Delta s + o(\Delta s). \tag{15}$$

Покажем, что это б. м. изгибание является тривиальным, т. е., начальной скоростью некоторого движения. Пусть перенос точки начала отсчета длины является бесконечно малым движением. Всякое движение на плоскости является трехпараметрическим преобразованием, состоящим из некоторого вектора $\mathbf{a}\,t$, и вращения вокруг начала координат с ортогональной матрицей

$$\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}.$$

Обозначим эту матрицу как $A(t)$. В начальный момент $t=0$ матрица A равна единичной матрице $E(2\times 2)$. Пусть скорость вращения определяется производной $\alpha'(t)=\omega$. Тогда вычисляя $A'(t)$ в начальный момент, получаем, что эта производная равна умноженной на α' матрице

$$\begin{pmatrix} -\sin\alpha & -\cos\alpha \\ \cos\alpha & -\sin\alpha \end{pmatrix}$$

Если кривая задана радиус-вектором $\mathbf{r}(s)$, то по ходу применения к ней гладкого движения матрица $A(t)$ изменяется, что приводит к равенству вида

$$A(t) = E + tA_1 + o(t), \tag{16}$$

где $A_1 = A'(0)$.

Так как для ортогональных матриц обратная матрица совпадает с транспонированной матрицей A^T, то умножением равенства (13) на $A^T = E + tA_1^T + o(t)$ приходим к соотношению

$$E = E + t\,(A_1 + A_1^T) + o(t).$$

Следовательно, матрица A_1 является кососимметрической вида

$$\begin{pmatrix} 0 & -\omega \\ \omega & 0 \end{pmatrix}$$

с постоянной $\omega = \alpha'(0)$, и действие матрицы $A(t)$ из (16) на $\mathbf{r}(s)$ дает следующее тривиальное изменение радиус-вектора

$$\mathbf{r}^*(s) = \mathbf{r}(s+\Delta s) = \mathbf{r}(s) + t\,A_1\,\mathbf{r}(s) + o(t).$$

Начальная скорость такого движения складывается из постоянного вектора $\mathbf{a}$ с размерностью $\dfrac{\mathrm{cm}}{\mathrm{sec}}$ и вектора $A_1\mathbf{r}(s) = \omega(-y(s), x(s))$, где ω – постоянная с размерностью $\dfrac{\mathrm{rad}}{\mathrm{sec}}$, что дает изменение длины дуги на окружности на величину $\Delta s = \omega R$. Видим, что приведенное выше в (15) б. м. изгибание окружности совпадает с полученным сейчас тривиальным. Теорема 2 доказана. □

Влияние изменения начала отсчета длины кривой можно увидеть из следующего мысленного эксперимента. Пусть из некоторой точки кривой послан сигнал, идущий по кривой. После прохождения по кривой некоторого расстояния, из точки кривой, куда дошел сигнал, посылается по хорде в точку отправления сообщение о прибытии посланного сигнала. Теорема говорит, что если кривая не была дугой окружности, то сигналы, посланные из разных точек, но идущие сначала вдоль кривой на одинаковые расстояния, придут в точку отправления за разное время. Интересно было бы узнать, как изменяется в зависимости от характеристик кривой время прихода сигнала в исходную точку при данной длине пути по кривой, в частности, когда оно будет наименьшим или наибольшим.

Список литературы

[1] Э. Камке, *Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям*, Изд-во Иностранной литературы, М., 1950.

[2] Н.В. Ефимов, *Качественные вопросы теории деформаций поверхностей*, УМН **3** (2), 47–158 (1948).
URL: https://www.mathnet.ru/rus/rm8695

[3] А.Д. Александров, *О бесконечно малых изгибаниях нерегулярных поверхностей*, Матем. сб. **1** (3), 307–322 (1936).
URL: https://www.mathnet.ru/rus/sm5391

Иджад Хакович Сабитов
Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова,
механико-математический факультет,
Ленинские горы, д. 1, Москва, 119991, Россия,
e-mail: isabitov@mail.ru

Volume 3, Issue 2
pp. 136–144 (2025)

UDC 514.7
MSC 53C24, 53A05

Does the properties of a closed plane curve depend on the choice of its initial point of rounding?

I.Kh. Sabitov

Abstract. We prove that the choice of an initial point of rounding of a closed plane curve influences its exterior geometry.

Keywords: closed plane curve, rounding, influence of the choice of its initial point.

DOI: 10.26907/2949-3919.2025.2.136-144

References

[1] E. Kamke, *Differentialgleichungen Lösungsmethoden und Lösungen.* I, B.G. Teubner, Stuttgart, 1977 [in German].

[2] N.V. Efimov, *Qualitative problems of the theory of deformation of surfaces*, Russ. Math. Surv. **3** (2), 47–158 (1948) [in Russian].
URL: https://www.mathnet.ru/rus/rm8695

[3] A.D. Aleksandrov, *On infinitesimal bendings of surfaces*, Sb. Math. **1** (3), 307–322 (1936) [in Russian].
URL: https://www.mathnet.ru/rus/sm5391

Idzhad Khakovich Sabitov
Moscow State University,
Faculty of Mechanics and Mathematics,
1 Leninskie Gory, Moscow, 119991, Russia,
e-mail: isabitov@mail.ru

Received: 31 March 2025. Accepted: 02 July 2025. Published: 16 July 2025.