Том 3, Выпуск 3
Стр. 43–57 (2025)

УДК 515.1, 515.16
MSC 34D45, 35B41, 37B05, 57Nxx

Аттракторы групп гомеоморфизмов на многообразиях с краем

Р.А. Дедаев, Н.И. Жукова, Р.Р. Имаев

Аннотация. Пусть G – группа гомеоморфизмов n-мерного топологического многообразия M с непустым краем ∂M. Целью работы является изучение влияния непустого края многообразия M на структуру глобальных аттракторов группы гомеоморфизмов G. Наш основной результат состоит в доказательстве того, что любой глобальный аттрактор $\mathcal{A}$ группы гомеоморфизмов G на многообразии M с непустым краем ∂M либо принадлежит краю и может быть как собственным подмножеством края, так и совпадать с краем, либо равен объединению края с глобальным аттрактором группы, индуцированной на внутренности многообразия M. Показано, что этим свойством неглобальные аттракторы, вообще говоря, не обладают. Построены примеры, иллюстрирующие содержание работы, включая пример с двумя различными глобальными аттракторами.

Ключевые слова: аттрактор, глобальный аттрактор, минимальное множество, группа гомеоморфизмов, многообразие с краем.

DOI: 10.26907/2949-3919.2025.3.43-57

Введение

В настоящее время известно мало работ, посвященных проблеме взаимосвязи между топологией и геометрией динамических систем и других объектов на многообразии M и на его крае. Прежде всего, это работы Г. Каца [1], Х. Фрерихса [2, 3]. В [1] Г. Кац отвечает на вопрос, как восстановить векторное поле Риба, соответствующее контактной структуре, на всем многообразии по известным данным на крае этого многообразия. В [2], в частности, разрабатывается общий принцип деформации семейства римановых метрик на гладких многообразиях с некомпактным краем, сохраняющей некоторые оценки скалярной кривизны, и подчеркивается, что эти исследования представляют интерес в дифференциальной геометрии. В [3] исследуется количественная устойчивость функционала типа Ямабе на компактных многообразиях с краем, введенного Х. Эскобаром [4]. В результате, проблема сведена к аналогичному вопросу для эффективного функционала на крае многообразия.

Благодарности. Исследование осуществлено в рамках Программы фундаментальных исследований НИУ ВШЭ.

Поступила: 30.04.2025. Принята: 09.09.2025. Опубликована: 16.10.2025.

Нам не известны работы, в которых исследовалось бы влияние края многообразия M на структуру аттракторов групп гомеоморфизмов этого многообразия. Основная цель данной работы – заполнить этот пробел.

Компактность аттракторов и многообразий M нами не предполагается. Ограничения на размерность и связность многообразия M не накладываются.

Пусть G – группа гомеоморфизмов многообразия M. Множество $G.x = \{g.x \mid g \in G\}$ называется *орбитой* точки $x \in M$. Для любого $B \subset M$ будем использовать обозначение $G.B = \{G.x \mid x \in B\}$. Подмножество $B \subset M$ называется *инвариантным*, если $G.B = B$.

Напомним, что непустое замкнутое инвариантное подмножество $\mathcal{M}$ топологического многообразия M называется *минимальным множеством* группы гомеоморфизмов G, действующей на M, если орбита любой точки x из $\mathcal{M}$ всюду плотна в $\mathcal{M}$.

Мы используем следующее общее определение аттрактора из работы [5].

Определение 1. Пусть G – группа гомеоморфизмов, действующая на топологическом многообразии M. Собственное замкнутое инвариантное подмножество $\mathcal{A} \subset M$ называется *аттрактором* группы гомеоморфизмов G, если существует инвариантная окрестность $\mathcal{U}$ подмножества $\mathcal{A}$, обладающая следующим свойством: для любой точки $x \in \mathcal{U} \setminus \mathcal{A}$ замыкание $\overline{G.x}$ орбиты $G.x$ содержит $\mathcal{A}$, т. е.

$$\mathcal{A} \subset \overline{G.x} \quad \forall x \in \mathcal{U} \setminus \mathcal{A}.$$

Окрестность $\mathcal{U}$ называется *бассейном* аттрактора $\mathcal{A}$ и обозначается через $\mathrm{Attr}(\mathcal{A})$.

Если $\mathrm{Attr}(\mathcal{A}) = M$, то $\mathcal{A}$ называется *глобальным* аттрактором.

Прежде всего, мы решаем проблему единственности глобального аттрактора для группы гомеоморфизмов топологического многообразия и доказываем следующее утверждение:

Теорема 2. *Пусть G – группа гомеоморфизмов топологического многообразия M с краем ∂M, возможно, пустым. Предположим, что существуют два глобальных аттрактора $\mathcal{A}_1$ и $\mathcal{A}_2$ группы G. Тогда*:

1) *выполняется по крайней мере одно из включений: $\mathcal{A}_1 \subset \mathcal{A}_2$ или $\mathcal{A}_2 \subset \mathcal{A}_1$*;
2) *существование двух различных глобальных аттрактора $\mathcal{A}_1$ и $\mathcal{A}_2$ группы гомеоморфизмов G, удовлетворяющих включению $\mathcal{A}_1 \subset \mathcal{A}_2$, реализуется*;
3) *если $\mathcal{A}_1$ и $\mathcal{A}_2$ являются минимальными множествами, то $\mathcal{A}_1 = \mathcal{A}_2$, причем других минимальных множеств не существует.*

Замечание 3. П. 3 теоремы 2 также известен для полугрупп из [6, теорема 2.1].

В примере 8 нами построена группа гомеоморфизмов G на многообразии M, имеющая два различных глобальных аттрактора $\mathcal{A}_1$ и $\mathcal{A}_2$, удовлетворяющих включению $\mathcal{A}_1 \subset \mathcal{A}_2$.

Следующая теорема является основным результатом данной работы.

Теорема 4. *Пусть G – группа гомеоморфизмов топологического многообразия M с непустым краем ∂M. Если существует глобальный аттрактор $\mathcal{A}$ группы G, то:*

- *либо $\mathcal{A} \subset \partial M$ и является глобальным аттрактором группы $G|_{\partial M}$, индуцированной на крае ∂M многообразия M;*
- *либо $\mathcal{A}$ совпадает с краем $\mathcal{A} = \partial M$;*
- *либо $\mathcal{A} = \partial M \sqcup \mathcal{A}^0$, где $\mathcal{A}^0$ – глобальный аттрактор группы $G^0 := G|_{M^0}$, индуцированной на внутренности M^0 многообразия M,*

причем все три случая реализуются.

Следствие 5. *Пусть G – группа гомеоморфизмов топологического многообразия M с непустым краем ∂M. Не существует глобальных аттракторов группы гомеоморфизмов G вида $\mathcal{A} = \mathcal{A}^1 \sqcup \mathcal{A}^0$, где $\mathcal{A}^1$ и $\mathcal{A}^0$ – глобальные аттракторы групп $G|_{\partial M}$ и G^0, индуцированных на топологических многообразиях ∂M и M^0 соответственно.*

Как подчеркивал Д.В. Аносов [7], минимальные множества являются основными объектами изучения в топологической динамике. Следующая теорема уточняет структуру аттракторов, являющихся минимальными множествами.

Теорема 6. *Пусть G – группа гомеоморфизмов топологического многообразия M с непустым краем ∂M. Если существует глобальный аттрактор $\mathcal{A}$ группы G, являющийся минимальным множеством, то он принадлежит краю и либо является собственным подмножеством края, либо совпадает с краем, причем обе возможности реализуются.*

Предположения. Все окрестности предполагаются открытыми.

Обозначения. Через $\overline{A}$ обозначается топологическое замыкание множества A. Символ $\cong$ обозначает изоморфизм объектов в соответствующей категории. Через $\mathbb{N}$ обозначается множество натуральных чисел, а через $\mathbb{Z}$ – множество целых чисел.

1. Доказательство теоремы 2

Пусть G – группа гомеоморфизмов топологического многообразия M с краем ∂M, возможно пустым.

Докажем утверждение 1). Предположим противное: пусть существуют два глобальных аттрактора $\mathcal{A}_1$ и $\mathcal{A}_2$ группы G такие, что $\mathcal{A}_1 \not\subset \mathcal{A}_2$ и $\mathcal{A}_2 \not\subset \mathcal{A}_1$. Отсюда вытекает существование точки $x \in \mathcal{A}_1 \setminus \mathcal{A}_2$. Согласно определению глобального аттрактора $\mathcal{A}_2$, это влечет включение $\mathcal{A}_2 \subset \overline{G.x}$. Так как $x \in \mathcal{A}_1$, то, в силу инвариантности и замкнутости подмножества $\mathcal{A}_1$, выполняется включение $\overline{G.x} \subset \mathcal{A}_1$. Следовательно, получаем $\mathcal{A}_2 \subset \mathcal{A}_1$, что противоречит предположению. Таким образом, утверждение 1) доказано.

Утверждение 2) следует из примера 8.

Покажем теперь справедливость утверждения 3). Пусть минимальные множества $\mathcal{A}_1$ и $\mathcal{A}_2$ – глобальные аттракторы группы гомеоморфизмов G многообразия M. Согласно доказанному утверждению 1), выполняется по крайней мере одно из включений: $\mathcal{A}_1 \subset \mathcal{A}_2$ или $\mathcal{A}_2 \subset \mathcal{A}_1$.

Предположим, что $\mathcal{A}_1 \subset \mathcal{A}_2$. Так как $\mathcal{A}_1 \neq \varnothing$, то существует точка $x \in \mathcal{A}_1 \subset \mathcal{A}_2$. Поскольку $\mathcal{A}_1$ – минимальное множество, то $\overline{G.x} = \mathcal{A}_1$. Так как $\mathcal{A}_2$ – минимальное множество, то $\overline{G.x} = \mathcal{A}_2$. Следовательно, $\mathcal{A}_1 = \mathcal{A}_2$.

В случае $\mathcal{A}_2 \subset \mathcal{A}_1$ доказательство аналогично.

Таким образом, глобальные аттракторы $\mathcal{A}_1$ и $\mathcal{A}_2$ совпадают.

Покажем, что не существует минимальных множеств $\mathcal{M}$, отличных от $\mathcal{A}_1$. Возможны только два следующих случая:

Случай 1: существует минимальное множество $\mathcal{M}$, для которого $\mathcal{M} \cap \mathcal{A}_1 \neq \varnothing$. В этом случае существует точка $x \in M$, принадлежащая $\mathcal{M} \cap \mathcal{A}_1$. Поскольку $\mathcal{M}$ и $\mathcal{A}_1$ – минимальные множества, мы получаем, что $\mathcal{M} = \overline{G.x}$ и $\mathcal{A}_1 = \overline{G.x}$. Следовательно, $\mathcal{A}_1 = \mathcal{M}$.

Случай 2: существует минимальное множество $\mathcal{M}$, для которого $\mathcal{M} \cap \mathcal{A}_1 = \varnothing$. В этом случае найдется точка $x \in \mathcal{M} \setminus \mathcal{A}_1$. Поскольку $\mathcal{M}$ – минимальное множество, то $\mathcal{M} = \overline{G.x}$. Из определения глобального аттрактора $\mathcal{A}_1$ вытекает включение

$$\mathcal{A}_1 \subset \overline{G.x} = \mathcal{M},$$

что противоречит предположению *случая* 2. Следовательно, реализуется только *случай* 1, и $\mathcal{A}_1 = \mathcal{M}$.

Таким образом, для группы гомеоморфизмов G многообразия M не существует минимальных множеств, отличных от $\mathcal{A}_1$. Утверждение 3) доказано. □

2. Доказательство теорем 4 и 6

2.1. Лемма о непустом пересечении глобального аттрактора с краем

Лемма 7. *Пусть G – группа гомеоморфизмов топологического многообразия M с непустым краем ∂M. Если существует глобальный аттрактор $\mathcal{A}$ группы G, то $\mathcal{A} \cap \partial M \neq \varnothing$.*

Доказательство. Предположим противное: пусть существует группа гомеоморфизмов G топологического многообразия M с краем $\partial M \neq \varnothing$, имеющая глобальный аттрактор $\mathcal{A}$ такой, что $\mathcal{A} \cap \partial M = \varnothing$. Пусть b – произвольная точка края. Согласно определению глобального аттрактора, выполняется включение:

$$\mathcal{A} \subset \overline{G.b} \quad \Longrightarrow \quad a \in \overline{G.b} \quad \forall a \in \mathcal{A}.$$

Так как внутренность M^0 многообразия M – открытая окрестность произвольной точки $a \in \mathcal{A}$, причем $a \in \overline{G.b}$, то необходимо, чтобы $G.b \cap M^0 \neq \varnothing$. В силу инвариантности края и внутренности многообразия при гомеоморфизмах,

$$G.\partial M = \partial M \quad \text{и} \quad G.M^0 = M^0.$$

Следовательно, $G.b \subset M^0$ и $G.b \subset \partial M$, т. е. $G.b \subset \partial M \cap M^0 \neq \varnothing$, что противоречит равенству $\partial M \cap M^0 = \varnothing$.

Таким образом, наше предположение неверно, и $\mathcal{A} \cap \partial M \neq \varnothing$. $\square$

2.2. Доказательство теоремы 4. Пусть G – группа гомеоморфизмов топологического многообразия M с непустым краем ∂M и $\mathcal{A}$ – глобальный аттрактор группы G.

Возможны два следующих случая:

Случай 1: $\mathcal{A} \subset \partial M$. Тогда утверждение теоремы 4 выполнено.

Случай 2: $\mathcal{A}$ не является подмножеством края ∂M. Тогда $\mathcal{A} \subset M^0 \sqcup \partial M$, причем $\mathcal{A} \cap M^0 \neq \varnothing$. Согласно лемме 7, $\mathcal{A} \cap \partial M \neq \varnothing$. Если существует точка $b \in \partial M \setminus \mathcal{A}$, то, по определению глобального аттрактора, выполняется включение $\mathcal{A} \subset \overline{G.b}$, поэтому в силу инвариантности края

$$\mathcal{A} \subset \overline{G.b} \subset \partial M,$$

что невозможно в рассматриваемом случае. Таким образом, выполняется включение

$$\partial M \subset \mathcal{A}.$$

Введем обозначение $\mathcal{A}^0 := \mathcal{A} \cap M^0$. Заметим, что $\mathcal{A}^0 \neq M^0$, ведь в противном случае $\mathcal{A} = M$, что исключается определением аттрактора. Кроме того, $\mathcal{A}^0$ – непустое замкнутое инвариантное подмножество в M^0. Пусть x – произвольная точка из $M^0 \setminus \mathcal{A}^0$, тогда $x \in M \setminus \mathcal{A}$. Согласно определению глобального аттрактора $\mathcal{A}$, выполняется включение $\mathcal{A} \subset \overline{G.x}$, следовательно,

$$\mathcal{A}^0 \subset \overline{G.x} \quad \forall x \in M^0 \setminus \mathcal{A}^0.$$

Это означает, что $\mathcal{A}^0$ – глобальный аттрактор группы $G^0 = G|_{M^0}$, индуцированной на внутренности M^0 многообразия M.

Примеры показывают, что глобальный аттрактор $\mathcal{A}$ группы гомеоморфизмов G на многообразии с непустым краем может быть как собственным подмножеством края и глобальным аттрактором группы $G|_{\partial M}$, индуцированной на крае ∂M многообразия M (пример 10), так и совпадать с краем $\mathcal{A} = \partial M$ (примеры 9 и 11). Пример 12 демонстрирует случай, когда глобальный аттрактор $\mathcal{A} = \partial M \sqcup \mathcal{A}^0$, где $\mathcal{A}^0$ – глобальный аттрактор группы G^0, индуцированной на внутренности M^0 многообразия M.

Таким образом, теорема 4 доказана. $\square$

2.3. Доказательство теоремы 6. Пусть G – группа гомеоморфизмов топологического многообразия M с непустым краем ∂M. Предположим, что существует глобальный аттрактор $\mathcal{A}$ группы G, являющийся минимальным множеством. Тогда по лемме 7 существует точка $b \in \mathcal{A} \cap \partial M$. В силу инвариантности края относительно группы G получаем, что $G.b \subset \partial M$. Замкнутость края влечет включение $\overline{G.b} \subset \partial M$.

Так как $\mathcal{A}$ – минимальное множество, то $\mathcal{A} = \overline{G.b} \subset \partial M$.

В примере 8 представлена группа диффеоморфизмов G многообразия $M = \mathbb{R}^2_+$ с непустым краем ∂M, имеющая одноточечный глобальный аттрактор $\mathcal{A}$, являющийся минимальным множеством. При этом $\mathcal{A}$ – глобальный аттрактор группы $G|_{\partial M}$, индуцированной на крае ∂M многообразия M.

В примере 9 указана группа гомеоморфизмов G многообразия M с непустым краем ∂M, имеющая глобальный аттрактор $\mathcal{A} = \partial \mathcal{M}$, являющийся минимальным множеством.

Это завершает доказательство теоремы 6. $\square$

3. Примеры

Пример 8. Определим группу диффеоморфизмов полуплоскости $M = \mathbb{R}^2_+$, имеющую два различных глобальных аттрактора.

Произвольная точка $z \in \mathbb{R}^2_+$ представима в виде $z = (x, y)$, где $x \in \mathbb{R}^1$, $y \in \mathbb{R}^1_+$. Пусть $G = \langle g, s, h, k\rangle$, где $g.z := 5 \cdot z$, $s.z := \sqrt{3} \cdot z$, $h.z := (2 \cdot x, y)$ и $k.z := (-x, y)$ для любой точки $z = (x, y) \in \mathbb{R}^2_+$. Заметим, что группа $G \cong \mathbb{Z}^3 \times \mathbb{Z}_2$ изоморфна абелевой подгруппе общей линейной группы $GL(2, \mathbb{R})$.

Пусть $O = (0, 0)$ – начало координат в $\mathbb{R}^2_+$. Подчеркнем, что O – неподвижная точка группы G. Так как замыкание $\overline{G.z}$ орбиты $G.z$ любой точки $z \in \mathbb{R}^2_+ \setminus \{O\}$ содержит $\{O\}$, то $\mathcal{A}_1 = \{O\}$ – глобальный аттрактор группы G, являющийся минимальным множеством.

Введем обозначение $Oy_+ := Oy \cap \mathbb{R}^2_+$, т. е. $Oy_+ = \{z = (0, y) \mid y \geq 0\}$. Применяя [8, лемма 4], нетрудно показать, что для любой точки $v \in Ox \setminus O$ замыкание $\overline{G.v}$ орбиты $G.v$ совпадает с осью координат Ox, а замыкание $\overline{G.w}$ орбиты $G.w$ любой точки $w \in Oy_+ \setminus O$ совпадает с Oy_+. Используя инвариантность относительно G замыкания любой орбиты, мы получаем, что $Ox \cup Oy_+$ – собственное замкнутое инвариантное подмножество в $\mathbb{R}^2_+$. Замыкание орбиты одной из точек $v \in \mathbb{R}^2_+ \setminus (Ox \cup Oy_+)$ изображено на рис. 1. Учитывая структуру этого замыкания, имеем включение:

$$Ox \cup Oy_+ \subset \overline{G.v} \quad \forall v \in \mathbb{R}^2_+ \setminus (Ox \cup Oy_+).$$

Следовательно, подмножество $\mathcal{A}_2 = Ox \cup Oy_+$ – глобальный аттрактор группы гомеоморфизмов G. Заметим, что $\mathcal{A}_2$ не является минимальным множеством. Можно представить $\mathcal{A}_2$ в виде:

$$\mathcal{A}_2 = \partial M \sqcup \mathcal{A}^0,$$

где $\mathcal{A}^0 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2_+ \mid x = 0, y > 0\}$ – глобальный аттрактор группы $G|_{M^0}$, индуцированной на внутренности $M^0 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2_+ \,|\, y > 0\}$ многообразия $M = \mathbb{R}^2_+$, что согласуется с теоремой 4.

Таким образом, группа гомеоморфизмов G многообразия M имеет два различных глобальных аттрактора $\mathcal{A}_1$ и $\mathcal{A}_2$, удовлетворяющих включению: $\mathcal{A}_1 \subset \mathcal{A}_2$.

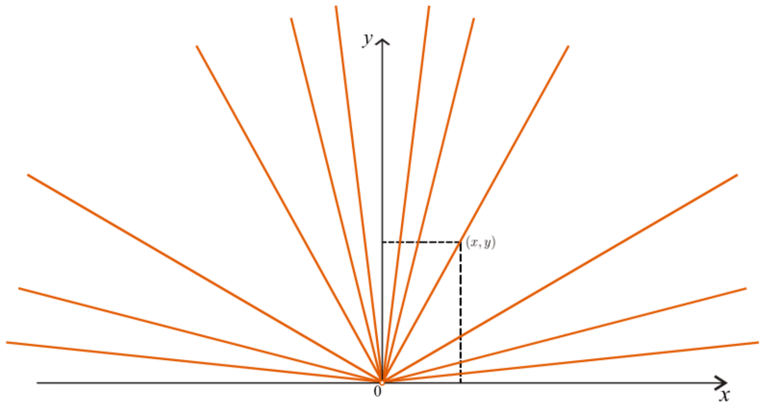

Рис. 1. Замыкание орбиты точки $(x, y) \in \mathbb{R}^2_+ \setminus (Ox \cup Oy_+)$

Пример 9. Рассмотрим топологическое многообразие $M = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \geq 1\}$ с краем $\partial M = \mathbb{S}^1 = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 = 1\}$. Перейдем к полярной системе координат (ρ, φ). Пусть $g(\rho, \varphi) := \left(\frac{\rho-1}{2} + 1, \varphi\right)$, $f(\rho, \varphi) := (\rho, \varphi + 1)$. Подчеркнем, что f и g – гомеоморфизмы. Обозначим через $G = \langle f, g\rangle$ группу гомеоморфизмов с образующими f и g.

Заметим, что $g^n(\rho, \varphi) = \left(\frac{\rho-1}{2^n} + 1, \varphi\right)$, где $n \in \mathbb{N}$, причем $g^n(\rho, \varphi) \to (1, \varphi)$ при $n \to +\infty$ для любой точки $(\rho, \varphi) \in M$. Так как орбита $G.(1, \varphi)$ всюду плотна в $\partial M = \mathbb{S}^1$, то замыкание орбиты любой точки (ρ, φ) содержит край многообразия ∂M (см. рис. 2). Таким образом, $\mathcal{A} = \partial M$ – глобальный аттрактор, являющийся минимальным множеством, группы G.

Пример 10. Пусть $M = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \geq 1\}$ – 2-мерное топологическое многообразие с краем $\partial M = \mathbb{S}^1$, $G = \langle f, g\rangle$ – группа гомеоморфизмов с образующими f и g, заданных формулами: $g(\rho, \varphi) := \left(\frac{\rho-1}{2} + 1, \varphi\right)$, $f(\rho, \varphi) := \left(\rho, \frac{\varphi}{2}\right)$, где (ρ, φ) – полярные координаты.

Аналогично примеру 9, мы получаем, что $g^n(\rho, \varphi) \to (1, \varphi)$ при $n \to +\infty$ для любой точки $(\rho, \varphi) \in M$. Заметим, что $f^n(\rho, \varphi) = \left(\rho, \frac{\varphi}{2^n}\right)$. Тогда $f^n(\rho, \varphi) \to (\rho, 0)$ при $n \to +\infty$ для любой точки $(\rho, \varphi) \in M$. Подчеркнем, что $b = (1, 0)$ – неподвижная точка группы G, причем замыкание любой орбиты содержит b.

Таким образом, $\mathcal{A} = \{b\}$ – глобальный аттрактор группы гомеоморфизмов G, являющийся минимальным множеством. Кроме того, $\mathcal{A}$ – глобальный аттрактор группы $G|_{\partial M}$, индуцированной на крае ∂M многообразия M (см. рис. 3).

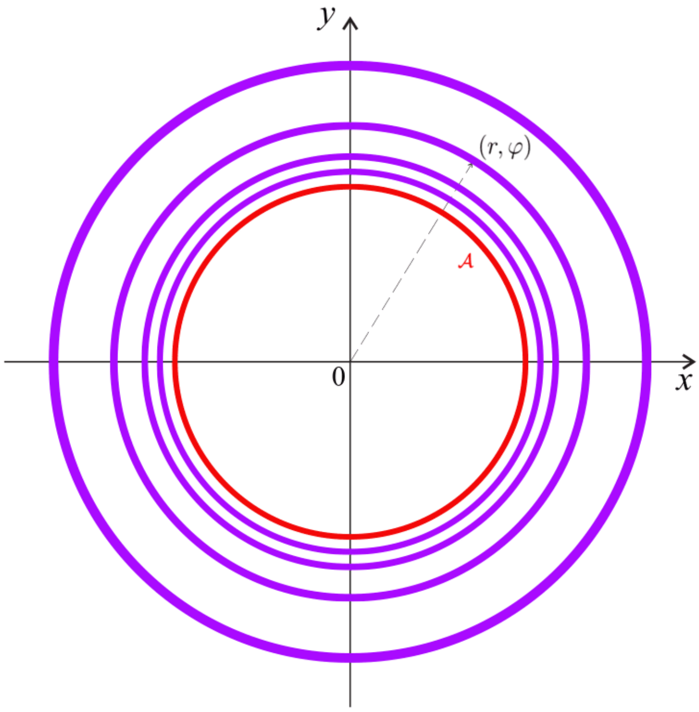

Рис. 2. $\mathcal{A}$ – глобальный аттрактор группы G

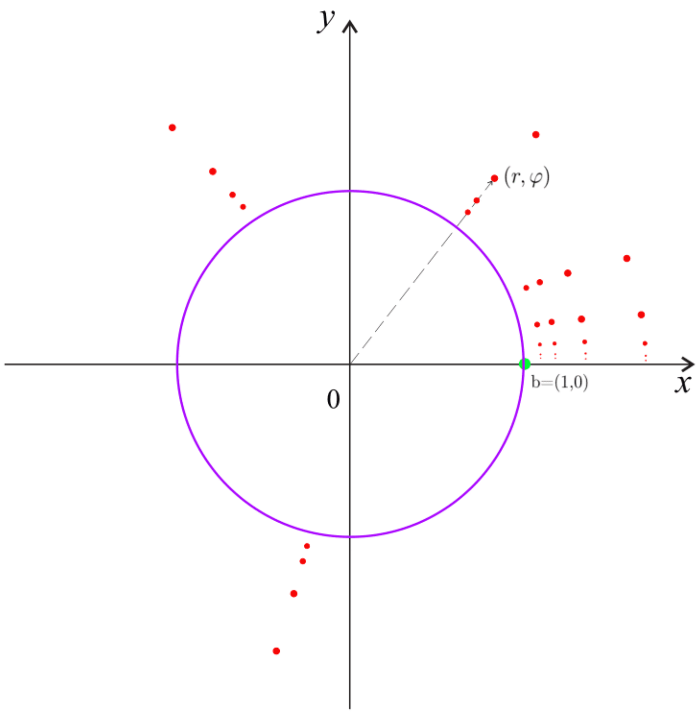

Рис. 3. $\mathcal{A} = \{b\}$ – глобальный аттрактор группы G

Пример 11. Рассмотрим слоение Риба (M, F) в кольце $M \cong [0,1] \times S^1$ (см., например, [9, пример B, с. 124]). Край ∂M многообразия M состоит из двух компонент связности $\partial M = \mathbb{S}^1_{(1)} \sqcup \mathbb{S}^1_{(2)}$. Поскольку существует непрерывная ориентация слоев этого слоения, то можно определить непрерывное действие группы $G = \mathbb{R}^1$ на M, т. е. непрерывный поток, траектории которого образуют 1-мерное слоение (M, F) (см. рис. 4).

Группа G многообразия M имеет глобальный аттрактор $\mathcal{A} = \partial M$, не являющийся минимальным множеством.

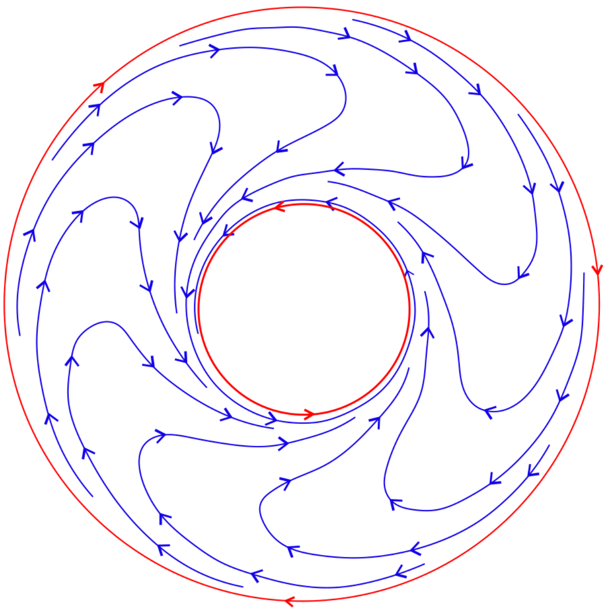

Рис. 4. Слоение Риба в кольце

Пример 12. Рассмотрим систему обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \dot{x} = -2x - y + \frac{1}{2}x(x^2+y^2), \\ \dot{y} = -2y + x + \frac{1}{2}y(x^2+y^2), \end{cases} \tag{1}$$

где $x = x(t)$, $y = y(t)$, $t \in \mathbb{R}$. Пусть $S = \{f^t \mid t \in \mathbb{R}\}$ – 1-параметрическая группа преобразований, где f^t переводит точку (x, y) фазового пространства в решение $(x(t), y(t))$ системы (1) с начальным условием $(x(0), y(0)) = (x, y)$.

Перейдем к координатам (ρ, φ), где $\rho = x^2 + y^2$ – квадрат полярного радиуса, а φ – полярный угол. В координатах (ρ, φ) система (1) принимает вид:

$$\begin{cases} \dot{\rho} = \rho(\rho - 4), \\ \dot{\varphi} = 1. \end{cases} \tag{2}$$

Рассмотрим три случая:

1) При начальных условиях (ρ_0, φ_0), где $0 < \rho_0 < 4$, производная $\dot\rho$ меньше нуля, следовательно, $\sqrt{\rho(t)}$ – расстояние от точки $(\rho(t), \varphi(t))$ до начала координат стремится к нулю при $t \to +\infty$.

2) При начальных условиях (ρ_0, φ_0), где $\rho_0 > 4$, производная $\dot\rho$ больше нуля, следовательно, $\sqrt{\rho(t)} \to +\infty$ при $t \to +\infty$.

3) При начальных условиях (ρ_0, φ_0), где $\rho_0 = 4$, производная $\dot\rho$ равна нулю, поэтому траектория совпадает с окружностью $\mathbb{S}^1_4 = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 = 4\}$.

Заметим, что $\mathcal{A}_1 = \{(0, 0)\}$ и $\mathcal{A}_2 = \mathbb{S}^1_4$ – собственные замкнутые инвариантные подмножества. Замыкание $\overline{S.v}$ орбиты $S.v$ любой точки $v \in \mathcal{U}_1 = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 < 4\}$ содержит подмножество $\mathcal{A}_1$, а замыкание $\overline{S.u}$ орбиты $S.u$ любой точки $u \in \mathcal{U}_2 = \mathbb{R}^2 \backslash (0, 0)$ содержит $\mathcal{A}_2$. Таким образом, группа S имеет два неглобальных аттрактора $\mathcal{A}_1$ и $\mathcal{A}_2$, которые являются минимальными множествами, с бассейнами $\mathcal{U}_1$ и $\mathcal{U}_2$ соответственно (см. рис. 5). Заметим, что теорема 4, вообще говоря, не верна для неглобальных аттракторов.

Рассмотрим топологическое многообразие $M = \overline{\mathbb{D}^2} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 4\}$ с краем $\partial M = \mathbb{S}^1_4$. Так как M инвариантно относительно группы S, то на M индуцируется 1-параметрическая группа диффеоморфизмов $G = S|_M = \{f^t|_M \mid t \in \mathbb{R}\}$. Группа G на многообразии M имеет глобальный аттрактор $\mathcal{A} = \partial M \sqcup \mathcal{A}^0 = \partial M \sqcup \{(0, 0)\}$. Также отметим, что $\mathcal{A}^0 = \{(0, 0)\}$ – глобальный аттрактор группы G^0, индуцированной на внутренности M^0 многообразия M (см. рис. 5).

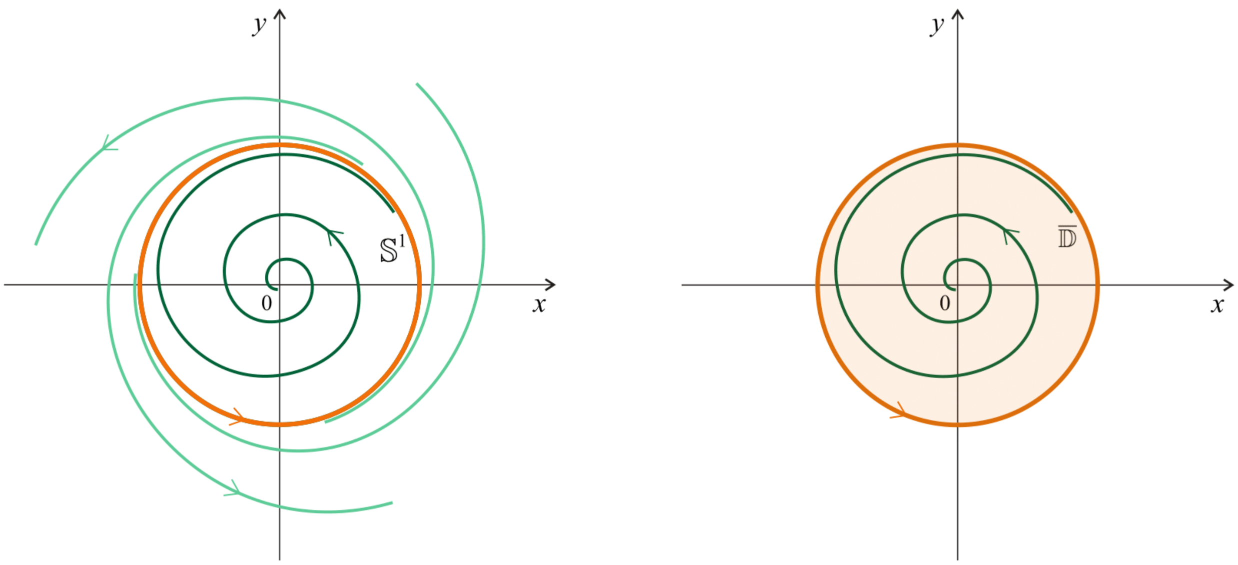

Рис. 5. Фазовые портреты динамической системы и индуцированной динамической системы соответственно

Пример 13. Рассмотрим функции $f : (-1, 1) \to \mathbb{R}$, где $f(x) := e^{\frac{x^2}{1-x^2}}$, и $g : (1, 3) \to \mathbb{R}$, где $g(x) := e^{\frac{(x-2)^2}{1-(x-2)^2}}$.

Рассмотрим $M = [-1, 3] \times \mathbb{R}$ – 2-мерное топологическое многообразие с краем. Пусть $F = \{L_\alpha, L_\beta, L^*, L^{**}, L^{***} \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$, где

$$\begin{aligned} L_\alpha &= \{(x, f(x) + \alpha) \in M \mid -1 < x < 1\}, \\ L_\beta &= \{(x, g(x) + \beta) \in M \mid 1 < x < 3\}, \\ L^* &= \{(x, y) \in M \mid x = -1,\ y \in \mathbb{R}\}, \\ L^{**} &= \{(x, y) \in M \mid x = 1,\ y \in \mathbb{R}\}, \\ L^{***} &= \{(x, y) \in M \mid x = 3,\ y \in \mathbb{R}\}. \end{aligned}$$

Тогда (M, F) – слоение коразмерности 1.

Заметим, что можно определить действие группы $G = \mathbb{R}^1$ на M, т. е. непрерывный поток, траектории которого образуют 1-мерное слоение (M, F).

Введем отношение эквивалентности на M: $(x_1, y_1) \sim (x_2, y_2) \iff x_1 = x_2$, и существует $n \in \mathbb{Z}$ такое, что $y_1 = y_2 + n$. Возьмем $[-1, 3] \times [0, 1]$ за фундаментальную область. Склеивая $A = \{(x, y) \mid y = 0, x \in [-1, 3]\}$ с $B = \{(x, y) \mid y = 1, x \in [-1, 3]\}$ по гомеоморфизму $\varphi : A \to B$, где $\varphi((x, y)) = (x, 1)\ \forall (x, y) \in A$, получим фактор-многообразие Q, гомеоморфное цилиндру $[-1, 3] \times \mathbb{S}^1$. Далее без ограничений общности будем считать, что $Q = [-1, 3] \times \mathbb{S}^1$. Слои слоения (M, F) посредством фактор-отображения задают 1-мерное слоение (Q, F^*). Поскольку существует непрерывная ориентация слоев слоения (Q, F^*), то на Q можно определить непрерывный поток H, траектории которого образуют это слоение (см. рис. 6).

Заметим, что $\mathcal{A}_1 = \{-1\} \times \mathbb{S}^1$, $\mathcal{A}_2 = \{1\} \times \mathbb{S}^1$, $\mathcal{A}_3 = \{3\} \times \mathbb{S}^1$ – собственные инвариантные замкнутые подмножества Q. Замыкание $\overline{H.v}$ орбиты $H.v$ каждой точки $v \in \mathcal{U}_1 = [-1, 1) \times \mathbb{S}^1$ содержит $\mathcal{A}_1$. Аналогично, замыкания $\overline{H.u}$ и $\overline{H.m}$ орбит $H.u$ и $H.m$ произвольных точек $u \in \mathcal{U}_2 = (-1, 3) \times \mathbb{S}^1$ и $m \in \mathcal{U}_3 = (1, 3] \times \mathbb{S}^1$ содержат $\mathcal{A}_2$ и $\mathcal{A}_3$ соответственно. Таким образом, подмножества $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \mathcal{A}_3$ – неглобальные аттракторы группы H. Это еще один пример, показывающий, что утверждение теоремы 4 для неглобальных аттракторов не выполняется.

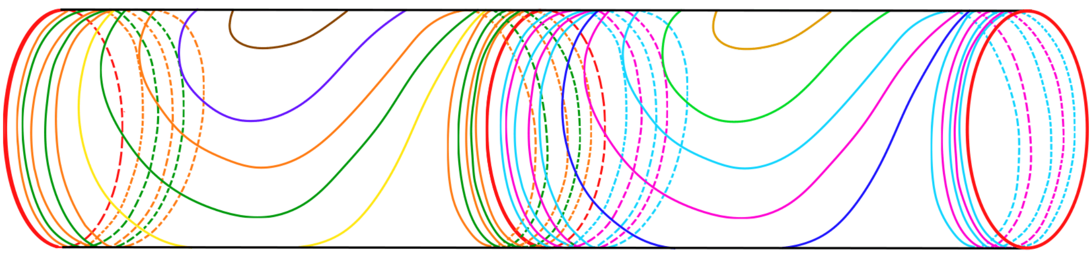

Рис. 6. 1-мерное слоение многообразия Q

Список литературы

[1] G. Katz, *Recovering contact forms from boundary data*, arXiv:2309.14604v5 (2025).
URL: https://arxiv.org/abs/2309.14604

[2] H. Frerichs, *Scalar curvature deformations with non-compact boundaries*, arXiv:2403.039411v2 (2025).
URL: https://arxiv.org/abs/2403.03941

[3] B. Bourquez, R. Caju, H. Van Den Bosch, *Quantitative stability for Yamabe minimizers on manifolds with boundary*, arXiv:2503.09801v1 (2025).
URL: https://arxiv.org/abs/2503.09801

[4] J.F. Escobar, *Conformal deformation of a Riemannian metric to a scalar flat metric with constant mean curvature on the boundary*, Ann. Math. **136** (1), 1–50 (1992).
URL: https://doi.org/10.2307/2946545

[5] R.A. Dedaev, N.I. Zhukova, *Existence of attractors of foliations, pseudogroups and groups of transformations*, Russ. J. Nonlinear Dyn. **21** (1), 85–102 (2025).
URL: https://doi.org/10.20537/nd250205

[6] А.В. Багаев, Аттракторы полугрупп, порожденных конечным семейством сжимающих преобразований полного метрического пространства, Журнал СВМО **26** (4), 359–375 (2024).
URL: https://www.mathnet.ru/rus/svmo893

[7] Д.В. Аносов, *Минимальное множество*, Математическая энциклопедия, Т. 3, Сов. энц., М., 690–691 (1982).

[8] Н.И. Жукова, *Минимальные множества картановых слоений*, Тр. МИАН **256**, 115–147 (2007).
URL: https://www.mathnet.ru/rus/tm459

[9] I. Tamura, *Topology of foliations: an introduction*, Transl. Math. Monogr. **97**, AMS, Providence, R.I., 1992.

Роман Александрович Дедаев
Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики»,
ул. Большая Печерская, д. 25/12, г. Нижний Новгород, 603155, Россия,
e-mail: dedaevroman@gmail.com

Нина Ивановна Жукова
Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики»,
ул. Большая Печерская, д. 25/12, г. Нижний Новгород, 603155, Россия,
e-mail: nina.i.zhukova@yandex.ru

Роман Русланович Имаев
Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики»,
ул. Большая Печерская, д. 25/12, г. Нижний Новгород, 603155, Россия,
e-mail: rrimaev@edu.hse.ru

Volume 3, Issue 3
pp. 43–57 (2025)

UDC 515.1, 515.16
MSC 34D45, 35B41, 37B05, 57Nxx

Attractors of homeomorphism groups on manifolds with boundary

R.A. Dedaev, N.I. Zhukova, R.R. Imaev

Abstract. Let G be the group of homeomorphisms of an n-dimensional topological manifold M with a nonempty boundary ∂M. The aim of this work is to study the effect of the nonempty boundary of the manifold M on the structure of global attractors of the homeomorphism group G. Our main result is the proof that any global attractor $\mathcal{A}$ of the homeomorphism group G on a manifold M with a nonempty boundary ∂M either belongs to the boundary and it can be either a proper subset of the boundary or coincide with the boundary, or it is equal to the union of the boundary with the global attractor of the group induced on the interior of the manifold M. It is shown that, generally speaking, non-global attractors do not possess this property. Various examples are constructed, including an example with two different global attractors.

Keywords: attractor, global attractor, minimal set, group of homeomorphisms, manifold with boundary.

DOI: 10.26907/2949-3919.2025.3.43-57

References

[1] G. Katz, *Recovering contact forms from boundary data*, arXiv:2309.14604v5 (2025).
URL: https://arxiv.org/abs/2309.14604

[2] H. Frerichs, *Scalar curvature deformations with non-compact boundaries*, arXiv:2403.039411v2 (2025).
URL: https://arxiv.org/abs/2403.03941

[3] B. Bourquez, R. Caju, H. Van Den Bosch, *Quantitative stability for Yamabe minimizers on manifolds with boundary*, arXiv:2503.09801v1 (2025).
URL: https://arxiv.org/abs/2503.09801

[4] J.F. Escobar, *Conformal deformation of a Riemannian metric to a scalar flat metric with constant mean curvature on the boundary*, Ann. Math. **136** (1), 1–50 (1992).
URL: https://doi.org/10.2307/2946545

Acknowledgements. This work is an output of a research project implemented as part of the Basic Research Program at the National Research University Higher School of Economics (HSE University).

Received: 30 April 2025. Accepted: 09 September 2025. Published: 16 October 2025.

[5] R.A. Dedaev, N.I. Zhukova, *Existence of attractors of foliations, pseudogroups and groups of transformations*, Russ. J. Nonlinear Dyn. **21** (1), 85–102 (2025).
URL: https://doi.org/10.20537/nd250205

[6] A.V. Bagaev, *Attractors of semigroups generated by a finite family of contraction transformations of a complete metric space*, Zh. SVMO **26** (4), 359–375 (2024) [in Russian].
URL: https://www.mathnet.ru/rus/svmo893

[7] D.V. Anosov, *Minimal set*, Mathematical Encyclopedia, Vol. 3, Soviet Encore, Moscow, 690–691 (1982) [in Russian].

[8] N.I. Zhukova, *Minimal sets of Cartan foliations*, Proc. Steklov Inst. Math. **256** (1), 105–135 (2007) [in Russian].
DOI: https://doi.org/10.1134/S0081543807010075

[9] I. Tamura, *Topology of foliations: an introduction*, Transl. Math. Monogr. **97**, AMS, Providence, R.I., 1992.

Roman Aleksandrovich Dedaev
HSE University,
25/12 Bolshaya Pecherskaya str., Nizhny Novgorod 603155, Russia,
e-mail: dedaevroman@gmail.com

Nina Ivanovna Zhukova
HSE University,
25/12 Bolshaya Pecherskaya str., Nizhny Novgorod 603155, Russia,
e-mail: nina.i.zhukova@yandex.ru

Roman Ruslanovich Imaev
HSE University,
25/12 Bolshaya Pecherskaya str., Nizhny Novgorod 603155, Russia,
e-mail: rrimaev@edu.hse.ru