

М.В. Долов и шестнадцатая проблема Гильберта

А.Д. Морозов, К.Е. Морозов

Аннотация. 5 ноября 2024 года исполнилось 90 лет со дня рождения выдающегося ученого и замечательного человека Михаила Васильевича Долова. Это краткое сообщение посвящено данному событию и содержит обзор некоторых результатов М.В. Долова и других сотрудников Нижегородского государственного университета по второй части шестнадцатой проблемы Гильберта.

Ключевые слова: Долов, шестнадцатая проблема, Гильберт, предельные циклы, полиномиальные векторные поля.

DOI: 10.26907/2949-3919.2025.3.10-19

В 1900 году Д. Гильберт сформулировал список из 23 важнейших нерешённых математических проблем. Шестнадцатая проблема Гильберта называлась “Проблема топологии алгебраических кривых и поверхностей” и, по существу, разделялась на две проблемы в разных областях математики:

- 1) исследование взаимного расположения овалов вещественных алгебраических кривых и полостей алгебраических поверхностей (алгебраическая часть);
- 2) получение верхней оценки на число предельных циклов полиномиального векторного поля и исследование их взаимного расположения (дифференциальная часть).

Полностью шестнадцатая проблема Гильберта не решена до сих пор. При этом, следует отметить, что нижегородские (горьковские) математики активно занимались исследованием как первой, так и второй части, и получили по обоим направлениям фундаментальные результаты. Исследования, касающиеся первой “алгебраической” части, в основном принадлежат научной школе Д.А. Гудкова. Описание результатов по этой теме, а также некоторые малоизвестные факты об истории их открытия можно найти в обзоре [1]. В данной заметке мы подробнее остановимся на результатах нижегородских математиков, касающихся второй “дифференциальной” части шестнадцатой проблемы Гильберта. Отметим прежде, что задаче оценки числа предельных циклов алгебраических дифференциальных уравнений посвящены многочисленные исследования и в данной работе мы не ставим целью сколько-нибудь полный их обзор.

Благодарности. Работа поддержана Минобрнауки РФ, соглашение FSWR-2020-0036.

© 2025 А.Д. Морозов, К.Е. Морозов

Поступила: 12.06.2025. Принята: 09.09.2025. Опубликовано: 16.10.2025.

Итак, рассмотрим вещественную систему на плоскости

$$\dot{x} = P(x, y), \quad \dot{y} = Q(x, y), \quad (1)$$

где P и Q суть полиномы степени n . Изучение предельных циклов полиномиальных векторных полей вида (1) берёт своё начало от классических трудов Г. Дарбу, А. Пуанкаре, Н.П. Еругина. В 1923 году А. Дюлак доказал, что число предельных циклов у системы (1) конечно [2]. Однако, в 1980-х годах Ю.С. Ильяшенко нашел в доказательстве А. Дюлака значительный пробел, связанный с существованием плоских возмущений [3]. Этот пробел был устранен Ю.С. Ильяшенко [4] и независимо Ж. Экалем [5].

Среди исследований, устанавливающих связь между первой и второй частями шестнадцатой проблемы Гильберта, отметим следующую теорему выдающегося нижегородского математика Н.Н. Баутина [6].

Теорема 1. *Существуют системы вида (1), где P и Q – целые рациональные функции степени n , имеющие для произвольного $n \geq 2$ число алгебраических предельных циклов, равное максимальному числу овалов алгебраической кривой порядка n , т. е. $1 + \frac{(n-1)(n-2)}{2}$ для четного n и $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$ для нечетного n .*

Активно занимался проблемой существования и устойчивости предельных циклов Н.Ф. Отроков – ученик создателя всемирно известной “горьковской” научной школы по нелинейным колебаниям академика А.А. Андропова. Так, исследуя вопрос о наибольшем числе предельных циклов, рождающихся в окрестности фокуса, он доказал, что существуют системы, имеющие $\frac{n^2 + 5n - 20 + (-1)^n 6}{2}$ циклов, где $n \geq 6$ – степень полиномов P и Q (см. [7], также [8]). Кроме того, Н.Ф. Отроков получил критерий отсутствия в системе (1) кратных предельных циклов¹. В 1964 году в аспирантуру к Н.Ф. Отрокову поступил талантливый ассистент Горьковского государственного университета Михаил Васильевич Долов, который также занялся исследованием проблемы предельных циклов и вскоре получил значимые результаты. Уже в 1967 году М.В. Долов защитил кандидатскую диссертацию “Некоторые методы исследования предельных циклов” [10] и в 1971 году перешел на должность доцента. В 1984 году М.В. Долов защитил докторскую диссертацию “Канонические интегралы и предельные циклы” [11], а в 1985 году возглавил кафедру теории функций, а затем, в 1989 году, – кафедру дифференциальных уравнений и математического анализа. Этой кафедрой он руководил до 2000 года, после чего до 2014 года работал на ней в должности профессора. Значительная часть научных работ М.В. Долова, содержащая его основные результаты, опубликована в журнале “Дифференциальные уравнения” и посвящена проблеме оценки числа алгебраических предельных циклов. Так, в работах [12–16] изучались системы вида (1), где P и Q – взаимно простые вещественные полиномы, допускающие первые интегралы Дарбу (либо обобщенные интегралы Дарбу).

¹Подробнее о результатах Н.Ф. Отрокова, касающихся предельных циклов, см. обзор [9].

Все такие системы имеют рациональный интегрирующий множитель. В работах [17, 18] исследовались системы с интегрирующим множителем типа Дарбу. В общем случае эти множители будут многозначными функциями. М.В. Доловым и С.А. Чистяковой было доказано, что существуют системы вида (1) с интегрирующими множителями Дарбу и предельными циклами, причем такая возможность реализуется, в частности, в случаях, когда число сомножителей в интегрирующем множителе не менее двух [18].

Проблемой предельных циклов занимались также коллеги и ученики М.В. Долова, некоторые ссылки на их работы приведены в списке литературы. Отметим здесь статью М.В. Долова и В.В. Косарева [16], где с помощью интегралов Дарбу показано, что либо все фазовые кривые системы (1) алгебраические, либо число различных неприводимых алгебраических частных интегралов $\Phi(x, y)$, включая полиномы с комплексными коэффициентами, не более $\frac{n^2 + 3n - 2}{2}$, причем при $n = 2$ оценка точная. Такая оценка для вещественных алгебраических инвариантных кривых найдена в работе Т.А. Дружковой [19].

В 2001 году М.В. Долов доказал теорему о предельных циклах систем, интегрируемых по Дарбу, которую он считал одним из основных своих результатов. Приведём её формулировку. Обозначим через s число различных неприводимых над полем комплексных чисел алгебраических кривых $P_j(x, y) = 0$, определяющих вещественные предельные циклы системы (1). Известно, что $s \leq \frac{n^2 + n}{2}$. Будем говорить, что система (1) интегрируема по Дарбу, если она допускает первый интеграл Дарбу

$$F \equiv \Phi_1^{\beta_1} \cdots \Phi_k^{\beta_k} = C, \quad (2)$$

где $\Phi_1, \dots, \Phi_k$ – многочлены (в общем случае, комплексные) вещественных переменных x, y . Считаем, что в (2) все полиномы Φ неприводимы над полем комплексных чисел и попарно взаимно просты. Справедлива следующая

Теорема 2 ([20]).

I. Если система (1) имеет предельные циклы и интегрируема по Дарбу, то:

- 1) $1 \leq s \leq \frac{n^2 + n - 2}{2}$;
- 2) все полиномы $P_j(x, y) = 0$, $j = 1, \dots, s$ вещественные и входят в аналитическое выражение $F = \Phi_1^{\beta_1} \cdots \Phi_k^{\beta_k} = C$ (интеграл Дарбу);
- 3) у системы (1) нет других предельных циклов, отличных от $P_j(x, y) = 0$, $j = 1, \dots, s$;
- 4) характеристический показатель любого цикла отличен от нуля;
- 5) функция $F(x, y)$ многозначна в окрестности любого предельного цикла;
- 6) любой другой первый интеграл Дарбу $F(x, y) = C$ имеет вид $F_1 = KF^\lambda$, где K и λ в общем случае комплексные.

II. Если $s = \frac{n^2 + n}{2}$, то система (1):

- 1) не имеет других предельных циклов кроме $P_j(x, y) = 0$, $j = 1, \dots, s$;

- 2) неинтегрируема по Дарбу;
- 3) допускает вещественный интегрирующий множитель Дарбу $\mu = P_1^{-b_1} \dots P_s^{-b_s}$, где величина b_j равна порядку кратности предельного цикла, определяемого уравнением $P_j(x, y) = 0$.

Кроме того, М.В. Долов нашел и устранил пробел в доказательстве теоремы Н.Н. Баутина о числе алгебраических предельных циклов полиномиальной системы вида (1) (см. [21], также [22]). Отметим также решение М.В. Доловым проблемы Н.П. Еругина о существовании полиномиальных векторных полей с центром и предельными циклами [23]. Более полный обзор результатов М.В. Долова по исследованию алгебраических систем с интегралами Дарбу и интегралами типа Дарбу можно найти в статье [24].

Коллегами М.В. Долова, с которыми он работал на кафедре дифференциальных уравнений и математического анализа Нижегородского университета, были получены важные результаты по так называемой “ослабленной” шестнадцатой проблеме Гильберта, касающейся оценки числа предельных циклов для полиномиальных векторных полей, близких к гамильтоновым

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \frac{\partial H(x, y)}{\partial y} + \varepsilon g(x, y) \\ \dot{y} &= -\frac{\partial H(x, y)}{\partial x} + \varepsilon f(x, y).\end{aligned}\tag{3}$$

Здесь H – многочлен степени m , а g и f – многочлены степени n , ε – малый параметр. Предполагается, что система (3) при $\varepsilon = 0$ имеет ячейку, заполненную замкнутыми фазовыми кривыми, а возмущение неконсервативно (т. е. $g_x + f_y \neq 0$). В 1984 году А.Н. Варченко доказал, что при малых $\varepsilon \neq 0$ число предельных циклов M в индивидуальной ячейке конечно, но не дал оценки этого числа [25]. Отметим, что задача о предельных циклах в системах вида (3) приводит к изучению нулей некоторой функции, которую иногда называют порождающей функцией Пуанкаре–Понтрягина (см. подробности, например, в монографии [26]). В настоящее время оценки на число предельных циклов M получены лишь для частных случаев. Приведём некоторые результаты, полученные А. Д. Морозовым [27].

Теорема 3.

- 1) Для уравнения

$$\ddot{x} - a_{20}x^2 + 1 = \varepsilon \sum_{j=1}^J \sum_{n=0}^N a_{nj}x^n y^j$$

справедлива оценка $M < N + J + C$, $C = \text{const} > 1$.

- 2) Для уравнения

$$\ddot{x} + \alpha x + \beta x^3 = \varepsilon \sum_{j=1}^J \sum_{n=0}^N a_{nj}x^n y^j, \quad \alpha\beta \neq 0,$$

справедлива оценка $M < \left\lfloor \frac{N}{2} \right\rfloor + J + 1$.

3) Для уравнения

$$\ddot{x} + \sin x = \varepsilon \sum_{n=0}^N \sum_{j=1}^J (a_{nj} \cos nx + b_{nj} \sin nx) x^j, \quad N \geq J,$$

справедлива оценка $M^{\text{osc}} \leq N + \left\lceil \frac{J-1}{2} \right\rceil$, $M^{\text{rot}} \leq N + \left\lceil \frac{J}{2} \right\rceil$, где M^{osc} – число предельных циклов первого рода (не охватывающих фазовых цилиндр), M^{rot} – число предельных циклов второго рода (охватывающих фазовый цилиндр). При $J = 1$ оценка точная.

Отметим, что для случая 1) в 1988 году Г.С. Петров улучшил оценку: $M < N + J$ [28]. Доказательство случая 3) основано на следующей теореме [27], которая также представляет самостоятельный интерес.

Теорема 4. Существует такое достаточно малое $\varepsilon_*(n) > 0$, что при любых $|\varepsilon| \in (0, \varepsilon_*)$ у уравнения $\ddot{x} + \sin x = \varepsilon \dot{x} \cos nx$, $n \in \mathbb{N}$, в области колебательных движений имеется точно $n - 1$ грубых предельных циклов (первого рода). В области вращательных движений предельные циклы (второго рода) отсутствуют.

Список литературы

- [1] Г.М. Полотовский, В.В. Морозов, Д.А. Гудков и первая часть 16-й проблемы Гильберта, Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки **154** (2), 31–43 (2012).
URL: <https://www.mathnet.ru/rus/uzku1116>
- [2] H. Dulac, *Sur les cycles limits*, Bull. Soc. Math. France **51**, 45–188 (1923) [in French].
DOI: <https://doi.org/10.24033/bsmf.1031>
- [3] Ю.С. Ильяшенко, Мемуар Дюлака “О предельных циклах” и смежные вопросы локальной теории дифференциальных уравнений, УМН **40** (6), 41–78 (1985).
URL: <https://www.mathnet.ru/rus/rm2786>
- [4] Ю.С. Ильяшенко, Теоремы конечности для предельных циклов, УМН **45** (2), 143–200 (1990).
URL: <https://www.mathnet.ru/rus/rm4718>
- [5] J. Écalle, *Introduction aux fonctions analysables et preuve constructive de la conjecture de Dulac*, Hermann, Paris, 1992 [in French].
- [6] Н.Н. Баутин, Оценка числа алгебраических предельных циклов системы $\dot{x} = P(x, y)$, $\dot{y} = Q(x, y)$ с алгебраическими правыми частями, Дифференц. уравнения **16** (2), 362 (1980).
URL: <https://www.mathnet.ru/rus/de3931>

-
- [7] Н.Ф. Отроков, *О числе предельных циклов в окрестности фокуса*, ДАН СССР **43** (4), 102–105 (1944).
- [8] Н.Ф. Отроков, *О числе предельных циклов дифференциального уравнения в окрестности особой точки*, Матем. сб. **76** (1), 127–144 (1954).
URL: <https://www.mathnet.ru/sm5240>
- [9] М.В. Долов, *Проблема конечности числа предельных циклов полиномиального векторного поля на плоскости и работы Н.Ф. Отрокова*, Вестник ННГУ, сер. Матем. (1), 146–154 (2003).
URL: <http://www.vestnik.unn.ru/ru/nomera?anum=1416>
- [10] М.В. Долов, *Некоторые методы исследования предельных циклов*, дисс. ... канд. физ.-матем. наук, Горький, 1967.
- [11] М.В. Долов, *Канонические интегралы и предельные циклы*, дисс. ... д-ра физ.-матем. наук, Горький, 1983.
- [12] М.В. Долов, *Предельные циклы и алгебраические интегралы в случае центра*, Дифференц. уравнения **11** (11), 1935–1941 (1975).
URL: <https://www.mathnet.ru/rus/de2593>
- [13] М.В. Долов, *Канонический интеграл в окрестности фокуса*, Дифференц. уравнения **12** (11), 1946–1953 (1976).
URL: <https://www.mathnet.ru/rus/de2905>
- [14] М.В. Долов, *Предельные циклы и интегралы Дарбу в случае узла*, Дифференц. уравнения **13** (3), 406–415 (1977).
URL: <https://www.mathnet.ru/rus/de3009>
- [15] М.В. Долов, *Интегралы Дарбу в случае фокуса*, Дифференц. уравнения **14** (7), 1173–1178 (1978).
URL: <https://www.mathnet.ru/rus/de3431>
- [16] М.В. Долов, В.В. Косарев, *Интегралы Дарбу и аналитическая структура решений дифференциальных уравнений*, Дифференц. уравнения **19** (4), 697–700 (1983).
URL: <https://www.mathnet.ru/rus/de4830>
- [17] М.В. Долов, *Интегрирующий множитель в окрестности узла*, Дифференц. уравнения **33** (2), 158–160 (1997).
URL: <https://www.mathnet.ru/rus/de9187>
- [18] М.В. Долов, С.А. Чистякова, *Алгебраические дифференциальные уравнения с интегрирующим множителем типа Дарбу*, Дифференц. уравнения **33** (5), 618–622 (1997).
URL: <https://www.mathnet.ru/rus/de9260>
- [19] Т.А. Дружкова, *Об одном дифференциальном уравнении с алгебраическими интегралами*, Дифференц. уравнения **11** (2), 262–267 (1975).
URL: <https://www.mathnet.ru/rus/de2383>

- [20] М.В. Долов, *Об алгебраических предельных циклах полиномиальных векторных полей на плоскости*, Дифференц. уравнения **37** (9), 1155–1160 (2001).
URL: <https://www.mathnet.ru/rus/de10442>
- [21] М.В. Долов, *Теорема Баутина о числе алгебраических предельных циклов полиномиальных векторных полей*, Вестник ННГУ (4), 259–262 (2014).
URL: <http://www.vestnik.unn.ru/ru/nomera?anum=8807>
- [22] М.В. Долов, *О числе алгебраических инвариантных кривых полиномиальных векторных полей*, Дифференц. уравнения **40** (6), 838–839 (2004).
URL: <https://www.mathnet.ru/rus/de11093>
- [23] М.В. Долов, *О предельных циклах в случае центра*, Дифференц. уравнения **8** (9), 1691–1692 (1972).
URL: <https://www.mathnet.ru/rus/de1673>
- [24] Е.В. Круглов, *Алгебраические дифференциальные уравнения с заданными интегралами. Обзор результатов, полученных М.В. Доловым*, Матем. в высшем обр. **22**, 91–106 (2024).
URL: <https://elibrary.ru/item.asp?id=80428850>
- [25] А.Н. Варченко, *Оценка числа нулей Абелева интеграла, зависящего от параметра, и предельные циклы*, Функц. анализ и его прил. **18** (2), 14–25 (1984).
URL: <https://www.mathnet.ru/rus/faa1444>
- [26] А.Д. Морозов, *Резонансы, циклы и хаос в квазиконсервативных системах*, Регулярная и хаотическая динамика, Москва–Ижевск, 2005.
- [27] А.Д. Морозов, Е.Л. Федоров, *К исследованию уравнений с одной степенью свободы, близких к нелинейным интегрируемым*, Дифференц. уравнения **19** (9), 1511–1516 (1983).
URL: <https://www.mathnet.ru/rus/de4943>
- [28] Г.С. Петров, *Чебышевское свойство эллиптических интегралов*, Функц. анализ и его прил. **22** (1), 83–84 (1988).
URL: <https://www.mathnet.ru/rus/faa1097>

Альберт Дмитриевич Морозов

Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского,
пр-т Гагарина, д. 23, г. Нижний Новгород, 603022, Россия,
e-mail: morozov@mm.unn.ru

Кирилл Евгеньевич Морозов

Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского,
пр-т Гагарина, д. 23, г. Нижний Новгород, 603022, Россия,
e-mail: kirill.morozov@itmm.unn.ru

M.V. Dolov and the sixteenth Hilbert problem

A.D. Morozov, K.E. Morozov

Abstract. The 5th of November 2024 marked the 90th anniversary of the birth of an outstanding scientist and a remarkable person Mikhail Vasilievich Dolov. This short essay is dedicated to this event and contains an overview of some results of M.V. Dolov and other researchers at Nizhny Novgorod State University on the second part of the sixteenth Hilbert problem.

Keywords: Dolov, the sixteenth problem, Hilbert, limit cycles, polynomial vector fields.

DOI: 10.26907/2949-3919.2025.3.10-19

References

- [1] G.M. Polotovskiy, V.V. Morozov, D.A. Gudkov and the first part of the 16th Hilbert problem, *Uchenye Zapiski Kazanskogo Universiteta. Seriya Fiziko-Matematicheskie Nauki* **154** (2), 31–43 (2012) [in Russian].
URL: <https://www.mathnet.ru/rus/uzku1116>
- [2] H. Dulac, *Sur les cycles limites*, Bull. Soc. Math. France **51**, 45–188 (1923) [in French].
DOI: <https://doi.org/10.24033/bsmf.1031>
- [3] Yu.S. Ilyashenko, *Dulac's memoir "On limit cycles" and related problems of the local theory of differential equations*, Russian Math. Surveys **40** (6), 1–49 (1985).
DOI: <https://doi.org/10.1070/RM1985v040n06ABEH003701>
- [4] Yu.S. Ilyashenko, *Finiteness theorems for limit cycles*, Russian Math. Surveys **45** (2), 129–203 (1990).
DOI: <https://doi.org/10.1070/RM1990v045n02ABEH002335>
- [5] J. Écalle, *Introduction aux fonctions analysables et preuve constructive de la conjecture de Dulac*, Hermann, Paris, 1992 [in French].
- [6] N.N. Bautin, *Estimation of the number of algebraic limit cycles of the system $\dot{x} = P(x, y)$, $\dot{y} = Q(x, y)$ with algebraic right-hand sides*, Differ. Uravn. **16** (2), 362 (1980) [in Russian].
URL: <https://www.mathnet.ru/rus/de3931>

Acknowledgements. The work is supported by Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation, agreement FSWR-2020-0036.

Received: 12 June 2025. Accepted: 09 September 2025. Published: 16 October 2025.

-
- [7] N.F. Otrokov, *On the number of limit circles in the neighborhood of a focus*, Dokl. Akad. Nauk USSR **43** (4), 102–105 (1944) [in Russian].
- [8] N.F. Otrokov, *On the number of limit cycles of a differential equation in the neighborhood of a singular point*, Sb. Math. **76** (1), 127–144 (1954) [in Russian].
URL: <https://www.mathnet.ru/sm5240>
- [9] M.V. Dolov, *On the problem of the finiteness of limit cycles of polynomial vector field and N.F. Otrokov works*, Vestnik NNGU, ser. Math. (1), 146–154 (2003) [in Russian].
URL: <http://www.vestnik.unn.ru/ru/nomera?anum=1416>
- [10] M.V. Dolov, *On some methods of limit cycles research*, diss. ... cand. phys.-math, Gorkii, 1967.
- [11] M.V. Dolov, *On canonical integrals and limit circles*, diss. ... dr. phys.-math, Gorkii, 1983.
- [12] M.V. Dolov, *Limit cycles and algebraic integrals in the case of a center*, Differ. Uravn. **11** (11), 1935–1941 (1975) [in Russian].
URL: <https://www.mathnet.ru/rus/de2593>
- [13] M.V. Dolov, *The canonical integral in the neighborhood of a focus*, Differ. Uravn. **12** (11), 1946–1953 (1976) [in Russian].
URL: <https://www.mathnet.ru/rus/de2905>
- [14] M.V. Dolov, *Limit cycles and Darboux integrals in the case of a node*, Differ. Uravn. **13** (3), 406–415 (1977) [in Russian].
URL: <https://www.mathnet.ru/rus/de3009>
- [15] M.V. Dolov, *Darboux integrals in the case of a focus*, Differ. Uravn. **14** (7), 1173–1178 (1978).
URL: <https://www.mathnet.ru/rus/de3431>
- [16] M.V. Dolov, V.V. Kosarev, *Darboux integrals and the analytic structure of solutions of differential equations*, Differ. Uravn. **19** (4), 697–700 (1983).
URL: <https://www.mathnet.ru/rus/de4830>
- [17] M.V. Dolov, *An integrating factor in a neighborhood of a node*, Differential Equations **33** (2), 158–160 (1997).
- [18] M.V. Dolov, S.A. Chistyakova, *Algebraic differential equations with an integrating factor of Darboux type*, Differential Equations **33** (5), 621–625 (1997).
- [19] T.A. Druzhkova, *A certain differential equation with algebraic integrals*, Differ. Uravn. **11** (2), 262–267 (1975) [in Russian].
URL: <https://www.mathnet.ru/rus/de2383>
- [20] M.V. Dolov, *Algebraical limit cycles of polynomial vector fields on the plane*, Differential Equations **37** (9), 1211–1216 (2001).
DOI: <https://doi.org/10.1023/A:1012582809822>

- [21] M.V. Dolov, *Bautin's theorem on a number of algebraical limit cycles of polynomial vector fields*, Vestnik NNGU (4), 259–262 (2014) [in Russian].
URL: <http://www.vestnik.unn.ru/ru/nomera?anum=8807>
- [22] M.V. Dolov, *On the number of algebraic invariant curves of polynomial vector fields*, Differential Equations **40** (6), 896–897 (2004).
DOI: <https://doi.org/10.1023/B:DIEQ.0000046867.17535.71>
- [23] M.V. Dolov, *Limit cycles in the case of the center*, Differ. Uravn. **8** (9), 1691–1692 (1972) [in Russian].
URL: <https://www.mathnet.ru/rus/de1673>
- [24] E.V. Kruglov, *Algebraic differential equations with given integrals. Review of the results obtained by M.V. Dolov*, Matem. v vysh. obr. **22**, 91–106 (2024) [in Russian].
URL: <https://elibrary.ru/item.asp?id=80428850>
- [25] A.N. Varchenko, *Estimate of the number of zeros of an abelian integral depending on a parameter and limit cycles*, Funct. Anal. Appl. **18**(2), 98–108 (1984).
DOI: <https://doi.org/10.1007/BF01077820>
- [26] A.D. Morozov, *Quasi-conservative systems. Cycles, resonances and chaos*, World Scientific Publishing Co., Inc., River Edge, NJ, 1998.
DOI: <https://doi.org/10.1142/3238>
- [27] A.D. Morozov, E.L. Fedorov, *On the investigation of equations with one degree of freedom, close to nonlinear integrable ones*, Differ. Uravn. **19** (9), 1511–1516 (1983) [in Russian].
URL: <https://www.mathnet.ru/rus/de4943>
- [28] G.S. Petrov, *The Chebyshev property of elliptic integrals*, Funct. Anal. Appl. **22** (1), 72–73 (1988).
DOI: <https://doi.org/10.1007/BF01077734>

Albert Dmitrievich Morozov

Lobachevsky State University of Nizhny Novgorod,
23 Gagarin ave., Nizhny Novgorod 603022, Russia,
E-mail: morozov@mm.unn.ru

Kirill Evgenevich Morozov

Lobachevsky State University of Nizhny Novgorod,
23 Gagarin ave., Nizhny Novgorod 603022, Russia,
E-mail: kirill.morozov@itmm.unn.ru