

## О топологической классификации потоков с гетероклиническими кривыми на четырехмерных многообразиях

Е.Я. Гуревич

**Аннотация.** Получена топологическая классификация гладких структурно устойчивых потоков на четырехмерных замкнутых многообразиях, блуждающее множество которых содержит изолированные траектории, соединяющие седловые состояния равновесия (гетероклинические кривые). Из соображений размерности гетероклинические кривые таких потоков принадлежат пересечению инвариантных многообразий седел соседних индексов Морса. Мы предполагаем, что неблуждающее множество рассматриваемых потоков состоит в точности из одного источника, одного стока и произвольного числа седел, размерность неустойчивых многообразий которых равна 1 и 2. В работе получены необходимые и достаточные условия топологической эквивалентности таких потоков и предъявлен алгоритм реализации представителя каждого класса топологической эквивалентности. В частности, показано, что в рассматриваемом классе потоков на сфере  $S^4$  существует ровно один класс топологической эквивалентности потоков с единственной гетероклинической кривой и счетное множество топологически неэквивалентных потоков с тремя гетероклиническими кривыми. Последний результат контрастирует с трехмерной ситуацией, где для аналогичного класса потоков существует лишь конечное число классов эквивалентности для каждого числа гетероклинических кривых.

**Ключевые слова:** гетероклиническая кривая, градиентно-подобный поток, полярный поток, топологическая классификация, диаграмма Кирби.

**DOI:** 10.26907/2949-3919.2025.3.20-42

### Введение

Напомним, что состояние равновесия  $p$  гладкого потока  $f^t : M^n \rightarrow M^n$  называется *гиперболическим*, если матрица Якоби  $J_p = \left( \frac{\partial F}{\partial x} \right) \Big|_p$  поля скоростей  $F = \partial f^t(x)/\partial t|_{t=0}$  в точке  $p$  не имеет собственных значений с нулевой действительной частью. Множества

$$W_p^s = \left\{ x \in M^n : \lim_{t \rightarrow +\infty} f^t(x) = p \right\}, \quad W_p^u = \left\{ x \in M^n : \lim_{t \rightarrow +\infty} f^{-t}(x) = p \right\}$$

Благодарности. Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант № 23-71-30008).

называются *устойчивым* и *неустойчивым инвариантными многообразиями состояния равновесия*  $p$ , соответственно. Число  $i_p$ , равное размерности  $\dim W_p^u$  неустойчивого многообразия  $W_p^u$ , называется *индексом Морса точки*  $p$ . Состояние равновесия с индексом Морса, равным  $0$  ( $n$ ) называется *стоком* (*источником*, соответственно), состояние равновесия с индексом Морса, принадлежащим интервалу  $(0, n)$ , называется *седловым* или *седлом*. Непустое трансверсальное пересечение инвариантных многообразий  $W_p^u \cap W_q^s$  седловых состояний равновесия  $p, q$  называется *гетероклиническим*. Если пересечение  $W_p^u \cap W_q^s$  одномерно, то каждую компоненту связности этого пересечения будем называть *гетероклинической кривой*.

Гладкий поток  $f^t$ , заданный на гладком замкнутом многообразии  $M^n$  размерности  $n \geq 1$ , называется *поток Морса–Смейла*, если его неблуждающее множество  $\Omega_{f^t}$  состоит из конечного числа гиперболических состояний равновесия и замкнутых траекторий, а устойчивые и неустойчивые многообразия различных состояний равновесия и замкнутых траекторий либо не пересекаются, либо пересекаются трансверсально. Поток Морса–Смейла без замкнутых траекторий называется *градиентно-подобным*. Градиентно-подобный поток, неблуждающее множество которого содержит ровно один источник и один сток (при произвольном числе седел) называется *полярным*.

Потоки  $f^t, f^{t'}$ , заданные на многообразии  $M^n$ , называются *топологически эквивалентными*, если существует гомеоморфизм  $h : M^n \rightarrow M^n$ , переводящий траектории потока  $f^t$  в траектории потока  $f^{t'}$  с сохранением ориентации на траекториях, определяемых полем скоростей. Задача о топологической классификации градиентно-подобных потоков и потоков Морса–Смейла имеет долгую и богатую историю, берущую начало в классических работах А.А. Андропова, Л.С. Понтрягина, Е.А. Леонтович и А.Г. Майера (см. обзор [1] и книги [2, 3]). Для потоков Морса–Смейла с двумерным и градиентно-подобных потоков с трехмерным несущим многообразием эта проблема решена полностью. В случае несущих многообразий размерности 4 и выше наиболее законченные результаты получены для градиентно-подобных потоков без гетероклинических пересечений в работах [4–8]. В нашей работе проблема топологической классификации решается для класса полярных потоков на четырехмерных замкнутых многообразиях с непустым множеством гетероклинических кривых. Как и в работах [7, 8], проблема топологической классификации таких потоков сводится к проблеме классификации узлов и зацеплений. Перейдем к точным формулировкам результатов.

Для градиентно-подобного потока  $f^t : M^4 \rightarrow M^4$  будем обозначать через  $\Omega_{f^t}^i$  множество всех его состояний равновесия, индекс Морса которых равен  $i \in \{0, 1, \dots, 4\}$  и через  $|\Omega_{f^t}^i|$  мощность множества  $\Omega_{f^t}^i$ . Обозначим за  $G(M^4)$  класс полярных потоков с непустыми множествами  $\Omega_{f^t}^1, \Omega_{f^t}^2$  и пустым множеством  $\Omega_{f^t}^3$ . Будем обозначать  $\omega, \alpha, \sigma_1, \sigma_2$  сток, источник и седловые состояния равновесия потока  $f^t$  такие, что  $\sigma_i \in \Omega_{f^t}^i$ . Всюду ниже  $\text{cl } X$  обозначает замыкание множества  $X$ .

**Теорема 1.** Пусть  $f^t \in G(M^4)$ . Тогда

- 1)  $M^4$  односвязно;

- 2)  $M^4$  гомеоморфно сфере  $S^4$  тогда и только тогда, когда  $|\Omega_{f^t}^2| = |\Omega_{f^t}^1|$ ;
- 3) для любых состояний равновесия  $\sigma_1, \sigma_2$  имеют место равенства  $W_{\sigma_1}^u \cap W_{\sigma_2}^s = \emptyset$  и  $\text{cl } W_{\sigma_1}^u = W_{\sigma_1}^u \cup \omega$ ,  $\text{cl } W_{\sigma_2}^s = W_{\sigma_2}^s \cup \alpha$ ;
- 4) устойчивое многообразие любого седла  $\sigma_1 \in \Omega_{f^t}^1$  содержит по крайней мере одну гетероклиническую кривую;
- 5) если  $M^4$  гомеоморфно сфере, то неустойчивое многообразие любого седла  $\sigma_2 \in \Omega_{f^t}^2$  содержит по крайней мере одну гетероклиническую кривую.

В силу результатов М.Х. Фридмана [9], односвязное гладкое замкнутое многообразие  $M^4$  размерности четыре определяется с точностью до гомеоморфизма своей *формой пересечения* – симметричной билинейной формой  $Q_{M^4} : H_2(M^4, \mathbb{Z}) \times H_2(M^4, \mathbb{Z}) \rightarrow \mathbb{Z}$ , ставящей в соответствие каждой паре классов  $(a, b) \in H_2(M^4, \mathbb{Z})$  их гомологический индекс пересечения (см. определение в [10, §5.3]). Ниже в предложении 2 устанавливается, что матрица формы пересечения в некотором базисе определяется следами двумерных сепаратрис седловых состояний равновесия потока  $f^t \in G(M^4)$  на секущей трехмерной сфере  $S_\alpha \subset W_\alpha^u$ .

В силу [11, 12] для любого градиентно-подобного потока существует *самоиндексирующаяся энергетическая функция* – функция Морса  $\varphi$ , строго убывающая вдоль траекторий потока, отличных от состояний равновесия, и имеющая критическую точку в каждом состоянии равновесия  $p$ , причем индекс точки  $p$  как критической точки энергетической функции совпадает с индексом Морса  $i_p$  и со значением функции  $\varphi(p)$  в этой точке. Пусть  $\varphi : M^4 \rightarrow [0, 4]$  – энергетическая функция для потока  $f^t \in G(M^4)$ . Положим

$$S_\alpha = \varphi^{-1}(3, 5), \quad \Sigma_{f^t} = \varphi^{-1}(1, 5).$$

Из свойств функции Морса следует, что  $S_\alpha$  является гладко вложенной трехмерной сферой, а  $\Sigma_{f^t}$  – гладко вложенным многообразием, гомеоморфным связной сумме  $|\Omega_{f^t}^1|$  копий прямых произведений  $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1$  двумерной сферы и окружности. С каждым седловым состоянием равновесия  $\sigma_2 \in \Omega_{f^t}^2$  свяжем две пары гладко вложенных простых замкнутых кривых (узлов)  $\lambda_{\sigma_2}^s, \tilde{\lambda}_{\sigma_2}^s \subset S_\alpha$  и  $\lambda_{\sigma_2}^u, \tilde{\lambda}_{\sigma_2}^u \subset \Sigma_{f^t}$  следующим образом. Положим

$$\lambda_{\sigma_2}^s = W_{\sigma_2}^s \cap S_\alpha, \quad \lambda_{\sigma_2}^u = W_{\sigma_2}^u \cap \Sigma_{f^t}$$

и

$$L^s = \bigcup_{\sigma_2 \in \Omega_{f^t}^2} \lambda_{\sigma_2}^s, \quad L_{f^t}^u = \bigcup_{\sigma_2 \in \Omega_{f^t}^2} \lambda_{\sigma_2}^u.$$

Поток  $f^t$  индуцирует диффеоморфизм

$$\eta : S_\alpha \setminus L^s \rightarrow \Sigma_{f^t} \setminus L_{f^t}^u,$$

ставящий в соответствие каждой точке  $x \in S_\alpha \setminus L^s$  точку пересечения ее траектории

с множеством  $\Sigma_{f^t}$ .

Пусть  $\{N_{\sigma_2}^s\}, \{N_{\sigma_2}^u\}$  – попарно непересекающиеся трубчатые окрестности узлов из  $L^s, L_{f^t}^u$  в  $S_\alpha, \Sigma_{f^t}$ , соответственно. Обозначим через  $\mu_{\sigma_2}^s \subset \partial N_{\sigma_2}^s$  ( $\mu_{\sigma_2}^u \subset \partial N_{\sigma_2}^u$ ) узел, ограничивающий двумерный диск, пересекающий узел  $\lambda_{\sigma_2}^s$  ( $\lambda_{\sigma_2}^u$ ) в единственной точке, и положим

$$\tilde{\lambda}_{\sigma_2}^s = \eta^{-1}(\mu_{\sigma_2}^u), \quad \tilde{\lambda}_{\sigma_2}^u = \eta(\mu_{\sigma_2}^s), \quad \tilde{L}^s = \bigcup_{\sigma_2 \in \Omega_{f^t}^2} \tilde{\lambda}_{\sigma_2}^s, \quad \tilde{L}_{f^t}^u = \bigcup_{\sigma_2 \in \Omega_{f^t}^2} \tilde{\lambda}_{\sigma_2}^u.$$

Будем называть наборы  $\{L^s, \tilde{L}^s\}, \{L_{f^t}^u, \tilde{L}_{f^t}^u\}$  *дуальными оснащенными зацеплениями*, связанными с множеством  $\Omega_{f^t}^2$ .

Для каждой пары непересекающихся узлов  $\lambda, \tilde{\lambda} \subset S^3$  обозначим через  $\text{lk}(\lambda, \tilde{\lambda})$  коэффициент зацепления этих узлов (см. точное определение в [разделе 1.1](#)). Оснащенному зацеплению  $\{L^s, \tilde{L}^s\}$  поставим в соответствие матрицу коэффициентов зацепления  $A_{f^t}$  – симметричную целочисленную матрицу с элементами  $a_{i,j} = \text{lk}(\lambda_{\sigma_2^i}, \lambda_{\sigma_2^j})$  при  $i \neq j$ , и  $a_{i,i} = \text{lk}(\lambda_{\sigma_2^i}, \tilde{\lambda}_{\sigma_2^i})$ ,  $i, j \in \{1, \dots, |\Omega_{f^t}^2|\}$ . Аналогично [[8](#), теорема 3] доказывается следующий результат.

**Предложение 2.** *Матрица  $A_{f^t}$  задает форму пересечения несущего многообразия потока  $f^t \in G(M^4)$ .*

Из определения топологической эквивалентности потоков и [предложения 2](#) непосредственно следует, что многообразие  $\Sigma_{f^t}$ , класс сопряженности матрицы  $A_{f^t}$ , каждое из дуальных оснащенных зацеплений  $\{L^s, \tilde{L}^s\}, \{L_{f^t}^u, \tilde{L}_{f^t}^u\}$  являются топологическими инвариантами потока  $f^t$ . Однако, эти инварианты не полны, так как не учитывают топологию вложения трехмерных сепаратрис и число гетероклинических траекторий. Для того, чтобы получить полный топологический инвариант, удобный для решения проблемы реализации классов топологической эквивалентности, положим

$$\mathcal{L}_{f^t}^s = \Sigma_{f^t} \cap \left( \bigcup_{\sigma_1 \in \Omega_{f^t}^1} W_{\sigma_1}^s \right)$$

и введем следующие определения.

**Определение 3.** Набор  $K_{f^t} = \left\{ \Sigma_{f^t}, \mathcal{L}_{f^t}^s, L_{f^t}^u, \tilde{L}_{f^t}^u \right\}$  называется схемой потока  $f^t$ , многообразии  $\Sigma_{f^t}$  называется характеристической секущей.

**Определение 4.** Схемы  $K_{f^t}, K_{f'^t}$  потоков  $f^t, f'^t \in G(M^4)$  называются эквивалентными, если существует гомеоморфизм  $h : \Sigma_{f^t} \rightarrow \Sigma_{f'^t}$  такой, что  $h(L_{f^t}^u) = L_{f'^t}^u$ ,  $h(\mathcal{L}_{f^t}^s) = \mathcal{L}_{f'^t}^s$  и  $h(\tilde{\lambda}_{\sigma_2}^u) = \tilde{\lambda}_{\sigma_2}^u$  для любой пары  $\lambda_{\sigma_2}^u \in L_{f^t}^u$ ,  $\lambda_{\sigma_2}^u = h(\lambda_{\sigma_2}^u)$ .

Основной результат работы заключается в следующей теореме, доказанной в [разделе 3](#).

**Теорема 5.** *Потоки  $f^t, f'^t \in G(M^4)$  топологически эквивалентны тогда и только тогда, когда эквивалентны соответствующие им схемы  $K_{f^t}, K_{f'^t}$ .*

В разделе 4 вводится определение допустимой абстрактной схемы и доказывается следующая

**Теорема 6.** *Для любой допустимой абстрактной схемы  $K$  существует поток  $f^t \in G(M^4)$ , схема  $K_{f^t}$  которого эквивалентна  $K$ .*

В разделе 5 рассматривается подкласс  $G_0 \subset G(M^4)$  потоков такой, что для любого  $f^t$  множество седловых состояний равновесия состоит ровно из двух точек (в силу теоремы 1 несущее многообразие такого потока есть сфера  $S^4$ ), и доказывается следующая

**Теорема 7.** *Число гетероклинических кривых потока  $f^t \in G_0$  нечетно. Если потоки  $f^t, f'^t \in G_0$  имеют ровно по одной гетероклинической кривой, то они топологически эквивалентны. Для каждого числа  $k \geq 3$  класс  $G_0$  содержит счетное множество топологически неэквивалентных потоков ровно с  $k$  гетероклиническими кривыми.*

## 1. Вспомогательные утверждения

**1.1. Узлы, зацепления и перестройки Дэна.** Пусть  $X, Y$  – трансверсально пересекающиеся гладкие замкнутые подмногообразия гладкого многообразия  $M$  такие, что  $\dim X + \dim Y = \dim M$ . Тогда  $X \cap Y$  состоит из конечного числа точек. Пусть  $e_x$  и  $e_y$  – ориентирующие касательные реперы к  $X, Y$  в точке  $p \in X \cap Y$ . Поставим в соответствие точке  $p$  число  $j_p$ , равное  $+1$ , если репер  $e_m = (e_x, e_y)$  является ориентирующим для несущего многообразия  $M$  в точке  $p$ , и равное  $-1$  в противном случае. Сумма чисел  $j_p$  по всем точками, принадлежащим  $X \cap Y$ , называется *индексом пересечения* многообразий  $X, Y$ .

Всюду ниже, если не оговорено противное,  $n$ -шаром называется многообразие  $B^n$ , гомеоморфное единичному шару

$$\mathbb{B}^n = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| \leq 1\},$$

и  $(n - 1)$ -сферой  $S^{n-1}$  – многообразие, гомеоморфное границе  $\partial\mathbb{B}^n$  шара  $\mathbb{B}^n$ . Напомним, что *полноторием* называется многообразие  $P$ , гомеоморфное прямому произведению  $\mathbb{P} = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{B}^2$ . Простая замкнутая кривая  $\mu \subset \partial\mathbb{P}$ , гомотопная в  $\mathbb{P}$  кривой  $\{x\} \times \mathbb{B}^2$ , называется *меридианом* полнотория  $\mathbb{P}$ , а кривая  $\nu \subset \mathbb{P}$ , индекс пересечения которой с меридианом  $\mu$  равен  $\pm 1$ , называется *параллелью* полнотория  $\mathbb{P}$ .

Напомним, что  $m$ -компонентным зацеплением на сфере  $\mathbb{S}^3$  называется топологически вложенное в него дизъюнктное объединение  $m$  окружностей. Зацепление, состоящее из единственной компоненты, называется *узлом*. Далее в работе дизъюнктное объединение  $m$  окружностей, топологически вложенное в произвольное компактное ориентируемое трехмерное многообразие  $M^3$ , также называется зацеплением при  $m > 1$  и узлом при  $m = 1$ . Следуя [13], будем называть зацепления  $L, L' \subset M^3$  *эквивалентными*, если существует гомеоморфизм  $h : M^3 \rightarrow M^3$  такой, что  $h(L) = L'$ .

Всюду ниже, если не оговорено противное, рассматриваются гладко вложенные узлы и зацепления. Для любого гладкого узла  $\lambda \subset M^3$  определена его трубчатая окрестность

$P_\lambda \subset M^3$ , являющаяся образом гладкого вложения стандартного полнотория  $\mathbb{P}$ . Будем обозначать за  $\mu_\lambda$  гладкий узел, являющийся меридианом полнотория  $P_\lambda$ . Некоторую фиксированную параллель  $\nu$  полнотория  $P_\lambda$  будем называть *оснащением* узла  $\lambda$ .

Пусть  $\psi : \partial\mathbb{P} \rightarrow \partial P_\lambda$  – гомеоморфизм, переводящий меридиан полнотория  $\mathbb{P}$  в узел  $\gamma \subset \partial P_\lambda$ . Говорят, что многообразии

$$M_{\lambda,\gamma}^3 = (M^3 \setminus \text{int } P_\lambda) \cup_\psi \mathbb{P}$$

получено из  $M^3$  *перестройкой* (или *хирургической операцией*) Дэна вдоль узла  $\lambda$ . Топология полученного такой перестройкой многообразия однозначно (с точностью до гомеоморфизма) определяется узлами  $\lambda, \gamma$ , т. е. не зависит от выбора трубчатой окрестности  $\Pi_\lambda$  и образа параллели полнотория  $\mathbb{P}$  (см., например, [14, теорема 15.3]). Перестройка Дэна, при которой меридиан полнотория  $\mathbb{P}$  приклеивается к меридиану  $\mu_\lambda$ , называется *тривиальной*, поскольку в этом случае  $M_{\lambda,\bar{\lambda}}^3$  диффеоморфно исходному многообразию  $M^3$ . В противном случае перестройка Дэна называется *нетривиальной*. Аналогично определяется перестройка Дэна вдоль зацепления.

**Утверждение 8** ([15, теоремы 2, 3]). *Многообразие  $M_{\lambda,\bar{\lambda}}^3$ , полученное нетривиальной перестройкой Дэна вдоль нетривиального узла  $\lambda \subset \mathbb{S}^3$ , не гомеоморфно ни сфере  $\mathbb{S}^3$  ни прямому произведению  $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1$ .*

Более точно, перестройка Дэна определяется отношением  $r = q/p$ , называемым *коэффициентом перестройки*, где  $p, q$  – взаимно простые целые числа, определяющие гомологический класс  $\gamma$ :  $[\gamma] = p[\nu] + q[\mu_\lambda]$ . Строго говоря, число  $r$  зависит еще от выбора параллели  $\nu$ . В случае, когда перестраиваемое многообразие  $M^3$  является сферой, существует канонический способ выбора параллели  $\nu$ , и, таким образом, коэффициент хирургии можно определить однозначно. Для описания этого способа напомним определение коэффициента зацепления двух узлов  $\lambda, \lambda' \in \mathbb{S}^3$ .

*Диаграммой зацепления*  $L \subset S^3$  называется набор замкнутых кривых, являющийся его проекцией на плоскость, удовлетворяющих следующим условиям:

- 1) ни в какую точку плоскости не проектируется более двух точек зацепления и множество *перекрестков* – точек диаграммы, в которые проектируется две точки зацепления, – конечно;
- 2) проекция касательной к зацеплению в каждой точке является прямой; при этом проекции касательных к точкам, соответствующих одному перекрестку, не совпадают.

Возможные типы перекрестков изображены на [рис 1](#). Зацепление называется *тривиальным*, если его диаграмма состоит из конечного числа попарно непересекающихся окружностей. Тривиальное зацепление, состоящее из единственной компоненты, называется *тривиальным узлом*. Узел, не являющийся тривиальным, называется *нетривиальным*.

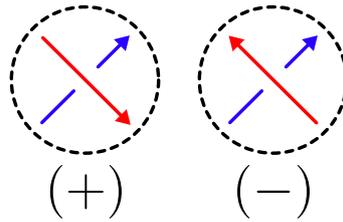


Рис. 1. Типы перекрестков

Для зацепления  $L$ , состоящего из двух ориентированных узлов  $\lambda, \lambda'$ , рассмотрим его диаграмму, образы узлов на которой также будем обозначать через  $\lambda, \lambda'$ . Каждому перекрестку, где кривая  $\lambda'$  проходит над кривой  $\lambda$ , припишем значение  $\pm 1$  в соответствии с рис. 1. Число, равное сумме всех этих значений, называется *коэффициентом зацепления* узлов  $\lambda, \lambda'$  в  $\mathbb{S}^3$  и обозначается  $\text{lk}(\lambda, \lambda')$ . Если узел  $\lambda' \subset \Pi_\lambda$  является параллелью полнотория  $\Pi_\lambda$  и ориентирован сонаправленно с  $\lambda$ , то коэффициент зацепления  $\text{lk}(\lambda, \lambda')$  можно интерпретировать как число оборотов узла  $\lambda'$  вокруг меридиана  $\mu_\lambda$ ; он является изотопическим инвариантом пары  $\lambda, \lambda'$  и меняет знак на противоположный, если меняется ориентация  $\lambda$  или  $\mathbb{S}^3$  (см., например, [14, теорема 15.3]).

Везде далее мы полагаем, что на границе трубчатой окрестности  $P_\lambda$  узла  $\lambda \in \mathbb{S}^3$  фиксирована *каноническая параллель*  $\nu_\lambda$ , сонаправленная с узлом  $\lambda$  и такая, что  $\text{lk}(\lambda, \nu_\lambda) = 0$ .

**1.2. РАЗЛОЖЕНИЕ НА РУЧКИ ЧЕТЫРЕХМЕРНЫХ МНОГООБРАЗИЙ.** Напомним, что *ручкой размерности  $n$  индекса  $i$*  (или  *$i$ -ручкой*) называется прямое произведение

$$H_i^n = \mathbb{B}^i \times \mathbb{B}^{n-i}.$$

При этом первый шар называется *осевым*, второй – *секущим*. Край ручки естественным образом предствляется в виде объединения двух подмножеств

$$\Pi_1 = \partial\mathbb{B}^i \times \mathbb{B}^{n-i}, \quad \Pi_2 = \mathbb{B}^i \times \partial\mathbb{B}^{n-i}$$

с общей границей. Множество  $\Pi_1$  называется *подошвой ручки*. Сферы  $\partial\mathbb{B}^i \times \{O\}$ ,  $\{O\} \times \partial\mathbb{B}^{n-i}$  называются *подошвенной и секущей сферами* соответственно.

Пусть  $X$  –  $n$ -мерное компактное многообразие с краем и  $\psi : \Pi_1 \rightarrow \partial X$  – гладкое вложение. Говорят, что многообразие  $Y = X \cup_\psi H_i^n$  получено *приклеиванием ручки  $H_i^n$*  к многообразию  $X$ . Связное многообразие с краем, полученное приклейкой  $g \geq 0$  ручек индекса 1 к шару  $\mathbb{B}^n$ , называется  *$(n, 1)$ -ручечным телом рода  $g$* . Граница  $(n, 1)$ -ручечного тела рода  $g > 0$  гомеоморфна связной сумме прямых произведений  $\mathbb{S}^{n-1} \times \mathbb{S}^1$  и неориентируемых локально-тривиальных  $\mathbb{S}^{n-1}$ -расслоений над окружностью (см., например, [8, предложение 6]).

Представление многообразия в виде объединения ручек называется его *разбиением на ручки*. Из [16, теорема 12.1] следует, что если многообразие  $M^n$  допускает разложение на ручки, то оно также допускает *полярное разложение на ручки*, содержащее

ровно по одной ручке индексов 0 и  $n$ . Опишем некоторые свойства полярного разложения на ручки ориентируемого четырехмерного многообразия  $M^4$  с  $k_i$  ручками индекса  $i \in \{1, 2, 3\}$ . В силу [17, лемма 6.1] можно считать, что в его разложении на ручки все ручки индексов  $i > 0$  приклеиваются к краю 0-ручки  $H_0^4$  в порядке возрастания индексов. Будем обозначать через  $Q_i$  подмножество многообразия  $M^4$ , образованное объединением ручек индексов от нуля до  $i \in \{1, 2, 3, 4\}$  (таким образом  $Q_4 = M^4$ ). Так как многообразие  $M^4$  ориентируемо, то  $Q_1$  является  $(4, 1)$ -ручечным телом рода  $k_1$  с ориентируемой границей (см., например, [8, лемма 3]). Следовательно,  $\partial Q_1$  гомеоморфно связной сумме сферы  $S^3$  и  $k_1$  копий  $S^2 \times S^1$ . Граница 2-ручки  $H_2^4$  является трехмерной сферой, множества  $\Pi_1, \Pi_2$  – полноториями с общим краем, подошвенная и секущая сферы ручки  $H_2^4$  – это окружности, являющиеся средними линиями полноториев  $\Pi_1$  и  $\Pi_2$  соответственно. Тогда множество  $Q_2$  является многообразием с краем  $\partial Q_2$ , полученным из  $\partial Q_1$  перестройкой Дэна с целым коэффициентом вдоль оснащенного зацепления  $\{L, \tilde{L}\}$ , составленного из подошвенных сфер 2-ручек и меридианов полноториев  $\Pi_2$ . Из [18] следует, что топология многообразия  $M^4$  не зависит от способа приклеивания 3-ручек. Совокупность следов подошвенных сфер 1- и 2-ручек на сфере  $S^3 = \partial H_0^4$ , оснащенная информацией о приклеивающих отображениях, называется *диаграммой Кирби многообразия  $M^4$* . Диаграмма Кирби введена в [19, 20], где проблема топологической классификации многообразий размерности 3 и 4 сведена к проблеме классификации диаграмм Кирби.

## 2. Структура несущего многообразия и вложение сепаратрис седловых состояний равновесия потоков $f^t \in G(M^4)$

В силу [21, теорема 2.3] асимптотическое поведение траекторий потока определяется следующим утверждением.

**Утверждение 9.** Пусть  $f^t$  – градиентно-подобный поток на замкнутом многообразии  $M^n$ ,  $n \geq 1$ . Тогда

- 1)  $M^n = \bigcup_{p \in \Omega_{f^t}} W_p^s = \bigcup_{p \in \Omega_{f^t}} W_p^u$ ;
- 2) для любой точки  $p \in \Omega_{f^t}$  многообразие  $W_p^u$  является гладким подмногообразием многообразия  $M^n$ ;
- 3) для любой точки  $p \in \Omega_{f^t}$  и любой компоненты связности  $l_p^u$  множества  $W_p^u \setminus p$  верно равенство  $\text{cl } l_p^u \setminus (l_p^u \cup p) = \bigcup_{q \in \Omega_{f^t}: W_q^s \cap l_p^u \neq \emptyset} W_q^u$ .

Так как потоки  $f^t, f^{-t}$  являются градиентно-подобными одновременно, то **утверждение 9** остается верным после формальной замены всех символов  $u$  на  $s$  и  $s$  на  $u$ .

**2.1. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1.** Пусть  $f^t \in G(M^4)$  и  $\varphi : M^4 \rightarrow \mathbb{R}$  – его энергетическая функция. Тогда  $\psi = 4 - \varphi$  – энергетическая функция для  $f^{-t}$ . Из условий, определяющий класс  $G(M^4)$  и свойств энергетической функции следует, что  $\psi$  не имеет

критических точек индекса 1. В [22, следствие 10.1.8, с. 225] показано, что если  $M^n$  неодносвязно, то любая функция Морса на  $M^n$  имеет критическую точку индекса 1. Отсюда следует, что  $M^4$  односвязно, что доказывает первое утверждение [теоремы 1](#).

Пусть  $\beta_i$  обозначает  $i$ -тое число Бетти многообразия  $M^4$ . Так как  $M^4$  односвязно, то  $\beta_0 = 1$ ,  $\beta_1 = 0$ . Из двойственности Пуанкаре следует, что  $\beta_4 = \beta_0 = 1$ ,  $\beta_3 = \beta_1 = 0$ . В силу равенства Морса (см [16, §5]) имеем

$$\sum_{i=0}^4 (-1)^i |\Omega_{f^t}^i| = \beta_0 - \beta_1 + \beta_2 - \beta_3 + \beta_4.$$

Из определения класса  $G(M^4)$  следует, что  $|\Omega_{f^t}^0| = |\Omega_{f^t}^4| = 1$ ,  $|\Omega_{f^t}^3| = 0$ . Тогда

$$\beta_2 = |\Omega_{f^t}^2| - |\Omega_{f^t}^1|.$$

Если  $M^4$  гомеоморфно сфере  $S^4$ , то  $\beta_2 = 0$  и, следовательно,  $|\Omega_{f^t}^1| = |\Omega_{f^t}^2|$ . Если  $|\Omega_{f^t}^1| = |\Omega_{f^t}^2|$ , то  $\beta_2 = 0$ , следовательно, многообразие  $M^4$  является односвязной гомологической сферой. Из [9, теорема 1.6] следует, что  $M^4$  гомеоморфно сфере  $S^4$ . Таким образом, доказано второе утверждение [теоремы 1](#).

Отметим, что в силу трансверсальности пересечения из  $W_p^u \cap W_q^s \neq \emptyset$  следует, что  $\dim W_p^u > \dim W_q^s$ . Действительно,

$$\dim (W_p^u \cap W_q^s) = \dim W_p^u + \dim W_q^s - 4 = \dim W_p^u + (4 - \dim W_q^u) - 4 = \dim W_p^u - \dim W_q^u.$$

Тогда если  $W_p^u \cap W_q^s \neq \emptyset$ , то  $\dim (W_p^u \cap W_q^s) \geq 0$ , откуда  $\dim W_p^u \geq \dim W_q^u$ . Но так как многообразия  $W_p^u$ ,  $W_q^s$  инвариантны, то с каждой точкой пересечения  $x$  каждое из них содержит орбиту точки  $x$ . Следовательно,  $\dim (W_p^u \cap W_q^s) > 0$ , что дает  $\dim W_p^u > \dim W_q^u$ . Так как  $1 = W_{\sigma_1}^u < W_{\sigma_2}^u = 2$  для любых седел  $\sigma_1 \in \Omega_{f^t}^1$ ,  $\sigma_2 \in \Omega_{f^t}^2$ , то  $W_{\sigma_1}^u \cap W_{\sigma_2}^s = \emptyset$ . Оставшиеся утверждения п. 3 [теоремы 1](#) следуют из [утверждения 9](#).

Докажем, что для любой точки  $\sigma_1$  существует точка  $\sigma_2$  такая, что  $W_{\sigma_1}^s \cap W_{\sigma_2}^u \neq \emptyset$ . Предположим противное. Тогда из [утверждения 9](#) следует, что  $\text{cl } W_{\sigma_1}^s = W_{\sigma_2}^s \cup \alpha$ . Следовательно,  $\text{cl } W_{\sigma_1}^s$  является топологической трехмерной сферой. Из односвязности многообразия  $M^4$  следует, что любая трехмерная сфера делит его на две компоненты связности (см. [5, предложение 6]). Так как  $W_{\sigma_1}^s$  локально делит  $W_{\sigma_1}^u$ , то неустойчивые сепаратрисы седла  $\sigma_1$  лежат в разных компонентах связности многообразия  $M^4 \setminus \text{cl } W_{\sigma_1}^s$ . Но тогда, в силу [утверждения 9](#), каждая из этих компонент содержит стоковую точку, что противоречит полярности потока  $f^t$ . Таким образом, доказано утверждение 4 [теоремы 1](#).

Пусть  $M^4$  гомеоморфно сфере. Покажем, что для любого состояния равновесия  $\sigma_2 \in \Omega_{f^t}^2$  существует состояние равновесия  $\sigma_1$  такое, что  $W_{\sigma_2}^u \cap W_{\sigma_1}^s \neq \emptyset$ . Предположим противное: пусть  $\sigma_2 \in \Omega_{f^t}^2$  такое состояние равновесия, что  $W_{\sigma_2}^u \cap W_{\sigma_1}^s = \emptyset$  для любого  $\sigma_1 \in \Omega_{f^t}^1$ . Тогда в силу тех же аргументов, что и выше, множества  $\text{cl } W_{\sigma_2}^u$ ,  $\text{cl } W_{\sigma_2}^s$  являются двумер-

ными топологическими сферами, гладко вложенными всюду, кроме, возможно, точек  $\omega, \alpha$ . Так как  $M^4$  гомеоморфно сфере, двумерные сферы  $\text{cl } W_{\sigma_2}^u, \text{cl } W_{\sigma_2}^s$  гомологичны нулю. Эти сферы имеют единственную точку пересечения  $\sigma_2$ , следовательно, их индекс пересечения равен 1 или  $-1$  (в зависимости от выбора ориентации). Но в силу [23, теорема I §70] индекс пересечения гомологичных нулю сфер равен нулю. Полученное противоречие доказывает последнее утверждение [теоремы 1](#).

Сферой с  $k$  дырами будем называть компактное многообразие, полученное из стандартной сферы  $\mathbb{S}^3$  удалением внутренностей  $k$  попарно непересекающихся гладко вложенных в  $\mathbb{S}^3$  трехмерных шаров.

Аналогично [6, лемма 2] доказывается следующая

**Лемма 10.** Пусть  $K_{f^t} = \left\{ \Sigma_{f^t}, \mathcal{L}_{f^t}^s, L_{f^t}^u, \tilde{L}_{f^t}^u \right\}$  – схема потока  $f^t \in G(M^4)$  (см. [определение 3](#)). Тогда

- 1) характеристическая секущая гомеоморфна связной сумме  $|\Omega_{f^t}^1|$  копий прямого произведения  $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1$ ;
- 2) каждая компонента связности  $\ell_{\sigma_1}^s(\lambda_{\sigma_2}^u)$  множества  $\mathcal{L}_{f^t}^s(L_{f^t}^u)$  является гладко вложенной в  $\Sigma_{f^t}$  двумерной сферой (окружностью);
- 3) существует набор  $N$  попарно непересекающихся компактных трубчатых окрестностей сфер из  $\mathcal{L}_{f^t}^s$  такой, что  $\Sigma_{f^t} \setminus \text{int } N$  гомеоморфно сфере с  $2|\Omega_{f^t}^1|$  дырами;
- 4) каждый узел из  $L_{f^t}^u$  гомотопически нетривиален в  $\Sigma_{f^t}$ .

Из условия трансверсальности непосредственно следует, что пересечение  $\mathcal{L}_{f^t}^s \cap L_{f^t}^u$  состоит из конечного множества точек.

### 3. Необходимые и достаточные условия топологической эквивалентности потоков из класса $G(M^4)$

В этом разделе излагается доказательство [теоремы 5](#). Необходимость ее условий непосредственно следует из определения топологической эквивалентности потоков. Докажем достаточность. Пусть схемы  $K_{f^t}, K_{f'^t}$  потоков  $f^t, f'^t \in G(M^4)$  эквивалентны в смысле [определения 4](#). Докажем, что потоки  $f^t, f'^t$  топологически эквивалентны. Для удобства разобьем доказательство на шаги. Везде ниже  $\sigma_i \in \Omega_{f^t}^i, \sigma'_i \in \Omega_{f'^t}^i, i \in \{1, 2\}$  обозначает такую пару седел, что  $h(W_{\sigma_1}^s \cap \Sigma_{f^t}) = W_{\sigma'_1}^s \cap \Sigma_{f'^t}, h(W_{\sigma_2}^u \cap \Sigma_{f^t}) = W_{\sigma'_2}^u \cap \Sigma_{f'^t}$ , где  $h : \Sigma_{f^t} \rightarrow \Sigma_{f'^t}$  – гомеоморфизм, описанный в [определении 4](#).

**Шаг 1.** Выбор компактных канонических окрестностей седловых состояний равновесия, пересекающихся с секущей  $\Sigma_{f^t}$  по трубчатым окрестностям компонент связности множеств  $\mathcal{L}_{f^t}^s, L_{f^t}^u$ .

Пусть  $N_{\sigma_1}^s(N_{\sigma_2}^u)$  обозначает трубчатую окрестность сферы  $\ell_{\sigma_1}^s$  (узла  $\lambda_{\sigma_2}^u$ ) в  $\Sigma_{f^t}$ , т. е. образ гладкого вложения кольца  $\mathbb{S}^2 \times [-1, 1]$  (полнотория  $\mathbb{B}^2 \times \mathbb{S}^1$ ) в  $\Sigma_{f^t}$ , при котором множество  $\mathbb{S}^2 \times \{0\}$  ( $\{O\} \times \mathbb{S}^1$ ) отображается в  $\ell_{\sigma_1}^s(\lambda_{\sigma_2}^u)$ . Обозначим через  $\{D_z^u, z \in \ell_{\sigma_1}^s\}$ ,

$\{D_w^s, w \in \lambda_{\sigma_2}^u\}$  множества слоев расслоения окрестностей  $N_{\sigma_1}^s, N_{\sigma_2}^u$  на одномерные (двумерные) диски, трансверсальные к  $\ell_{\sigma_1}^s, \lambda_{ft}^u$ , соответственно. Из трансверсальности пересечения и единственности трубчатой окрестности с точностью до объемлющей изотопии следует, что если  $\ell_{\sigma_1}^s \cap \lambda_{\sigma_2}^u \neq \emptyset$ , то не уменьшая общности можно считать, что каждая компонента пересечения  $N_{\sigma_1}^s \cap \lambda_{\sigma_2}^u$  ( $\ell_{\sigma_1}^s \cap N_{\sigma_2}^u$ ) является слоем слоения  $\{D_z^u\}$  (соответственно,  $\{D_w^s\}$ ).

Классическая  $\lambda$ -лемма (см. [24], лемма 7.1 и замечание на с. 117) позволяет определить для каждого седлового состояния равновесия  $\sigma_i$  компактную каноническую окрестность  $V_{\sigma_i}$  и непрерывные отображения  $\pi_{\sigma_i, u} : V_{\sigma_i} \rightarrow W_{\sigma_i}^u, \pi_{\sigma_i, s} : V_{\sigma_i} \rightarrow W_{\sigma_i}^s$  со следующими свойствами.

- 1)  $\partial V_{\sigma_2} \cap \Sigma_{ft} = N_{\sigma_2}^s, \partial V_{\sigma_1} \cap \Sigma_{ft} = N_{\sigma_1}^u$ ;
- 2) для любых точек  $x \in V_{\sigma_i} \cap W_{\sigma_i}^u, y \in V_{\sigma_i} \cap W_{\sigma_i}^s$  множества  $B_{\sigma_i, x}^s = \pi_{\sigma_i, u}^{-1}(x), B_{\sigma_i, y}^u = \pi_{\sigma_i, s}^{-1}(y)$  являются гладко вложенными компактными шарами размерности  $4 - i, i$ , соответственно, пересекающимися трансверсально;
- 3)  $B_{\sigma_i, \sigma_i}^s \subset W_{\sigma_i}^s, B_{\sigma_i, \sigma_i}^u \subset W_{\sigma_i}^u$ ;
- 4)  $f^t(B_{\sigma_i, x}^s) \subset B_{\sigma_i, f^t(x)}^s, f^t(B_{\sigma_i, y}^u) \supset B_{\sigma_i, f^t(y)}^u$ ;
- 5) если  $x \in \lambda_{\sigma_2}^u$ , то  $B_{\sigma_2, x}^s \cap \Sigma_{ft} = D_x^s$ ;
- 6) если  $y \in \ell_{\sigma_1}^s$ , то  $B_{\sigma_1, y}^u \cap \Sigma_{ft} = D_y^u$ .

Будем называть окрестность  $V_{\sigma_i}$  *канонической компактной окрестностью седлового состояния равновесия  $\sigma_i$* . Отображения  $\pi_{\sigma_i, u}, \pi_{\sigma_i, s}$  определяют в окрестности  $V_{\sigma_i}$  структуру прямого произведения  $\mathbb{B}^i \times \mathbb{B}^{4-i}, i \in \{1, 2\}$ . Положим  $N_{\sigma_1}^s = \partial V_{\sigma_1} \setminus \text{int } N_{\sigma_1}^u, N_{\sigma_2}^u = \partial V_{\sigma_2} \setminus \text{int } N_{\sigma_2}^s$ .

Аналогично [8, предложение 2] секущие трехмерные сферы в окрестностях источников и стоковых состояний равновесия модифицируются таким образом, чтобы все компоненты множеств  $\{N_{\sigma_1}^s\}$  ( $\{N_{\sigma_2}^u\}$ ) принадлежали одной и той же секущей сфере. Каждая секущая сфера в окрестности источника (стока) ограничивает шар, который можно интерпретировать как ручку индекса 4 (0, соответственно). Таким образом, справедливо следующее

**Предложение 11.** *Многообразие  $M^4$  допускает разбиение на ручки, в котором ручками индексов 1 и 2 являются канонические окрестности седловых состояний равновесия.*

Отметим, что из описанной конструкции следует, что множества  $N_{\sigma_2}^s \subset S_\alpha$  и  $N_{\sigma_2}^u \subset \Sigma_{ft}$  являются полноториями, и для любых точек  $x \in W_{\sigma_2}^u \cap V_{\sigma_2}, y \in W_{\sigma_2}^s \cap V_{\sigma_2}$  простые замкнутые кривые  $\tilde{\lambda}_{\sigma_2}^s = \partial B_{\sigma_2, x}^s, \tilde{\lambda}_{\sigma_2}^u = \partial B_{\sigma_2, y}^u$  являются меридианами полноториев  $N_{\sigma_2}^s, N_{\sigma_2}^u$  и оснащениями узлов  $\lambda_{\sigma_2}^s, \lambda_{\sigma_2}^u$ , соответственно.

**Шаг 2.** *Построение гомеоморфизма  $\chi_{\sigma_2, \sigma_2'}$ , сопрягающего ограничения потоков  $f^t, f^{t'}$  на канонические окрестности седловых состояний равновесия индекса 2.*

Канонические окрестности, проекции и другие объекты для седлового состояния равновесия  $\sigma_i'$  потока  $f^{t'}$ , аналогичные построенным на шаге 1 для потока  $f^t$ , будем обозначать за  $V_{\sigma_i'}, \pi_{\sigma_i', u} : V_{\sigma_i'} \rightarrow W_{\sigma_i'}^u, \pi_{\sigma_i', s} : V_{\sigma_i'} \rightarrow W_{\sigma_i'}^s$  и т.д. Построим гомеоморфизм  $\chi_{\sigma_2, \sigma_2'} : V_{\sigma_2} \rightarrow V_{\sigma_2'}$  со следующими свойствами:

- 1)  $\chi_{\sigma_2, \sigma'_2} f^t = f^{t'} \chi_{\sigma_2, \sigma'_2}$  для всех  $t$ , при которых определены правая и левая часть равенства;
- 2)  $\chi_{\sigma_2, \sigma'_2}(\lambda_{\sigma_2}^u \cap \ell_{\sigma_1}^s) = \lambda_{\sigma'_2}^u \cap \ell_{\sigma'_1}^s$  для всех  $\sigma_1$  таких, что  $\lambda_{\sigma_2}^u \cap \ell_{\sigma_1}^s \neq \emptyset$ ;
- 3)  $\chi_{\sigma_2, \sigma'_2}$  отображает меридианы полноториев  $N_{\sigma_2}^s, N_{\sigma_2}^u$  в меридианы полноториев  $N_{\sigma'_2}^s, N_{\sigma'_2}^u$ .

Из определения эквивалентности схем следует, что существует сохраняющий ориентацию гомеоморфизм  $g^u : \partial B_{\sigma_2, \sigma_2}^u \rightarrow \partial B_{\sigma'_2, \sigma'_2}^u$  такой, что  $g^u(\partial B_{\sigma_2, \sigma_2}^u \cap \ell_{\sigma_1}^s) = \partial B_{\sigma'_2, \sigma'_2}^u \cap \ell_{\sigma'_1}^s$  для всех  $\sigma_1$  таких, что  $\lambda_{\sigma_2}^u \cap \ell_{\sigma_1}^s \neq \emptyset$ . Каждой точке  $x \in B_{\sigma_2, \sigma_2}^u$  поставим в соответствие время  $t_x \in \mathbb{R}$  такое, что  $f^{t_x}(x) \in \partial B_{\sigma_2, \sigma_2}^u$ . Определим гомеоморфизм  $h^u : B_{\sigma_2, \sigma_2}^u \rightarrow B_{\sigma'_2, \sigma'_2}^u$ , положив

$$h^u(x) = \begin{cases} f'^{-t_x}(g^u(f^{t_x}(x))), & x \in B_{\sigma_2, \sigma_2}^u \setminus \sigma_2, \\ \sigma'_2, & x = \sigma_2. \end{cases}$$

Аналогично определим гомеоморфизм  $h^s : B_{\sigma_2, \sigma_2}^s \rightarrow B_{\sigma'_2, \sigma'_2}^s$  такой, что

$$h^s f^t|_{B_{\sigma_2, \sigma_2}^s} = f'^t h^s|_{B_{\sigma_2, \sigma_2}^s}.$$

Тогда искомый гомеоморфизм  $\chi_{\sigma_2, \sigma'_2}$  определяется соотношением

$$\chi_{\sigma_2, \sigma'_2}(z) = \pi_{\sigma'_2, u}^{-1}(h^u(\pi_{\sigma_2, u}(z))) \cap \pi_{\sigma'_2, s}^{-1}(h^s(\pi_{\sigma_2, s}(z))), \quad z \in V_{\sigma_2}.$$

**Шаг 4.** Построение гомеоморфизма  $\chi : \Sigma_{f^t} \rightarrow \Sigma_{f'^t}$ , согласованного с локальными сопрягающими гомеоморфизмами в канонических окрестностях седловых состояний равновесия.

Пусть  $N_{\sigma'_1}^s, N_{\sigma'_2}^u \subset \Sigma_{f'^t}$  – трубчатые окрестности сферы  $\ell_{\sigma'_1}^s$  и узла  $\lambda_{\sigma'_2}^u$ , имеющие те же свойства, что и окрестности  $N_{\sigma_1}^s, N_{\sigma_2}^u \subset \Sigma_{f^t}$ , определенные на шаге 1. Множества  $\tilde{N}_{\sigma'_1}^s = h(N_{\sigma_1}^s)$ ,  $\tilde{N}_{\sigma'_2}^u = h(N_{\sigma_2}^u)$  являются локально плоскими вложениями компактов в  $\Sigma_{f'^t}$ . В силу результатов Бинга и Мойса, см. [25, теорема 8], любое компактное локально плоско вложенное подмножество замкнутого трехмерного многообразия является подполиэдром, поэтому для любых  $\sigma'_1 \in \Omega_{f'^t}^1$ ,  $\sigma'_2 \in \Omega_{f'^t}^2$  сфера  $\ell_{\sigma'_1}^s$ , узел  $\lambda_{\sigma'_2}^u$  и множества  $\tilde{N}_{\sigma'_1}^s, N_{\sigma'_1}^s, \tilde{N}_{\sigma'_2}^u, N_{\sigma'_2}^u$  являются подполиэдрами многообразия  $\Sigma_{f'^t}$ . Более того, пары  $\tilde{N}_{\sigma'_1}^s, N_{\sigma'_1}^s$  и  $\tilde{N}_{\sigma'_2}^u, N_{\sigma'_2}^u$  являются регулярными (в терминологии [17]) кусочно-линейными окрестностями сферы  $\ell_{\sigma'_1}^s$  и узла  $\lambda_{\sigma'_2}^u$ , соответственно. Из [17, гл. 3, теорема 3.24] следует, что существует изотопия  $H_t : \Sigma_{f^t} \rightarrow \Sigma_{f'^t}$  с компактным носителем, такая, что:

- 1)  $H_0(x) = x$  для любого  $x \in \Sigma_{f^t}$ ;
- 2)  $H_1(\tilde{N}_{\sigma'_1}^s) = N_{\sigma'_1}^s$ ;
- 3)  $H_t(x) = x$  для любого  $x \in \mathcal{L}_{f^t}^s \cup L_{f^t}^u$  и для любого  $t \in [0, 1]$ .

Положим  $g = H_1 h$ . Гомеоморфизм  $g : \Sigma_{f^t} \rightarrow \Sigma_{f'^t}$  гомеоморфно отображает  $\mathcal{L}_{f^t}^s$  в  $\mathcal{L}_{f'^t}^s$ ,  $L_{f^t}^u$  в  $L_{f'^t}^u$ ,  $\bigcup_{\sigma_1 \in \Omega_{f^t}^1} N_{\sigma_1}^s$  в  $\bigcup_{\sigma'_1 \in \Omega_{f'^t}^1} N_{\sigma'_1}^s$ ,  $\bigcup_{\sigma_2 \in \Omega_{f^t}^2} N_{\sigma_2}^u$  в  $\bigcup_{\sigma'_2 \in \Omega_{f'^t}^2} N_{\sigma'_2}^u$  и отображает каждый узел  $\tilde{\lambda}_{\sigma_1}^u \subset \tilde{L}_{f^t}^u$

в узел, гомотопический эквивалентный в полнотории  $N_{\sigma_2}^u$  узлу  $\tilde{\lambda}_{\sigma_1}^u \subset \tilde{L}_{f^t}^u$ .

Пусть  $\hat{N}_{\sigma_2}^u \subset \Sigma_{f^t}$  – замкнутая трубчатая окрестность узла  $\lambda_{\sigma_2}^u$ , не пересекающаяся с полноториями  $\bigcup_{q' \in \Omega_{f^t}^2 \setminus \sigma_2'} N_{q'}^u$  и такая, что  $N_{\sigma_2}^u \subset \text{int } \hat{N}_{\sigma_2}^u$ . В силу [17, следствие 3.18] многообразии  $\hat{N}_{\sigma_2}^u \setminus \text{int } N_{\sigma_2}^u$  гомеоморфно прямому произведению  $T^2 \times [0, 1]$  тора  $T^2$  на отрезок. Не уменьшая общности будем считать, что пересечение этого многообразия с множеством  $\mathcal{L}_{f^t}^s$  и каждым двумерным слоем, составляющим слоение каждой окрестности  $N_{\sigma_1}^s$  такой, что  $N_{\sigma_1}^s \cap N_{\sigma_2}^u \neq \emptyset$ , составлено из одномерных слоев расслоения, заданного структурой прямого произведений (в качестве такой окрестности можно взять пересечение подходящей итерации окрестности  $V_{\sigma_2}$  с  $\Sigma_{f^t}$ ). Положим  $\eta_{\sigma_2} = \chi_{\sigma_2, \sigma_2'} g^{-1}|_{\tilde{N}_{\sigma_2}^u}$ . Из свойств гомеоморфизмов  $g$  и  $\chi_{\sigma_2, \sigma_2'}$  следует, что гомеоморфизм  $\eta_{\sigma_2} : N_{\sigma_2}^u \rightarrow N_{\sigma_2}^u$  изотопен тождественному. Тогда гомеоморфизм  $\eta_{\sigma_2}$  продолжается по одномерным слоям прямого произведения до гомеоморфизма  $\hat{\eta}_{\sigma_2} : \hat{N}_{\sigma_2}^u \rightarrow \hat{N}_{\sigma_2}^u$ , тождественного на  $\partial \hat{N}_{\sigma_2}^u$  и такого, что  $\hat{\eta}_{\sigma_2}(\mathcal{L}_{f^t}^s \cap \tilde{N}_{\sigma_2}^u) = \mathcal{L}_{f^t}^s \cap \hat{N}_{\sigma_2}^u$ ,  $\hat{\eta}_{\sigma_2}(N_{\sigma_1}^s \cap \tilde{N}_{\sigma_2}^u) = N_{\sigma_1}^s \cap \hat{N}_{\sigma_2}^u$ . В свою очередь, гомеоморфизм  $\hat{\eta}_{\sigma_2}$  продолжается до гомеоморфизма  $\theta_{\sigma_2} : \Sigma_{f^t} \rightarrow \Sigma_{f^t}$ , тождественного вне  $\hat{N}_{\sigma_2}^u$ . Обозначим через

$$\theta_2 : \Sigma_{f^t} \rightarrow \Sigma_{f^t} \rightarrow \Sigma_{f^t} \rightarrow \Sigma_{f^t}$$

гомеоморфизм, являющийся суперпозицией гомеоморфизмов  $\theta_{\sigma_2}$ , построенных для каждого седла  $\sigma_2' \in \Omega_{f^t}^2$ .

Аналогично построению гомеоморфизма  $\chi_{\sigma_2, \sigma_2'}$  строится гомеоморфизм  $\chi_{\sigma_1, \sigma_1'} : V_{\sigma_1} \rightarrow V_{\sigma_1'}$  такой, что:

- 1)  $\chi_{\sigma_1, \sigma_1'} f^t = f^t \chi_{\sigma_2, \sigma_2'}$  для всех  $t$ , при которых правая и левая части равенства определены;
- 2)  $\chi_{\sigma_1, \sigma_1'}|_{N_{\sigma_1}^s \cap g^{-1}(\hat{N}_{\sigma_2}^u)} = g \theta_2|_{V_{\sigma_1} \cap g^{-1}(\hat{N}_{\sigma_2}^u)}$  для всех  $\sigma_2$  таких, что  $\lambda_{\sigma_2}^u \cap \ell_{\sigma_1}^s \neq \emptyset$ .

Пусть  $\hat{N}_{\sigma_1}^s$  – замкнутая трубчатая окрестность сферы  $\ell_{\sigma_1}^s$ , не пересекающаяся с множеством  $\bigcup_{q' \in \Omega_{f^t}^1 \setminus \sigma_1'} N_{q'}^s$  и такая, что  $N_{\sigma_1}^s \subset \text{int } \hat{N}_{\sigma_1}^s$ . Каждая компонента связности  $B$  множества

$$\hat{N}_{\sigma_1}^s \setminus \left( \text{int } N_{\sigma_1}^s \cup \bigcup_{\sigma_2' : \lambda_{\sigma_2'}^u \cap \ell_{\sigma_1}^s \neq \emptyset} \text{int } N_{\sigma_2'}^u \right)$$

является замкнутым компактным шаром. В силу теоремы Александера любой гомеоморфизм, заданный на границе шара, продолжается до гомеоморфизма всего шара. Поэтому гомеоморфизмы  $\hat{\eta}_{\sigma_2}|_{\partial B}$  и  $\chi_{\sigma_1, \sigma_1'} g^{-1}|_{\partial B}$  продолжаются до гомеоморфизма шара  $B$ , тождественного на  $\partial \hat{N}_{\sigma_1}^s \cap \partial B$ . Таким образом строится гомеоморфизм  $\theta : \Sigma_{f^t} \rightarrow \Sigma_{f^t}$  со следующими свойствами:

- 1)  $\theta(x) = x$ , если  $x$  лежит в дополнении до объединения окрестностей  $\{\hat{N}_{\sigma_1}^s\}$  и  $\{\hat{N}_{\sigma_2}^u\}$ ;
- 2)  $\theta|_{N_{\sigma_1}^s} = \chi_{\sigma_1, \sigma_1'} g^{-1}|_{N_{\sigma_1}^s}$ ;

$$3) \theta|_{N_{\sigma'_2}^u} = \chi_{\sigma_2, \sigma'_2} g^{-1}|_{N_{\sigma'_2}^u}.$$

Наконец, искомый гомеоморфизм  $\chi : \Sigma_{f^t} \rightarrow \Sigma_{f^{ft}}$  определяется формулой  $\chi = \theta g$ .

**Шаг 4.** Построение гомеоморфизма  $G : M^4 \rightarrow M^4$ , сопрягающего потоки  $f^t, f^{ft}$ .

Каждой точке  $z \in M^4 \setminus \Omega_{f^t}$  поставим в соответствие время  $t_z \in \mathbb{R}$  такое, что имеет место включение  $f^{t_z}(z) \subset \Sigma_{f^t} \cup \left( \bigcup_{p \in \Omega_{f^t}^2} V_p \right)$  и положим

$$G(z) = \begin{cases} f'^{-t_z}(\chi(f^{t_z}(z))), & f^{t_z}(z) \in \Sigma_{f^t}; \\ f'^{-t_z}(h_{\sigma_i, \sigma'_i}(f^{t_z}(z))), & f^{t_z}(z) \in V_{\sigma_i}, i \in \{1, 2\}. \end{cases} \quad (1)$$

Формула (1) определяет непрерывную биекцию на множестве  $M^4 \setminus \Omega_{f^t}$ , единственным непрерывным образом продолжающуюся на  $\Omega_{f^t}$  до искомого гомеоморфизма.

#### 4. Реализация классов топологической эквивалентности

Пусть  $\Sigma_k$  – связная сумма  $k > 0$  копий  $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1$ ,  $\mathcal{L}^s$  – набор из  $k$  попарно непересекающихся гладко вложенных в  $\Sigma_k$  двумерных сфер,  $\mathcal{N}$  – совокупность их попарно непересекающихся открытых трубчатых окрестностей, и  $\{L^u, \tilde{L}^u\} \subset \Sigma_k$  – гладкое оснащенное  $m$ -компонентное зацепление,  $m \geq k$ .

**Определение 12.** Набор  $K = \{\Sigma_k, \mathcal{L}^s, L^u, \tilde{L}^u\}$  будем называть абстрактной допустимой схемой, если выполняются следующие условия:

- 1)  $\Sigma_k \setminus \mathcal{N}$  гомеоморфно трехмерной сфере с  $2k$  дырами;
- 2) для каждой сферы  $\ell^s \in \mathcal{L}^s$  существует по крайней мере один узел  $\lambda^u \in L^u$  такой, что  $\ell^s \cap \lambda^u \neq \emptyset$ ;
- 3) любое непустое перечение  $\ell^s \cap \lambda^u$  трансверсально;
- 4) многообразие, полученное из  $\Sigma_k$  перестройкой Дэна вдоль  $\{L^u, \tilde{L}^u\}$ , диффеоморфно сфере  $\mathbb{S}^3$ .

Из предложения 11 и леммы 10 непосредственно следует, что схема  $K_{f^t}$  любого потока  $f^t \in G(M^4)$  является допустимой.

Докажем теорему 6. Пусть  $K$  – допустимая абстрактная схема. Построим поток  $f^t \in G(M^4)$ , схема  $K_{f^t}$  которого эквивалентна  $K$ . Напомним, что  $H_i^4 = \mathbb{B}^i \times \mathbb{B}^{4-i}$  обозначает четырехмерную ручку индекса  $i \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$  (см. предложение 11). Определим на  $H_i^4$  векторное поле системой уравнений

$$\dot{x} = x, \quad \dot{y} = -y,$$

где  $x \in \mathbb{B}^i, y \in \mathbb{B}^{4-i}$ . Приклеим к 0-ручке  $H_0^4$   $k$  копий 1-ручек  $H_1^4$  при помощи диффеоморфизма, обеспечивающего гладкую склейку векторных полей. В результате получим ручечное тело  $Q$  рода  $k$  и гладкий поток  $f_1^t$  на  $Q$ , траектории которого трансверсальны краю  $\partial Q$ ,

а неблуждающее множество состоит из  $(k+1)$  гиперболических состояний равновесия: одного стока и  $k$  седел с индексом Морса, равным единице. Край  $\partial Q$  диффеоморфен  $\Sigma_k$  при помощи диффеоморфизма  $\psi : \Sigma_k \rightarrow \partial Q$ , переводящего сферы из множества  $\mathcal{L}^s$  в сферы, образованные пересечением устойчивых многообразий седловых состояний равновесия потока  $f_1^t$  с  $\partial Q$ . Будем обозначать образ оснащенного зацепления  $\{L^u, \tilde{L}^u\}$  относительно  $\psi$  теми же символами, что и оригиналы. Приклеим к многообразию  $Q$  ручки индекса 2 по зацеплению  $\{L^u, \tilde{L}^u\}$  при помощи диффеоморфизма, обеспечивающую гладкую склейку векторных полей. В результате получим многообразие  $R$  с краем, диффеоморфным  $\mathbb{S}^3$ . Это позволяет приклеить к многообразию  $R$  ручку  $H_4^4$ . В результате получим замкнутое многообразие  $M^4$  и гладкое векторное поле на нем, индуцирующее искомым поток.

## 5. Потоки из класса $G(M^4)$ с двумя седлами

В этом разделе мы рассматриваем подкласс  $G_0 \subset G(M^4)$  потоков такой, что для любого  $f^t$  множество седловых состояний равновесия состоит ровно из двух точек. В силу [теоремы 1](#) несущее многообразие такого потока есть сфера  $S^4$ .

**Лемма 13.** Пусть  $K_{f^t} = \{\Sigma_{f^t}, \ell_{\sigma_1}^s, \lambda_{\sigma_2}^u, \tilde{\lambda}_{\sigma_2}^u\}$  – схема потока  $f^t \in G_0$ . Тогда

- 1) существует гомеоморфизм  $h : \Sigma_{f^t} \rightarrow \mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1$  такой, что  $h(\lambda_{\sigma_2}^u) = \{x_1\} \times S^1$ ,  $h(\tilde{\lambda}_{\sigma_2}^u) = \{x_2\} \times S^1$ , где  $x_1, x_2 \in \mathbb{S}^2$ ;
- 2) индекс пересечения сферы  $\ell_{\sigma_1}^s$  и узла  $\lambda_{\sigma_2}^u$  равен  $\pm 1$ ;
- 3) если пересечение  $\ell_{\sigma_1}^s \cap \lambda_{\sigma_2}^u$  состоит из единственной точки, то существует гомеоморфизм  $h$ , удовлетворяющий условиям п. 1 и такой, что  $h(\ell_{\sigma_1}^s) = S^2 \times \{y\}$ ,  $y \in S^1$ .

*Доказательство.* Из свойств энергетической функции потока  $f^t$  непосредственно следует, что  $\Sigma_{f^t}$  диффеоморфно  $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1$ . Из [леммы 10](#) следует, что  $\ell_{\sigma_1}^s = W_{\sigma_1}^s \cap \Sigma_{f^t}$ ,  $\lambda_{\sigma_2}^u = W_{\sigma_2}^u \cap \Sigma_{f^t}$  являются гладко вложенными в  $\Sigma_{f^t}$  двумерной сферой и окружностью соответственно, причем  $\ell_{\sigma_1}^s$  не делит  $\Sigma_{f^t}$ . Докажем, что существует гомеоморфизм  $h : \Sigma_{f^t} \rightarrow \mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1$ , удовлетворяющий заключению леммы. Из [предложения 11](#) следует, что  $\Sigma_{f^t}$  является краем многообразия  $V_\alpha \cup V_{\sigma_2}$ , полученного приклейкой канонической окрестности  $V_{\sigma_2}$  седла  $\sigma_2$  к шару  $B_\alpha \subset W_\alpha^u$ , ограниченному сферой  $S_\alpha$ , секущей к траекториям потока  $f^t$ . Каноническая окрестность  $V_{\sigma_2}$  является 2-ручкой, при этом приклейка 2-ручки производится вдоль узла  $\lambda^s = W_{\sigma_2}^s \cap S_\alpha$ , и пересечение  $V_{\sigma_2} \cap S_\alpha$  является компактной трубчатой окрестностью этого узла. Следовательно,  $\Sigma_{f^t}$  является результатом нетривиальной перестройки Дэна сферы  $S_\alpha$  вдоль узла  $\lambda^s$  (см. [раздел 1.2](#)). В силу [утверждения 8](#) этот узел тривиален. Из тривиальности узла следует, что  $S_\alpha \setminus \text{int } V_{\sigma_2}$  является полноторием. Многообразия  $S_\alpha \setminus \text{int } V_{\sigma_2}$ ,  $\Sigma_{f^t} \setminus \text{int } V_{\sigma_2}$  диффеоморфны посредством диффеоморфизма  $\eta$ , ставящего каждой точке  $z \in S_\alpha \setminus \text{int } V_{\sigma_2}$  точку пересечения ее траектории с  $\Sigma_{f^t}$ . Следовательно, множество  $Q = \Sigma_{f^t} \setminus \text{int } V_{\sigma_2}$  является полноторием. В силу определения канонической окрестности множество  $P = \Sigma_{f^t} \cap V_{\sigma_2}$  тоже является полноторием. Существует только один способ

получить  $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1$  склейкой двух полноториев, при этом способе склеивающий гомеоморфизм переводит меридиан первого полнотория в меридиан второго. Следовательно, меридианы полноториев  $P, Q$  совпадают, а оснащение  $\tilde{\lambda}_{\sigma_2}^u$  узла  $\lambda_{\sigma_2}^u$  является параллелью полнотория  $P$ . Пусть  $x_1 \in \mathbb{S}^2$ ,  $D \in \mathbb{S}^2$  – диск, содержащий точку  $x_1$  внутри,  $x_2 \in \partial D$  и  $P_0 = D \times \mathbb{S}^1$ ,  $Q_0 = (\mathbb{S}^2 \setminus \text{int } D) \times \mathbb{S}^1$ . Тогда существует гомеоморфизм  $h_0 : P \rightarrow P_0$  такой, что  $h_0(\Lambda_{f^t}^u) = x_1 \times \mathbb{S}^1$ ,  $h_0(\tilde{\Lambda}_{f^t}^u) = x_2 \times \mathbb{S}^1$ . Так как  $h_0$  является гомеоморфизмом полноториев, то он переводит меридиан полнотория  $P$  в меридиан полнотория  $P_0$ . Отсюда следует, что гомеоморфизм  $h_0|_{\partial P} = h_0|_{\partial Q}$  продолжается до гомеоморфизма  $h_1 : Q \rightarrow Q_0$  такого, что  $h_1|_{\partial Q} = h_0|_{\partial Q}$  (см., например, [13, гл. 2, §5, упр. 5]). Тогда гомеоморфизм  $h : \Sigma_{f^t} \rightarrow \mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1$ , заданный формулой

$$h(x) = \begin{cases} h_0(x), & x \in P \\ h_1(x), & x \in Q, \end{cases}$$

является искомым.

Так как сфера  $h(\ell_{\sigma_1}^s)$  не делит  $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1$ , то она гомологична сфере  $\mathbb{S}^2 \times \{y\}$ ,  $y \in \mathbb{S}^1$ . Так как индекс пересечения является гомологическим инвариантом, то индекс пересечения сферы  $h(\ell_{\sigma_1}^s)$  и узла  $h(\lambda_{\sigma_2}^u)$  равен  $\pm 1$ . Следовательно, такой же индекс пересечения имеют и многообразия  $\ell_{\sigma_1}^s, \lambda_{\sigma_2}^u$ .

Если пересечение  $\ell_{\sigma_1}^s \cap \lambda_{\sigma_2}^u$  состоит из единственной точки, то пересечение  $\ell_{\sigma_1}^s \cap P$  является меридианным диском полнотория  $P$  и существует гомеоморфизм  $h_0 : P \rightarrow P_0$  со свойствами, определенными выше, и такой, что  $h_0(\ell_{\sigma_1}^s \cap P) = D$ . Тогда его продолжение  $h_1$  можно выбрать так, чтобы  $h_1(\ell_{\sigma_1}^s \cap P_1) = \mathbb{S}^2 \setminus \text{int } D$ , что доказывает последнее утверждение леммы.  $\square$

**5.1. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 7.** В силу утверждения 2 леммы 13 индекс пересечения многообразий  $\ell_{\sigma_1}^s, \lambda_{\sigma_2}^u$  равен единице. Отсюда следует, что пересечение  $\ell_{\sigma_1}^s \cap \lambda_{\sigma_2}^u$  состоит из нечетного числа точек. Каждая точка этого пересечения порождает гетероклиническую кривую, что доказывает нечетность числа гетероклинических кривых любого потока  $f^t \in G_0$ . Пусть  $f^t, f'^t \in G_0$  – потоки с единственной гетероклинической кривой. Из пп. 1, 3 леммы 13 следует, что схемы этих потоков эквивалентны. В силу теоремы 5 потоки  $f^t, f'^t$  топологически эквивалентны.

В верхней части рис. 2 приведены три случая взаимного расположения гомотопически нетривиальной двумерной сферы  $\ell$  и тривиального узла  $\lambda_{3,0}, \lambda_{3,1}, \lambda_{3,2}$  в  $\Sigma_1 = \mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1$ , трансверсально пересекающихся в трех точках. Чтобы получить  $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1$ , нужно считать, что граничные сферы изображенного на рисунке шарового слоя (он выделен серым цветом) склеены по гомотетии. Серия изображенных на рисунке узлов естественным образом продолжается до счетной серии ручных узлов  $\{\lambda_{3,i}\}$ . В силу теоремы 6, сферу  $\ell$  и каждый из узлов  $\lambda_{3,i}$  можно реализовать как следы устойчивой трехмерной и неустойчивой двумерной сепаратрис седловых состояний равновесия на характеристической секущей потока  $f_{3,i}^t \in G_0$ , имеющего 3 гетероклинические кривые. Покажем, что такие потоки попарно топологически неэквивалентны. Для этого в силу теоремы 5 достаточно доказать,

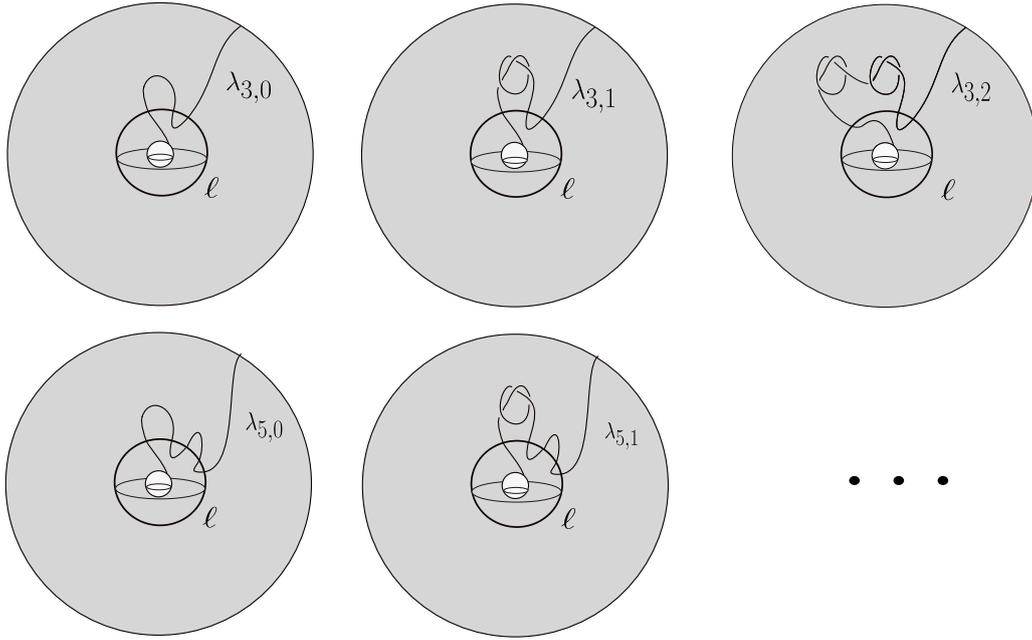


Рис. 2. Нетривиальная сфера  $\ell$  и тривиальный узел  $\lambda_{k,i}$  в  $\Sigma_1 = \mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1$

что не существует гомеоморфизма  $h : \Sigma_1 \rightarrow \Sigma_1$  такого, что  $h(\ell) = \ell$ ,  $h(\lambda_{3,i}) = \lambda_{3,j}$  для  $i \neq j$ . Предположим противное.

Пусть  $N_\ell, P_i$  – компактные трубчатые окрестности сферы  $\ell$  и узла  $\lambda_{3,i}$  в  $\Sigma$ , соответственно. Так как сфера  $\ell$  не делит  $\Sigma_1$ , то найдется компактная дуга  $b_{3,i} \subset \lambda_{3,i}$ , концы которой лежат на разных компонентах связности края кольца  $N_\ell$ . Пусть  $C_b \subset P_i$  – компонента связности множества  $P_i \setminus \ell$ , содержащая дугу  $b_{3,i}$ . Множество  $B = \Sigma_1 \setminus (\text{int } N_\ell \cup \text{int } C_b)$  гомеоморфно шару  $\mathbb{B}^3$ . Обозначим через  $l_{i,1}, l_{i,2}$  компоненты связности множества  $B \cap \lambda_{3,i}$  (см. рис 3, на котором проиллюстрированы случаи  $i \in \{0, 1\}$ ). Концы каждой из дуг  $l_{i,1}, l_{i,2}$  принадлежат границе  $\partial B$  шара  $B$ . Соединим концевые точки из дуг  $l_{i,j}$  дугой  $e_{i,j} \subset \partial B$  такой, что  $e_{i,1} \cap e_{i,2} = \emptyset$ . Положим  $k_{i,j} = l_{i,j} \cup e_{i,j}$ . Приклеим к шару  $B$  шар  $\mathbb{B}^3$ , отождествив произвольным образом граничные сферы  $\partial B$  и  $\mathbb{S}^2$ . В результате получим сферу  $S^3$  и зацепление  $L_{3,i} = \{k_{i,1}, k_{i,2}\}$ . По построению для каждого  $i$  по крайней мере один из узлов, скажем,  $k_{i,2}$ , является тривиальным, и существует трехмерный шар  $D \subset S^3$  такой, что  $k_{i,2} \subset \text{int } D$ ,  $k_{i,1} \cap D = \emptyset$ . Из существования гомеоморфизма  $h : \Sigma_1 \rightarrow \Sigma_1$  следует существование гомеоморфизма  $H : S^3 \rightarrow S^3$  такого, что  $h(k_{i,1}) = k_{j,1}$  для  $i \neq j$ . Но узел  $k_{i,1}$  является связной суммой тривиального узла и  $i$  копий трилистника. Все такие узлы попарно неэквивалентны. Полученное противоречие доказывает, что потоки  $f_{3,i}^t, f_{3,j}^t$  топологически неэквивалентны.

В нижней части рис. 2 показано, как серия узлов  $\lambda_{3,i}$  модифицируется в серию узлов  $\lambda_{k,i}$ , каждый из которых имеет заданное нечетное число  $k$  пересечений со сферой  $\ell$ . Аргументы, аналогичные изложенным выше, доказывают существование счетного множества топологически неэквивалентных потоков из класса  $G_0$  с заданным числом  $k$  гетероклинических пересечений. Таким образом, теорема 7 доказана.

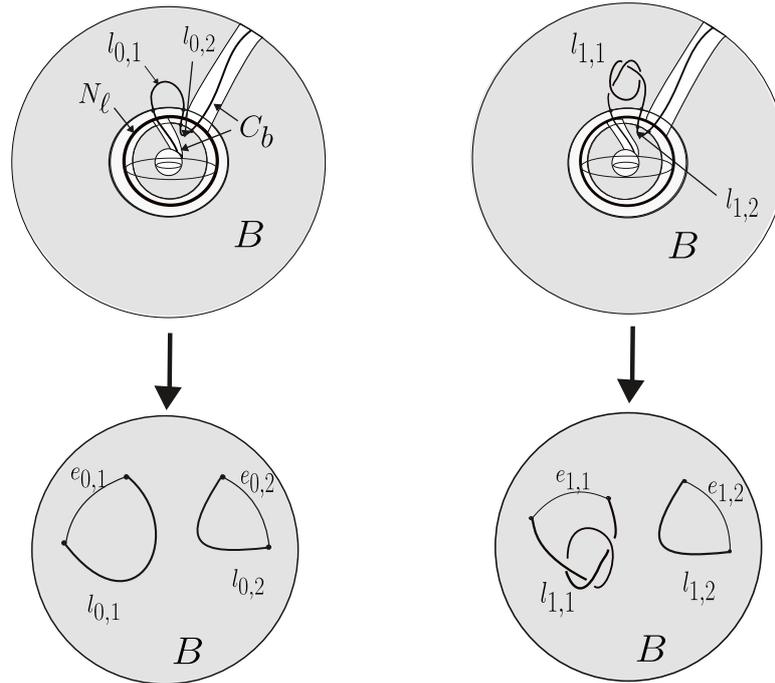


Рис. 3. Шар  $B = \Sigma \setminus (\text{int } N_\ell \cup \text{int } C_b)$  и дуги  $l_{i,j}, e_{i,j} \subset B$  для  $i \in \{0, 1\}, j \in \{1, 2\}$

## Список литературы

- [1] В.З. Гринес, Е.Я. Гуревич, Е.В. Жужома, О.В. Починка, *Классификация систем Морса–Смейла и топологическая структура несущих многообразий*, УМН **74** (1), 41–116 (2019).  
DOI: <https://doi.org/10.4213/rm9855>
- [2] V.Z. Grines, T.V. Medvedev, O.V. Pochinka, *Dynamical systems on 2- and 3-manifolds*, Springer, Switzerland, 2016.  
DOI: <https://doi.org/10.1007/978-3-319-44847-3>
- [3] В.З. Гринес, Е.Я. Гуревич, *Проблемы топологической классификации многомерных систем Морса–Смейла*, Ижевский ин-т комп. иссл., Ижевск, 2022.  
URL: <https://publications.hse.ru/books/804652432>
- [4] Е.В. Жужома, В.С. Медведев, *Непрерывные потоки Морса–Смейла с тремя состояниями равновесия*, Матем. сб. **207** (5), 69–92 (2016).  
DOI: <https://doi.org/10.4213/sm8565>
- [5] В.З. Гринес, Е.Я. Гуревич, *О классификации потоков Морса–Смейла на проективно-подобных многообразиях*, Изв. РАН. Сер. матем. **86** (5), 43–72 (2022).  
DOI: <https://doi.org/10.4213/im9197>
- [6] В.З. Гринес, Е.Я. Гуревич, *Комбинаторный инвариант градиентно-подобных потоков на связной сумме  $\mathbb{S}^{n-1} \times \mathbb{S}^1$* , Матем. сб. **214** (5), 97–127 (2023).  
DOI: <https://doi.org/10.4213/sm9761>

- [7] Е.Я. Гуревич, И.А. Сараев, *Диаграмма Кирби полярных потоков на четырехмерных многообразиях*, Матем. заметки **116** (1), 44–66 (2024).  
DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm14151>
- [8] E.Ya. Gurevich, I.A. Saraev, *Topological classification of polar flows on four-dimensional manifolds*, Regul. Chaotic Dyn. **30** (2), 254–278 (2025).  
DOI: <https://doi.org/10.1134/S1560354725020054>
- [9] M.H. Freedman, *The topology of four-dimensional manifolds*, J. Differential Geometry **17** (3), 357–453 (1982).  
DOI: <https://doi.org/10.4310/jdg/1214437136>
- [10] В.В. Прасолов, *Элементы теории гомологий*, МЦНМО, М., 2006.
- [11] S. Smale, *On gradient dynamical systems*, Ann. Math. **74** (1), 199–206 (1961).  
URL: <https://doi.org/10.2307/1970311>
- [12] K.R. Meyer, *Energy functions for Morse Smale systems*, Amer. J. Math. **90**, 1031–1040 (1968).  
DOI: <https://doi.org/10.2307/2373287>
- [13] D. Rolfsen, *Knots and links*, Mathematics Lecture Series **7**, Publish or Perish, Inc., Houston, TX, 1990.
- [14] В.В. Прасолов, А.Б. Сосинский, *Узлы, зацепления, косы и трехмерные многообразия*, МЦНМО, М., 1997.
- [15] C. McA. Gordon, J. Luecke, *Knots are determined by their complements*, J. AMS **2** (2), 371–415 (1989).  
DOI: <https://doi.org/10.2307/1990979>
- [16] M. Morse, *The existence of polar non-degenerate functions on differentiable manifolds*, Ann. Math. **71** (2), 352–383 (1960).  
DOI: <https://doi.org/10.2307/1970086>
- [17] К. Рурк, Б. Сандерсон, *Введение в кусочно-линейную топологию*, Мир, М., 1974.
- [18] F. Laudenbach, V. Poénaru, *A note on 4-dimensional handlebodies*, Bull. Soc. Math. France **100**, 337–344 (1972).  
DOI: <https://doi.org/10.24033/bsmf.1741>
- [19] R. Kirby, *A calculus for framed links in  $S^3$* , Invent. Math. **45** (1), 35–56 (1978).  
DOI: <https://doi.org/10.1007/BF01406222>
- [20] E.C. de Sá, *A link calculus for 4-manifolds*, in: *Topology of low-dimensional manifolds*, Springer, Berlin, Heidelberg, 16–30 (1979).  
DOI: <https://doi.org/10.1007/BFb0063185>
- [21] С. Смейл, *Дифференцируемые динамические системы*, УМН **25** (1), 113–185 (1970).  
URL: <https://www.mathnet.ru/rus/rm5295>

- [22] R.S. Palais, Ch.-L. Terng, *Critical point theory and submanifold geometry*, Springer-Verlag, Berlin, 1988.  
DOI: <https://doi.org/10.1007/BFb0087442>
- [23] H. Seifert, W. Threlfall, *Seifert and Threlfall: a textbook of topology*, Academic Press, New York-London, 1980.
- [24] Ж. Палис, В. Ди Мелу, *Геометрическая теория динамических систем*, Мир, М., 1986.
- [25] R.H. Bing, *Locally tame sets are tame*, Ann. Math. **59** (1), 145–158 (1954).  
DOI: <https://doi.org/10.2307/1969836>

**Гуревич Елена Яковлевна**

Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики»,  
ул. Большая Печерская, д. 25/12, г. Нижний Новгород, 603155, Россия,  
*e-mail*: egurevich@hse.ru

# On topological classification of flows with heteroclinic curves on four-dimensional manifolds

E.Ya. Gurevich

**Abstract.** We obtain a topological classification of smooth structurally stable flows on four-dimensional closed manifolds whose wandering set contains isolated trajectories connecting saddle equilibria (heteroclinic curves). For dimensional reasons, heteroclinic curves of such flows belong to the intersection of invariant manifolds of saddles of neighboring Morse indices. We assume that the non-wandering set of the flows under consideration consists of exactly one source, one sink, and an arbitrary number of saddles, the dimension of whose unstable manifolds is equal to 1 and 2. We obtain necessary and sufficient conditions for the topological equivalence of such flows and present an algorithm for realizing a representative in each class of topological equivalence. In particular, we show that in the considered class of flows on the sphere  $S^4$  there exists exactly one class of topological equivalence of flows with a single heteroclinic curve and a countable set of topologically nonequivalent flows with three heteroclinic curves. The latter result contrasts with the three-dimensional situation, where for a similar class of flows there are only finitely many equivalence classes for each number of heteroclinic curves.

**Keywords:** heteroclinic curve, gradient-like flow, polar flow, topological classification, Kirby diagram.

**DOI:** 10.26907/2949-3919.2025.3.20-42

## References

- [1] V.Z. Grines, E.Ya. Gurevich, E.V. Zhuzhoma, O.V. Pochinka, *Classification of Morse–Smale systems and topological structure of the underlying manifolds*, Russian Math. Surveys **74** (1), 37–110 (2019).  
DOI: <https://doi.org/10.1070/RM9855>
- [2] V.Z. Grines, T.V. Medvedev, O.V. Pochinka, *Dynamical systems on 2- and 3-manifolds*, Springer, Switzerland, 2016.  
DOI: <https://doi.org/10.1007/978-3-319-44847-3>

---

Acknowledgements. Research is partially support by RSF (grant No 23-71-30008).

Received: 24 June 2025. Accepted: 09 September 2025. Published: 16 October 2025.

- [3] V.Z. Grines, E.Ya. Gurevich, *Problems of topological classification of multidimensional Morse–Smale systems*, Izhevsk Institute of Computer Research, Izhevsk, 2022 [in Russian]. URL: <https://publications.hse.ru/books/804652432>
- [4] E.V. Zhuzhoma, V.S. Medvedev, *Continuous Morse–Smale flows with three equilibrium positions*, Sb. Math. **207** (5), 702–723 (2016). DOI: <https://doi.org/10.1070/SM8565>
- [5] V.Z. Grines, E.Ya. Gurevich, *On classification of Morse–Smale flows on projective-like manifolds*, Izv. Math. **86** (5), 876–902 (2022). DOI: <https://doi.org/10.4213/im9197e>
- [6] V.Z. Grines, E.Ya. Gurevich, *A combinatorial invariant of gradient-like flows on a connected sum of  $S^{n-1} \times S^1$* , Sb. Math. **214** (5) (2023), 703–731 (2023). DOI: <https://doi.org/10.4213/sm9761e>
- [7] E.Ya. Gurevich, I.A. Saraev, *Kirby diagram of polar flows on four-dimensional manifolds*, Math. Notes **116** (1), 40–57 (2024). DOI: <https://doi.org/10.1134/S0001434624070046>
- [8] E.Ya. Gurevich, I.A. Saraev, *Topological classification of polar flows on four-dimensional manifolds*, Regul. Chaotic Dyn. **30** (2), 254–278 (2025). DOI: <https://doi.org/10.1134/S1560354725020054>
- [9] M.H. Freedman, *The topology of four-dimensional manifolds*, J. Differential Geometry **17** (3), 357–453 (1982). DOI: <https://doi.org/10.4310/jdg/1214437136>
- [10] V.V. Prasolov, *Elements of homology theory*, AMS, Providence, RI, 2007.
- [11] S. Smale, *On gradient dynamical systems*, Ann. Math. **74** (1), 199–206 (1961). URL: <https://doi.org/10.2307/1970311>
- [12] K.R. Meyer, *Energy functions for Morse Smale systems*, Amer. J. Math. **90**, 1031–1040 (1968). DOI: <https://doi.org/10.2307/2373287>
- [13] D. Rolfsen, *Knots and links*, Mathematics Lecture Series **7**, Publish or Perish, Inc., Houston, TX, 1990.
- [14] V.V. Prasolov, A.B. Sosinsky, *Knots, links, braids and 3-manifolds. An introduction to the new invariants in low-dimensional topology*, AMS, Providence, RI, 1997. DOI: <https://doi.org/10.1090/mmono/154>
- [15] C.McA. Gordon, J. Luecke, *Knots are determined by their complements*, J. AMS **2** (2), 371–415 (1989). DOI: <https://doi.org/10.2307/1990979>

- [16] M. Morse, *The existence of polar non-degenerate functions on differentiable manifolds*, Ann. Math. **71** (2), 352–383 (1960).  
DOI: <https://doi.org/10.2307/1970086>
- [17] K. Rourke, B. Sanderson, *Introduction to piecewise linear topology*, Springer-Verlag, New York, 1972.  
DOI: <https://doi.org/10.1007/978-3-642-81735-9>
- [18] F. Laudenbach, V. Poénaru, *A note on 4-dimensional handlebodies*, Bull. Soc. Math. France **100**, 337–344 (1972).  
DOI: <https://doi.org/10.24033/bsmf.1741>
- [19] R. Kirby, *A calculus for framed links in  $S^3$* , Invent. Math. **45** (1), 35–56 (1978).  
DOI: <https://doi.org/10.1007/BF01406222>
- [20] E.C. de Sá, *A link calculus for 4-manifolds*, in: *Topology of low-dimensional manifolds*, Springer, Berlin, Heidelberg, 16–30 (1979).  
DOI: <https://doi.org/10.1007/BFb0063185>
- [21] S. Smale, *Differentiable dynamical systems*, Bull. AMS **73** (6), 747–817 (1967).  
DOI: <https://doi.org/10.1090/S0002-9904-1967-11798-1>
- [22] R.S. Palais, Ch.-L. Terng, *Critical point theory and submanifold geometry*, Springer-Verlag, Berlin, 1988.  
DOI: <https://doi.org/10.1007/BFb0087442>
- [23] H. Seifert, W. Threlfall, *Seifert and Threlfall: a textbook of topology*, Academic Press, New York-London, 1980.
- [24] J. Palis Jr., W. De Melo, *Geometric theory of dynamical systems. An introduction*, Springer-Verlag, New York-Berlin, 1982  
DOI: <https://doi.org/10.1007/978-1-4612-5703-5>
- [25] R.H. Bing, *Locally tame sets are tame*, Ann. Math. **59** (1), 145–158 (1954).  
DOI: <https://doi.org/10.2307/1969836>

**Elena Yakovlevna Gurevich**

HSE University,

25/12 Bolshaya Pecherskaya str., Nizhny Novgorod 603155, Russia,

*e-mail*: [egurevich@hse.ru](mailto:egurevich@hse.ru)