

Об асимптотическом поведении траекторий косых произведений с замкнутым множеством периодических точек

Л.С. Ефремова, М.А. Шалагин

Аннотация. Статья продолжает исследования асимптотического поведения траекторий наиболее простых косых произведений на многомерных клетках, проводимые авторами. Здесь дано описание структуры неблуждающего множества непрерывных косых произведений, имеющих замкнутое множество периодических точек и таких, что множество (наименьших) периодов периодических точек, не ограничено. Построен пример дифференцируемого косого произведения с замкнутым множеством периодических точек, заданного на n -мерной клетке ($n \geq 3$) и имеющего одномерное ω -предельное множество.

Ключевые слова: косое произведение, неблуждающее множество, Ω -взрыв, ω -предельное множество.

DOI: 10.26907/2949-3919.2025.3.58-86

Введение

Различные аспекты асимптотического поведения траекторий непрерывных косых произведений с замкнутым множеством периодических точек, заданных на компактном прямоугольнике плоскости, изучались в статьях [1–7]. Некоторые многомерные обобщения результатов указанных работ получены в [8–10].

Данная статья является непосредственным продолжением работ [4, 9]. Так, в [9], во-первых, дано описание неблуждающего множества непрерывных косых произведений на многомерных клетках в предположении ограниченности множества (наименьших) периодов периодических точек (отметим, что при этом множество периодических точек каждого рассматриваемого отображения замкнуто) и, во-вторых, доказаны теоремы о структуре ω -предельных множеств такого рода отображений, обобщающие результаты [4]. В частности, в [9] получены необходимые условия существования одномерных ω -предельных множеств непрерывных косых произведений на многомерных клетках, однако примеры таких отображений на клетках размерности ≥ 3 в [9] отсутствуют.

Следует сказать, что существуют такие непрерывные (но не гладкие!) косые произведения на многомерных клетках с замкнутым множеством периодических точек, множество

Благодарности. Работа поддержана грантом Российского научного фонда (проект № 24-21-00242).

(наименьших) периодов периодических точек которых, не ограничено (см. далее [раздел 1](#)). В этой работе мы даем описание неблуждающего множества именно таких отображений. Здесь же мы строим пример дифференцируемого косого произведения с одномерным ω -предельным множеством на клетке размерности ≥ 3 , обобщающий пример косого произведения из [4] с аналогичными свойствами, заданного на замкнутом прямоугольнике плоскости.

Статья имеет следующую структуру. В [разделе 1](#) приводятся определения и результаты, используемые в рассмотрении данной статьи. В [разделе 2](#) мы описываем неблуждающее множество непрерывных косых произведений на клетках произвольной конечной размерности, имеющих замкнутое множество периодических точек при дополнительном предположении о неограниченности множества (наименьших) периодов периодических точек. В [разделе 3](#) строится пример дифференцируемого косого произведения на клетке размерности ≥ 3 , имеющего одномерное ω -предельное множество, заполненное неподвижными точками отображения.

1. Предварительные сведения

1.1. Отображение $F : I^n \rightarrow I^n$ (здесь $I^n = \prod_{j=1}^n I_j$ – n -мерная клетка ($n \geq 2$), I_j – невырожденный отрезок прямой при любом $1 \leq j \leq n$), представимое в виде

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n) = (f_1(x_1), f_2(x_1, x_2), \dots, f_n(x_1, x_2, \dots, x_n)) \quad (1)$$

называется *косым произведением отображений интервала*, а n -мерная клетка I^n называется *фазовым пространством* F .

Положим $\widehat{x}_j = (x_1, x_2, \dots, x_j)$ для $n \geq 3$, $2 \leq j \leq n-1$, и будем использовать обозначения

$$f_{2,x_1}(x_2) = f_2(x_1, x_2), \quad f_{j+1,\widehat{x}_j}(x_{j+1}) = f_{j+1}(x_1, x_2, \dots, x_{j+1}) \quad (2)$$

и

$$\widehat{f}_2 = (f_1, f_{2,x_1}), \quad \widehat{f}_{j+1} = (f_1, f_{2,x_1}, \dots, f_{j+1,\widehat{x}_j}), \quad \text{где } \widehat{f}_n \equiv F. \quad (3)$$

В силу формул (1)–(3) отображение $\widehat{f}_j$ при каждом $2 \leq j \leq n-1$ также представляет собой косое произведение отображений интервала, фазовым пространством которого является j -мерная клетка $\widehat{I}^j = \prod_{k=1}^j I_k$.

Следуя [8–10], условимся считать *факторотображением* косого произведения (1) отображение $\widehat{f}_{n-1}$, а отображение $f_{n,\widehat{x}_{n-1}} : I_n \rightarrow I_n$ при каждом $\widehat{x}_{n-1} \in \widehat{I}^{n-1}$ будем рассматривать как *отображение в слое* над точкой $\widehat{x}_{n-1}$.

Из соотношений (1)–(3) следует, что для любого $k \geq 2$ выполнено:

$$F^k(\widehat{x}_{n-1}, x_n) = (f_1^k(x_1), f_{2,x_1,k}(x_2), \dots, f_{n,\widehat{x}_{n-1},k}(x_n))$$

так, что для каждого $2 \leq j \leq n$ справедливо равенство:

$$f_{j, \hat{x}_{j-1}, k}(x_j) = f_{j, \hat{f}_{j-1}^{k-1}(\hat{x}_{j-1})} \circ \dots \circ f_{j, \hat{x}_{j-1}}(x_j), \text{ где } \hat{x}_1 \equiv x_1, \hat{f}_1 \equiv f_1.$$

Обозначим через $SP^0(I^n)$ ($SP^1(I^n)$), $n \geq 2$, пространство всех непрерывных (всех C^1 -гладких) косых произведений (1), наделенное C^0 -нормой (C^1 -нормой), индуцированной стандартной C^0 -нормой (C^1 -нормой) пространства $C^0(I^n)$ ($C^1(I^n)$) всех непрерывных (всех C^1 -гладких) отображений n -мерной клетки I^n в себя.

Сформулируем определения основных динамически предельных множеств, рассматриваемых в данной работе: неблуждающего множества и ω -предельных множеств траекторий (см. [11, гл. 0, § 0.2]).

Определение 1. Множество $\Omega(F) \subset I^n$ называется *неблуждающим множеством* отображения $F \in SP^0(I^n)$, если оно состоит из всех тех точек фазового пространства I^n , которые обладают следующим свойством:

для произвольной окрестности $U^n(x)$ в I^n каждой такой точки x (называемой *неблуждающей точкой* F) существует натуральное число k , для которого верно неравенство

$$U^n(x) \cap F^k(U^n(x)) \neq \emptyset.$$

Определение 2. Точка $x'(\hat{x}'_{n-1}, x'_n) \in I^n$ называется *ω -предельной точкой траектории* точки $x(\hat{x}_{n-1}, x_n) \in I^n$ относительно отображения $F \in SP^0(I^n)$, если существует строго возрастающая последовательность натуральных чисел $k_1 < k_2 < \dots < k_m < \dots$ такая, что

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} F^{k_m}(\hat{x}_{n-1}, x_n) = (\hat{x}'_{n-1}, x'_n).$$

Множество всех ω -предельных точек траектории точки x относительно F называется *ω -предельным* и обозначается $\omega_F(x)$.

Символом $\text{pr}_{n-1} : I^n \rightarrow \hat{I}^{n-1}$ обозначим естественную проекцию n -мерной клетки I^n на $(n-1)$ -мерную клетку $\hat{I}^{n-1}$.

Сформулируем свойство проекции для неблуждающего множества (см. [8]) и ω -предельных множеств траекторий точек непрерывного косого произведения отображений интервала (см. [9]) на многомерной клетке.

Лемма 3. Пусть $F \in SP^0(I^n)$. Тогда справедливо равенство:

$$\Omega(\hat{f}_{n-1}) = \text{pr}_{n-1}(\Omega(F)).$$

Лемма 4. Пусть $F \in SP^0(I^n)$. Тогда при любом $x(\hat{x}_{n-1}, x_n) \in I^n$ верно равенство:

$$\omega_{\hat{f}_{n-1}}(\hat{x}_{n-1}) = \text{pr}_{n-1}(\omega_F(x)).$$

Под срезом множества $(\cdot)$ слоем над точкой $\hat{x}_{n-1} \in \hat{I}^{n-1}$ мы понимаем множество $(\cdot)(\hat{x}_{n-1})$, удовлетворяющее равенству

$$(\cdot)(\hat{x}_{n-1}) = \{x_n : (\hat{x}_{n-1}, x_n) \in (\cdot)\}.$$

Обозначим $\text{Per}(\cdot)$ множество периодических точек отображения.

Следующее утверждение содержит полную информацию о взаимосвязи множества периодических точек отображения $F \in SP^0(I^n)$ с множествами периодических точек его факторотображения и отображений в слоях над периодическими точками факторотображения (см. [8]).

Лемма 5. Пусть $F \in SP^0(I^n)$ ($n \geq 2$). Тогда

$$\text{Per}(\hat{f}_{n-1}) = \text{pr}_{n-1}(\text{Per}(F)),$$

и для каждой точки $\hat{x}_{n-1} \in \text{Per}(\hat{f}_{n-1})$ с (наименьшим) периодом $m(\hat{x}_{n-1})$ справедливо:

$$\text{Per}(f_{n, \hat{x}_{n-1}, m(\hat{x}_{n-1})}) = (\text{Per}(F))(\hat{x}_{n-1}).$$

При этом (наименьший) период $m(x)$ любой точки $x(\hat{x}_{n-1}, x_n) \in \text{Per}(F)$ удовлетворяет равенству

$$m(x) = m(\hat{x}_{n-1}) \cdot m(x_n).$$

Здесь $m(x_n)$ – наименьший период точки $x_n \in \text{Per}(f_{n, \hat{x}_{n-1}, m(\hat{x}_{n-1})})$.

Обобщенная теорема А.Н. Шарковского для непрерывных косых произведений на клетках произвольной конечной размерности является следствием классической теоремы А.Н. Шарковского для непрерывных отображений отрезка [12, 13] и леммы 5 (первое доказательство обобщенной теоремы А.Н. Шарковского см. в [14]).

Теорема 6 (обобщенная теорема А.Н. Шарковского). Пусть косое произведение $F \in SP^0(I^n)$, $n \geq 2$, имеет периодическую орбиту периода $t > 1$. Тогда F имеет также и периодическую орбиту каждого периода l , предшествующего t ($l \prec t$) в порядке А.Н. Шарковского:

$$\begin{aligned} 1 \prec 2 \prec 2^2 \prec 2^3 \prec \dots \prec 2^\infty \prec \dots \prec 2^2 \cdot 9 \prec 2^2 \cdot 7 \prec 2^2 \cdot 5 \prec 2^2 \cdot 3 \prec \dots \\ \prec 2 \cdot 9 \prec 2 \cdot 7 \prec 2 \cdot 5 \prec 2 \cdot 3 \prec \dots \prec 9 \prec 7 \prec 5 \prec 3. \end{aligned}$$

Из теоремы 6 вытекает, что если множество $\tau(F)$ (наименьших) периодов периодических точек отображения $F \in SP^0(I^n)$ ограничено, то это множество представимо в виде

$$\tau(F) = \{1, 2, \dots, 2^\nu\} \text{ при некотором } 0 \leq \nu < +\infty. \quad (4)$$

В том случае, если множество $\tau(F)$ отображения $F \in SP^0(I^n)$ удовлетворяет равен-

ству (4), говорим (также, как и в случае непрерывных отображений отрезка), что отображение F имеет тип $\prec 2^\infty$.

В [9] доказан критерий замкнутости множества периодических точек C^1 -гладких косых произведений на многомерных клетках.

Теорема 7. Для отображения $F \in SP^1(I^n)$ ($n \geq 2$) следующие утверждения эквивалентны:

- 1) множество $\text{Per}(F)$ замкнуто;
- 2) $\Omega(F) = \text{Per}(F)$;
- 3) F имеет тип $\prec 2^\infty$.

Более того, если $F \in SP^0(I^n)$, и F обладает свойством 3), то F обладает и каждым из свойств 1) и 2).

Таким образом, множество C^1 -гладких косых произведений отображений интервала с замкнутым множеством периодических точек, заданных на клетках произвольной конечной размерности, совпадает с множеством такого рода отображений, каждое из которых имеет ограниченный набор (наименьших) периодов периодических точек (в [9] такие отображения названы простейшими). В то же время из результатов статей [12, 13] и леммы 5 следует, что существуют непрерывные (но не гладкие) косые произведения с замкнутым множеством периодических точек, заданные на клетках произвольной конечной размерности, множество наименьших периодов периодических точек которых представимо в виде

$$\tau(F) = \{1, 2, 2^2, 2^3, \dots, 2^i, \dots\}. \quad (5)$$

В том случае, если множество $\tau(F)$ отображения $F \in SP^0(I^n)$ представимо в виде (5), будем говорить, что рассматриваемое косое произведение имеет тип 2^∞ .

1.2. Здесь мы приведем определения и результаты, необходимые для описания неблуждающего множества косых произведений типа 2^∞ с замкнутым множеством периодических точек.

Эффективным инструментом описания неблуждающего множества произвольных отображений из $SP^0(I^n)$ служат динамические многозначные функции такие, как Ω -функция, вспомогательные, подходящие и аппроксимирующие функции (см. [7, 9, 15–17]), связанные со специальными отображениями, с помощью которых можно представить любые итерации косых произведений. Так, при любом $k \geq 1$ выполнено:

$$F^k = F_{k,1} \circ F_k, \quad (6)$$

где $F_k : I^n \rightarrow I^n$, и

$$F_k(\hat{x}_{n-1}, x_n) = (\text{id}_{\hat{I}^{n-1}}(\hat{x}_{n-1}), f_{n, \hat{x}_{n-1}, k}(x_n)); \quad (7)$$

а $F_{k,1} : I^n \rightarrow I^n$, и

$$F_{k,1}(\hat{x}_{n-1}, x_n) = (\hat{f}_{n-1}^k(\hat{x}_{n-1}), \text{id}_{I_n}(x_n)). \quad (8)$$

Здесь $\text{id}_{(\cdot)}$ – тождественное отображение множества.

В данной статье нам потребуются только лишь вспомогательные многозначные функции (определяемые с помощью отображений (7)) и расширенные вспомогательные функции, введенные в [9].

Определение 8. Вспомогательными многозначными функциями для неблуждающего множества отображения $F \in SP^0(I^n)$ с замкнутым множеством периодических точек при любом $k \geq 1$ мы называем многозначные функции $\Omega_k^F : \Omega(\hat{f}_{n-1}) \rightarrow 2^{I_n}$ такие, что

$$\Omega_k^F(\hat{x}_{n-1}) = \Omega(f_{n, \hat{x}_{n-1}, k})$$

для любого $\hat{x}_{n-1} \in \Omega(\hat{f}_{n-1})$. Здесь 2^{I_n} означает топологическое пространство всех замкнутых подмножеств отрезка I_n с экспоненциальной топологией [18, гл. 1, § 17, I].

Расширенными вспомогательными функциями $\Omega_{k, ex}^F$, определенными в некоторой окрестности $\hat{U}_{n-1}(\Omega(\hat{f}_{n-1}))$ неблуждающего множества факторотображения, мы называем многозначные функции, при любом $k \geq 1$ задаваемые равенством:

$$\Omega_{k, ex}^F(\hat{x}_{n-1}) = \Omega(f_{n, \hat{x}_{n-1}, k}) \text{ при любом } \hat{x}_{n-1} \in \hat{U}_{n-1}(\Omega(\hat{f}_{n-1})).$$

Напомним, что точка $\hat{x}_{n-1}^* \in \hat{U}_{n-1}(\Omega(\hat{f}_{n-1}))$ называется *точкой полунепрерывности сверху* расширенной вспомогательной функции $\Omega_{k, ex}^F$, если для произвольной окрестности $U_n^\varepsilon(\Omega(f_{n, \hat{x}_{n-1}^*, k}))$ множества $\Omega(f_{n, \hat{x}_{n-1}^*, k})$ в I_n найдется δ -окрестность $\hat{U}_{n-1}^\delta(\hat{x}_{n-1}^*)$ точки $\hat{x}_{n-1}^*$ в $\hat{I}^{n-1}$ такая, что для любого $\hat{x}_{n-1} \in \hat{U}_{n-1}^\delta(\hat{x}_{n-1}^*)$ верно включение

$$\Omega_{k, ex}^F(\hat{x}_{n-1}) \subset U_n^\varepsilon(\Omega(f_{n, \hat{x}_{n-1}^*, k})) \quad (\text{см. [18, гл. 1, § 17, I]}). \quad (9)$$

Следуя [9], сформулируем определение C^0 - Ω -взрыва отображения в слое над неподвижной точкой фактора в семействе отображений в слоях.

Определение 9. Пусть $F \in SP^0(I^n)$. Говорим, что отображение в слое $f_{n, \hat{x}_{n-1}^*}$ над $\hat{f}_{n-1}$ -неподвижной точкой $\hat{x}_{n-1}^*$ допускает C^0 - Ω -взрыв в семействе отображений в слоях, если существует последовательность расширенных на некоторое множество $\hat{U}_{n-1}(\Omega(\hat{f}_{n-1}))$ вспомогательных функций $\{\Omega_{k_m, ex}^F\}_{m \geq 1}$ такая, что $\hat{x}_{n-1}^*$ не является точкой полунепрерывности сверху каждой функции $\Omega_{k_m, ex}^F$ ($m \geq 1$).

Нам потребуется также информация об основных динамических свойствах непрерывных отображений отрезка с замкнутым множеством периодических точек.

Предложение 10. Для непрерывного отображения $f : J \rightarrow J$ отрезка J в себя следующие утверждения эквивалентны:

- 1) множество $\text{Per}(f)$ замкнуто;
- 2) справедливы равенства $\Omega(f) = \text{Per}(f)$ [19];

- 3) ω -предельное множество $\omega_f(x)$ траектории любой точки $x \in J$ есть периодическая орбита [13, 19].

Более того, если f удовлетворяет условию 1), то верны следующие свойства:

- 4) $\tau(f) = \{1, 2, \dots, 2^\nu\}$, где $0 \leq \nu \leq +\infty$ [19];
 5) f не допускает C^0 - Ω -взрыв¹ [20];
 6) для каждой точки $x^0 \in \text{Per}(f)$ найдется окрестность $U(x^0)$ такая, что

$$U(x^0) \cap f^k(U(x^0)) \neq \emptyset$$

тогда и только тогда, когда k кратно (наименьшему) периоду $m(x^0)$ точки x^0 [21].

Подобно тому, как это сделано в [9], в данной статье для доказательства теоремы о структуре неблуждающего множества косого произведения типа 2^∞ будем использовать слабо неблуждающие точки непрерывного отображения отрезка в себя. Понятие слабой неблуждаемости точек непрерывных отображений на метрических компактах введено в [22] (см. также [23, гл. 1, § 3]).

Определение 11. Точка $x^* \in J$ называется *слабо неблуждающей* для непрерывного отображения $f : J \rightarrow J$, если для любой окрестности $U(x^*)$ точки x^* в J и любой ε -окрестности $B_\varepsilon^0(f)$ отображения f в пространстве непрерывных отображений отрезка J в себя найдутся отображение $\varphi \in B_\varepsilon^0(f)$ и натуральное число k такие, что

$$U(x^*) \cap \varphi^k(U(x^*)) \neq \emptyset.$$

Множество слабо неблуждающих точек отображения f обозначим $\Omega_w(f)$.

Следующее утверждение демонстрирует важность свойства слабой неблуждаемости в изучении C^0 - Ω -взрыва (см., например, [23, гл. 1, § 3]).

Предложение 12. Непрерывное отображение $f : J \rightarrow J$ допускает C^0 - Ω -взрыв в том и только том случае, если

$$\Omega(f) \neq \Omega_w(f).$$

1.3. Завершая [раздел 1](#), приведем сведения, необходимые для построения примера дифференцируемого косого произведения на многомерной клетке, которое имеет только лишь неподвижные точки (не содержит периодических точек с периодами ≥ 2) и обладает одномерным ω -предельным множеством, состоящим из неподвижных точек отображения.

¹Говорим, что непрерывное отображение $f : J \rightarrow J$ допускает C^0 - Ω -взрыв, если существует $\delta > 0$ такое, что в любой окрестности $B_\varepsilon^0(f)$ отображения f в пространстве $C^0(J)$ всех непрерывных отображений отрезка J в себя, наделенном C^0 -нормой равномерной сходимости, найдется отображение $\varphi : J \rightarrow J$, для которого выполнено: $\Omega(\varphi) \not\subseteq U^\delta(\Omega(f))$. Здесь $U^\delta(\Omega(f))$ есть δ -окрестность в J неблуждающего множества $\Omega(f)$ отображения f (см., например, [7]).

Хотя идейно построение такого примера тесно связано с аналогичным примером косого произведения с двумерным фазовым пространством (сравните с [4]), исследование дифференциальных свойств отображения на многомерной клетке (размерности $n \geq 3$) существенно сложнее, чем в двумерном случае (который практически требует исследования дифференциальных свойств функции одного переменного).

Сначала сформулируем утверждение, содержащее информацию о допустимой структуре ω -предельных множеств простейших косых произведений (доказательство см. в [9]). Пусть $M = 2^\nu$ – наибольший элемент множества $\tau(F)$ отображения $F \in SP^0(I^n)$ типа $\prec 2^\infty$.

Теорема 13. Пусть $F \in SP^0(I^n)$, $n \geq 2$, – косое произведение типа $\prec 2^\infty$. Тогда для любой точки $x(\hat{x}_{n-1}, x_n) \in I^n$ существуют неподвижная точка x_1^0 отображения f_1^M и отрезки $I'_2 \subseteq I_2, \dots, I'_n \subseteq I_n$ (возможно, вырожденные) такие, что ω -предельное множество $\omega_{FM}(x)$ траектории точки x относительно F^M имеет вид

$$\omega_{FM}(x) = \{x_1^0\} \times \prod_{j=2}^n I'_j, \quad (10)$$

причем $\omega_{FM}(x)$ состоит из неподвижных точек F^M .

В [9] доказано, что свойство траектории иметь ω -предельное множество, представление которого по формуле (10) содержит невырожденные отрезки, связано с расходимостью некоторых специальных рядов, построенных по исследуемой траектории.

Теорема 14. Пусть $F \in SP^0(I^n)$ ($n \geq 2$) является отображением типа $\prec 2^\infty$. Тогда следующие утверждения эквивалентны:

- 1) существует точка $x(\hat{x}_{n-1}, x_n) \in I^n$ такая, что представление ω -предельного множества ее траектории относительно F^M по формуле (10) содержит невырожденный отрезок $I'_{j'}$ ($2 \leq j' \leq n$);
- 2) ряд

$$\sum_{p=1}^{\infty} \varphi_{\hat{x}_{j'-1}, M_p}(x_{j'}) \quad (11)$$

– расходящийся (знакопеременный), где

$$\varphi_{\hat{x}_{j'-1}, M_p}(x_{j'}) = \begin{cases} f_{j', \hat{x}_{j'-1}, M}(x_{j'}), & \text{если } p = 1; \\ f_{j', \hat{x}_{j'-1}, M_p}(x_{j'}) - f_{j', \hat{x}_{j'-1}, M(p-1)}(x_{j'}), & \text{если } p \geq 2. \end{cases}$$

Следующее утверждение представляет собой вариант леммы Адамара для функции многих переменных (см., например, [24, гл. 6, § 2]), приспособленный к рассматриваемому здесь случаю косых произведений на многомерных клетках (см. [9]).

Лемма 15. Пусть $F \in SP^0(I^n)$ – косое произведение типа $\prec 2^\infty$ ($n \geq 2$), и существует точка $x^0(\hat{x}_{n-1}^0, x_n^0) \in \text{Fix}(F^M)$ такая, что срез $(\text{Fix}(F^M))(\hat{x}_{n-1}^0)$ содержит невырожден-

ный отрезок. Пусть I'_n – такой отрезок, а функция $f_{n,\widehat{x}_{n-1}}$ дифференцируема по совокупности переменных $x_1, \dots, x_{n-1}$ на $\{\widehat{x}_{n-1}^0\} \times I'_n$.

Тогда существуют непрерывные на $\{\widehat{x}_{n-1}^0\} \times I'_n$ функции

$$\psi_{n,1}(\widehat{x}_{n-1}, x_n), \dots, \psi_{n,n-1}(\widehat{x}_{n-1}, x_n),$$

определенные на n -мерной клетке $\prod_{i=1}^{n-1} I_i \times I'_n$, такие, что справедливо равенство:

$$f_{n,\widehat{x}_{n-1}}(x_n) = x_n + \sum_{i=1}^{n-1} \psi_{n,i}(\widehat{x}_{n-1}, x_n)(x_i - x_i^0); \quad (12)$$

более того,

$$\psi_{n,i}(\widehat{x}_{n-1}^0, x_n) = \frac{\partial}{\partial x_i} f_{n,\widehat{x}_{n-1}^0}(x_n).$$

Преобразуем ряд (11) с использованием формулы (12) и сформулируем аналитические необходимые условия существования одномерных ω -предельных множеств у косых произведений типа $\prec 2^\infty$ на многомерных клетках (см. [9]).

Обозначим через $W^s(\widehat{x}_{n-1}^0, \widehat{f}_{n-1}^M)$ устойчивое многообразие неподвижной точки $\widehat{x}_{n-1}^0$ отображения $\widehat{f}_{n-1}^M$, где

$$W^s(\widehat{x}_{n-1}^0, \widehat{f}_{n-1}^M) = \left\{ \widehat{x}_{n-1} \in \widehat{I}^{n-1} : \lim_{k \rightarrow +\infty} \widehat{f}_{n-1}^{Mk}(\widehat{x}_{n-1}) = \widehat{x}_{n-1}^0 \right\}.$$

Теорема 16. Пусть $F \in SP^0(I^n)$ является отображением типа $\prec 2^\infty$, причем для ω -предельного множества некоторой точки $x'(\widehat{x}'_{n-1}, x'_n) \in I^n$ выполнено:

$$\omega_{FM}(x') = \{\widehat{x}_{n-1}^0\} \times I'_n,$$

где I'_n – невырожденный отрезок. Пусть $f_{n,\widehat{x}_{n-1}}(x_n)$ дифференцируема по совокупности переменных $x_1, \dots, x_{n-1}$ на отрезке $\{\widehat{x}_{n-1}^0\} \times I'_n$. Тогда

$$\widehat{x}'_{n-1} \in W^s(\widehat{x}_{n-1}^0, \widehat{f}_{n-1}^M) \setminus \left\{ \widehat{f}_{n-1}^{-Mk}(\widehat{x}_{n-1}^0) \right\}_{k \geq 1},$$

где $\widehat{f}_{n-1}^{-Mk}(\cdot)$ – полный прообраз порядка Mk точки относительно $\widehat{f}_{n-1}$, и существует счётное подмножество $\mathbb{N}(I'_n)$ множества натуральных чисел $\mathbb{N}$, где

$$\mathbb{N}(I'_n) = \left\{ p \in \mathbb{N} : f_{n,\widehat{x}'_{n-1},M_p}(x'_n), f_{n,\widehat{x}'_{n-1},M(p+1)}(x'_n) \in I'_n \right\},$$

такое, что ряд

$$\sum_{p \in \mathbb{N}(I'_n)} \left(\sum_{i=1}^{n-1} \psi_{n,i} \left(\widehat{f}_{n-1}^{Mp}(\widehat{x}'_{n-1}), f_{n, \widehat{x}'_{n-1}, Mp}(x'_n) \right) \left(f_{i, \widehat{x}'_{i-1}, Mp}(x'_i) - x_i^0 \right) \right)$$

расходится. Здесь $f_{1, \widehat{x}'_0, Mp}(x'_1) \equiv f_1^{Mp}(x'_1)$.

2. Неблуждающее множество косых произведений типа 2^∞ , периодические точки которых образуют замкнутое множество

В этой части статьи мы докажем теорему о структуре неблуждающего множества косого произведения типа 2^∞ с замкнутым множеством периодических точек.

Пусть $\text{Per}(\widehat{f}_{n-1}, 2^i)$ ($n \geq 2$, $i \geq 0$) есть множество тех периодических точек факторотображения, (наименьшие) периоды которых делят 2^i , а

$$\Psi_i = F|_{\text{Per}(\widehat{f}_{n-1}, 2^i) \times I_n}.$$

Теорема 17. Пусть $F \in SP^0(I^n)$ ($n \geq 2$) есть отображение типа 2^∞ с замкнутым множеством $\text{Per}(F)$. Тогда

$$\Omega(F) = \lim_{i \rightarrow +\infty} \Omega_{2^i}^{\Psi_i} = \lim_{i \rightarrow +\infty} \Omega_{2^i, ex}^F = \text{Per}(F). \quad (13)$$

Здесь $\text{Lim}(\cdot)$ – топологический предел последовательности множеств; эти множества состоят, во-первых, из графиков в I^n 2^i -х вспомогательных функций $\Omega_{2^i}^{\Psi_i}$ отображений Ψ_i и, во-вторых, графиков расширенных на некоторые окрестности $\widehat{U}_{n-1}^{\varepsilon_i}(\Omega(\widehat{f}_{n-1}))$ неблуждающего множества $\Omega(\widehat{f}_{n-1})$ факторотображения $\widehat{f}_{n-1}$ 2^i -х вспомогательных функций косого произведения F , причем $\lim_{i \rightarrow +\infty} \varepsilon_i = 0$ так, что

$$\lim_{i \rightarrow +\infty} \left(\widehat{U}_{n-1}^{\varepsilon_i}(\Omega(\widehat{f}_{n-1})) \right) = \Omega(\widehat{f}_{n-1}).$$

В силу [леммы 5](#) косое произведение $F \in SP^0(I^n)$ имеет тип 2^∞ тогда и только тогда, когда либо его факторотображение $\widehat{f}_{n-1}$, либо отображение в слое $f_{n, \widehat{x}_{n-1}, m(\widehat{x}_{n-1})}$ над некоторой точкой $\widehat{x}_{n-1} \in \text{Per}(\widehat{f}_{n-1})$ с (наименьшим) периодом $m(\widehat{x}_{n-1}) \in \{2^i\}_{i \geq 0}$ имеет тип 2^∞ . Поэтому доказательство [теоремы 17](#) мы проведем в два этапа, рассмотрев сначала косые произведения, факторотображение каждого из которых имеет тип $\prec 2^\infty$, а затем – косые произведения, факторотображение каждого из которых имеет тип 2^∞ .

Лемма 18. Пусть $F \in SP^0(I^n)$ есть отображение типа 2^∞ с замкнутым множеством $\text{Per}(F)$, причем факторотображение $\widehat{f}_{n-1}$ имеет тип $\prec 2^\infty$. Тогда справедливы равенства [\(13\)](#).

Доказательство. 1. В силу условий [леммы 18](#) для множества $\tau(\widehat{f}_{n-1})$ верно равенство [\(4\)](#). Поэтому при любом $i \geq \nu$ отображение $\widehat{f}_{n-1}^{2^i}$ имеет только лишь неподвижные точки. В силу [определения 8](#), [предложения 10](#) и [теоремы 7](#) при всех $i \geq \nu$ верно равенство

$$\Omega_{2^i}^F = \Omega_{2^\nu}^F = \Omega_{2^i}^{\Psi_i} = \text{Per}(F). \quad (14)$$

В силу [\(14\)](#) последовательность $\{\Omega_{2^i}^{\Psi_i}\}_{i \geq \nu}$ постоянна, и выполнено

$$\lim_{i \rightarrow +\infty} \Omega_{2^i}^{\Psi_i} = \Omega_{2^\nu}^F = \text{Per}(F^{2^\nu}) = \text{Per}(F). \quad (15)$$

Убедимся в том, что

$$\Omega\left(F|_{\text{Per}(\widehat{f}_{n-1}) \times I_n}\right) = \text{Per}(F). \quad (16)$$

Действительно, в силу условий [леммы 18](#) и [теоремы 7](#) справедливо равенство

$$\Omega(\widehat{f}_{n-1}) = \text{Per}(\widehat{f}_{n-1}) = \text{Fix}(\widehat{f}_{n-1}^{2^\nu}) = \Omega(\widehat{f}_{n-1}^{2^\nu}),$$

где $\text{Fix}(\cdot)$ – множество неподвижных точек отображения. Так как F – отображение типа 2^∞ , а $\widehat{f}_{n-1}$ – отображение типа $\prec 2^\infty$, то найдутся точки $\widehat{x}_{n-1} \in \Omega(\widehat{f}_{n-1})$ такие, что

$$f_{n, \widehat{x}_{n-1}, 2^\nu} \neq \text{id}_{I_n}.$$

Возьмем произвольно точку $x_n \in I_n \setminus \text{Per}(f_{n, \widehat{x}_{n-1}, 2^\nu})$. В силу [предложения 10](#) (утверждения 5), 6)) и [предложения 12](#) получаем

$$x_n \notin \Omega_w(f_{n, \widehat{x}_{n-1}, 2^\nu}).$$

Тогда из [определения 11](#) следует, что существуют окрестность $U_n^0(x_n)$ точки x_n в I_n и ε_0 -окрестность $B_{\varepsilon_0}^0(f_{n, \widehat{x}_{n-1}, 2^\nu})$ отображения в слое $f_{n, \widehat{x}_{n-1}, 2^\nu}$ такие, что для любого отображения $f_{n, \widehat{x}'_{n-1}, 2^\nu} \in B_{\varepsilon_0}^0(f_{n, \widehat{x}_{n-1}, 2^\nu})$, где $\widehat{x}'_{n-1} \in \text{Fix}(\widehat{f}_{n-1}^{2^\nu})$, и любого $k \geq 1$ выполнено

$$U_n^0(x_n) \cap f_{n, \widehat{x}'_{n-1}, 2^\nu}^k(U_n^0(x_n)) = \emptyset.$$

Произвольной итерации косо го произведения $F \in SP^0(I^n)$ порядка $2^\nu k$ ($k \geq 1$) соответствует непрерывное C^0 -представление $\rho_{2^\nu k} : \widehat{I}^{n-1} \rightarrow C^0(I_n)$ (напомним, что $C^0(I_n)$ означает пространство всех непрерывных отображений отрезка I_n в себя, наделенное стандартной C^0 -нормой равномерной сходимости) такое, что

$$\rho_{2^\nu k}(\widehat{x}_{n-1}) = f_{n, \widehat{x}_{n-1}, 2^\nu}^k = f_{n, \widehat{x}_{n-1}, 2^\nu k}$$

для всех $\widehat{x}_{n-1} \in \widehat{I}^{n-1}$ [[11](#), гл. 0, § 0.3].

Используем непрерывность C^0 -представления ρ_{2^ν} и по положительному числу ε_0

укажем положительное число δ_0 так, что при любых $\hat{x}'_{n-1} \in \hat{I}^{n-1}$ и, в частности, при $\hat{x}'_{n-1} \in \Omega(\hat{f}_{n-1})$ (здесь $\Omega(\hat{f}_{n-1}) = \text{Fix}(\hat{f}_{n-1}^{2^\nu})$) таких, что $\hat{x}'_{n-1} \in \hat{U}_{n-1}^{\delta_0}(\hat{x}_{n-1})$, где $\hat{U}_{n-1}^{\delta_0}(\hat{x}_{n-1})$ есть δ_0 -окрестность точки $\hat{x}_{n-1}$ в $\hat{I}^{n-1}$ справедливо

$$f_{n, \hat{x}'_{n-1}, 2^\nu} \in B_{\varepsilon_0}^0(f_{n, \hat{x}_{n-1}, 2^\nu}).$$

Положим

$$U((\hat{x}_{n-1}, x_n)) = \left(\hat{U}_{n-1}^{\delta_0}(\hat{x}_{n-1}) \times U_n(x_n) \right) \cap \left(\text{Fix}(\hat{f}_{n-1}^{2^\nu}) \times I_n \right),$$

т.е. $U((\hat{x}_{n-1}, x_n))$ есть относительная окрестность точки $(\hat{x}_{n-1}, x_n)$ во множестве $\text{Fix}(\hat{f}_{n-1}^{2^\nu}) \times I_n$. Тогда из предыдущих рассуждений следует, что

$$U((\hat{x}_{n-1}, x_n)) \cap F_{|\text{Fix}(\hat{f}_{n-1}^{2^\nu}) \times I_n}^{2^\nu k}(U((\hat{x}_{n-1}, x_n))) = \emptyset.$$

Последнее означает, что произвольная точка

$$(\hat{x}_{n-1}, x_n) \in \text{Fix}(\hat{f}_{n-1}^{2^\nu}) \times (I_n \setminus \text{Per}(f_{n, \hat{x}_{n-1}, 2^\nu}))$$

является блуждающей точкой отображения $F_{|\text{Fix}(\hat{f}_{n-1}^{2^\nu}) \times I_n}^{2^\nu}$. Последнее вместе с утверждением 6) [предложения 10](#) означает, что $(\hat{x}_{n-1}, x_n)$ – блуждающая точка и отображения $F_{|\text{Per}(\hat{f}_{n-1}) \times I_n}$. Таким образом, равенство [\(16\)](#) доказано.

2. Завершим доказательство [леммы 18](#). Во-первых, заметим, что если

$$\text{Per}(\hat{f}_{n-1}) = \hat{I}^{n-1},$$

то справедливость утверждения [леммы 18](#) следует из предыдущего п. 1. Поэтому будем предполагать далее, что

$$\text{Per}(\hat{f}_{n-1}) \neq \hat{I}^{n-1}.$$

Возьмем произвольно окрестность $\hat{U}_{n-1}(\text{Per}(\hat{f}_{n-1}))$ множества $\text{Per}(\hat{f}_{n-1})$ в $\hat{I}^{n-1}$ и рассмотрим расширенные вспомогательные функции $\Omega_{2^\nu k, ex}^F$ ($k \geq 1$) на выбранную окрестность $\hat{U}_{n-1}(\text{Fix}(\hat{f}_{n-1}^{2^\nu}))$. Аналогично тому, как это сделано в п. 1 доказательства, возьмем произвольно точку $\hat{x}_{n-1}^* \in \text{Fix}(\hat{f}_{n-1}^{2^\nu})$ такую, что

$$f_{n, \hat{x}_{n-1}^*, 2^\nu} \neq \text{id}_{I_n}.$$

Если $\hat{x}_{n-1}^*$ не является предельной точкой множества $\hat{I}^{n-1} \setminus \text{Fix}(\hat{f}_{n-1}^{2^\nu})$, то следует применить рассуждения п. 1 доказательства [леммы 18](#). Поэтому далее будем предполагать, что $\hat{x}_{n-1}^*$ – предельная точка множества $\hat{I}^{n-1} \setminus \text{Fix}(\hat{f}_{n-1}^{2^\nu})$.

Из предложения 10 (см. утверждение 5)) следует, что отображение $f_{n, \hat{x}_{n-1}^*, 2^\nu k}$ в слое над точкой $\hat{x}_{n-1}^*$ не допускает C^0 - Ω -взрыв при любом $k \geq 1$, в частности, в семействе отображений в слоях над точками открытого множества $\hat{U}_{n-1}(\text{Fix}(\hat{f}_{n-1}^{2^\nu}))$. Воспользуемся отрицанием определения 9. Тогда для каждой расширенной на $\hat{U}_{n-1}(\text{Fix}(\hat{f}_{n-1}^{2^\nu}))$ вспомогательной функции $\Omega_{2^\nu k, ex}^F$ точка $\hat{x}_{n-1}^*$ является точкой полунепрерывности сверху. Более того, для произвольной ε -окрестности $U_n^\varepsilon(\Omega(f_{n, \hat{x}_{n-1}^*, 2^\nu k}))$ множества

$$\Omega(f_{n, \hat{x}_{n-1}^*, 2^\nu k}) = \text{Per}(f_{n, \hat{x}_{n-1}^*, 2^\nu k})$$

в I_n найдется универсальная (независящая от k) δ -окрестность $\hat{U}_{n-1}^\delta(\hat{x}_{n-1}^*)$ точки $\hat{x}_{n-1}^*$ в $\hat{U}_{n-1}(\Omega(\hat{f}_{n-1}))$ такая, что при всех $\hat{x}_{n-1} \in \hat{U}_{n-1}^\delta(\hat{x}_{n-1}^*)$ и всех $k \geq 1$ выполнено включение (9), где вместо k используется произведение $2^\nu k$ (детальное доказательство существования такого числа δ повторяет рассуждения, имеющиеся в [9]).

Пусть x_n^* – произвольная точка множества $I_n \setminus \text{Per}(f_{n, \hat{x}_{n-1}^*, 2^\nu k})$, а

$$0 < \varepsilon^* < \frac{1}{2} d_n(x_n^*, \text{Per}(f_{n, \hat{x}_{n-1}^*, 2^\nu k})),$$

где $d_n((\cdot)^*, (\cdot))$ – расстояние от точки до множества на отрезке I_n .

Пусть универсальное $\delta^* = \delta^*(\varepsilon^*) > 0$ выбрано в силу предыдущего по $\varepsilon^* > 0$ из условия полунепрерывности сверху функций $\Omega_{2^\nu k, ex}^F$ в точке $\hat{x}_{n-1}^*$ при любом $k \geq 1$ так, что при всех $\hat{x}_{n-1} \in \hat{U}_{n-1}^{\delta^*}(\hat{x}_{n-1}^*)$ справедливо включение

$$\Omega_{2^\nu k}^F(\hat{x}_{n-1}) \subset U_n^{\varepsilon^*}(\Omega(f_{n, \hat{x}_{n-1}^*, 2^\nu k})).$$

Вместе с полученным включением воспользуемся формулами (6)–(8). Тогда получаем равенство

$$(\hat{U}_{n-1}^{\delta^*}(\hat{x}_{n-1}^*) \times U_n^{\varepsilon^*}(x_n^*)) \cap F^{2^\nu k}(\hat{U}_{n-1}^{\delta^*}(\hat{x}_{n-1}^*) \times U_n^{\varepsilon^*}(x_n^*)) = \emptyset$$

при всех $k \geq 1$.

Последнее вместе с утверждением 6) предложения 10 доказывает справедливость равенства

$$\Omega(F) = \text{Per}(F) \tag{17}$$

при выполнении условий леммы 18. Используя равенство (17) вместе с (15) и определением множеств, на которых заданы расширенные вспомогательные функции $\Omega_{2^i, ex}^F$ (см. формулировку теоремы 17), убеждаемся в справедливости равенства (13).

Лемма 18 доказана. $\square$

Прежде, чем сформулировать следующее утверждение, заметим, что если факторотображение $\hat{f}_{n-1}$ косо го произведения F имеет тип 2^∞ , то и F имеет тип 2^∞ (см. лемму 5).

Лемма 19. Пусть $F \in SP^0(I^n)$ имеет замкнутое множество $\text{Per}(F)$ так, что фактор $\widehat{f}_{n-1}$ есть отображение типа 2^∞ . Тогда справедливы равенства (13).

Доказательство. 1. В силу леммы 18 при всех $i \geq 0$ выполнены равенства

$$\Omega(\Psi_i) = \Omega_{2^i}^{\Psi_i} = \text{Per}(\Psi_i), \quad (18)$$

причем в условиях леммы 19 верны включения

$$\Omega_{2^i}^{\Psi_i} \subset \Omega_{2^{i+1}}^{\Psi_{i+1}} \subset \text{Per}(F). \quad (19)$$

Поэтому из (18) и (19) следует существование топологического предела $\lim_{i \rightarrow +\infty} \Omega_{2^i}^{\Psi_i}$, а вместе с замкнутостью множества $\text{Per}(F)$ – и справедливость равенства

$$\lim_{i \rightarrow +\infty} \Omega_{2^i}^{\Psi_i} = \bigcup_{i=0}^{+\infty} \Omega_{2^i}^{\Psi_i} = \bigcup_{i=0}^{+\infty} \text{Per}(\Psi_i) = \text{Per}(F). \quad (20)$$

Укажем также, что в силу леммы 5 и равенств (20) справедливо

$$\text{Per}(\widehat{f}_{n-1}) = \text{pr}_{n-1}(\text{Per}(F)) = \bigcup_{i=0}^{+\infty} \text{Per}(\widehat{f}_{n-1}, 2^i). \quad (21)$$

2. Рассмотрим случай $n = 2$. Тогда $\text{Per}(\widehat{f}_{n-1}) = \text{Per}(f_1)$ – замкнутое множество, и $\text{Per}(f_1) = \Omega(f_1)$ (см. утверждение 2) предложения 10). Возьмем произвольно бесконечно малую последовательность положительных чисел $\{\varepsilon_i\}_{i \geq 1}$ и рассмотрим последовательность графиков расширенных на ε_i -окрестности $U_1^{\varepsilon_i}(\Omega(f_1))$ неблуждающего множества $\Omega(f_1)$ фактора f_1 2^i -х вспомогательных функций $\Omega_{2^i, ex}^F$ отображения F . Тогда с использованием равенств (20), (21) и леммы 5 при любом $x_1 \in U_1^{\varepsilon_i}(\Omega(f_1))$ имеем

$$\Omega_{2^i, ex}^F(x_1) = \left(\bigcup_{i=0}^{+\infty} \Omega_{2^i}^{\Psi_i} \right)_{ex} (x_1) = \bigcup_{i=0}^{+\infty} \left(\Omega_{2^i, ex}^{\Psi_i} \right) (x_1) = \Omega(f_2, x_1, 2^i).$$

Возьмем произвольно и зафиксируем точку $x_1^* \in \text{Per}(f_1)$. Тогда найдется (наименьшее) $i^* = i^*(x_1^*)$ такое, что $x_1^* \in \text{Per}(f_1, 2^{i^*})$ (и, следовательно, $x_1^* \in \text{Per}(f_1, 2^i)$ при любом $i \geq i^*$), причем

$$\Omega(f_2, x_1^*, 2^{i^*}) = \Omega(f_2, x_1^*, 2^i) = \text{Per}(f_2, x_1^*, 2^{i^*}).$$

Тогда отображение $f_{2, x_1^*, 2^i}$ в слое над точкой x_1^* при каждом $i \geq i^*$ не допускает C^0 - Ω -взрыв в семействе отображений в слоях. Используя определения 9 и 11, предложения 10 и 12 (в предложении 10 см. утверждения 5), 6)), убеждаемся в том, что верно равенство (17). Так как $\lim_{i \rightarrow +\infty} \varepsilon_i = 0$, то из предыдущего следует также существование топологического предела $\lim_{i \rightarrow +\infty} \Omega_{2^i, ex}^F$ и справедливость равенства $\lim_{i \rightarrow +\infty} \Omega_{2^i, ex}^F = \text{Per}(F)$. Таким образом, в условиях леммы 19 для $n = 2$ справедливы равенства (13).

3. Предположим, что утверждение [леммы 19](#) справедливо для $n - 1$ при $n \geq 3$. Применяя метод математической индукции и используя рассуждения, аналогичные проведенным в п. 2, убеждаемся в справедливости равенств [\(13\)](#) для n . [Лемма 19](#) доказана. $\square$

Справедливость [теоремы 17](#) вытекает из лемм [18](#) и [19](#). [Теорема 17](#) доказана.

3. Пример отображения на клетке произвольной конечной размерности, имеющего одномерное ω -предельное множество

В этой части статьи мы построим пример дифференцируемого косоугольного произведения, заданного на n -мерной клетке $[0, 1]^{n-2} \times [0, \alpha] \times [0, 1]$ при $n \geq 3$, такого, что оно имеет одномерное ω -предельное множество, представляющее собой единичный отрезок оси Ox_n (значение положительного числа α будет определено позже). Алгоритм построения указанного примера следует алгоритму построения аналогичного примера для $n = 2$ (см. [\[4\]](#)), хотя увеличение размерности фазового пространства вносит заметные усложнения в процедуру построения и исследование дифференциальных свойств отображения (см. п. 3, § 2 и рассмотрения § 4).

1. Пусть отображение $F : [0, 1]^n \rightarrow [0, 1]^n$ задано следующим равенством:

$$F(\hat{x}_{n-1}, x_n) = \left(x_1 - \frac{x_1^2}{2}, \dots, x_j - \frac{x_j^2}{2 + x_{j-1}}, \dots, x_n + \psi(x_{n-1}, x_n) \sum_{i=1}^{n-1} x_i \right), \quad (22)$$

где $2 \leq j \leq n - 1$. Определение функции $\psi(x_{n-1}, x_n)$, зависящей от двух переменных x_{n-1} и x_n , будет дано ниже.

При любом $k \geq 1$ положим

$$x_1^k = f_1^k(x_1^0); \quad x_j^k = f_{j, \hat{x}_{j-1}, k}(x_j^0) \quad \text{при } 2 \leq j \leq n - 1,$$

где $x_1^0 = x_j^0 = 1$.

В [\[4\]](#) для $j = 1$ и любого $k \geq 1$ доказано неравенство

$$\frac{1}{k+1} \leq x_1^k < \frac{2}{k}; \quad \text{но } \frac{2}{k} < \frac{3}{k}, \quad (23)$$

Распространим неравенство [\(23\)](#) на случай произвольного $2 \leq j \leq n - 1$ и убедимся, что при произвольном $k \geq 1$ выполнено:

$$\frac{1}{k+1} \leq x_j^k < \frac{3}{k}. \quad (24)$$

Для доказательства неравенств [\(24\)](#) воспользуемся методом математической индук-

ции по индексу k . Действительно,

$$x_j^1 = x_j^0 - \frac{(x_j^0)^2}{2 + x_{j-1}^0} = \frac{2}{3}; \quad \frac{1}{2} < \frac{2}{3} < 3.$$

Поэтому при $k = 1$ неравенство (24) справедливо. Предположим, что это неравенство верно для натурального числа k и докажем его справедливость для $k + 1$. Используя монотонное возрастание функции $f_{j, \hat{x}_{j-1}}(x_j)$ по переменной x_j ($2 \leq j \leq n - 1$) на отрезке $[0, 1]$, при $k \geq 2$ получаем неравенства:

$$x_j^{k+1} = x_j^k - \frac{(x_j^k)^2}{2 + x_{j-1}^k} < \frac{3}{k} - \frac{3}{k^2} = \frac{3(k-1)}{k^2} < \frac{3(k-1)}{k^2 - 1} = \frac{3}{k+1}.$$

Аналогичным способом при всех натуральных k получаем оценку снизу:

$$x_j^{k+1} = x_j^k - \frac{(x_j^k)^2}{2 + x_{j-1}^k} > \frac{1}{k+1} - \frac{1}{2(k+1)^2} = \frac{2k+1}{2(k+1)^2} > \frac{1}{k+2}.$$

Таким образом, при всех $k > 1$ и $1 \leq j \leq n - 1$, неравенства (24) верны.

Из (24) вытекают следующие свойства:

- (i) $\omega_{\hat{f}_{n-1}}(\hat{x}_{n-1}^0) = \{\hat{0}_{n-1}\}$, где $\hat{0}_{n-1} = \underbrace{(0, 0, \dots, 0)}_{(n-1) \text{ раз}}$;
- (ii) при любых $1 \leq j \leq n - 1$ выполнено:

$$x_j^k \underset{k \rightarrow +\infty}{=} O(1/k), \text{ и, следовательно,}$$

(iii) расходится числовой ряд

$$\sum_{k=0}^{+\infty} x_j^k.$$

Из свойства (iii) и расходимости минорантного ряда $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(k+1)(10 + \ln(k+1))}$ следует расходимость ряда с положительными членами

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x_j^k}{10 - \ln x_{n-1}^k},$$

а вместе с ним, и ряда

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\sum_{j=1}^{n-1} x_j^k}{10 - \ln x_{n-1}^k}. \quad (25)$$

Положим

$$x_n^0 = \frac{1}{\sqrt{10}}.$$

В силу расходимости ряда (25) найдется строго возрастающая последовательность столь больших натуральных чисел $\{k_m\}_{m \geq 1}$, что выполнены неравенства:

$$\sum_{k=0}^{k_1+2} \frac{\sum_{j=1}^k x_j^k}{10 - \ln x_{n-1}^k} > 1 - x_n^0 - \frac{1}{\sqrt{10}};$$

$$\sum_{k=k_m+2}^{k_{m+1}+2} \frac{\sum_{j=1}^k x_j^k}{10 - \ln x_{n-1}^k} > 1 - x_n^{k_m+2} - \frac{1}{\sqrt{10 - \ln x_{n-1}^{k_m+2}}} \quad \text{для четного } m \geq 1; \quad (26)$$

$$\sum_{k=k_m+2}^{k_{m+1}+2} \frac{\sum_{j=1}^k x_j^k}{10 - \ln x_{n-1}^k} > x_n^{k_m+2} - \frac{1}{\sqrt{10 - \ln x_{n-1}^{k_m+2}}} \quad \text{для нечетного } m \geq 1, \quad (27)$$

Здесь

$$x_n^{k_{m+1}+2} = x_n^{k_{m+1}+1} = x_n^{k_m+2} + (-1)^m \sum_{k=k_m+2}^{k_{m+1}+2} \frac{\sum_{j=1}^k x_j^k}{10 - \ln x_{n-1}^k}, m \geq 1. \quad (28)$$

Определим сначала функцию $|\psi(x_{n-1}, x_n)|$ (см. формулу (22)). Для этого будем использовать C^1 -гладкие по x_n “шапочки” Урысона, длины горизонтальных участков и высоты которых зависят от $x_{n-1} \in (0, 1]$. Пусть $h(x_{n-1})$ есть высота “шапочки” Урысона, зависящая от x_{n-1} . Будем использовать также функции

$$v_1(x_{n-1}) = \sqrt{h(x_{n-1})}, \quad v_2(x_{n-1}) = 1 - v_1(x_{n-1}).$$

Положим

$$|\psi(x_{n-1}, x_n)| = \begin{cases} h(x_{n-1}) \sin^2 \frac{\pi x_n}{2v_1(x_{n-1})}, & \text{если } x_n \in [0, v_1(x_{n-1})], \\ h(x_{n-1}), & \text{если } x_n \in (v_1(x_{n-1}), v_2(x_{n-1})), \\ h(x_{n-1}) \sin^2 \frac{\pi(x_n - 1)}{2v_1(x_{n-1})}, & \text{если } x_n \in [v_2(x_{n-1}), 1]. \end{cases} \quad (29)$$

Далее нам потребуются промежутки изменения переменной x_{n-1} следующего вида:

$$\begin{aligned} J_0 &= (x_{n-1}^{k_1}, 1], & J_m &= (x_{n-1}^{k_{m+1}}, x_{n-1}^{k_m+3}], \\ J_m^{(1)} &= (x_{n-1}^{k_m+1}, x_{n-1}^{k_m}], & J_m^{(2)} &= (x_{n-1}^{k_m+3}, x_{n-1}^{k_m+1}], \text{ при } m \geq 1. \end{aligned}$$

Пусть

$$h_1(x_{n-1}) = \frac{1}{10 - \ln x_{n-1}}.$$

Тогда h_1 является строго возрастающей, выпуклой вверх и положительной функцией переменной x_{n-1} на промежутке $(0, 1]$. Пусть $J = \bigcup_{m=0}^{\infty} J_m$, а $h(x_{n-1}) = h_{1|J}(x_{n-1})$.

Более тонкие рассмотрения требуются для определения функции h на промежутках $J_m^{(1)}$ и $J_m^{(2)}$ при $m \geq 1$. Так как функция ψ зависит только от двух переменных, x_{n-1} и x_n , то ее определение, а, следовательно, в силу формулы (29) и определение h повторяет (с точностью до обозначения переменных) рассуждения, приведенные в статье [4]. Здесь эти рассмотрения необходимы для исследования дифференциальных свойств ψ . Приведем их.

Так, на каждом промежутке $J_m^{(1)}$ построим две C^1 -гладкие линейные функции

$$\bar{h}_1(x_{n-1}) = \frac{1}{10 - \ln x_{n-1}^{k_m}} + \frac{x_{n-1} - x_{n-1}^{k_m}}{x_{n-1}^{k_m} (10 - \ln x_{n-1}^{k_m})^2},$$

$$h_2(x_{n-1}) = 2 \frac{x_{n-1} - x_{n-1}^{k_m+1}}{(x_{n-1}^{k_m+1} - x_{n-1}^{k_m+2}) (10 - \ln x_{n-1}^{k_m})}.$$

Функция $\bar{h}_1$ задает уравнение касательной к h_1 в точке $C_m^1(x_{n-1}^{k_m}, h_1(x_{n-1}^{k_m}))$; h_2 — линейная функция переменной x_{n-1} , причем $h_1(x_{n-1}^{k_m+1}) > h_2(x_{n-1}^{k_m+1}) = 0$ и $h_1(x_{n-1}^{k_m}) < h_2(x_{n-1}^{k_m})$. Следовательно, графики функций h_1 и h_2 пересекаются в некоторой точке $C_m(c_m, h_2(c_m))$ без касания, где $c_m \in (x_{n-1}^{k_m+1}, x_{n-1}^{k_m})$. Графики же функций $\bar{h}_1$ и h_2 пересекаются в другой точке $C_m^2(c_m^2, h_2(c_m^2))$, где $c_m^2 \in (c_m, x_{n-1}^{k_m})$. На интервалах (C_m, C_m^2) и (C_m^2, C_m^1) укажем точки $C_m^3(c_m^3, h_2(c_m^3))$ и $C_m^4(c_m^4, \bar{h}_1(c_m^4))$ соответственно так, чтобы $l([C_m^3, C_m^2]) = l([C_m^2, C_m^4])$. При этом $h_2(c_m^3) < h_2(c_m^2) < \bar{h}_1(c_m^4)$. Тогда корректно определена C^1 -гладкая строго возрастающая, выпуклая вверх на каждом промежутке $J_m^{(1)}$ функция h такая, что

$$h|_{(x_{n-1}^{k_m+1}, c_m^3]} = h_2|_{(x_{n-1}^{k_m+1}, c_m^3]}, \quad h|_{[c_m^4, x_{n-1}^{k_m}]} = \bar{h}_1|_{[c_m^4, x_{n-1}^{k_m}]},$$

при этом на каждом интервале (c_m^3, c_m^4) график функции h представлен дугой окружности, касающейся $\bar{h}_1$ и h_2 в точках C_m^3 и C_m^4 соответственно.

Определим функцию h на любом промежутке $J_m^{(2)}$, $m \geq 1$. Аналогично предыдущему рассмотрим две C^1 -гладкие линейные функции

$$h_3(x_{n-1}) = 2 \frac{x_{n-1}^{k_m+1} - x_{n-1}}{(x_{n-1}^{k_m+1} - x_{n-1}^{k_m+2}) (10 - \ln x_{n-1}^{k_m})},$$

$$h_4(x_{n-1}) = \frac{1}{10 - \ln x_{n-1}^{k_m+3}} + \frac{x_{n-1} - x_{n-1}^{k_m+3}}{x_{n-1}^{k_m+3} (10 - \ln x_{n-1}^{k_m+3})^2}.$$

Из определения функции h_4 следует, что эта прямая (график h_4) касается графика функции h_1 в точке с координатами $(x_{n-1}^{k_m+3}, h_1(x_{n-1}^{k_m+3}))$. Определим h в точке $x_{n-1}^{k_m+2}$ так, чтобы выполнялись следующие равенства:

$$h(x_{n-1}^{k_m+2}) = h_1(x_{n-1}^{k_m+2}), \quad h'(x_{n-1}^{k_m+2}) = 0.$$

В силу определения h_3 верны соотношения:

$$h_3(x_{n-1}^{k_m+2}) > h(x_{n-1}^{k_m+2}) > h_3(x_{n-1}^{k_m+1}) = 0.$$

Поэтому горизонтальная (в плоскости переменных x_{n-1} и $\bar{x}_{n-1}$) касательная к графику функции h в точке $B_m(x_{n-1}^{k_m+2}, h(x_{n-1}^{k_m+2}))$ пересекается с графиком функции h_3 в некоторой точке B_m^1 , причем

$$l([B_m, B_m^1]) = x_{n-1}^{k_m+1} - x_{n-1}^{k_m+2} = \frac{(x_{n-1}^{k_m+1})^2}{2 + x_{n-1}^{k_m+1}}.$$

Пусть B_m^2 – это точка с координатами $(x_{n-1}^{k_m+1}, 0)$. Имеем

$$\frac{l([B_m, B_m^1])}{l([B_m^1, B_m^2])} < \frac{x_{n-1}^{k_m+1} - x_{n-1}^{k_m+2}}{h(x_{n-1}^{k_m+2})} = \frac{(x_{n-1}^{k_m+1})^2}{2 + x_{n-1}^{k_m+1}} (10 - \ln x_{n-1}^{k_m+2}). \quad (30)$$

Поскольку

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} \frac{(x_{n-1}^{k_m+1})^2}{2 + x_{n-1}^{k_m+1}} (10 - \ln x_{n-1}^{k_m+2}) = 0,$$

то из (30) следует, что начиная с некоторого номера m_0 , при всех $m \geq m_0$ будет выполняться неравенство $l([B_m, B_m^1]) < l([B_m^1, B_m^2])$. Поэтому при всех $m \geq m_0$ на интервале (B_m^1, B_m^2) найдется точка $B_m^3(b_m^3, h_3(b_m^3))$ такая, что $l([B_m, B_m^1]) = l([B_m^1, B_m^3])$. Тогда на отрезке $[x_{n-1}^{k_m+2}, x_{n-1}^{k_m+1}]$ корректно определена положительная строго убывающая, выпуклая вверх C^1 -гладкая функция h такая, что $h|_{[b_m^3, x_{n-1}^{k_m+1}]} = h_3|_{[b_m^3, x_{n-1}^{k_m+1}]}$. При этом на промежутке $[x_{n-1}^{k_m+2}, b_m^3)$ график h представлен дугой окружности, у которой касательная в точке B_m горизонтальна (в плоскости переменных x_{n-1} и $\bar{x}_{n-1}$), а в точке B_m^3 совпадает со значением линейной по x_{n-1} функции h_3 .

Наконец, дадим описание функции h на каждом интервале $(x_{n-1}^{k_m+3}, x_{n-1}^{k_m+2})$. Используя то, что h_1 – выпуклая вверх на $(0, 1]$ функция переменной x_{n-1} , а $h(x_{n-1}^{k_m+2}) = h_1(x_{n-1}^{k_m+2})$, получаем неравенство $h_4(x_{n-1}^{k_m+2}) > h(x_{n-1}^{k_m+2})$. К тому же, функция h_1 строго возрастает на промежутке $(0, 1]$. Поэтому $h(x_{n-1}^{k_m+2}) > h_4(x_{n-1}^{k_m+3})$. Из этих рассуждений следует, что найдется точка $A_m^1(a_m^1, h(x_{n-1}^{k_m+2}))$, в которой горизонтальная (в плоскости переменных x_{n-1} и $\bar{x}_{n-1}$) касательная к графику функции h в точке B_m пересекает касательную h_4 к графику h в точке $A_m(x_{n-1}^{k_m+3}, h(x_{n-1}^{k_m+3}))$. Сравним длины отрезков $[A_m, A_m^1]$ и $[A_m^1, B_m]$. Используем дополнительную точку $A_m^2(x_{n-1}^{k_m+3}, h(x_{n-1}^{k_m+2}))$. Имеем:

$$\begin{aligned} \frac{l([A_m, A_m^2])}{l([A_m^2, B_m])} &= \frac{h(x_{n-1}^{k_m+2}) - h_4(x_{n-1}^{k_m+3})}{x_{n-1}^{k_m+3} - x_{n-1}^{k_m+2}} = \\ &= \frac{(2 + x_{n-1}^{k_m+2})(\ln x_{n-1}^{k_m+2} - \ln x_{n-1}^{k_m+3})}{(x_{n-1}^{k_m+2})^2 (10 - \ln x_{n-1}^{k_m+2}) (10 - \ln x_{n-1}^{k_m+3})} < \frac{l([A_m, A_m^1])}{l([A_m^1, B_m])}. \end{aligned} \quad (31)$$

Применяя (31) и предельное соотношение

$$\begin{aligned} \lim_{m \rightarrow +\infty} \frac{(2 + x_{n-1}^{k_m+2}) (\ln x_{n-1}^{k_m+2} - \ln x_{n-1}^{k_m+3})}{(x_{n-1}^{k_m+2})^2 (10 - \ln x_{n-1}^{k_m+2}) (10 - \ln x_{n-1}^{k_m+3})} = \\ = \lim_{m \rightarrow +\infty} \frac{1}{x_{n-1}^{k_m+2} (10 - \ln x_{n-1}^{k_m+2}) (10 - \ln x_{n-1}^{k_m+3})} = +\infty, \end{aligned}$$

получаем, что найдется натуральное число $\bar{m}_0 \geq m_0$ такое, что для любого $m \geq \bar{m}_0$ выполняется $l([A_m, A_m^1]) > l([A_m^1, B_m])$. Поэтому при любых $m \geq \bar{m}_0$ существует точка $A_m^3(a_m^3, h_4(a_m^3)) \in (A_m, A_m^1)$ такая, что $l([A_m^3, A_m^1]) = l([A_m^1, B_m])$. Тогда на интервале $(x_{n-1}^{k_m+3}, x_{n-1}^{k_m+2})$ корректно определена строго возрастающая выпуклая вверх C^1 -гладкая функция h такая, что $h|_{(x_{n-1}^{k_m+3}, a_m^3)} = h_4|_{(x_{n-1}^{k_m+3}, a_m^3)}$. При этом, на промежутке $[a_m^3, x_{n-1}^{k_m+2})$ график h представляет собой дугу окружности, касающейся h_4 в точке A_m^3 и имеющей горизонтальную (в плоскости переменных x_{n-1} и $\bar{x}_{n-1}$) касательную в точке B_m . Пусть $h(0) = 0$, а $\bar{k} = k_{\bar{m}_0} + 1$ есть номер члена последовательности $\{x_{n-1}^k\}_{k \geq 1}$, начиная с которого выполняются все соотношения для длин отрезков, указанные выше. Положим $\alpha = x_{n-1}^{\bar{k}}$.

Из приведенного построения функции h следует, что h непрерывна на отрезке $[0, \alpha]$, причем во всех точках полуинтервала $(0, \alpha]$, за исключением точек $x_{n-1}^{k_m+1}$, $m \geq \bar{m}_0$, существует конечная производная h' , а в каждой точке $x_{n-1}^{k_m+1}$ существуют конечные односторонние производные, отличающиеся лишь знаком, при этом производной функции h в нуле не существует. Далее мы не будем использовать дифференциальные свойства h .

Теперь определим функцию $\psi(x_{n-1}, x_n)$ для любых $x_n \in [0, 1]$, $m \geq \bar{m}_0$:

$$\psi(x_{n-1}, x_n) = \begin{cases} (-1)^m |\psi(x_{n-1}, x_n)|, & \text{если } x_{n-1} \in J_m \cup J_{m+1}^{(1)}; \\ (-1)^{m+1} |\psi(x_{n-1}, x_n)|, & \text{если } x_{n-1} \in J_{m+1}^{(2)}; \\ 0, & \text{если } x_{n-1} = 0. \end{cases} \quad (32)$$

2. В силу формулы (22) функция f_1 непрерывно дифференцируема по x_1 , и при любом $2 \leq j \leq n-1$, $n \geq 3$, функция $f_{j, x_{j-1}}$, зависящая от двух переменных x_{j-1} и x_j , непрерывно дифференцируема по совокупности переменных так, что $\hat{f}_{n-1} \in SP^1([0, 1]^{n-1})$ и, тем более, $\hat{f}_{n-1} \in SP^1([0, 1]^{n-2} \times [0, \alpha])$. Из формул (22), (29) и (32) следует, что $f_{n, \hat{x}_{n-1}}$ непрерывно дифференцируема по всем переменным, кроме x_{n-1} .

Возьмем произвольно и зафиксируем $\hat{x}_{n-2} \in \hat{I}^{n-2}$. Покажем, что функция $f_{n, \hat{x}_{n-1}}$ дифференцируема по x_{n-1} на замкнутом прямоугольнике $\{\hat{x}_{n-2}\} \times I_{n-1} \times I_n$ и исследуем поведение частной производной $\frac{\partial}{\partial x_{n-1}} f_{n, \hat{x}_{n-1}}$.

Прежде всего заметим, что из формул (29), (32) и определения функции h следует, что функция ψ непрерывна по совокупности переменных на прямоугольнике $[0, \alpha] \times [0, 1]$, и справедливо неравенство $|\psi(x_{n-1}, x_n)| \leq h(x_{n-1})$. Поэтому верна следующая оценка:

$$h(x_{n-1}) \leq \begin{cases} \frac{1}{10 - \ln x_{n-1}^{k_m+3}}, & \text{если } x_{n-1} \in J_m, m \geq 1; \\ \frac{1}{10 - \ln x_{n-1}^{k_m}}, & \text{если } x_{n-1} \in J_m^{(1)}; \\ \frac{1}{10 - \ln x_{n-1}^{k_m+2}}, & \text{если } x_{n-1} \in J_m^{(2)}. \end{cases}$$

Так как $\lim_{x_{n-1} \rightarrow +0} \frac{1}{10 - \ln x_{n-1}} = 0$, то, используя указанное выше неравенство, получаем:

$$\lim_{x_{n-1} \rightarrow +0} \psi(x_{n-1}, x_n) = \lim_{x_{n-1} \rightarrow +0} h(x_{n-1}) = 0 = h(0) = \psi(0, x_n).$$

Непосредственные вычисления показывают, что функция $f_{n, \hat{x}_{n-1}}(x_n)$ дифференцируема по x_{n-1} в каждой точке произвольного слоя $\{(\hat{x}_{n-2}, 0)\} \times [0, 1]$, причем

$$\frac{\partial}{\partial x_{n-1}} f_{n, (\hat{x}_{n-2}, 0)}(x_n) = 0.$$

Докажем дифференцируемость функции $f_{n, \hat{x}_{n-1}}$ по переменной x_{n-1} на множестве $\{(\hat{x}_{n-2}, x_{n-1}^{k_m+1})\} \times [0, 1]$, для произвольного $m \geq \bar{m}_0$ и любых $\hat{x}_{n-2} \in \hat{I}^{n-2}$. Действительно, если x_n — произвольная точка из отрезка $[0, 1]$, то $\psi(x_{n-1}^{k_m+1}, x_n) = 0$ и получаем, что $f_{n, (\hat{x}_{n-2}, x_{n-1}^{k_m+1})}(x_n) = \text{id}_{[0,1]}(x_n)$. Используя этот факт, приведем вычисление частной производной функции $f_{n, \hat{x}_{n-1}}(x_n)$ по переменной x_{n-1} в каждой точке $(\hat{x}_{n-2}, x_{n-1}^{k_m+1}, x_n)$. Имеем:

$$\begin{aligned} \lim_{x_{n-1} \rightarrow x_{n-1}^{k_m+1}} \frac{f_{n, \hat{x}_{n-1}}(x_n) - f_{n, (\hat{x}_{n-2}, x_{n-1}^{k_m+1})}(x_n)}{x_{n-1} - x_{n-1}^{k_m+1}} &= \lim_{x_{n-1} \rightarrow x_{n-1}^{k_m+1}} \frac{\psi(x_{n-1}, x_n) \left(\sum_{i=1}^{n-2} x_i + x_{n-1}^{k_m+1} \right)}{x_{n-1} - x_{n-1}^{k_m+1}} = \\ &= \lim_{x_{n-1} \rightarrow x_{n-1}^{k_m+1}} \frac{(-1)^m h_3(x_{n-1}) \left(\sum_{i=1}^{n-2} x_i + x_{n-1}^{k_m+1} \right)}{x_{n-1} - x_{n-1}^{k_m+1}} = \lim_{x_{n-1} \rightarrow x_{n-1}^{k_m+1}} \frac{2(-1)^{m-1} \left(\sum_{i=1}^{n-2} x_i + x_{n-1}^{k_m+1} \right)}{(10 - \ln x_{n-1}^{k_m})(x_{n-1}^{k_m+1} - x_{n-1}^{k_m+2})} = \\ &= \frac{2(2 + x_{n-2}^{k_m+1})(-1)^{m-1} \left(\sum_{i=1}^{n-2} x_i + x_{n-1}^{k_m+1} \right)}{(x_{n-1}^{k_m+1})^2 (10 - \ln x_{n-1}^{k_m})}, \end{aligned}$$

т. е.

$$\frac{\partial}{\partial x_{n-1}} f_{n, (\hat{x}_{n-2}, x_{n-1}^{k_m+1})}(x_n) = \frac{2(2 + x_{n-2}^{k_m+1})(-1)^{m-1} \left(\sum_{i=1}^{n-2} x_i + x_{n-1}^{k_m+1} \right)}{(x_{n-1}^{k_m+1})^2 (10 - \ln x_{n-1}^{k_m})}, \quad m \geq \bar{m}_0. \quad (33)$$

Таким образом, формула (33) показывает, что функция $f_{n, \hat{x}_{n-1}}(x_n)$ дифференцируема по x_{n-1} в каждой точке $(\hat{x}_{n-2}, x_{n-1}^{k_m+1}, x_n)$, и в то же время частная производная

$\frac{\partial}{\partial x_{n-1}} f_{n, \hat{x}_{n-1}}(x_n)$ не ограничена в любой окрестности произвольной точки любого слоя $\{(\hat{x}_{n-2}, 0)\} \times [0, 1]$. Следовательно, каждая точка $(\hat{x}_{n-2}, 0, x_n)$, $x_n \in [0, 1]$, $\hat{x}_{n-2} \in \hat{I}^{n-2}$, является точкой разрыва 2-го рода частной производной $\frac{\partial}{\partial x_{n-1}} f_{n, \hat{x}_{n-1}}(x_n)$ по переменной x_{n-1} . Убедимся в том, что частная производная $\frac{\partial}{\partial x_{n-1}} f_{n, \hat{x}_{n-1}}(x_n)$ непрерывна в каждом слое $\{(\hat{x}_{n-2}, x_{n-1}^{k_m+1})\} \times [0, 1]$, $m \geq \bar{m}_0$.

Действительно, по построению найдется окрестность $U_{n-1, \delta}(x_{n-1}^{k_m+1})$ точки $x_{n-1}^{k_m+1}$ на единичном отрезке оси x_{n-1} , в которой функция ψ – линейная по переменной x_{n-1} . Поэтому для всех $x_{n-1} \in U_{n-1, \delta}(x_{n-1}^{k_m+1})$, $x_{n-1} \neq x_{n-1}^{k_m+1}$ и $x_n \in (v_1(x_{n-1}), v_2(x_{n-1}))$ выполнено

$$\psi(x_{n-1}, x_n) = \frac{2(-1)^{m-1}(x_{n-1} - x_{n-1}^{k_m+1})}{(10 - \ln x_{n-1}^{k_m})(x_{n-1}^{k_m+1} - x_{n-1}^{k_m+2})}.$$

Тогда при любых $\hat{x}_{n-2} \in \hat{I}^{n-2}$, $x_{n-1} \in U_{n-1, \delta}(x_{n-1}^{k_m+1})$, $x_{n-1} \neq x_{n-1}^{k_m+1}$, верно следующее равенство:

$$\frac{\partial}{\partial x_{n-1}} f_{n, \hat{x}_{n-1}}(x_n) = \frac{2(-1)^{m-1} \left(\sum_{i=1}^{n-2} x_i + 2x_{n-1} - x_{n-1}^{k_m+1} \right)}{(10 - \ln x_{n-1}^{k_m})(x_{n-1}^{k_m+1} - x_{n-1}^{k_m+2})}. \quad (34)$$

В силу (33) и (34) частная производная $\frac{\partial}{\partial x_{n-1}} f_{n, (\hat{x}_{n-1})}(x_n)$ непрерывна в произвольной точке любого слоя $\{(\hat{x}_{n-2}, x_{n-1}^{k_m+1})\} \times [0, 1]$.

Проводя аналогичные рассуждения, убеждаемся, что функция $f_{n, \hat{x}_{n-1}}$ дифференцируема по x_{n-1} на всей клетке $\hat{I}^{n-2} \times [0, \alpha] \times [0, 1]$, а частная производная $\frac{\partial}{\partial x_{n-1}} f_{n, \hat{x}_{n-1}}(x_n)$ непрерывна по x_{n-1} в тех точках фазового пространства, где $x_{n-1} \neq 0$.

Укажем, что в силу формулы (22), определения функции $f_{n, \hat{x}_{n-1}}$ и свойств (i), (iii) выполнены условия как леммы 15, так и теоремы 16. Поэтому для некоторой точки $x^0 \in I^n$ найдется отрезок I'_n такой, что $\omega_F(x^0) = \{\hat{0}_{n-1}\} \times I'_n$, где I'_n – невырожденный отрезок.

3. В заключении укажем точку $x'(\hat{x}'_{n-1}, x'_n) \in I^n$ такую, что

$$\omega_F(x') = \{\hat{0}_{n-1}\} \times [0, 1].$$

Пусть точка x' имеет следующие координаты

$$x'_1 = x_1^{k_m+2}, \quad x'_2 = x_2^{k_m+2}, \quad \dots, \quad x'_n = x_n^{k_m+2},$$

при произвольном чётном $m > \bar{m}_0$. Зададим последовательность натуральных чисел $\{p_l\}_{l \geq 1}$ такую, что $p_l = k_{m+l} - k_{m+l-1} - 1$. Так как m – четное число, то при $l = 1$ выполнено

$$((\hat{x}')_{n-1}^{p_1}, (x')_n^{p_1}) = F^{p_1}((\hat{x}'_{n-1}, x'_n)) = \left(\hat{x}_{n-1}^{k_{m+1}+1}, x'_n + \sum_{k=k_m+2}^{k_{m+1}+1} \frac{\sum_{i=1}^{n-1} x_i^k}{10 - \ln x_{n-1}^k} \right). \quad (35)$$

В силу (28) справедливо $((\hat{x}'_{n-1})^{p_1+1}, (x'_n)^{p_1+1}) = (\hat{x}_{n-1}^{k_{m+1}+2}, (x'_n)^{p_1})$, т.е. верно $(x'_n)^{p_1+1} = (x'_n)^{p_1}$. Более того, при всех $l \geq 2$ выполнено $(x'_n)^{p_1+p_2+\dots+p_l+l-1} = (x'_n)^{p_1+p_2+\dots+p_l}$ и имеем

$$\begin{aligned} ((\hat{x}')_{n-1}^{p_1+p_2+\dots+p_l+l-1}, (x'_n)^{p_1+p_2+\dots+p_l+l-1}) &= F^{p_1+p_2+\dots+p_l+l-1}(\hat{x}'_{n-1}, x'_n) = \\ &= \left(\hat{x}_{n-1}^{k_{m+1}+1}, (x'_n)^{p_1+p_2+\dots+p_l} + (-1)^{l-1} \sum_{k=k_{m+l-1}+2}^{k_{m+l}+1} \frac{\sum_{i=1}^{n-1} x_i^k}{10 - \ln x_{n-1}^k} \right). \end{aligned}$$

Используя (28) и (35), получаем

$$f_{n, \hat{x}'_{n-1}, p_1+p_2+\dots+p_l+l-1}(x'_n) = x'_n + \sum_{j=1}^l \left((-1)^{j-1} \sum_{k=k_{m+j-1}+2}^{k_{m+j}+1} \frac{\sum_{i=1}^{n-1} x_i^k}{10 - \ln x_{n-1}^k} \right).$$

Числовой ряд

$$\sum_{l=1}^{+\infty} \left((-1)^{l-1} \sum_{k=k_{m+l-1}+2}^{k_{m+l}+1} \frac{\sum_{i=1}^{n-1} x_i^k}{10 - \ln x_{n-1}^k} \right)$$

расходится, так как из (28) следует, что не выполнено необходимое условие сходимости. Заметим, что если в этом ряде опустить скобки, то получим расходящийся ряд

$$\begin{aligned} &\frac{x_1^{k_m+2}}{10 - \ln x_{n-1}^{k_m+2}} + \dots + \frac{x_{n-1}^{k_m+2}}{10 - \ln x_{n-1}^{k_m+2}} + \dots + \frac{x_1^{k_{m+1}+1}}{10 - \ln x_{n-1}^{k_{m+1}+1}} + \dots + \frac{x_{n-1}^{k_{m+1}+1}}{10 - \ln x_{n-1}^{k_{m+1}+1}} \\ &- \frac{x_1^{k_{m+1}+2}}{10 - \ln x_{n-1}^{k_{m+1}+2}} - \dots - \frac{x_{n-1}^{k_{m+1}+2}}{10 - \ln x_{n-1}^{k_{m+1}+2}} - \dots - \frac{x_1^{k_{m+2}+1}}{10 - \ln x_{n-1}^{k_{m+2}+1}} - \dots - \frac{x_{n-1}^{k_{m+2}+1}}{10 - \ln x_{n-1}^{k_{m+2}+1}} + \dots \end{aligned}$$

Тогда в силу теоремы 14 (см. утверждение 2)) ω -предельное множество $\omega_F(x')$ содержит невырожденный отрезок $I'_n \subset [0, 1]$.

Докажем, что $I'_n = [0, 1]$. Для этого достаточно показать, что точки $x_n = 0$ и $x_n = 1$ являются предельными для последовательности $\left\{ f_{n, \hat{x}'_{n-1}, p_1+p_2+\dots+p_l+l-1}(x'_n) \right\}_{l \geq 1}$. Воспользуемся оценками (26) и (27). Имеем:

$$\begin{aligned} 1 - \frac{1}{\sqrt{10 - \ln x_{n-1}^{k_m+2}}} - \frac{\sum_{i=1}^{n-1} x_i^{k_{m+1}+2}}{10 - \ln x_{n-1}^{k_{m+1}+2}} &< (x'_n)^{k_m+2} + \sum_{k=k_{m+2}}^{k_{m+1}+1} \frac{\sum_{i=1}^{n-1} x_i^k}{10 - \ln x_{n-1}^k} < 1, \text{ для четного } m > 1; \\ \frac{1}{\sqrt{10 - \ln x_{n-1}^{k_m+2}}} + \frac{\sum_{i=1}^{n-1} x_i^{k_{m+1}+2}}{10 - \ln x_{n-1}^{k_{m+1}+2}} &> (x'_n)^{k_m+2} - \sum_{k=k_{m+2}}^{k_{m+1}+1} \frac{\sum_{i=1}^{n-1} x_i^k}{10 - \ln x_{n-1}^k} > 0, \text{ для нечетного } m > 1. \end{aligned}$$

Поскольку

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{10 - \ln x_{n-1}^{k_m+2}}} = \lim_{m \rightarrow +\infty} \frac{\sum_{i=1}^{n-1} x_i^{k_{m+1}+2}}{10 - \ln x_{n-1}^{k_{m+1}+2}} = 0,$$

то, согласно неравенствам, указанным выше, $x_n = 0$ и $x_n = 1$ являются предельными точками последовательности $\left\{ f_n, \hat{x}'_{n-1, p_1+p_2+\dots+p_l+l-1}(x'_n) \right\}_{l \geq 1}$. Из теоремы 13 следует связность ω -предельного множества. Поэтому $I'_n = [0, 1]$.

Таким образом, построен пример дифференцируемого косого произведения на n -мерной клетке, имеющего одномерное ω -предельное множество вида $\{\hat{0}_{n-1}\} \times [0, 1]$.

Список литературы

- [1] Л.С. Ефремова, *О неблуждающем множестве и центре треугольных отображений с замкнутым множеством периодических точек в базе*, в сб.: Динамические системы и нелинейные явления, Ин-т математики АН УССР, Киев, 15–25 (1990).
- [2] F. Balibrea, J.L. Guirao, J.I. Casado, *A triangular map on I^2 , whose ω -limit sets are all compact interval of $\{0\} \times I$* , Discrete Contin. Dyn. Syst. **8** (4), 983–994 (2002).
DOI: <https://doi.org/10.3934/dcds.2002.8.983>
- [3] J. Kupka, *The triangular maps with closed sets of periodic points*, J. Math. Anal. Appl. **319** (1), 302–314 (2006).
DOI: <https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2005.06.028>
- [4] Л.С. Ефремова, *Дифференциальные свойства и притягивающие множества простейших косых произведений отображений интервала*, Матем. сб. **201** (6), 93–130 (2010).
DOI: <https://doi.org/10.4213/sm7551>
- [5] Л.С. Ефремова, *О C^0 - Ω -взрывах в C^1 -гладких косых произведениях отображений интервала с замкнутым множеством периодических точек*, Вестн. Нижегородского гос. ун-та им. Н.И. Лобачевского (3), 130–136 (2012).
- [6] L.S. Efremova, *Remarks on the nonwandering set of skew products with a closed set of periodic points of the quotient map*, in: Nonlinear maps and their applications. Springer Proc. Math. Statist. **57**, Springer, New York, 39–58 (2014).
DOI: https://doi.org/10.1007/978-1-4614-9161-3_6
- [7] Л.С. Ефремова, *Динамика косых произведений отображений интервала*, УМН **72** (1), 107–192 (2017).
DOI: <https://doi.org/10.4213/rm9745>
- [8] L.S. Efremova, *Simplest skew products on n -dimensional ($n \geq 2$) cells, cylinders and tori*, Lobachevskii J. Math. **43** (7), 1598–1618 (2022).
DOI: <https://doi.org/10.1134/S1995080222100080>

- [9] Л.С. Ефремова, М.А. Шалагин, *О предельных множествах простейших косых произведений на многомерных клетках*, Известия вузов. ПНД **32** (6), 796–815 (2024). DOI: <https://doi.org/10.18500/0869-6632-003134>
- [10] L.S. Efremova, D.A. Novozhilov, *Chain-recurrent C^0 - Ω -blowup in C^1 -smooth simplest skew products on multidimensional cells*, Regul. Chaotic Dyn. **30** (1), 120–140 (2025). DOI: <https://doi.org/10.1134/S156035472501006X>
- [11] З. Нитецки, *Введение в дифференциальную динамику*, Мир, М. 1975.
- [12] А.Н. Шарковский, *Существование циклов непрерывного преобразования прямой в себя*, Укр. матем. журн. **16** (1), 61–71 (1964).
- [13] А.Н. Шарковский, *О циклах и структуре непрерывного отображения*, Укр. матем. журн. **17** (3), 104–111 (1965).
- [14] P.E. Kloeden, *On Sharkovsky's cycle coexistence ordering*, Bull. Austral. Math. Soc. **20** (2), 171–177 (1979). DOI: <https://doi.org/10.1017/S0004972700010819>
- [15] Л.С. Ефремова, *О понятии Ω -функции косого произведения отображений интервала*, Итоги науки и техн. Современ. мат. и ее прил. Темат. обз. **67**, 129–160 (1999). URL: <https://www.mathnet.ru/rus/into81>
- [16] L.S. Efremova, *C^1 -smooth Ω -stable skew products and completely geometrically integrable self-maps of 3D-tori, I: Ω -stability*, Regul. Chaotic Dyn. **29** (3), 491–514 (2024). DOI: <https://doi.org/10.1134/762S1560354724520010>
- [17] L.S. Efremova, *Skew products and geometrically integrable maps: results, problems and prospects*, in: S. Elaydi et al. (eds.) *New developments in discrete dynamical systems, difference equations, and applications*, Springer Proc. Math. Stat. **485**, 119–145 (2025). DOI: https://doi.org/10.1007/978-3-031-82003-8_7
- [18] К. Куратовский, *Топология*, Т. 1, Мир, М., 1966.
- [19] О.М. Шарковський, *Неблукуючі точки та центр неперервного відображення прямої в себе*, Допов. АН УРСР **7**, 865–868 (1964).
- [20] L.S. Block, W.A. Coppel, *Dynamics in one dimension*, Lecture Notes in Math. **1513**, Springer-Verlag, Berlin, 1992. DOI: <https://doi.org/10.1007/BFb0084762>
- [21] Z. Nitecký, *Maps of the interval with closed periodic set*, Proc. Amer. Math. Soc. **85** (3), 451–456 (1982). DOI: <https://doi.org/10.1090/S0002-9939-1982-0656122-2>
- [22] А.Н. Шарковский, В.А. Добрынский, *Неблуждающие точки динамических систем*, в сб.: *Динамические системы и вопросы устойчивости решений дифференциальных уравнений*, Наукова думка, Киев, 165–174 (1973).

- [23] И.У. Бронштейн, *Неавтономные динамические системы*, Штиинца, Кишинев, 1984.
[24] В.А. Зорич, *Математический анализ*, Т. 1. Наука, М., 1981.

Людмила Сергеевна Ефремова

Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского,
пр-т Гагарина, д. 23, г. Нижний Новгород, 603022, Россия,
Московский физико-технический институт (университет),
Институтский переулок, д. 9, г. Долгопрудный, Московская область, 141701, Россия,
e-mail: ludmila.efremova@itmm.unn.ru

Шалагин Матвей Андреевич

Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского,
пр-т Гагарина, д. 23, г. Нижний Новгород, 603022, Россия,
e-mail: shalaginmatvey@gmail.com

On the asymptotic behavior of the trajectories of skew products with a closed set of periodic points

L.S. Efremova, M.A. Shalagin

Abstract. The article continues the research of the asymptotic behavior of the trajectories of the most simple skew products on multidimensional cells conducted by the authors. Here we describe the structure of nonwandering set of continuous skew products having a closed set of periodic points and such that the set of (least) periods of periodic points is unbounded. An example of a differentiable skew product with a closed set of periodic points is constructed, defined on an n -dimensional cell ($n \geq 3$) and having a one-dimensional ω -limit set.

Keywords: skew product, nonwandering set, Ω -blow up, ω -limit set.

DOI: 10.26907/2949-3919.2025.3.58-86

References

- [1] L.S. Efremova, *On the nonwandering set and the center of triangular mappings with a closed set of periodic points in the base*, in: Dynamical systems and nonlinear phenomena, Akad. Nauk Ukrain. SSR, Inst. Mat., Kiev, 15–25 (1990) [in Russian].
- [2] F. Balibrea, J.L. Guirao, J.I. Casado, *A triangular map on I^2 , whose ω -limit sets are all compact interval of $\{0\} \times I$* , Discrete Contin. Dyn. Syst. **8** (4), 983–994 (2002).
DOI: <https://doi.org/10.3934/dcds.2002.8.983>
- [3] J. Kupka, *The triangular maps with closed sets of periodic points*, J. Math. Anal. Appl. **319** (1), 302–314 (2006).
DOI: <https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2005.06.028>
- [4] L.S. Efremova, *Differential properties and attracting sets of a simplest skew product of interval maps*, Sb. Math. **201** (6), 873–907 (2010).
DOI: <https://doi.org/10.1070/SM2010v201n06ABEH004095>
- [5] L.S. Efremova, *On C^0 - Ω -blow-ups in C^1 -smooth skew products of interval mappings with a closed set of periodic points*, Vestnik of Lobachevsky State University of Nizhny Novgorod (3), 130–136, (2012) [in Russian].

Acknowledgements. The work is supported by the Russian Science Foundation (grant no. 24-21-00242).

Received: 13 May 2025. Accepted: 09 September 2025. Published: 16 October 2025.

-
- [6] L.S.Efremova, *Remarks on the nonwandering set of skew products with a closed set of periodic points of the quotient map*, in: Nonlinear maps and their applications. Springer Proc. Math. Statist. **57**, Springer, New York, 39–58 (2014).
DOI: https://doi.org/10.1007/978-1-4614-9161-3_6
- [7] L.S.Efremova, *Dynamics of skew products of interval maps*, Russian Math. Surveys **72** (1), 101–178 (2017).
DOI: <https://doi.org/10.1070/RM9745>
- [8] L.S.Efremova, *Simplest skew products on n -dimensional ($n \geq 2$) cells, cylinders and tori*, Lobachevskii J. Math. **43** (7), 1598–1618 (2022).
DOI: <https://doi.org/10.1134/S1995080222100080>
- [9] L.S.Efremova, M.A.Shalagin, *On limit sets of simplest skew products defined on multidimensional cells*, Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics, **32** (6), 796–815 (2024) [in Russian].
DOI: <https://doi.org/10.18500/0869-6632-003134>
- [10] L.S.Efremova, D.A. Novozhilov, *Chain-recurrent C^0 - Ω -blowup in C^1 -smooth simplest skew products on multidimensional cells*, Regul. Chaotic Dyn. **30** (1), 120–140 (2025).
DOI: <https://doi.org/10.1134/S156035472501006X>
- [11] Z. Nitecki, *Differentiable dynamics. An introduction to the orbit structure of diffeomorphisms*, The M.I.T. Press, Cambridge, Mass.-London, 1971.
- [12] A. N. Sharkovsky, *Coexistence of cycles of a continuous map of the line into itself*, Internat. J. Bifur. Chaos Appl. Sci. Engrg. **5** (5), 1263–1273 (1995).
DOI: <https://doi.org/10.1142/S0218127495000934>
- [13] A.N.Sharkovsky, *On cycles and structure of a continuous map*, Ukr. Mat. Zh. **17** (3), 104–111 (1965) [in Russian].
- [14] P.E.Kloeden, *On Sharkovsky's cycle coexistence ordering*, Bull. Austral. Math. Soc. **20** (2), 171–177 (1979).
DOI: <https://doi.org/10.1017/S0004972700010819>
- [15] L.S.Efremova, *On the concept of the Ω -function for the skew product of interval mappings*, J. Math. Sci. **105** (1), 1779–1798 (2001).
DOI: <https://doi.org/10.1023/A:1011311512743>
- [16] L.S.Efremova, *C^1 -smooth Ω -stable skew products and completely geometrically integrable self-maps of 3D-tori, I: Ω -stability*, Regul. Chaotic Dyn. **29** (3), 491–514 (2024).
DOI: <https://doi.org/10.1134/762S1560354724520010>
- [17] L.S.Efremova, *Skew products and geometrically integrable maps: results, problems and prospects*, in: S. Elaydi et al. (eds.) New developments in discrete dynamical systems, difference equations, and applications, Springer Proc. Math. Stat. **485**, 119–145 (2025).
DOI: https://doi.org/10.1007/978-3-031-82003-8_7

- [18] K. Kuratowski, *Topology*. Vol. 1, Academic Press, New York-London, 1966.
DOI: <https://doi.org/10.1016/C2013-0-11022-7>
- [19] O.M. Sharkovskii, *Non-wandering points and the center of a continuous mapping of the line into itself*, Dopov. Acad. Nauk Ukr. RSR, 865–868 (1964) [in Ukrainian].
- [20] L.S. Block, W.A. Coppel, *Dynamics in one dimension*, Lecture Notes in Math. **1513**, Springer-Verlag, Berlin, 1992.
DOI: <https://doi.org/10.1007/BFb0084762>
- [21] Z. Nitecky, *Maps of the interval with closed periodic set*, Proc. Amer. Math. Soc. **85** (3), 451–456 (1982).
DOI: <https://doi.org/10.1090/S0002-9939-1982-0656122-2>
- [22] A.N. Sharkovsky, V.A. Dobrynsky, *Nonwandering points of dynamical systems*, in: Dynamical systems and problems of the stability of solutions of differential equations, Naukova Dumka, Kiev, 165–174 (1973) [in Russian].
- [23] I.U. Bronshtein, *Non-autonomous dynamical systems*, Shtiintsa, Kishinev, 1984 [in Russian].
- [24] V. A. Zorich, *Mathematical Analysis*, Vol. I. Springer-Verlag, Berlin, 2015.
DOI: <https://doi.org/10.1007/978-3-662-48792-1>

Lyudmila Sergeevna Efremova

Lobachevskii Nizhny Novgorod State University,
23 Gagarin ave., Nizhny Novgorod 603022, Russia,
Moscow Institute of Physics and Technology,
9 Institutskii alley, Dolgoprudny, Moscow Region, 141701, Russia,
e-mail: ludmila.efremova@itmm.unn.ru

Matvey Andreevich Shalagin

Lobachevskii Nizhny Novgorod State University,
23 Gagarin ave., Nizhny Novgorod 603022, Russia,
e-mail: shalaginmatvey@gmail.com