

## Классификация меняющих ориентацию периодических гомеоморфизмов двумерного тора

Т.Д. Мартынов, О.В. Починка, Е.Е. Чилина

**Аннотация.** Согласно Я. Нильсену и Х. Хангу, каждый класс топологической сопряженности периодических гомеоморфизмов ориентируемых компактных поверхностей полностью описывается конечным набором данных, называемых *характеристикой*. Для двумерной сферы исчерпывающие классификационные результаты с построением линейных представителей в каждом классе сопряженности получены Б. Керекьярто. Для двумерного тора подобные результаты получены при участии авторов настоящей статьи. В данной работе найдены все характеристики меняющих ориентацию периодических гомеоморфизмов двумерного тора. Для каждой из них построен гомеоморфизм, представляющий класс топологической сопряженности. Классификация периодических гомеоморфизмов, кроме самостоятельного интереса, играет ключевую роль в решении проблемы Палиса–Пью о построении устойчивых дуг в пространстве дискретных динамических систем, входящей в список 50 важнейших проблем динамических систем. Для всех классов градиентно-подобных диффеоморфизмов поверхностей, где эта проблема решена, использовалась именно идея тесной связи таких систем с периодическими преобразованиями. Таким образом, полученный результат позволит расширить класс систем, для которых проблема Палиса–Пью решена.

**Ключевые слова:** периодические гомеоморфизмы, двумерный тор, топологическая классификация.

**DOI:** 10.26907/2949-3919.2025.3.87-109

### Введение и формулировка результатов

Периодические гомеоморфизмы – один из трех типов гомеоморфизмов, возникающих в гомотопической теории гомеоморфизмов поверхностей Нильсена–Терстона [1]. Композиция таких гомеоморфизмов со сдвигом градиентного потока функции Морса порождает класс градиентно-подобных диффеоморфизмов поверхностей [2] – простейших структурно устойчивых систем. Эта взаимосвязь позволила получить классификацию

---

Благодарности. Исследование осуществлено в рамках Программы фундаментальных исследований НИУ ВШЭ.

© 2025 Т.Д. Мартынов, О.В. Починка, Е.Е. Чилина

Поступила: 19.06.2025. Принята: 09.09.2025. Опубликовано: 16.10.2025.

градиентно-подобных диффеоморфизмов, используя инварианты периодических гомеоморфизмов. Кроме того, тесные взаимоотношения между этими объектами привели к решению проблемы Палиса–Пью [3] построения устойчивых дуг между градиентно-подобными диффеоморфизмами тех поверхностей, для которых удалось получить полный список классов топологической сопряженности периодических преобразований [4, 5]. Таким образом, классификация периодических гомеоморфизмов поверхностей является не только самодостаточной задачей, но и ключом к решению ряда смежных проблем.

Одними из первых работ, посвященных классификации периодических гомеоморфизмов, являются работы Б. Керекьярто [6] и Л.Э.Я. Брауэра [7] 1919 года, в которых описываются периодические отображения 2-диска и 2-сферы. В работе [8] 1937 года Я. Нильсеном получены необходимые и достаточные условия топологической сопряженности сохраняющих ориентацию периодических гомеоморфизмов компактных ориентируемых поверхностей. Им доказано, что полный инвариант класса топологической сопряженности периодического гомеоморфизма описывается конечным набором данных – *характеристикой*. В работах [9, 10] 1983–1984 годов К. Йокоямой получено подобное описание классов периодических гомеоморфизмов компактных поверхностей, в том числе и неориентируемых, которое позже дополнено им в работе [11]. Х. Ханг [12] в 2017 году привел современное изложение результатов Я. Нильсена и обобщил их на случай меняющих ориентацию периодических гомеоморфизмов замкнутых ориентируемых поверхностей.

Работа С. Хиросэ [13] 2010 года содержит реализацию сохраняющих ориентацию периодических гомеоморфизмов компактных ориентируемых поверхностей родов 1, 2, 3, 4 посредством вращений Дэна. В работе [14] 2023 года Д.А. Барановым, В.З. Гринесом, О.В. Починкой, Е.Е. Чилиной найдены все характеристики сохраняющих ориентацию периодических гомеоморфизмов двумерного тора и построены алгебраические представители каждого класса топологической сопряженности. Также в работе [15] 2021 года Д.А. Барановым и О.В. Починкой найдены все характеристики сохраняющих ориентацию периодических гомеоморфизмов замкнутой ориентируемой поверхности рода 2.

Для периодических гомеоморфизмов многообразий размерности большей двух задача их классификации является значительно более сложной уже даже для случая трехмерного тора. Авторам настоящей работы известны следующие результаты. В работе 1971 года [16] К.И. Тахарой получена классификация конечных подгрупп группы  $GL(3, \mathbb{Z})$ , что соответствует классификации периодических алгебраических автоморфизмов трехмерного тора. Инволюции трехмерного тора классифицированы в работе К.В. Квуна [17] 1975 года. Работа Дж. Хемпеля [18] 1975 года посвящена классификации периодических гомеоморфизмов трехмерного тора без точек меньшего периода. Частичная классификация гомеоморфизмов четного периода трехмерного тора приведена в работе М.А. Наташена [19] 1988 года.

В нашей работе найдены все характеристики меняющих ориентацию периодических гомеоморфизмов двумерного тора. Каждая из них реализована алгебраическим диффеоморфизмом.

Приведем основные сведения про периодические гомеоморфизмы, необходимые для формулировки результатов настоящей работы (более детально см. [12]). Везде далее используются следующие обозначения:

- $\Sigma_{g,v}$  – ориентированная компактная поверхность рода  $g$  с  $v$  дырами;
- $\Sigma_g = \Sigma_{g,0}$  – ориентированная замкнутая поверхность рода  $g$ ;
- $\mathbb{T}^2 = \Sigma_1 = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$  – двумерный тор;
- $p : (x, y) \mapsto (x, y) \pmod{1}$  – естественная проекция из  $\mathbb{R}^2$  в  $\mathbb{T}^2$ ;
- $N(A)$  – трубчатая окрестность подмногообразия  $A \subset \Sigma_{g,v}$  (односторонняя трубчатая окрестность множества  $A$  в случае, когда множество  $A$  принадлежит краю поверхности  $\Sigma_{g,v}$ );
- $O_f(x) = \{f^n(x)\}_{n \in \mathbb{Z}}$  – орбита точки  $x$  гомеоморфизма  $f$ .

Гомеоморфизм  $f : \Sigma_{g,v} \rightarrow \Sigma_{g,v}$  называется *периодическим* гомеоморфизмом периода  $n \in \mathbb{N}$ , если  $f^n = \text{id}_{\Sigma_{g,v}}$  и  $f^k \neq \text{id}_{\Sigma_{g,v}}$  для любого натурального  $k < n$ . Периодом точки  $x \in \Sigma_{g,v}$  периодического гомеоморфизма  $f : \Sigma_{g,v} \rightarrow \Sigma_{g,v}$  называется наименьшее натуральное число  $k$  такое, что  $f^k(x) = x$ . Точка  $x \in \Sigma_{g,v}$  называется *точкой меньшего периода* периодического гомеоморфизма  $f$  периода  $n$ , если ее период  $k < n$ .

Гомеоморфизмы  $f : \Sigma_{g,v} \rightarrow \Sigma_{g,v}$  и  $f' : \Sigma'_{g,v} \rightarrow \Sigma'_{g,v}$  будем называть *топологически сопряженными*, если существует сохраняющий ориентацию гомеоморфизм  $h : \Sigma_{g,v} \rightarrow \Sigma'_{g,v}$  такой, что  $f'h = hf$ .

Для периодического гомеоморфизма  $f : \Sigma_{g,v} \rightarrow \Sigma_{g,v}$  периода  $n$  введем следующие обозначения:

- $B_f^k$  – множество всех точек периода  $0 < k < n$ ;
- $B_f$  – множество всех точек периода меньшего  $n$ .

Фактор-пространство  $\Sigma_{g,v}/f$  является компактной поверхностью, называемой *модульной поверхностью гомеоморфизма  $f$* . Обозначим через  $\pi_f : \Sigma_{g,v} \rightarrow \Sigma_{g,v}/f$  естественную проекцию. Положим  $\mathcal{B}_f = \pi_f(B_f)$ .

Выберем точку  $\bar{x}_0 \in \pi_f^{-1}(x)$  из полного прообраза точки  $x \in (\Sigma_{g,v}/f) \setminus \mathcal{B}_f$  и определим гомоморфизм  $\Omega_f : \pi_1((\Sigma_{g,v}/f) \setminus \mathcal{B}_f, x) \rightarrow \mathbb{Z}_n$  следующим образом. Для каждой петли  $\gamma \subset \Sigma_{g,v}/f \setminus \mathcal{B}_f$  в точке  $x \in \Sigma_{g,v}/f \setminus \mathcal{B}_f$  обозначим через  $[\gamma]$  элемент фундаментальной группы  $\pi_1((\Sigma_{g,v}/f) \setminus \mathcal{B}_f, x)$ , состоящий из всех петель в точке  $x$ , гомотопных  $\gamma$ . Для петли  $\gamma$  обозначим через  $\bar{\gamma}$  ее поднятие на  $\Sigma_{g,v}$  с началом в точке  $\bar{x}_0$  и концом в точке  $\bar{x}_1$  (см. рис. 1). Тогда существует натуральное число  $r \leq n$  такое, что  $f^r(\bar{x}_0) = \bar{x}_1$ .

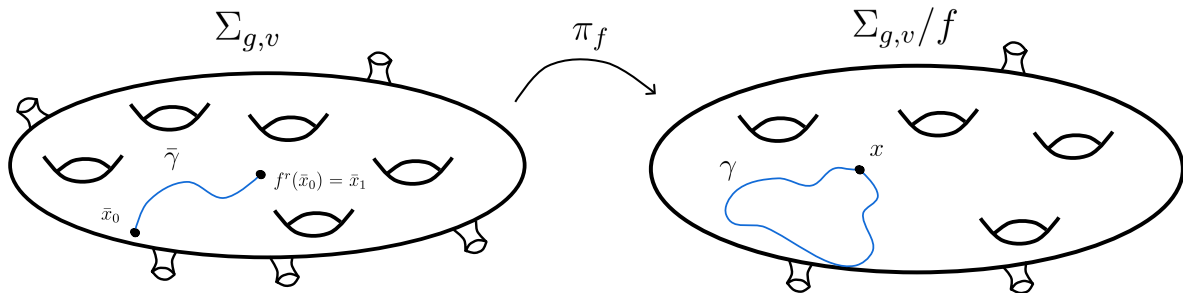


Рис. 1. Поднятие петли  $\gamma$

Определим гомоморфизм  $\Omega_f([\gamma]) = r \pmod{n}$ , который индуцирует гомоморфизм  $\omega_f: H_1((\Sigma_{g,v}/f) \setminus \mathcal{B}_f) \rightarrow \mathbb{Z}_n$ .

**Утверждение 1** ([12, предложение 2.4]). Пусть  $f: \Sigma_g \rightarrow \Sigma_g$  – меняющий ориентацию периодический гомеоморфизм периода  $n$ . Тогда

- $n$  – четное число;
- если множество  $B_f^k \neq \emptyset$  для четного значения  $0 < k < n$ , то оно конечно;
- если множество  $B_f^k \neq \emptyset$  для нечетного значения  $k$ , то оно состоит из конечного числа попарно непересекающихся простых замкнутых кривых и  $n = 2k$ ;
- факторпространство  $\Sigma_g/f$  может быть как ориентируемой, так и неориентируемой компактной поверхностью и

$$\partial(\Sigma_g/f) = \bigcup_{k\text{-нечетное}} \pi_f(B_f^k). \quad (1)$$

Положим (см. рис. 2):

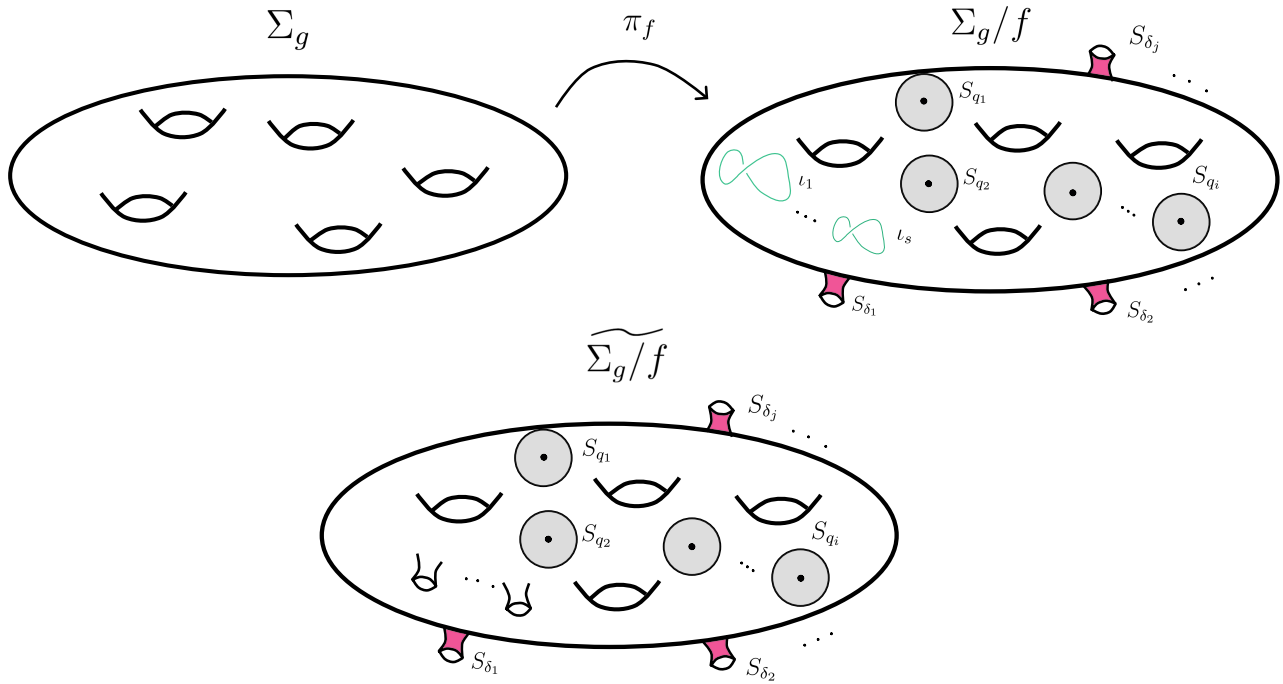
- $q_1, q_2, \dots, q_b$  – элементы множества  $\bigcup_{k\text{-четное}} \pi_f(B_f^k)$ ;
- $\delta_1, \dots, \delta_c$  – компоненты связности края поверхности  $\Sigma_g/f$ ;
- $\iota_1, \dots, \iota_s$  – произвольный набор простых замкнутых кривых на  $\Sigma_g/f$  таких, что топологическое пространство  $cl(N(\iota_l))$  для любого  $l = 1, \dots, s$  гомеоморфно ленте Мёбиуса, и поверхность  $\Sigma_g/f$  после разреза по кривым  $\iota_1, \dots, \iota_s$  является ориентируемой;
- $S_{q_i}, i = 1, \dots, b$  – край поверхности  $cl(N(q_i))$ ;
- $S_{\delta_j}, j = 1, \dots, c$  – компонента связности края поверхности  $cl(N(\delta_j))$ , отличная от  $\delta_j$ .

Разрежем поверхность  $\Sigma_g/f$  по кривым  $\iota_1, \dots, \iota_s$ . Получим ориентируемую поверхность, которую обозначим через  $\widetilde{\Sigma_g/f}$ . Зафиксируем на  $\widetilde{\Sigma_g/f}$  произвольную ориентацию. Ориентация  $\widetilde{\Sigma_g/f}$  индуцирует ориентацию края поверхности  $\widetilde{\Sigma_g/f} \setminus N(\mathcal{B}_f)$ , которая в свою очередь индуцирует ориентацию кривых  $\iota_l, S_{q_i}, S_{\delta_j}$ . Введем следующие множества:

- $Q = \{\omega_f(S_{q_1}), \dots, \omega_f(S_{q_b})\}$ ,
- $\Delta = \{\omega_f(S_{\delta_1}), \dots, \omega_f(S_{\delta_c})\}$ ,
- $I = \{\omega_f(\iota_1), \dots, \omega_f(\iota_s)\}$ .

Обозначим через  $h$  род поверхности  $\widetilde{\Sigma_g/f}$ . Тогда класс топологической сопряженности гомеоморфизма  $f$  взаимно однозначно соответствует классу эквивалентности (относительно отношений эквивалентности  $R0$ – $R4$ , описанных в утверждении 10 ниже) его характеристики

$$\chi : [h, n; Q; \Delta; I]. \quad (2)$$


 Рис. 2. Модульная поверхность  $\Sigma_g/f$ 

Основными результатами данной работы являются следующие теоремы:

**Теорема 2.** Любой меняющий ориентацию периодический гомеоморфизм  $f: \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2$  имеет в точности одну из следующих попарно неэквивалентных характеристик:

- $\chi_{1,k} : [0, 2k; \emptyset; \emptyset; \{2k - 1, 1\}]$ , где  $k \in \mathbb{N}$ ;
- $\chi_{2,k} : [0, 4k; \emptyset; \emptyset; \{2k - 1, 1\}]$ , где  $k \in \mathbb{N}$ ;
- $\chi_{1,k,\ell} : [0, 2(2k - 1); \emptyset; \{2\ell, 2(2k - \ell - 1)\}; \emptyset]$ ,  $k, \ell \in \mathbb{N}$ ,  $\text{НОД}(\ell, 2k - 1) = 1$ ;
- $\chi_{2,k,\ell} : [0, 2(2k - 1); \emptyset; \{4\ell\}; \{2(k - \ell) - 1\}]$ ,  $k, \ell \in \mathbb{N}$ ,  $\text{НОД}(\ell, 2k - 1) = 1$ .

В работе Л.Э.Я. Брауэра [20] доказано, что любой меняющий ориентацию периодический гомеоморфизм двумерного тора топологически сопряжен диффеоморфизму одного из следующих видов:  $f(x, y) = \left(x + \frac{l}{k}, -y\right) \pmod{1}$ ;  $f(x, y) = \left(x + y + \frac{l}{k}, -y\right) \pmod{1}$ ,  $\text{НОД}(k, l) = 1$ . В теореме ниже среди них выделены гомеоморфизмы, реализующие классы топологической сопряженности, соответствующие характеристикам [теоремы 2](#).

**Теорема 3.** Характеристики  $\chi_{1,k}$ ,  $\chi_{2,k}$ ,  $\chi_{1,k,\ell}$ ,  $\chi_{2,k,\ell}$ , реализуются, соответственно, гомеоморфизмами:

- $f_{1,k}(x, y) = \left(x + \frac{1}{2k}, -y\right) \pmod{1}$ ;
- $f_{2,k}(x, y) = \left(x + y + \frac{1}{4k}, -y\right) \pmod{1}$ ;
- $f_{1,k,\ell}(x, y) = \left(x + \frac{\alpha}{2k - 1}, -y\right) \pmod{1}$ , где  $2\ell\alpha \equiv 1 \pmod{2k - 1}$ ;
- $f_{2,k,\ell}(x, y) = \left(x + y + \frac{\alpha}{2k - 1}, -y\right) \pmod{1}$ , где  $4\ell\alpha \equiv 1 \pmod{2k - 1}$ .

## 1. Вспомогательные сведения и факты

В этом разделе приводятся вспомогательные утверждения про периодические гомеоморфизмы и действие группы на топологическом пространстве.

**1.1. ПЕРИОДИЧЕСКИЕ ГОМЕОМОРФИЗМЫ.** Пусть  $f: \Sigma_{g,v} \rightarrow \Sigma_{g,v}$  – сохраняющий ориентацию периодический гомеоморфизм периода  $n$ . Тогда модульная поверхность  $\Sigma_{g,v}/f$  является компактной ориентированной поверхностью с ориентацией, индуцированной накрытием  $\pi_f$ , в случае  $v = 0$  она замкнута. При этом, если множество  $B_f$  не пусто, то оно конечно. Введем следующие обозначения (см. рис. 3):

- $q_1, q_2, \dots, q_b$  – элементы множества  $\mathcal{B}_f$ ;
- $\delta_1, \dots, \delta_c$  – компоненты связности края поверхности  $\Sigma_{g,v}/f$ ;
- $S_{q_i}, j = 1, \dots, b$  – край поверхности  $cl(N(q_i))$ .

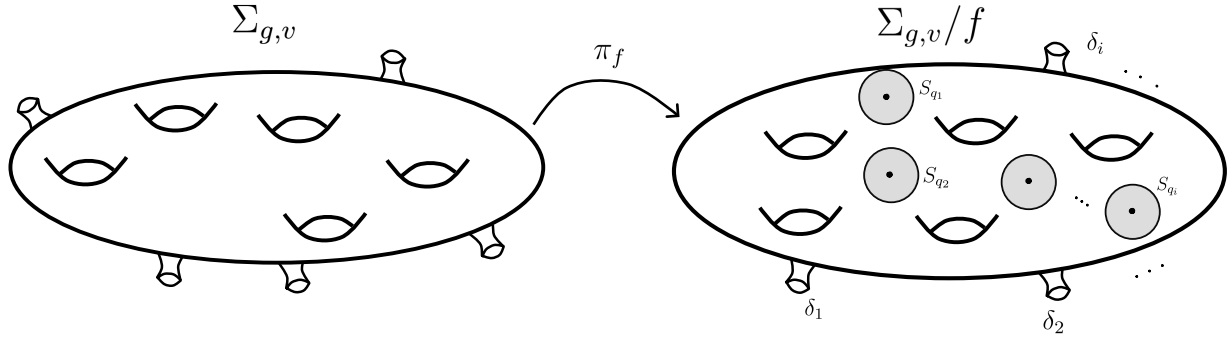


Рис. 3. Модульная поверхность  $\Sigma_{g,v}/f$

Ориентируем кривые  $S_{q_i}$  и  $\delta_i$  согласованно с ориентацией поверхности  $\Sigma_{g,v}/f \setminus N(\mathcal{B}_f)$ . Введем множества  $Q = \{\omega_f(S_{q_1}), \dots, \omega_f(S_{q_b})\}$ ,  $\Delta = \{\omega_f(\delta_1), \dots, \omega_f(\delta_c)\}$  и обозначим через  $h$  род поверхности  $\Sigma_{g,v}/f$ . Определим характеристику гомеоморфизма  $f$ , как набор следующих параметров

$$\kappa : [h, n; Q; \Delta]. \quad (3)$$

**Утверждение 4** ([8, п. 11, с. 53]). *Два сохраняющих ориентацию периодических гомеоморфизма ориентированной компактной поверхности топологически сопряжены тогда и только тогда, когда их характеристики совпадают.*

**Утверждение 5** ([12, теорема 3.3]). *Сохраняющий ориентацию периодический гомеоморфизм  $f: \Sigma_{g,v} \rightarrow \Sigma_{g,v}$  с характеристикой*

$$\kappa : [h, n; Q = \{\theta_1, \dots, \theta_b\}; \Delta = \{\eta_1, \dots, \eta_c\}]$$

*существует тогда и только тогда, когда*

- 1)  $\theta_i \not\equiv 0 \pmod{n}$ ,  $i = 1, \dots, b$ ;

- 2)  $\theta_1 + \dots + \theta_b + \eta_1 + \dots + \eta_c \equiv 0 \pmod{n}$ ;
- 3) если  $h = 0$ , то  $\text{НОД}(\theta_1, \dots, \theta_b, \eta_1, \dots, \eta_c, n) = 1$ ;
- 4)  $v = \sum_{j=1}^c \text{НОД}(\eta_j, n)$ ;
- 5)  $2g + v - 2 = n \left( 2h + b + c - \sum_{i=1}^b \frac{\text{НОД}(\theta_i, n)}{n} - 2 \right)$ .

**Утверждение 6** ([14, теоремы 1, 2]). Пусть  $f: \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2$  – сохраняющий ориентацию периодический гомеоморфизм с непустым множеством точек меньшего периода. Тогда характеристика  $f$  совпадает в точности с одной из следующих:

$$\begin{aligned} \kappa_1 : [0, 2; \{1, 1, 1, 1\}; \emptyset], \quad \kappa_2 : [0, 3; \{1, 1, 1\}; \emptyset], \quad \kappa_3 : [0, 3; \{2, 2, 2\}; \emptyset], \quad \kappa_4 : [0, 6; \{1, 2, 3\}; \emptyset], \\ \kappa_5 : [0, 6; \{3, 4, 5\}; \emptyset], \quad \kappa_6 : [0, 4; \{2, 1, 1\}; \emptyset], \quad \kappa_7 : [0, 4; \{2, 3, 3\}; \emptyset]. \end{aligned}$$

Каждая характеристика  $\kappa_i$  реализуется алгебраическим автоморфизмом двумерного тора  $f_{A_i}: \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2$ , индуцированным матрицей  $A_i$ :

$$\begin{aligned} A_1 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}, \quad A_4 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \\ A_5 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_6 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_7 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

**Утверждение 7** ([14, теорема 2]). Пусть  $f: \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2$  – сохраняющий ориентацию периодический гомеоморфизм периода  $n \in \mathbb{N}$  без точек меньшего периода. Тогда его характеристика имеет вид  $\kappa : [1, n; \emptyset; \emptyset]$ .

Для установления взаимосвязи характеристики  $\chi : [h, n; Q; \Delta; I]$  меняющего ориентацию периодического гомеоморфизма  $f$  с характеристикой его квадрата  $f^2$ , нам понадобится следующий факт.

**Предложение 8.** Пусть  $f: \Sigma_g \rightarrow \Sigma_g$  – меняющий ориентацию периодический гомеоморфизм периода  $n = 2t$ . Тогда верны следующие утверждения:

- 1) если период точки  $x$  равен  $2k$  для гомеоморфизма  $f$ , то для гомеоморфизма  $f^2$  ее период равен  $k$ ;
- 2) если период точки  $x$  равен  $2k - 1$  для гомеоморфизма  $f$ , то для гомеоморфизма  $f^2$  ее период равен  $2k - 1$ ;
- 3) гомеоморфизм  $f^2$  имеет период  $t$ ;
- 4) гомеоморфизм  $f^2$  имеет четное число орбит меньшего периода.

*Доказательство.* Проведем доказательство отдельно для каждого пункта.

1) Если период точки  $x$  гомеоморфизма  $f$  равен  $2k$ , то  $f^{2k}(x) = (f^2(x))^k = x$ . Заметим, что для  $s < k$  выполняется  $(f^2(x))^s = f^{2s}(x) \neq x$ , так как иначе  $2s < 2k$  и нарушалось бы условие минимальности в определении периода точки  $x$  для гомеоморфизма  $f$ .

2) Если период точки  $x$  гомеоморфизма  $f$  равен  $(2k - 1)$ , то, согласно [утверждению 1](#),  $m = 2k - 1$ . Тогда  $f^n(x) = f^{2m}(x) = (f^2)^m(x) = (f^2)^{2k-1}(x) = x$ . Как и в пункте 1), устанавливается, что  $2k - 1$  – период точки  $x$ .

3)  $f^{2m} = (f^2)^m = \text{id}$  и для любых  $s < m \Rightarrow f^{2s} \neq \text{id}_{\Sigma_g}$ .

4) Пусть  $f: \Sigma_g \rightarrow \Sigma_g$  – меняющий ориентацию периодический гомеоморфизм периода  $n = 2m$ . Тогда  $f^2: \Sigma_g \rightarrow \Sigma_g$  – сохраняющий ориентацию периодический гомеоморфизм периода  $m$ . Если  $B_{f^2} = \emptyset$ , то число орбит меньшего периода равно нулю. Если  $B_{f^2} \neq \emptyset$ , то отсюда следует, что  $B_{f^2}$  конечно. Из доказанных выше пунктов 1) и 2) следует, что  $x$  – точка меньшего периода гомеоморфизма  $f^2 \iff x$  – точка меньшего четного периода гомеоморфизма  $f$ . Пусть  $O_f(x)$  – орбита точки  $x \in B_f$  периода  $2k < 2m$ . Тогда  $O_f(x) = O_{f^2}(x) \sqcup O_{f^2}(f(x))$ . Отсюда следует, что если гомеоморфизм  $f$  имеет  $p$  орбит точек меньшего четного периода, то гомеоморфизм  $f^2$  имеет  $2p$  орбит точек меньшего периода.  $\square$

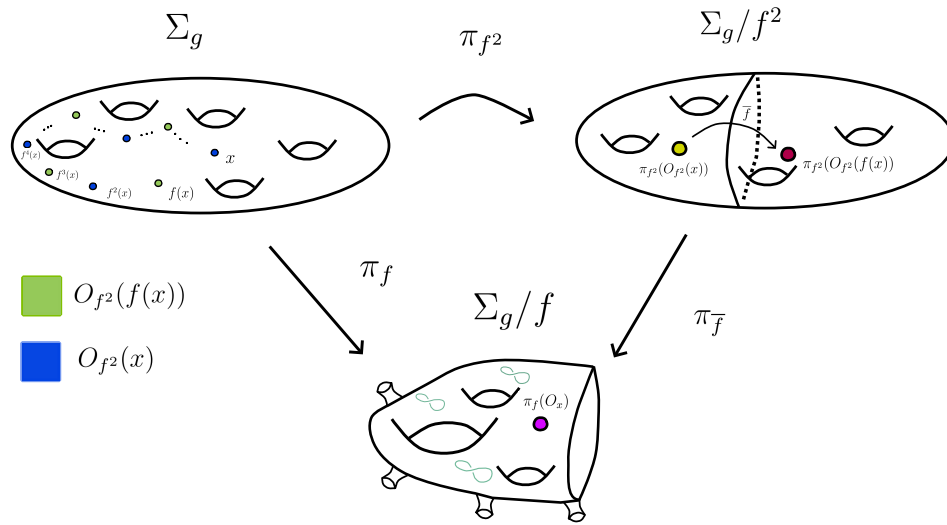
Пусть  $f: \Sigma_g \rightarrow \Sigma_g$  – меняющий ориентацию периодический гомеоморфизм периода  $n$ . Так как гомеоморфизм  $f^2: \Sigma_g \rightarrow \Sigma_g$  сохраняет ориентацию, то модульная поверхность  $\Sigma_g/f^2$  компактна и ориентируема. Орбита точки четного периода гомеоморфизма  $f$  распадается на две орбиты относительно  $f^2$  и при проекции на  $\Sigma_g/f^2$  представляет две различные точки (см. [рис. 4](#)). Орбита точки нечетного периода гомеоморфизма  $f$  на  $\Sigma_g/f^2$  проецируется в одну точку на  $\Sigma_g/f^2$ . Тогда  $f$  индуцирует гомеоморфизм  $\bar{f}: \Sigma_g/f^2 \rightarrow \Sigma_g/f^2$  периода 2 и для естественной проекции  $\pi_{\bar{f}}: \Sigma_g/f^2 \rightarrow \Sigma_g/f$  имеет место равенство  $\pi_{\bar{f}} \pi_{f^2} = \pi_f$ . Эти соотношения в совокупности с утверждениями [1](#), [5](#) приводят к следующему результату.

**Утверждение 9** ([12], теорема 4.9). *Меняющий ориентацию периодический гомеоморфизм  $f: \Sigma_g \rightarrow \Sigma_g$  с характеристикой*

$$\chi: [h, 2m; Q = \{2\theta_1, \dots, 2\theta_b\}; \Delta = \{2\eta_1, \dots, 2\eta_c\}; I = \{\zeta_1, \dots, \zeta_s\}]$$

*существует тогда и только тогда, когда*

- 1)  $\Delta \cup I \neq \emptyset$ ;
- 2) если  $m$  четно, то  $\Delta = \emptyset$ ;
- 3)  $\zeta_l$  нечетно при  $l = 1, \dots, s$ ;
- 4)  $[h, m; \{\theta_1, \dots, \theta_b\}; \{\eta_1, \dots, \eta_c, \zeta_1, \dots, \zeta_s\}]$  – характеристика сохраняющего ориентацию периодического гомеоморфизма;
- 5)  $g - 1 = m \left( 2h + b + c + s - \sum_{i=1}^b \frac{\text{НОД}(\theta_i, m)}{m} - 2 \right)$ .


 Рис. 4. Действие  $\bar{f}$ 

**Утверждение 10** ([12, теорема 5.1]). Два меняющих ориентацию периодических гомеоморфизма замкнутой ориентированной поверхности топологически сопряжены тогда и только тогда, когда их характеристики эквивалентны посредством отношений R0–R4, где

$$R0 : [h, 2m; Q; \Delta; I] \sim [h, 2m; Q; \Delta; I];$$

$$R1 : [h, 2m; Q; \Delta; I] \sim [h, 2m; \{-2\theta_1, \dots, -2\theta_b\}; \{-2\eta_1, \dots, -2\eta_c\}; \{-\zeta_1, \dots, -\zeta_s\}];$$

$$R2 : [h, 2m; Q; \Delta; I] \sim$$

$$a) [h, 2m; \{-2\theta_1, 2\theta_2, \dots, 2\theta_b\}; \Delta; \{\zeta_1, \dots, \zeta_{s-1}, \zeta_s + 2\theta_1\}],$$

$$b) [h, 2m; Q; \{-2\eta_1, 2\eta_2, \dots, 2\eta_c\}; \{\zeta_1, \dots, \zeta_{s-1}, \zeta_s + 2\eta_1\}],$$

$$c) [h, 2m; Q; \Delta; \{-\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_{s-1}, \zeta_s + 2\zeta_1\}];$$

$$R3 : [h, 2m; Q; \Delta; \{\zeta_1, \dots, \zeta_{s-3}, \zeta_{s-2}, \zeta_{s-1}, \zeta_s\}] \sim$$

$$[h + 1, 2m; Q; \Delta; \{\zeta_1, \dots, \zeta_{s-3}, \zeta_{s-2} + \zeta_{s-1} + \zeta_s\}] \text{ при } s \geq 3;$$

$$R4 : [h, 2m; Q; \Delta; \{\zeta_1, \zeta_2\}] \sim [h, 2m; Q; \Delta; \{\zeta_1 + 2d, \zeta_2 - 2d\}] \text{ при } s = 2, \text{ здесь}$$

$$d = \begin{cases} 1, & \text{если } h = 0; \\ \text{НОД}(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_b, \eta_1, \dots, \eta_c), & \text{если } h > 0. \end{cases}$$

**1.2. Действие группы на топологическом пространстве.** Пусть  $X$  – топологическое пространство,  $G$  – группа. Говорят, что  $G$  действует на  $X$ , если задано отображение множества  $G \times X$  в  $X$ , которое обозначается  $(g, x) \mapsto g \cdot x$  и обладает следующими свойствами:

- 1) для всех  $x \in X$  выполняется  $1 \cdot x = x$ , где  $1 \in G$  – единичный элемент группы;
- 2) для всех  $g, h \in G, x \in X$  выполняется  $g \cdot (h \cdot x) = (g \cdot h) \cdot x$ .

Топологическое пространство  $X$  называется  $G$ -пространством, если  $G$  действует на  $X$  и отображение  $\psi(x) = g \cdot x$  непрерывно. Введем отношение эквивалентности  $R$  на  $X$  следующим образом:  $xRy \Leftrightarrow \exists g \in G : y = g \cdot x \Leftrightarrow y \in G \cdot x$ , где  $G \cdot x = \{g \cdot x \mid x \in G\}$ . Мно-

жество  $X/G$  классов эквивалентности с фактор-топологией называется *пространством орбит действия  $G$  на  $X$* .

**Замечание 11.** Для любого гомеоморфизма  $f: X \rightarrow X$  топологическое пространство  $X$  является  $G$ -пространством, если  $G = \langle f \rangle = \{f^n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ .

**Утверждение 12** ([21, следствие 8.12]). *Если  $X$  – компактное хаусдорфово  $G$ -пространство с конечной группой  $G$ , то  $X/G$  – компактное хаусдорфово пространство.*

**Предложение 13.** Пусть  $f: X \rightarrow X$  – периодический гомеоморфизм компактного хаусдорфова топологического пространства  $(X, \tau)$ ,  $(A, \tau_A)$  – замкнутое подмножество с индуцированной топологией такое, что для любого  $x \in X$  выполняется  $O_f(x) \cap A \neq \emptyset$  и на  $A$  задано отношение эквивалентности  $R$  следующим образом:  $xRy \iff x, y \in (O_f(x) \cap A)$ . Тогда  $X/f \cong A/R$ .

*Доказательство.* Пусть  $\pi_R: A \rightarrow A/R$  – каноническая проекция, а  $(X/f, \tau_f)$  – топологическое пространство со стандартной фактор-топологией. Рассмотрим отображение  $h: X/f \rightarrow A/R$ , действующее по правилу:  $\pi_f(O_f(x)) \mapsto \pi_R(O_f(x) \cap A)$ . Покажем, что  $h$  биективно и открыто.

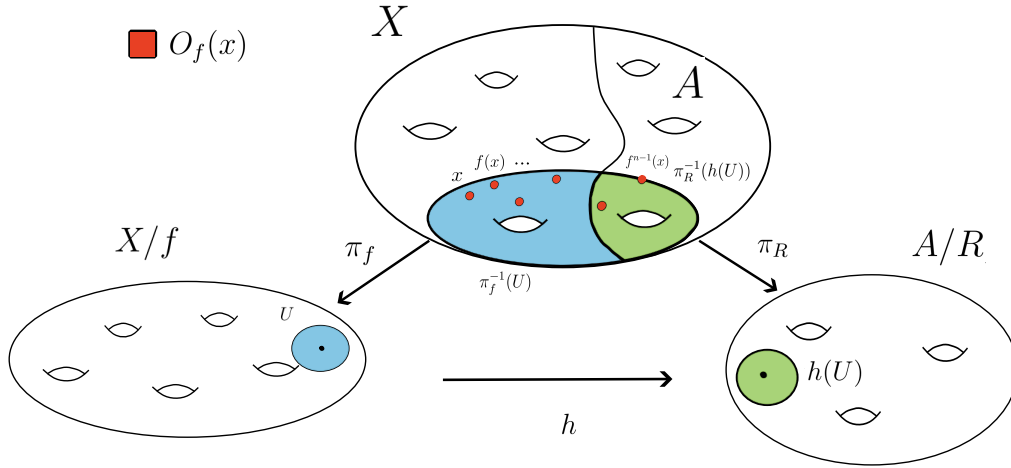
1) Инъекция: Пусть  $\pi_f(x) \neq \pi_f(y)$ , тогда  $O_f(x) \cap O_f(y) = \emptyset$ . Отсюда следует, что  $h(\pi_f(x)) \neq h(\pi_f(y))$ , так как  $(O_f(x) \cap A) \cap (O_f(y) \cap A) = (O_f(x) \cap O_f(y)) \cap A = \emptyset$ .

2) Сюръекция: По условию, для любого  $x \in X$  выполняется  $O_f(x) \cap A \neq \emptyset$ . Значит для любой точки  $\pi_R(O_f(x) \cap A) \in A/R$  существует точка  $\pi_f(O_f(x)) \in X/f$  такая, что  $h(\pi_f(O_f(x))) = \pi_R(O_f(x) \cap A)$ .

3) Открытость: Пусть  $\tau_R$  – индуцированная фактор-топология на  $A/R$ . Покажем, что для любого  $U \in \tau_f$  выполняется  $h(U) \in \tau_R$ . Множество  $U \in \tau_f \iff \pi_f^{-1}(U) \in \tau$ . По условию  $\pi_f^{-1}(U) \cap A \neq \emptyset$  и при этом данное пересечение является следом для  $A$ , т. е. открыто в индуцированной топологии. Множество  $h(U)$  открыто  $\iff \pi_R^{-1}(h(U)) \in \tau_A \iff \pi_R^{-1}(h(U))$  есть след открытого множества в  $X$ . Заметим, что по построению отображения верно равенство:  $\pi_R^{-1}(h(U)) = \pi_f^{-1}(U) \cap A$  (см. рис. 5). Отсюда получаем следующую импликацию:  $U \in \tau_f \Rightarrow h(U) \in \tau_R$ . Так как  $h$  – биекция, то открытость равносильна непрерывности  $h^{-1}: A/R \rightarrow X/f$ .

Заметим, что  $A$  – замкнутое подмножество компактного пространства  $X$ , а значит  $A$  – компактно (см. [21, теорема 7.10]). Следовательно, и образ непрерывного отображения  $A/R = \pi_R(A)$  будет компактным. Так как  $f: X \rightarrow X$  – периодический гомеоморфизм, то группа  $G = \langle f \rangle$  является конечной. Из утверждения 12 следует, что  $X/f$  – компактное хаусдорфово пространство. Так как непрерывное биективное отображение компактного пространства в хаусдорфово пространство является гомеоморфизмом (см. [21, теорема 8.8]), то  $h$  – гомеоморфизм.  $\square$

Множество  $A$ , удовлетворяющее условиям предложения 13 и такое, что  $\text{int } A$  не содержит точек с одной и той же орбиты, будем называть *фундаментальной областью гомеоморфизма  $f$* .


 Рис. 5. Действие гомеоморфизма  $h$ 

## 2. Нахождение характеристик

Докажем [теорему 2](#) о том, что любой меняющий ориентацию периодический гомеоморфизм  $f: \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2$  имеет в точности одну из следующих попарно неэквивалентных характеристик:

- $\chi_{1,k} : [0, 2k; \emptyset; \emptyset; \{2k - 1, 1\}]$ , где  $k \in \mathbb{N}$ ;
- $\chi_{2,k} : [0, 4k; \emptyset; \emptyset; \{2k - 1, 1\}]$ , где  $k \in \mathbb{N}$ ;
- $\chi_{1,k,\ell} : [0, 2(2k - 1); \emptyset; \{2\ell, 2(2k - \ell - 1)\}; \emptyset]$ ,  $k, \ell \in \mathbb{N}$ ,  $\text{НОД}(\ell, 2k - 1) = 1$ ;
- $\chi_{2,k,\ell} : [0, 2(2k - 1); \emptyset; \{4\ell\}; \{2(k - \ell) - 1\}]$ ,  $k, \ell \in \mathbb{N}$ ,  $\text{НОД}(\ell, 2k - 1) = 1$ .

*Доказательство.* Пусть  $f: \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2$  – меняющий ориентацию периодический гомеоморфизм с периодом  $n = 2m$ . Тогда  $f^2: \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2$  – сохраняющий ориентацию периодический гомеоморфизм, период которого, в силу [предложения 8](#), равен  $m$ . В силу этого же утверждения,  $f^2$  имеет четное число орбит меньшего периода. Из утверждений [6](#), [7](#) следует, что  $f^2$  имеет либо характеристику  $\kappa_1 : [0, 2; \{1, 1, 1, 1\}]$ , либо характеристику  $\kappa : [1, m; \emptyset; \emptyset]$ .

Если  $f^2$  имеет характеристику  $\kappa_1$ , то  $m = 2$  и, следовательно, по [утверждению 1](#),  $f$  не имеет орбит нечетного меньшего периода. Таким образом,  $f$  имеет характеристику  $[h, 4; \{2, 2\}; \emptyset; \{\zeta_1, \dots, \zeta_s\}]$ , где параметры  $h, s$ , согласно пункту 5) [утверждения 9](#) удовлетворяют соотношению  $2h = 1 - s$ . Поскольку  $h \geq 0$ , то  $s \leq 1$ . В силу условия 1) [утверждения 9](#),  $s > 0$ , и, следовательно,  $s = 1$ ,  $h = 0$ . Тогда единственно возможная характеристика  $f$  примет вид  $[0, 4; \{2, 2\}; \emptyset; \{\zeta\}]$ , где, в силу условия 2) [утверждения 5](#),  $4 + \zeta \equiv 0 \pmod{2}$ , что противоречит условию 3) [утверждения 9](#) о нечетности  $\zeta$ .

Таким образом, гомеоморфизм  $f^2$  имеет характеристику  $\kappa : [1, m; \emptyset; \emptyset]$  и  $B_f = B_f^m$ . Далее рассмотрим отдельно две ситуации: 1)  $m$  – четное, 2)  $m$  – нечетное.

1) Если  $m$  – четное, то из [утверждения 1](#) следует, что  $\Delta = \emptyset$ . Поскольку  $f^2$  не имеет точек меньшего периода, то, в силу [предложения 8](#),  $Q = \emptyset$ . Таким образом,  $f$  имеет характеристику  $[h, 2m; \emptyset; \emptyset; \{\zeta_1, \dots, \zeta_s\}]$ , где параметры  $h, s$ , согласно пункту 5) [утвер-](#)

ждения 9, удовлетворяют соотношению  $2h = 2 - s$ . Поскольку  $h \geq 0$ , то  $s \leq 2$ . В силу условия 1) утверждения 9,  $s > 0$ . Следовательно,  $s = 2$ ,  $h = 0$ . Тогда единственно возможная характеристика  $f$  примет вид  $[0, 2m; \emptyset; \emptyset; \{\zeta_1, \zeta_2\}]$ , где, в силу условия 2) утверждения 5,  $\zeta_1 + \zeta_2 \equiv 0 \pmod{m}$ . Воспользовавшись отношением эквивалентности  $R4$ , мы получим, что  $[0, 2m; \emptyset; \emptyset; \{\zeta_1, \zeta_2\}] \sim [0, 2m; \emptyset; \emptyset; \{\zeta, 1\}]$ , где  $\zeta + 1 \equiv 0 \pmod{m}$ . Поскольку  $\zeta \in \{1, \dots, 2m - 1\}$ , то  $\zeta + 1 \in \{m, 2m\}$  и, следовательно,  $\zeta \in \{m - 1, 2m - 1\}$ . Если  $\zeta = 2m - 1$ , то получаем характеристику

$$\chi_{1,m} : [0, 2m; \emptyset; \emptyset; \{2m - 1, 1\}], \quad m \in 2\mathbb{N}. \quad (4)$$

Если  $\zeta = m - 1$ , то, положив  $m = 2k$ , получаем характеристику

$$\chi_{2,k} : [0, 4k; \emptyset; \emptyset; \{2k - 1, 1\}], \quad k \in \mathbb{N}. \quad (5)$$

2) Если  $m$  – нечетное, то рассмотрим два подслучая: 2а)  $B_f = \emptyset$ , 2б)  $B_f \neq \emptyset$ .

В случае 2а), согласно утверждению 1,  $Q = \Delta = \emptyset$ . Следовательно, характеристика гомеоморфизма  $f$  имеет вид  $[h, 2m; \emptyset; \emptyset; \{\zeta_1, \dots, \zeta_s\}]$ , где параметры  $h, s$ , в силу условия 5) утверждения 9, удовлетворяют соотношению  $2h = 2 - s$ . Как и в случае 1), мы получим характеристику  $[0, 2m; \emptyset; \emptyset; \{\zeta_1, \zeta_2\}] \sim [0, 2m; \emptyset; \emptyset; \{\zeta, 1\}]$ , где  $\zeta \in \{m - 1, 2m - 1\}$ . Поскольку  $m$  – нечетное, то  $\zeta = m - 1$  – четное, что противоречит условию 3) утверждения 9. Тогда  $\zeta = 2m - 1$ . Откуда получаем характеристику:

$$\chi_{1,m} : [0, 2m; \emptyset; \emptyset; \{2m - 1, 1\}], \quad m \in \mathbb{N} \setminus 2\mathbb{N}. \quad (6)$$

Объединив характеристики (4) и (6), получим характеристику

$$\chi_{1,k} : [0, 2k; \emptyset; \emptyset; \{2k - 1, 1\}], \quad k \in \mathbb{N}. \quad (7)$$

В случае 2б), из утверждения 1 следует, что  $Q = \emptyset$  и  $\Delta \neq \emptyset$ . Следовательно, характеристика гомеоморфизма  $f$  имеет вид  $[h, 2m; \emptyset; \{\eta_1, \dots, \eta_c\}; \{\zeta_1, \dots, \zeta_s\}]$ , где параметры  $h \geq 0$ ,  $c > 0$ ,  $s \geq 0$ , в силу условия 5) утверждения 9, удовлетворяют соотношению  $2h = 2 - (c + s)$ . Тогда  $h = 0$ , а для пары  $c, s$  возможны два случая: либо  $c = 2$ ,  $s = 0$ , либо  $c = s = 1$ .

Если  $c = 2$ ,  $s = 0$ , то из условий 2), 3) утверждения 5 следует, что  $\eta_1 + \eta_2 = m$ . Откуда, положив  $m = 2k - 1$ ,  $\eta_1 = \ell$ , получаем характеристику

$$\chi_{1,k,\ell} : [0, 2(2k - 1); \emptyset; \{2\ell, 2(2k - \ell - 1)\}; \emptyset], \quad k, \ell \in \mathbb{N}, \quad \text{НОД}(\ell, 2k - 1) = 1. \quad (8)$$

Если  $c = s = 1$ , то характеристика гомеоморфизма  $f$  имеет вид  $[h, 2m; \emptyset; \{2\eta\}; \{\zeta\}]$ . Из условий 2), 3) утверждения 5 следует, что  $(\eta + \zeta) \in \{m, 2m\}$ . Тогда характеристика принимает вид  $[h, 2m; \emptyset; \{2\eta\}; \{m - \eta\}]$  или  $[h, 2m; \emptyset; \{2\eta\}; \{2m - \eta\}]$ , где  $\text{НОД}(\eta, m) = 1$ . В силу пункта б) отношения эквивалентности  $R2$ , характеристика второго вида эквивалентна характеристике первого вида. Действительно,

$$[h, 2m; \emptyset; \{2\eta\}; \{2m-\eta\}] \sim [h, 2m; \emptyset; \{-2\eta\}; \{2m+\eta\}] = [h, 2m; \emptyset; \{2(m-\eta)\}; \{m-(m-\eta)\}].$$

Таким образом, учитывая, что в характеристике первого типа  $m, m-\eta$  – нечетные, получаем, что  $\eta$  – четное. Откуда, положив  $m = 2k - 1, \eta = 2\ell$ , получаем характеристику

$$\chi_{2,k,\ell} : [0, 2(2k-1); \emptyset; \{4\ell\}; \{2(k-\ell)-1\}], \quad k, \ell \in \mathbb{N}, \quad \text{НОД}(\ell, 2k-1) = 1. \quad (9)$$

Поскольку период гомеоморфизма и число элементов в множестве  $\Delta$  не меняются при замене характеристики на эквивалентную, а в эквивалентных характеристиках, множества  $I$ , вида  $\{\zeta, 1\}$ , совпадают, то полученные характеристики попарно не эквивалентны.  $\square$

### 3. Реализация классов топологической сопряженности

Докажем [теорему 3](#) о том, что характеристики  $\chi_{1,k}, \chi_{2,k}, \chi_{1,k,\ell}, \chi_{2,k,\ell}$ , реализуются, соответственно, гомеоморфизмами:

- $f_{1,k}(x, y) = \left(x + \frac{1}{2k}, -y\right) \pmod{1}$ ;
- $f_{2,k}(x, y) = \left(x + y + \frac{1}{4k}, -y\right) \pmod{1}$ ;
- $f_{1,k,\ell}(x, y) = \left(x + \frac{\alpha}{2k-1}, -y\right) \pmod{1}$ , где  $2\ell\alpha \equiv 1 \pmod{2k-1}$ ;
- $f_{2,k,\ell}(x, y) = \left(x + y + \frac{\alpha}{2k-1}, -y\right) \pmod{1}$ , где  $4\ell\alpha \equiv 1 \pmod{2k-1}$ .

*Доказательство.* Найдем характеристику каждого из перечисленных в теореме гомеоморфизмов. Для упрощения обозначений всюду далее мы будем обозначать через  $\hat{f} : \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2$  проекцию отображения  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ , т. е.  $pf = \hat{f}p$ .

1.  $f(x, y) = f_{1,k}(x, y) = \left(x + \frac{1}{2k}, -y\right)$ . Заметим, что отображение  $f$  сохраняет вертикальное и горизонтальное слоения плоскости  $\mathbb{R}^2$ . При этом,  $f(x, 0) = \left(x + \frac{1}{2k}, 0\right)$ . Тогда отображение  $\hat{f}|_{p(Ox)}$  является поворотом с числом вращения  $\frac{1}{2k}$  и отрезок  $p\left(\left[0, \frac{1}{2k}\right] \times \{0\}\right)$  есть фундаментальная область этого поворота. Поскольку  $f^{2k}(x, y) = (x + 1, y)$ , то  $\hat{f}^{2k}$  – тождественное отображение. Тогда кольцо  $A = p\left(\left[0, \frac{1}{2k}\right] \times [0, 1]\right)$  является фундаментальной областью отображения  $\hat{f}$ , период  $\hat{f}$  равен  $2k$  и  $\hat{f}$  не имеет точек меньшего периода, т. е.  $Q = \emptyset$ .

Факторизация  $A$  происходит согласно правилу, изображенному на [рис. 6](#). Тогда по [предложению 13](#), модульная поверхность  $\mathbb{T}^2/\hat{f}$  гомеоморфна бутылке Клейна  $\mathbb{K}^2$ , т. е.  $\Delta = \emptyset$ . Положим  $\bar{t}_1 = p\left(\left[0, \frac{1}{2k}\right] \times \{0\}\right)$ ,  $\bar{t}_2 = p\left(\left[0, \frac{1}{2k}\right] \times \left\{\frac{1}{2}\right\}\right)$ . После разреза мо-

дульной поверхности по кривым  $\iota_i = \pi_{\hat{f}}(\bar{\iota}_i)$ ,  $i = 1, 2$ , получится поверхность  $\widetilde{\mathbb{T}^2/\hat{f}}$ , гомеоморфная цилиндру (см. рис. 6), т. е.  $h = 0$ . Зададим на  $\widetilde{\mathbb{T}^2/\hat{f}}$  ориентацию, соответствующую обходу  $\bar{\iota}_1$  от точки  $p(0, 0)$  к точке  $p\left(\frac{1}{2k}, 0\right)$ . Так как  $f(0, 0) = \left(\frac{1}{2k}, 0\right)$ , то  $\omega_{\hat{f}}(\iota_1) = 1$ . Выбранная ориентация соответствует обходу  $\bar{\iota}_2$  от точки  $p\left(\frac{1}{2k}, \frac{1}{2}\right)$  к точке  $p\left(0, \frac{1}{2}\right)$ . Так как  $f^{2k-1}\left(\frac{1}{2k}, \frac{1}{2}\right) = \left(1, -\frac{1}{2}\right)$  и  $p\left(1, -\frac{1}{2}\right) = p\left(0, \frac{1}{2}\right)$ , то  $\omega_{\hat{f}}(\iota_2) = 2k - 1$ .

Таким образом,  $\hat{f}$  имеет характеристику

$$\chi_{1,k} : [0, 2k; \emptyset; \emptyset; \{2k - 1, 1\}].$$

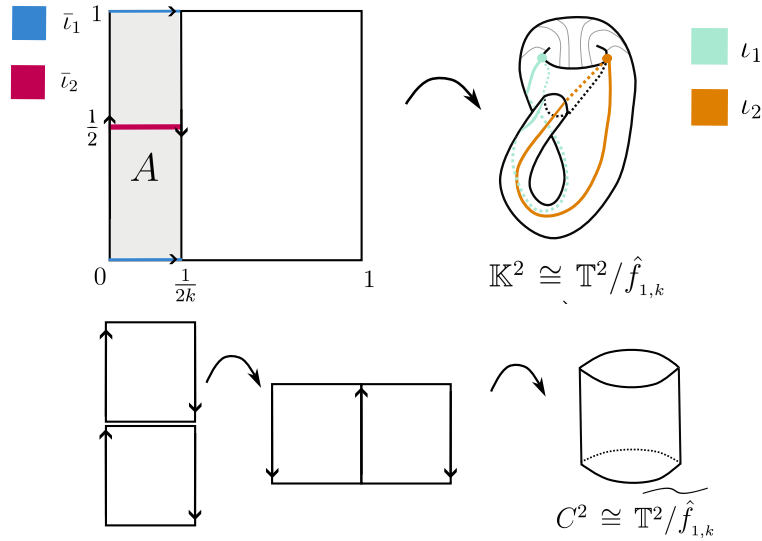


Рис. 6. Модульная поверхность  $\mathbb{T}^2/\hat{f}_{1,k}$

2.  $f(x, y) = f_{2,k}(x, y) = \left(x + y + \frac{1}{4k}, -y\right)$ . Заметим, что отображение  $f$  сохраняет горизонтальное слоение плоскости  $\mathbb{R}^2$  и слоение из прямых  $L_c = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y + 2x = c\}$ ,  $c \in \mathbb{R}$ . При этом,  $f(x, 0) = \left(x + \frac{1}{4k}, 0\right)$ . Тогда отображение  $\hat{f}|_{p(Ox)}$  является поворотом с числом вращения  $\frac{1}{4k}$  и отрезок  $p\left(\left[0, \frac{1}{4k}\right] \times \{0\}\right)$  – фундаментальная область этого поворота. Поскольку  $f^{4k}(x, y) = (x + 1, y)$ , то  $\hat{f}^{4k}$  – тождественное отображение. Обозначим через  $\bar{A}$  часть единичного квадрата плоскости  $\mathbb{R}^2$ , ограниченную прямыми  $L_1, L_{1+\frac{1}{2k}}$  (см. рис. 7). Положим  $A = p(\bar{A})$ . Поскольку  $f^{4k}(x, y) = (x + 1, y)$ , то  $\hat{f}^{4k}$  – тождественное отображение. Тогда параллелограмм  $A$  является фундаментальной областью отображения  $\hat{f}$ , период  $\hat{f}$  равен  $4k$  и  $\hat{f}$  не имеет точек меньшего периода, т. е.  $Q = \emptyset$ .

Так как  $f^{2k}(x, 0) = \left(x + \frac{1}{2}, 0\right)$ , то факторизация  $A$  происходит согласно правилу, изображенному на рис. 7. По предложению 13, модульная поверхность  $\mathbb{T}^2/\hat{f}$  гомеоморфна бу-

тылке Клейна  $\mathbb{K}^2$ , т. е.  $\Delta = \emptyset$ . Положим  $\bar{\iota}_1 = p \left( \left[ 0, \frac{1}{4k} \right] \times \{1\} \right)$ ,  $\bar{\iota}_2 = p \left( \left[ \frac{1}{4}, \frac{1}{4} + \frac{1}{4k} \right] \times \left\{ \frac{1}{2} \right\} \right)$ . После разреза модульной поверхности по кривым  $\iota_i = \pi_{\hat{f}}(\bar{\iota}_i)$ ,  $i = 1, 2$ , получится поверхность  $\widetilde{\mathbb{T}^2/\hat{f}}$ , гомеоморфная цилиндру (см. рис. 7), т. е.  $h = 0$ . Зададим на  $\widetilde{\mathbb{T}^2/\hat{f}}$  ориентацию, соответствующую обходу  $\bar{\iota}_1$  от точки  $p(0, 1)$  к точке  $p\left(\frac{1}{4k}, 1\right)$ . Так как  $f(0, 1) = \left(1 + \frac{1}{4k}, -1\right)$  и  $p\left(1 + \frac{1}{4k}, -1\right) = p\left(\frac{1}{4}, 1\right)$ , то  $\omega_{\hat{f}}(\iota_1) = 1$ . Выбранная ориентация соответствует обходу  $\bar{\iota}_2$  от точки  $p\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4k}, \frac{1}{2}\right)$  к точке  $p\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right)$ . Так как  $f^{2k-1}\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4k}, \frac{1}{2}\right) = \left(\frac{5}{4}, -\frac{1}{2}\right)$  и  $p\left(\frac{5}{4}, -\frac{1}{2}\right) = p\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right)$ , то  $\omega_{\hat{f}}(\iota_2) = 2k - 1$ .

Таким образом,  $\hat{f}$  имеет характеристику

$$\chi_{2,k} : [0, 4k; \emptyset; \emptyset; \{2k - 1, 1\}].$$

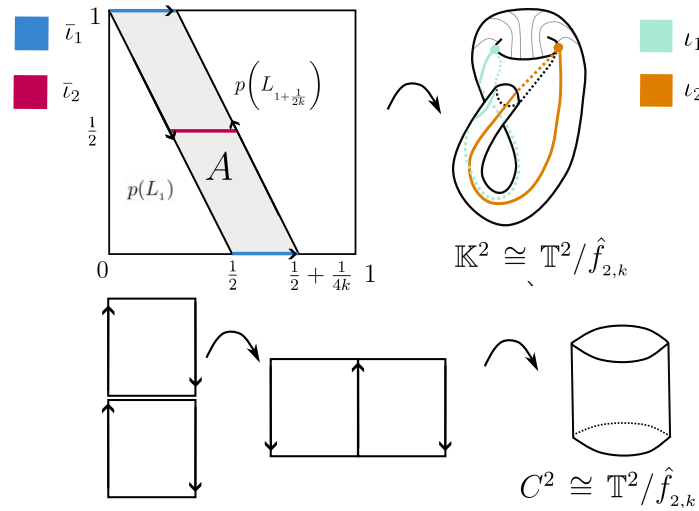


Рис. 7. Модульная поверхность  $\mathbb{T}^2/\hat{f}_{2,k}$

3.  $f(x, y) = f_{1,k,\ell}(x, y) = \left(x + \frac{\alpha}{2k-1}, -y\right)$ , где  $2\ell\alpha \equiv 1 \pmod{2k-1}$ . Заметим, что отображение  $f$  сохраняет вертикальное и горизонтальное слоения плоскости  $\mathbb{R}^2$ . При этом,  $f(x, 0) = \left(x + \frac{\alpha}{2k-1}, 0\right)$ . Тогда отображение  $\hat{f}|_{p(Ox)}$  является поворотом с числом вращения  $\frac{\alpha}{2k-1}$  и отрезок  $p\left(\left[0, \frac{1}{2k-1}\right] \times \{0\}\right)$  – фундаментальная область этого поворота.

Поскольку  $f^{2k-1}(x, y) = (x + \alpha, -y)$ , то  $\hat{f}^{2(2k-1)}$  – тождественное отображение. Тогда прямоугольник  $A = p\left(\left[0, \frac{1}{2k-1}\right] \times \left[0, \frac{1}{2}\right]\right)$  (см. рис. 8) является фундаментальной областью отображения  $\hat{f}$ , период  $\hat{f}$  равен  $2(2k-1)$  и  $\hat{f}$  имеет только точки нечетного меньшего

периода  $2k - 1$ , составляющие окружности  $p([0, 1] \times \{0\})$  и  $p([0, 1] \times \{\frac{1}{2}\})$ , т. е.  $Q = \emptyset$ .

Выберем  $\varepsilon \in (0, \frac{1}{4})$  и положим (см. рис. 8):

- $\bar{\delta}_1 = p\left(\left[0, \frac{1}{2k-1}\right] \times \{0\}\right)$ ,  $\bar{\delta}_2 = p\left(\left[0, \frac{1}{2k-1}\right] \times \{\frac{1}{2}\}\right)$ ;
- $N(\bar{\delta}_1) = p\left(\left[0, \frac{1}{2k-1}\right] \times [0, \varepsilon)\right)$ ,  $N(\bar{\delta}_2) = p\left(\left[0, \frac{1}{2k-1}\right] \times \left(\frac{1}{2} - \varepsilon, \frac{1}{2}\right)\right)$ ;
- $\bar{S}_{\bar{\delta}_1} = p\left(\left[0, \frac{1}{2k-1}\right] \times \{\varepsilon\}\right)$ ,  $\bar{S}_{\bar{\delta}_2} = p\left(\left[0, \frac{1}{2k-1}\right] \times \{\frac{1}{2} - \varepsilon\}\right)$ ;

Поскольку  $2\ell\alpha \equiv 1 \pmod{2k-1}$ , то

$$f^{2\ell}\left(\{0\} \times \left[0, \frac{1}{2}\right]\right) = \left\{\frac{1}{2k-1}\right\} \times \left[0, \frac{1}{2}\right] \pmod{1}. \quad (10)$$

То есть факторизация  $A$  происходит согласно правилу, изображенному на рис. 8. В силу предложения 13, модульная поверхность гомеоморфна цилиндру  $C^2$  с краями  $\delta_1 = \pi_{\hat{f}}(\bar{\delta}_1)$ ,  $\delta_2 = \pi_{\hat{f}}(\bar{\delta}_2)$  и, следовательно,  $h = 0$ ,  $I = \emptyset$ .

Положим  $S_{\delta_i} = \pi_{\hat{f}}(\bar{S}_{\delta_i})$ ,  $i = 1, 2$  (см. рис. 8). Выберем ориентацию на модульной поверхности, соответствующую обходу  $\bar{S}_{\bar{\delta}_1}$  от точки  $p(0, \varepsilon)$  к точке  $p\left(\frac{1}{2k-1}, \varepsilon\right)$ . В силу (10),  $\omega_{\hat{f}}(S_{\delta_1}) = 2\ell$ . Для выбранной ориентации, обход  $\bar{S}_{\bar{\delta}_2}$  происходит от точки  $p\left(\frac{1}{2k-1}, \frac{1}{2} - \varepsilon\right)$  к точке  $p\left(0, \frac{1}{2} - \varepsilon\right)$ , откуда следует, что  $\omega_{\hat{f}}(S_{\delta_2}) = 2(2k-1) - 2\ell$ .

Таким образом,  $\hat{f}$  имеет характеристику

$$\chi_{1,k,\ell} : [0, 2(2k-1); \emptyset; \{2\ell, 2(2k-\ell-1)\}; \emptyset].$$

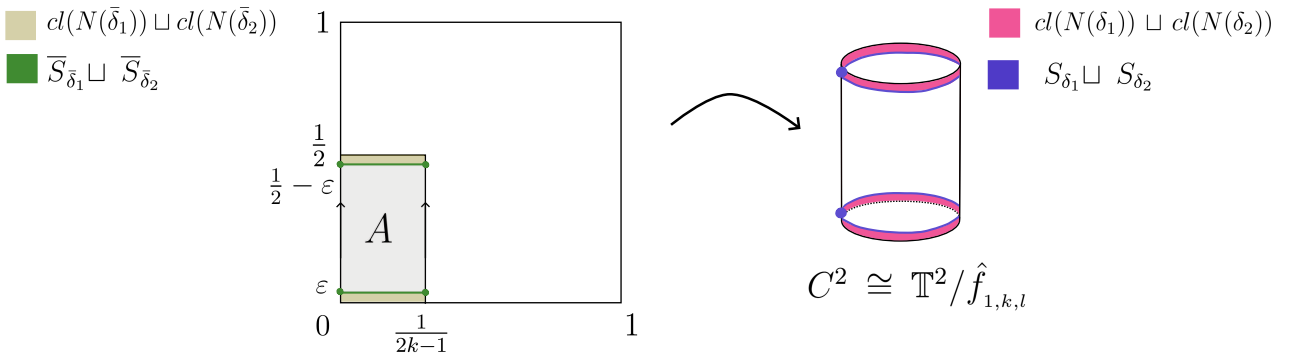


Рис. 8. Модульная поверхность  $\mathbb{T}^2/\hat{f}_{1,k,\ell}$

4.  $f(x, y) = f_{2k, \ell}(x, y) = \left(x + y + \frac{\alpha}{2k-1}, -y\right)$ , где  $4\ell\alpha \equiv 1 \pmod{2k-1}$ . Как и в случае 2, отображение  $f$  сохраняет горизонтальное слоение плоскости  $\mathbb{R}^2$  и слоение из прямых  $L_c = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y + 2x = c\}$ ,  $c \in \mathbb{R}$ . При этом,  $f(x, 0) = \left(x + \frac{\alpha}{2k-1}, 0\right)$ . Тогда отображение  $\hat{f}|_{p(Ox)}$  является поворотом с числом вращения  $\frac{\alpha}{2k-1}$  и отрезок  $p\left(\left[0, \frac{1}{2k-1}\right] \times \{0\}\right)$  – фундаментальная область этого поворота. Так как  $f\left(x, \frac{1}{2}\right) = \left(x + \frac{1}{2} + \frac{\alpha}{2k-1}, -\frac{1}{2}\right)$ , то отображение  $\hat{f}|_{p(y=\frac{1}{2})}$  является поворотом с числом вращения  $\frac{2(k-\alpha)-1}{2(2k-1)}$  и отрезок  $p\left(\left[\frac{1}{4}, \frac{1}{4} + \frac{1}{2(2k-1)}\right] \times \left\{\frac{1}{2}\right\}\right)$  – фундаментальная область этого поворота.

Поскольку  $f^{2k-1}(x, y) = (x + y + \alpha, -y)$ , то  $\hat{f}^{2(2k-1)}$  – тождественное отображение. Обозначим через  $\bar{A}$  часть единичного квадрата плоскости  $\mathbb{R}^2$ , ограниченную прямыми  $L_1$ ,  $L_{1+\frac{2}{2k-1}}$ ,  $y = 0$ ,  $y = \frac{1}{2}$  (см. рис. 9). Положим  $A = p(\bar{A})$ . Тогда параллелограмм  $A$  является фундаментальной областью отображения  $\hat{f}$ , период  $\hat{f}$  равен  $2(2k-1)$  и  $\hat{f}$  имеет только точки нечетного меньшего периода  $2k-1$ , составляющие окружность  $p([0, 1] \times \{0\})$ , т. е.  $Q = \emptyset$ .

Выберем  $\varepsilon \in (0, \frac{1}{4})$  и положим (см. рис. 9):

- $\bar{\delta} = p\left(\left[\frac{1}{2}, \frac{1}{2} + \frac{1}{2k-1}\right] \times \{0\}\right)$ ;
- $N(\bar{\delta}) = p([0, 1] \times [0, \varepsilon)) \cap A$ ;
- $\bar{S}_{\bar{\delta}} = p\left(\left[\frac{1-\varepsilon}{2}, \frac{1-\varepsilon}{2} + \frac{1}{2k-1}\right] \times \{\varepsilon\}\right)$ ;
- $\bar{\iota} = p\left(\left[\frac{1}{4} + \frac{1}{2(2k-1)}, \frac{1}{4} + \frac{1}{2k-1}\right] \times \left\{\frac{1}{2}\right\}\right)$ .

Поскольку  $4\ell\alpha \equiv 1 \pmod{2k-1}$ , то

$$f^{4\ell}(p(L_1) \cap A) = p\left(L_{1+\frac{2}{2k-1}}\right) \cap A. \quad (11)$$

То есть факторизация  $A$  происходит согласно правилу, изображенному на рис. 9. В силу предложения 13, модульная поверхность гомеоморфна ленте Мёбиуса  $\mathbb{M}^2$  с краем  $\delta = \pi_{\hat{f}}(\bar{\delta})$ .

После ее разрезания вдоль кривой  $\iota = \pi_{\hat{f}}(\bar{\iota})$ , получим поверхность  $\widetilde{\mathbb{T}^2/\hat{f}}$ , гомеоморфную цилиндру  $C^2$  (см. рис. 9) и, следовательно,  $h = 0$ .

Положим  $S_{\bar{\delta}} = \pi_{\hat{f}}(\bar{S}_{\bar{\delta}})$  (см. рис. 9). Ориентируем поверхность  $\widetilde{\mathbb{T}^2/\hat{f}}$  согласованно с обходом  $\bar{S}_{\bar{\delta}}$  от точки  $p\left(\frac{1}{2} - \varepsilon, 2\varepsilon\right)$  к точке  $p\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2k-1} - \varepsilon, 2\varepsilon\right)$ . Тогда, согласно (11),  $\omega_{\hat{f}}(S_{\bar{\delta}}) = 4\ell$ . Положим  $\iota = \pi_{\hat{f}}(\bar{\iota})$ . Выбранная ориентация согласована с направлением обхо-

да  $\bar{t}$  от точки  $p\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{2k-1}, \frac{1}{2}\right)$  к точке  $p\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{2(2k-1)}, \frac{1}{2}\right)$ . Заметим, что

$$4\ell\alpha \equiv 1 \pmod{2k-1} \Leftrightarrow 4\ell\alpha = (2k-1)t + 1, \quad t \in \mathbb{Z}.$$

Так как  $t$  должно быть нечетным, то  $4\ell\alpha \equiv 2k \pmod{2(2k-1)}$  и, следовательно,

$$2k + 1 - 4\ell\alpha \equiv 1 \pmod{2(2k-1)}.$$

Тогда

$$f^{2k-2\ell-1}\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{2k-1}, \frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{2k-1} + \frac{1}{2} + \frac{-2\ell\alpha}{2k-1}, \frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{2(2k-1)}, \frac{1}{2}\right) \pmod{1}.$$

Откуда  $\omega_{\hat{f}}(\iota) = 2(k-\ell) - 1$ .

Таким образом,  $\hat{f}$  имеет характеристику

$$\chi_{2,k,\ell} : [0, 2(2k-1); \emptyset; \{4\ell\}; \{2(k-\ell) - 1\}].$$

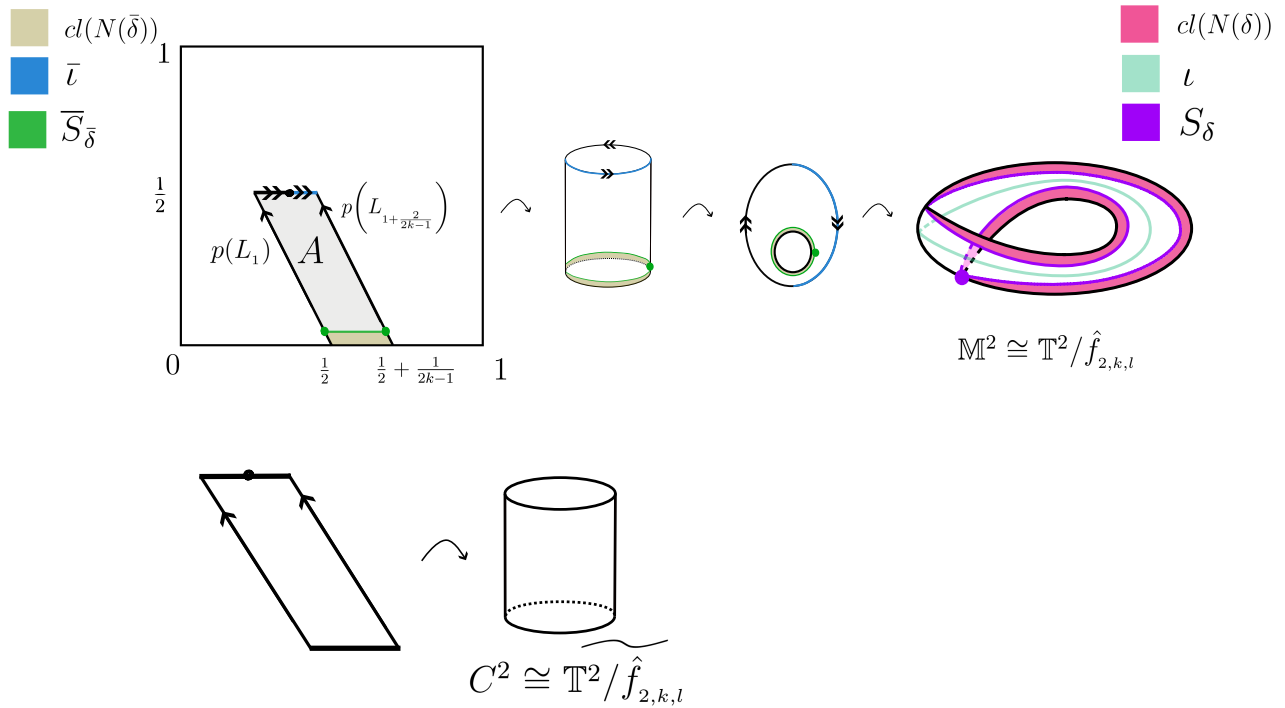


Рис. 9. Модульная поверхность  $\mathbb{T}^2 / \hat{f}_{2,k,\ell}$

□

## Список литературы

- [1] J. Nielsen, *Untersuchungen zur topologie der geschlossenen zweiseitigen Flächen*, Acta Math. **50** (1), 189–358 (1927) [In German].  
DOI: <https://doi.org/10.1007/BF02421324>
- [2] О.В. Починка, С.Х. Капкаева, В.З. Гринес, *Трехцветный граф как полный топологический инвариант для градиентно-подобных диффеоморфизмов поверхностей*, Матем. сб. **205** (10), 19–46 (2014).  
DOI: <https://doi.org/10.4213/sm8328>
- [3] J. Palis, C. Pugh, *Fifty problems in dynamical systems*, в сб.: Lecture Notes in Math. **468** Springer, Berlin-New York, 345–353 (1975).  
DOI: <https://doi.org/10.1007/BFb0082633>
- [4] E. Nozdrinova, O. Pochinka, *Solution of the 33rd Palis–Pugh problem for gradient-like diffeomorphisms of a two-dimensional sphere*, Discrete Contin. Dyn. Syst. **41** (3), 1101–1131 (2021).  
DOI: <https://doi.org/10.3934/dcds.2020311>
- [5] A.A. Nozdrinov, E.V. Nozdrinova, O.V. Pochinka, *Stable isotopy connectivity of gradient-like diffeomorphisms of 2-torus* J. Geom. Phys. **207**, art. 105352 (2025).  
DOI: <https://doi.org/10.1016/j.geomphys.2024.105352>
- [6] B. von Kerékjártó, *Über die periodischen Transformationen der Kreisscheibe und der Kugelfläche*, Math. Ann. **80** (1), 36–38 (1919) [in German].  
DOI: <https://doi.org/10.1007/BF01463232>
- [7] L.E.J. Brouwer, *Über die periodischen Transformationen der Kugel*, Math. Ann. **80** (1), 39–41 (1919) [in German].  
DOI: <https://doi.org/10.1007/BF01463233>
- [8] J. Nielsen, *Die struktur periodischer transformationen von flächen*, Math.-fys. Medd. Danske Vid. Selsk. **15** (1), Levin and Munksgaard, 1937.
- [9] K. Yokoyama, *Classification of periodic maps on compact surfaces: I*, Tokyo J. Math. **6** (1), 75–94 (1983).  
DOI: <https://doi.org/10.3836/tjm/1270214327>
- [10] K. Yokoyama, *Classification of periodic maps on compact surfaces: II*, Tokyo J. Math. **7** (1), 249–285 (1984).  
DOI: <https://doi.org/10.3836/tjm/1270153007>
- [11] K. Yokoyama, *Complete classification of periodic maps on compact surfaces*, Tokyo J. Math. **15** (2), 247–279 (1992).  
DOI: <https://doi.org/10.3836/tjm/1270129455>

- [12] H. Hang, *Homology and orientation reversing periodic maps on surfaces*, Topology Appl. **229**, 1–19 (2017).  
DOI: <https://doi.org/10.1016/j.topol.2017.06.023>
- [13] S. Hirose, *Presentations of periodic maps on oriented closed surfaces of genera up to 4*, Osaka J. Math. **47** (2), 385–421 (2010).
- [14] D.A. Baranov, V.Z. Grines, O.V. Pochinka, E.E. Chilina, *On a classification of periodic maps on the 2-torus*, Russ. J. Nonlinear Dyn. **19** (1) 91–110 (2023).  
DOI: <https://doi.org/10.20537/nd220702>
- [15] Д.А. Баранов, О.В. Починка, *Классификация периодических преобразований ориентированной поверхности рода два*, Журнал СВМО **23** (2), 147–158 (2021).  
DOI: <https://doi.org/10.15507/2079-6900.23.202102.147-158>
- [16] K.-I. Tahara, *On the finite subgroups of  $GL(3, \mathbb{Z})$* , Nagoya Math. J. **41**, 169–209 (1971).  
DOI: <https://doi.org/10.1017/S002776300001415X>
- [17] K.W. Kwun, J.L. Tollefson, *PL Involutions of  $S^1 \times S^1 \times S^1$* , Trans. Amer. Math. Soc. **203**, 97–106 (1975).  
DOI: <https://doi.org/10.2307/1997071>
- [18] J. Hempel, *Free cyclic actions on  $S^1 \times S^1 \times S^1$* , Proc. Amer. Math. Soc. **48** (1), 221–227 (1975).  
DOI: <https://doi.org/10.2307/2040721>
- [19] M.A. Natsheh, *On cyclic group actions of even order on the three dimensional torus*, Bull. Austral. Math. Soc. **37** (2), 189–196 (1988).  
DOI: <https://doi.org/10.1017/S0004972700026721>
- [20] L.E.J. Brouwer, *Aufzählung der periodischen Transformationen des Torus*, в сб.: KNAW Proc. **21** II, 1352–1356 (1919).
- [21] Ч. Коснёвски, *Начальный курс алгебраической топологии*, Мир, М., 1983.

**Тимур Денисович Мартынов**

Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики»,  
ул. Большая Печерская, д. 25/12, г. Нижний Новгород, 603155, Россия,  
*e-mail*: mar.tim.denn@gmail.com

**Ольга Витальевна Починка**

Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики»,  
ул. Большая Печерская, д. 25/12, г. Нижний Новгород, 603155, Россия,  
*e-mail*: olga-pochinka@yandex.ru

**Екатерина Евгеньевна Чилина**

Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики»,  
ул. Большая Печерская, д. 25/12, г. Нижний Новгород, 603155, Россия,  
*e-mail*: k.chilina@yandex.ru

# Classification of orientation reversing periodic homeomorphisms of a two dimensional torus

T.D. Martynov, O.V. Pochinka, E.E. Chilina

**Abstract.** According to J. Nielsen and H. Hang, each class of topological conjugacy of periodic homeomorphisms of orientable compact surfaces is completely described by a finite set of data called the *characteristic*. For a two-dimensional sphere, exhaustive classification results with the construction of linear representatives in each conjugacy class were obtained by B. Kerékjártó. For a two-dimensional torus, similar results were obtained with the participation of the authors of this article. Here we find all the characteristics of orientation-changing periodic homeomorphisms of a two-dimensional torus. A homeomorphism representing a class of topological conjugacy is constructed for each of them. The classification of periodic homeomorphisms, in addition to being of independent interest, plays a key role in solving the Palis–Pugh problem of constructing stable arcs in the space of discrete dynamical systems, which is included in the list of 50 most important problems of dynamical systems. For all classes of gradient-like diffeomorphisms of surfaces where this problem is solved, the idea of a close connection of such systems with periodic transformations was used. Thus, the obtained result will make it possible to expand the class of systems for which the Palis problem has been solved.

**Keywords:** periodic homeomorphisms, two-dimensional torus, topological classification.

**DOI:** 10.26907/2949-3919.2025.3.87-109

## References

- [1] J. Nielsen, *Untersuchungen zur topologie der geschlossenen zweiseitigen Flächen*, Acta Math. **50** (1), 189–358 (1927) [In German].  
DOI: <https://doi.org/10.1007/BF02421324>
- [2] V.Z. Grines, S.Kh. Kapkaeva, O.V. Pochinka, *A three-colour graph as a complete topological invariant for gradient-like diffeomorphisms of surfaces*, Sb. Math. **205** (10), 1387–1412 (2014).  
DOI: <https://doi.org/10.1070/SM2014v205n10ABEH004423>

---

Acknowledgements. This work is an output of a research project implemented as part of the Basic Research Program at the National Research University Higher School of Economics (HSE University).

Received: 19 June 2025. Accepted: 09 September 2025. Published: 16 October 2025.

- [3] J. Palis, C. Pugh, *Fifty problems in dynamical systems*, in: Lecture Notes in Math. **468** Springer, Berlin-New York, 345–353 (1975).  
DOI: <https://doi.org/10.1007/BFb0082633>
- [4] E. Nozdrinova, O. Pochinka, *Solution of the 33rd Palis–Pugh problem for gradient-like diffeomorphisms of a two-dimensional sphere*, Discrete Contin. Dyn. Syst. **41** (3), 1101–1131 (2021).  
DOI: <https://doi.org/10.3934/dcds.2020311>
- [5] A.A. Nozdrinov, E.V. Nozdrinova, O.V. Pochinka, *Stable isotopy connectivity of gradient-like diffeomorphisms of 2-torus* J. Geom. Phys. **207**, art. 105352 (2025).  
DOI: <https://doi.org/10.1016/j.geomphys.2024.105352>
- [6] B. von Kerékjártó, *Über die periodischen Transformationen der Kreisscheibe und der Kugelfläche*, Math. Ann. **80** (1), 36–38 (1919) [in German].  
DOI: <https://doi.org/10.1007/BF01463232>
- [7] L.E.J. Brouwer, *Über die periodischen Transformationen der Kugel*, Math. Ann. **80** (1), 39–41 (1919) [in German].  
DOI: <https://doi.org/10.1007/BF01463233>
- [8] J. Nielsen, *Die struktur periodischer transformationen von flächen*, Math.-fys. Medd. Danske Vid. Selsk. **15** (1), Levin and Munksgaard, 1937.
- [9] K. Yokoyama, *Classification of periodic maps on compact surfaces: I*, Tokyo J. Math. **6** (1), 75–94 (1983).  
DOI: <https://doi.org/10.3836/tjm/1270214327>
- [10] K. Yokoyama, *Classification of periodic maps on compact surfaces: II*, Tokyo J. Math. **7** (1), 249–285 (1984).  
DOI: <https://doi.org/10.3836/tjm/1270153007>
- [11] K. Yokoyama, *Complete classification of periodic maps on compact surfaces*, Tokyo J. Math. **15** (2), 247–279 (1992).  
DOI: <https://doi.org/10.3836/tjm/1270129455>
- [12] H. Hang, *Homology and orientation reversing periodic maps on surfaces*, Topology Appl. **229**, 1–19 (2017).  
DOI: <https://doi.org/10.1016/j.topol.2017.06.023>
- [13] S. Hirose, *Presentations of periodic maps on oriented closed surfaces of genera up to 4*, Osaka J. Math. **47** (2), 385–421 (2010).
- [14] D.A. Baranov, V.Z. Grines, O.V. Pochinka, E.E. Chilina, *On a classification of periodic maps on the 2-torus*, Russ. J. Nonlinear Dyn. **19** (1) 91–110 (2023).  
DOI: <https://doi.org/10.20537/nd220702>
- [15] D.A. Baranov, O.V. Pochinka, *Classification of periodic transformations of an orientable surface of genus two*, Zh. SVMO **23** (2), 147–158 (2021) [in Russian].  
DOI: <https://doi.org/10.15507/2079-6900.23.202102.147-158>

- [16] K.-I. Tahara, *On the finite subgroups of  $GL(3, \mathbb{Z})$* , Nagoya Math. J. **41**, 169–209 (1971).  
DOI: <https://doi.org/10.1017/S002776300001415X>
- [17] K.W. Kwun, J.L. Tollefson, *PL Involutions of  $S^1 \times S^1 \times S^1$* , Trans. Amer. Math. Soc. **203**, 97–106 (1975).  
DOI: <https://doi.org/10.2307/1997071>
- [18] J. Hempel, *Free cyclic actions on  $S^1 \times S^1 \times S^1$* , Proc. Amer. Math. Soc. **48** (1), 221–227 (1975).  
DOI: <https://doi.org/10.2307/2040721>
- [19] M.A. Natsheh, *On cyclic group actions of even order on the three dimensional torus*, Bull. Austral. Math. Soc. **37** (2), 189–196 (1988).  
DOI: <https://doi.org/10.1017/S0004972700026721>
- [20] L.E.J. Brouwer, *Aufzählung der periodischen Transformationen des Torus*, in: KNAW Proc. **21** II, 1352–1356 (1919).
- [21] C. Kosniowski, *A first course in algebraic topology*, Cambridge University Press, Cambridge-New York, 1980.  
DOI: <https://doi.org/10.1017/CBO9780511569296>

**Timur Denisovich Martynov**

HSE University,

25/12 Bolshaya Pecherskaya str., Nizhny Novgorod, 603155, Russia,

*e-mail*: mar.tim.denn@gmail.com

**Olga Vitalyevna Pochinka**

HSE University,

25/12 Bolshaya Pecherskaya str., Nizhny Novgorod, 603155, Russia,

*e-mail*: olga-pochinka@yandex.ru

**Ekaterina Evgenevna Chilina**

HSE University,

25/12 Bolshaya Pecherskaya str., Nizhny Novgorod, 603155, Russia,

*e-mail*: k.chilina@yandex.ru