

О минимальных множествах непрерывных отображений на одномерных континуумах

Е.Н. Махрова

Аннотация. Пусть X – конечное дерево, а $f : X \rightarrow X$ – непрерывное отображение, имеющее нулевую топологическую энтропию и бесконечное минимальное множество M . Нами доказано, что сужение $f|_M$ отображения f на M топологически сопряжено отображению счетчика τ_α , где $\alpha = (j_1, \dots, j_n, 2, 2, \dots)$ есть последовательность при $j_i \geq 2$ для $1 \leq i \leq n$. Дано описание топологической структуры конечных деревьев, на которых существуют непрерывные отображения с нулевой топологической энтропией и бесконечным минимальным множеством M , на котором отображение $f|_M$ топологически сопряжено счетчику τ_α , где $\alpha = (j_1, \dots, j_n, 2, 2, \dots)$. В то же время для любой последовательности $\alpha = (j_1, \dots, j_i, \dots)$, где $j_i \geq 2$ для всех $i \geq 1$, существуют дендрит X , не являющийся конечным деревом, и непрерывное отображение f с нулевой топологической энтропией и бесконечным минимальным множеством M , на котором отображение f топологически сопряжено счетчику τ_α .

Нами также показано: если X – дендрит, а $f : X \rightarrow X$ – непрерывное отображение, имеющее нулевую топологическую энтропию и бесконечное минимальное множество M , то существует такая последовательность $\alpha = (j_1, \dots, j_i, \dots)$ ($j_i \geq 2$), что отображение $f|_M$ полусопряжено отображению счетчика τ_α .

Ключевые слова: дендрит, конечное дерево, минимальное множество, отображение счетчика (adding-machine), топологическая энтропия, почти периодическая точка, рекуррентная точка.

DOI: 10.26907/2949-3919.2025.3.110-135

Введение

1. Под *континуумом* будем понимать компактное связное метрическое пространство. Пусть X – континуум, p – произвольная точка из X . Если связными компонентами границы произвольной окрестности $U(p)$ точки p в X являются одноточечные множества, то X называется *одномерным континуумом* (см., например, [1, том 1, гл. 2, §25, I]). Локально связный континуум, не содержащий подмножеств, гомеоморфных окружности,

Благодарности. Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 24-21-00242, <https://rscf.ru/project/24-21-00242/>.

© 2025 Е.Н. Махрова

Поступила: 07.06.2025. Принята: 09.09.2025. Опубликовано: 16.10.2025.

называется *дендритом*. Из данного определения следует, что дендрит – одномерный континуум.

Пусть X – дендрит, а $p \in X$. Тогда $X \setminus \{p\}$ либо единственное связное множество, либо представимо в виде конечного объединения связных множеств. Каждое связное множество из $X \setminus \{p\}$ назовем *компонентой точки p* . Если множество $X \setminus \{p\}$ связно, то p называется *концевой точкой дендрита X* . Если $X \setminus \{p\}$ состоит из более двух компонент, то p – *точка ветвления дендрита X* . Дендрит с конечным числом концевых точек называется *конечным деревом*.

Условимся обозначать через $R(X)$ ($E(X)$) множество точек ветвления (концевых точек) дендрита X .

Пусть X – компактное топологическое пространство, $f : X \rightarrow X$ – непрерывное отображение. Непустое множество $M \subset X$ называется *минимальным относительно f* , если оно замкнуто, инвариантно и не содержит собственных подмножеств, удовлетворяющих указанным свойствам. Если X само является минимальным множеством, то отображение f будем называть *минимальным*.

Одним из основных вопросов теории динамических систем является вопрос существования минимальных множеств, их взаимосвязи с равенством нулю или положительностью топологической энтропии и свойствами динамической системы. Результаты такого рода исследований непрерывных отображений отрезка или конечных деревьев связаны, в основном, с конечными минимальными множествами, т. е. периодическими орбитами. Так, например, установлена связь между периодами периодических точек, топологической энтропией и свойствами непрерывного отображения отрезка (см., например, [2, гл. 3, § 3]). В [3] получены условия на периодические орбиты непрерывного отображения конечного дерева, при выполнении которых топологическая энтропия заданного отображения положительная. Отметим, что свойства как конечных, так и бесконечных минимальных множеств у непрерывного отображения отрезка и 3-ода изучались в [4, 5] с использованием понятия D -функции минимального множества. В [6] описаны свойства бесконечных минимальных множеств у непрерывного отображения отрезка с нулевой топологической энтропией. Что касается непрерывных отображений дендритов, то конечные минимальные множества не оказывают влияние на топологическую энтропию [7], зато существует связь между свойствами бесконечных минимальных множеств и топологической энтропией [8].

В нашей работе изучаются свойства бесконечных минимальных множеств у непрерывного отображения с нулевой топологической энтропией, заданного на конечном дереве и дендрите.

2. Чтобы сформулировать основные результаты работы, нам понадобится понятие отображения счетчика (англоязычная версия – adding-machine, odometer, solenoid; см., например, [9]).

Пусть $\alpha = (j_1, j_2, \dots)$ – последовательность натуральных чисел, где $j_i \geq 2$ для любого натурального числа i , и

$$\Delta_\alpha = \{(x_1, x_2, \dots) : x_i \in \{0, 1, \dots, j_i - 1\}, i \geq 1\}.$$

Определим метрику на Δ_α , положив

$$d_\alpha((x_1, x_2, \dots), (y_1, y_2, \dots)) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\delta(x_i, y_i)}{2^i},$$

где $\delta(x_i, y_i) = 1$, если $x_i \neq y_i$, и $\delta(x_i, y_i) = 0$, если $x_i = y_i$.

Определим сложение в Δ_α по следующему правилу:

$$(x_1, x_2, \dots) + (y_1, y_2, \dots) = (z_1, z_2, \dots),$$

где $z_1 = (x_1 + y_1) \bmod j_1$ и $z_2 = (x_2 + y_2 + t_1) \bmod j_2$. Здесь $t_1 = 0$, если $x_1 + y_1 < j_1$, и $t_1 = 1$, если $x_1 + y_1 \geq j_1$, и т. д.

Определим отображение счетчика или просто счетчик $\tau_\alpha : \Delta_\alpha \rightarrow \Delta_\alpha$ так, чтобы

$$\tau_\alpha(x_1, x_2, \dots) = (x_1, x_2, \dots) + (1, 0, 0, \dots).$$

Если $j_i = 2$ при любом $i \geq 1$, то положим $\alpha = 2$, а отображение τ_2 будем называть *двоичным счетчиком*.

В [10, теорема 4.1] показано, что для любой последовательности α счетчик τ_α является минимальным отображением. Отметим, что отображение счетчика играет важную роль в описании динамики непрерывного отображения отрезка (см., например, [11–13]).

Перейдем к основным результатам работы. Первая теорема является характеристическим свойством бесконечного минимального множества у непрерывного отображения конечного дерева с нулевой топологической энтропией и является обобщением результата А. Катка и Б. Хасселблата, доказанного для непрерывного отображения отрезка (см. далее [теорему 9](#)).

Теорема 1. Пусть X – конечное дерево, непрерывное отображение $f : X \rightarrow X$ имеет нулевую топологическую энтропию и бесконечное минимальное множество M . Тогда

- 1) существует такая последовательность α , что отображение $f|_M$ топологически сопряжено счетчику τ_α , т. е. существует гомеоморфизм $h : M \rightarrow \Delta_\alpha$, для которого $\tau_\alpha \circ h = h \circ f|_M$;
- 2) найдется такое натуральное число $n \geq 1$, что $j_i \geq 2$ для $1 \leq i \leq n$, а $j_i = 2$ для всех $i \geq n + 1$, т. е. последовательность α имеет вид $(j_1, \dots, j_n, 2, 2, \dots)$.

Следующая теорема является обратной для [теоремы 1](#) и описывает структуру конечного дерева, допускающего существование непрерывного отображения с нулевой топологической энтропией и с бесконечным минимальным множеством, сужение отображения

на которое топологически сопряжено счетчику τ_α , где α – любая наперед заданная последовательность вида

$$(j_1, \dots, j_n, 2, 2, \dots), \text{ где } j_i \geq 2 \text{ для } 1 \leq i \leq n. \quad (1)$$

Теорема 2. Для любой последовательности α вида (1) существуют конечное дерево X , у которого $\text{card } R(X) = 1 + j_1 + \dots + j_{n-1}$, и непрерывное отображение $f : X \rightarrow X$ с нулевой топологической энтропией такие, что f имеет бесконечное минимальное множество M , на котором отображение $f|_M$ топологически сопряжено счетчику τ_α , где $\text{card}(\cdot)$ – мощность множества $(\cdot)$.

Отметим, что для любого конечного дерева X , у которого число точек ветвления меньше, чем $1 + j_1 + \dots + j_{n-1}$ и любой последовательности α вида (1) существует непрерывное отображение $f : X \rightarrow X$, имеющее бесконечное минимальное множество M , на котором отображение $f|_M$ топологически сопряжено счетчику τ_α , но топологическая энтропия f положительна.

Следующая теорема показывает, что дендриты допускают существование непрерывных отображений с нулевой топологической энтропией, имеющих бесконечное минимальное множество, на котором каждое заданное отображение топологически сопряжено счетчику τ_α для любой наперед заданной последовательности α .

Теорема 3. Для любой последовательности α существуют дендрит Y и непрерывное отображение $f : Y \rightarrow Y$, обладающее следующими свойствами:

- 1) топологическая энтропия f равна нулю;
- 2) f имеет бесконечное минимальное множество M , сужение отображения на которое топологически сопряжено счетчику τ_α .

В следующей теореме выделен класс дендритов, на которых любое непрерывное отображение с нулевой топологической энтропией и бесконечным минимальным множеством имеет свойство, связанное с отображением счетчика.

Теорема 4. Пусть X – дендрит со счетным числом концевых точек, $f : X \rightarrow X$ – непрерывное отображение, имеющее нулевую топологическую энтропию и бесконечное минимальное множество M . Тогда существует такая последовательность α , что сужение $f|_M$ отображения f на M полусопряжено отображению счетчику τ_α , т. е. существует такое непрерывное сюръективное отображение $h : M \rightarrow \Delta_\alpha$, что $\tau_\alpha \circ h = h \circ f$.

Данная теорема неверна в случае, когда X является окружностью или конечным графом [8, теорема 1.7]. Отметим также, что различия в свойствах отображений, заданных на конечных деревьях и дендритах, у которых имеется бесконечное минимальное множество (см. утверждение 1) теоремы 1 и теорему 4), связаны с различной топологической структурой самого бесконечного минимального множества (см., например, [14, 15]).

В заключение данного раздела отметим, что с каждым годом растет интерес к динамическим системам, заданным на одномерных разветвленных континуумах, поскольку

они появляются как множества Жюлиа в комплексных динамических системах [16], как предельные множества динамических систем с фазовыми пространствами размерности, не меньшей двойки [17, 18], как глобальные аттракторы косых произведений и интегрируемых отображений [19, 20], как аттракторы стягиваемых полигональных систем [21], в задачах математической физики [22] и др.

1. Предварительные сведения

1. Обозначим через $\mathbb{N}$ – множество натуральных чисел, $\mathbb{C}$ – множество комплексных чисел, через i мнимую единицу.

Пусть X – дендрит, A – подмножество в X . Обозначим через $\text{diam } A$ диаметр множества A ; $\text{card } A$ – мощность множества A .

Следуя работе [23], связное подмножество дендрита X , замыкание которого гомеоморфно отрезку $[0; 1]$ на прямой $\mathbb{R}^1$, будем называть *дугой*.

Символом $[x; y]$ будем обозначать дугу с концами в точках x и y , содержащую эти точки. Положим $(x; y) = [x; y] \setminus \{x\}$, $[x; y) = [x; y] \setminus \{y\}$, $(x; y) = [x; y] \setminus \{x; y\}$.

Отметим следующие свойства дендритов.

Лемма 5 ([1]). Пусть X – дендрит. Тогда

- 1) любые различные две точки x, y в X можно соединить единственной дугой $[x; y]$;
- 2) множество $R(X)$ точек ветвления дендрита X не более, чем счетно;
- 3) любой подконтиуум дендрита – дендрит.

Если X – конечное дерево, то $R(X)$ конечно. Более того, для любой точки p в X число компонент точки p также конечно. Число компонент точки p будем называть *порядком точки p* и обозначать через $\text{ord}_X p$.

2. Пусть $f : X \rightarrow X$ – непрерывное отображение дендрита X , p – произвольная точка в X . Точка p называется

- *периодической точкой отображения f* , если существует такое $n \in \mathbb{N}$, что $f^n(p) = p$; наименьшее n , удовлетворяющее данному условию называется *периодом* точки p . Если $n = 1$, то p называется *неподвижной точкой отображения f* ;
- *устойчивой по Пуассону относительно f* , если для любой окрестности $U(p)$ точки p найдется такое $n \in \mathbb{N}$, что $f^n(p) \in U(p)$;
- *рекуррентной относительно f* , если p – устойчивая по Пуассону и для любой окрестности $U(p)$ точки p существует $k_0 \in \mathbb{N}$ такое, что если $f^j(p) \in U(p)$ для некоторого $j \geq 1$, то существует натуральное число $0 < k \leq k_0$, для которого $f^{j+k}(p) \in U(p)$;
- *почти периодической относительно f* , если для любой окрестности $U(p)$ точки p найдется такое натуральное число $n \geq 1$, что $f^{nj}(p) \in U(p)$ для любого $j \geq 1$.

Обозначим через $\text{Fix}(f)$, $\text{Per}(f)$, $\text{Poiss}(f)$, $\text{Rec}(f)$, $\text{AP}(f)$ – множество неподвижных точек, периодических точек, устойчивых по Пуассону точек, рекуррентных точек, почти периодических точек отображения f , соответственно.

Из приведенных выше определений следуют включения:

$$\text{Fix}(f) \subseteq \text{Per}(f) \subseteq \text{AP}(f) \subseteq \text{Rec}(f) \subseteq \text{Poiss}(f). \quad (2)$$

А из определения рекуррентной точки получаем равенство:

$$\text{Rec}(f) = \text{Rec}(f^n) \quad \text{для любого } n \in \mathbb{N}. \quad (3)$$

Следующая теорема устанавливает связь между минимальным множеством и множеством рекуррентных точек у непрерывного отображения континуума и является переформулировкой характеристического свойства минимальных множеств, полученного Дж. Биркгофом [24, гл. 7, §7].

Теорема 6 ([25]). Пусть X – континуум, $f : X \rightarrow X$ – непрерывное отображение, точка $x \in X$. Множество $\overline{\{f^i(x)\}_{i \geq 0}}$ является минимальным тогда и только тогда, когда $x \in \text{Rec}(f)$.

Для доказательства основных результатов работы нам понадобятся следующие утверждения, касающиеся свойств минимальных множеств.

Лемма 7 ([26]). Пусть $f : M \rightarrow M$ – минимальное отображение. Тогда для любого открытого множества $U \subset M$ найдется такое $n_0 \in \mathbb{N}$, что $\bigcup_{n=0}^{n_0} f^{-n}(U) = M$.

Теорема 8 ([9]). Пусть $f : X \rightarrow X$ – непрерывное отображение компактного метрического пространства X , M – бесконечное минимальное множество в X относительно f . Если любая точка $x \in M$ является почти периодической относительно f , то найдется такая последовательность α , что отображение $f|_M$ топологически сопряжено счетчику τ_α .

Теорема 9 ([6, теорема 11.3.13]). Пусть непрерывное отображение $f : [0; 1] \rightarrow [0; 1]$ отрезка $[0; 1] \subset \mathbb{R}^1$ имеет нулевую топологическую энтропию и замкнутое топологически транзитивное множество M (т. е. существует точка $x \in M$ такая, что $\overline{\{f^i(x)\}_{i \geq 0}} = M$) без периодических точек. Тогда отображение $f|_M$ топологически сопряжено двоичному счетчику τ_2 .

В частности, теорема 9 справедлива, если M – бесконечное минимальное множество, поскольку любое бесконечное минимальное множество является топологически транзитивным замкнутым множеством без периодических точек.

3. Определение топологической энтропии для непрерывного отображения компактного топологического пространства введено в [27], где доказано следующая

Лемма 10 ([27, теорема 2]). Для любого непрерывного отображения $f : X \rightarrow X$ компакта X справедливо равенство $h(f^n) = n \cdot h(f)$.

Положительность топологической энтропии у одномерных динамических систем чаще всего устанавливается в случае существования подковы у заданного отображения. Напомним определение подковы.

Определение 11. Пусть $f : X \rightarrow X$ – непрерывное отображение дендрита X . Будем говорить, что f имеет подкову, если существуют непустые непересекающиеся подконтинуумы A, B в X такие, что $f(A) \cap f(B) \supset A \cup B$.

Подкову отображения f будем обозначать через (A, B) .

Следующая теорема является непосредственным следствием определений топологической энтропии [27] и подковы (см. также [23]).

Теорема 12. Если непрерывное отображение $f : X \rightarrow X$ компактного топологического пространства X имеет подкову, то топологическая энтропия отображения f положительна.

2. Доказательство теоремы 1

Для доказательства теоремы 1 нам потребуются следующие вспомогательные утверждения.

Теорема 13 ([28]). Пусть $f : X \rightarrow X$ – непрерывное отображение дендрита X , у которого множество концевых точек не более чем счетно, а Y – подконтинуум в X такой, что $Y \subseteq f(Y)$. Тогда $Y \cap \text{Per}(f) \neq \emptyset$.

Пусть X – дендрит, A – подмножество в X . Положим

$$[A] = \bigcup_{x,y \in A} [x, y].$$

Приведем необходимое нам свойство множества $[A]$.

Лемма 14 ([29]). Пусть X – дендрит, A – замкнутое множество в X . Тогда $[A]$ – дендрит, причем множество $E([A])$ концевых точек дендрита $[A]$ удовлетворяет условию: $E([A]) \subseteq A$.

Пусть непрерывное отображение $f : X \rightarrow X$ конечного дерева X имеет бесконечное множество M . Поскольку X – конечное дерево, то в силу леммы 14 $[M]$ – конечное дерево или дуга. Следующее утверждение устанавливает факт существования периодической точки на $[M]$ у непрерывного отображения f .

Лемма 15. Если непрерывное отображение $f : X \rightarrow X$ конечного дерева X имеет бесконечное минимальное множество M , то существует периодическая точка p в $[M]$, причем $\text{ord}_Y p \geq 2$.

Доказательство. Так как минимальное множество замкнуто, то в силу [леммы 14](#) $[M]$ – конечное дерево, частным случаем которого является дуга, причем $E(Y) \subset M$. Положим $Y = [M]$. Из непрерывности f получаем, что $f(Y)$ связно. Так как M – минимальное множество, то $f(M) = M$. Отсюда и из условий « $E(Y) \subset M$ », « $f(Y)$ связно» получаем, что $Y \subseteq f(Y)$. В силу [теоремы 13](#) существует периодическая точка p в Y . Поскольку $E(Y) \subset M$, а $p \notin M$, то $p \notin E(Y)$, т. е. $\text{ord}_Y p \geq 2$. [Лемма 15](#) доказана. $\square$

Отметим, если X – дендрит, не являющийся конечным деревом, то непрерывное отображение $f : X \rightarrow X$, у которого существует бесконечное минимальное множество M , может не иметь периодических точек на $[M]$ (см., например, [\[28, 29\]](#)). В случае, когда X – конечное дерево и непрерывное отображение $f : X \rightarrow X$ имеет бесконечное минимальное множество M , то из [леммы 15](#) получаем, что

$$[M] \cap \text{Per}(f) \neq \emptyset.$$

Пусть p – любая периодическая точка из $[M]$, а x – произвольная точка в M . Положим $Y = [M]$. Обозначим компоненту точки p в Y , содержащую точку x , через $Y_x(p)$. Докажем вспомогательное утверждение.

Лемма 16. Пусть непрерывное отображение $f : X \rightarrow X$ конечного дерева X имеет нулевую топологическую энтропию и бесконечное минимальное множество M . Тогда для любой периодической точки p в $Y = [M]$ периода t и произвольной точки $x \in M$ существует натуральное число n , кратное t , такое, что $\{f^{ni}(x)\}_{i \geq 0} \subset Y_x(p)$.

Доказательство. Так как $x \in M$, то согласно [теореме 6](#) имеем $x \in \text{Res}(f)$. В силу [\(3\)](#) получаем, что $x \in \text{Res}(f^m)$. Тогда из определения рекуррентной точки относительно f^m следует

$$Y_x(p) \cap \{f^{mi}(x)\}_{i \geq 1} \neq \emptyset.$$

Рассмотрим следующие случаи:

- (I) существует такое натуральное число $i_0 \geq 1$, что $x \in (p; f^{mi_0}(x))$;
- (II) для любого натурального числа $i \geq 1$ не выполнено условие (I).

Пусть имеет место случай (I). Положим $g = f^{mi_0}$. Тогда $g(p) = p$, и $x \in (p; g(x))$. Покажем, что $g^i(x) \in Y_x(p)$ для любого числа $i \geq 1$. Предположим противное. Тогда существует натуральное число $s \geq 2$ такое, что $g^s(x) \notin Y_x(p)$. Так как $g(p) = p$, и $g([p; x])$ связно в силу непрерывности g , то

$$g([p; x]) \supseteq [p; g(x)] \supset [p; x].$$

Поэтому найдется точка $x_1 \in (p; x)$, для которой $g(x_1) = x$. Тогда

$$g([p; x_1]) \supseteq [p; g(x_1)] \supset [p; x_1].$$

Следовательно, существует точка $x_2 \in (p; x_1)$ такая, что $g(x_2) = x_1$. Повторим приведенные рассуждения $(s - 1)$ раз ($s \geq 2$). В результате построим набор точек $x_1, \dots, x_{s-1}$, удовлетворяющих следующим свойствам:

- 1) $x_i \in (p; x_{i-1})$ для всех $2 \leq i \leq s - 1$;
- 2) $g(x_i) = x_{i-1}$, и, следовательно, $g^i(x_i) = x$ для каждого $1 \leq i \leq s - 1$.

Покажем, что отображение g^s имеет подкову $([p; x_{s-1}], [x_{s-2}; g(x)])$. Из свойства 1) точек $\{x_i\}_{i=1}^{s-1}$ следует, что $x_{s-1} \in (p; x_{s-2})$. Поэтому

$$[p; x_{s-1}] \cap [x_{s-2}; g(x)] = \emptyset.$$

Используя непрерывность g , свойства 1)–2) набора точек $\{x_i\}_{i=1}^{s-1}$, получаем:

$$\begin{aligned} g^s([p; x_{s-1}]) &\supseteq g([p; g^{(s-1)}(x_{s-1})]) = g([p; x]) \supseteq [p; g(x)] \supset [p; x_{s-1}] \cup [x_{s-2}; g(x)], \\ g^s([x_{s-2}; g(x)]) &\supseteq g^2([g^{(s-2)}(x_{s-2}); g^{(s-1)}(x)]) = g^2([x; g^{(s-1)}(x)]) \supseteq g([g(x); g^s(x)]) \supset \\ &\supset g([p; x]) \supseteq [p; g(x)] \supset [p; x_{s-1}] \cup [x_{s-2}; g(x)]. \end{aligned}$$

Таким образом, g^s имеет подкову $([p; x_{s-1}], [x_{s-2}; g(x)])$. В силу [теоремы 12](#) топологическая энтропия отображения g^s положительная. Согласно [лемме 10](#) топологическая энтропия отображения f также положительна. Последнее противоречит условиям [леммы 16](#). Поэтому $\{g^i(x)\}_{i \geq 0} = \{f^{ni}(x)\}_{i \geq 0} \subset Y_x(p)$, где $n = m i_0$. В первом случае [лемма 16](#) справедлива.

Пусть имеет место случай (II). Выберем окрестность $U(x)$ точки x таким образом, чтобы $U(x) \subset Y_x(p)$, и

$$(U(x) \setminus \{x\}) \cap R(Y) = \emptyset. \quad (4)$$

Поскольку $x \in M$, то согласно [теореме 6](#) справедливо $x \in \text{Res}(f)$. Используя (3), получаем, что $x \in \text{Res}(f^m)$. Положим $g = f^m$. Из определения рекуррентной точки отображения g следует существование такого натурального числа $j \geq 1$, что $g^j(x) \in U(x)$. Согласно (4) в случае (II) имеем: $g^j(x) \in (p; x)$. Выберем окрестность $U(g^j(x))$ точки $g^j(x)$ со следующими свойствами:

$$U(g^j(x)) \subset U(x), \quad U(g^j(x)) \cap \{x\} = \emptyset.$$

В силу [леммы 7](#) найдется такое натуральное число $s \geq 1$, что

$$(g^{-s}(x) \cap M) \cap U(g^j(x)) \neq \emptyset.$$

Пусть $y \in (g^{-s}(x) \cap M) \cap U(g^j(x))$. Из (4) и выбора окрестности $U(g^j(x))$ точки $g^j(x)$ получаем, что $y \in (p; x)$, причем $g^s(y) = x$. В силу рассмотренного случая (I) выполнено включение: $\{g^{si}(y)\}_{i \geq 0} \subset Y_y(p)$. Следовательно, $\{g^{si}(x)\}_{i \geq 0} \subset Y_y(p)$. Поскольку точки x и y принадлежат одной компоненте точки p , то $\{g^{si}(x)\}_{i \geq 0} \subset Y_x(p)$. Положим $n = ms$. Тогда все точки $\{f^{ni}(x)\}_{i \geq 0}$ лежат на одной компоненте точки p . [Лемма 16](#) доказана. $\square$

Лемма 17. Пусть непрерывное отображение $f : X \rightarrow X$ конечного дерева X имеет нулевую топологическую энтропию и бесконечное минимальное множество M . Тогда найдется натуральное число n и множество $M_0 \subset M$ такие, что M_0 – минимальное множество относительно f^n , и $[M_0]$ является дугой.

Доказательство. Положим $Y^{(0)} = [M]$. Утверждение леммы 17 справедливо, если $Y^{(0)}$ является дугой. Рассмотрим случай, когда $Y^{(0)}$ отлично от дуги, т.е. $R(Y^{(0)}) \neq \emptyset$. В силу леммы 15 существует точка $p_1 \in Y^{(0)} \cap \text{Per}(f)$, причем $\text{ord}_{Y^{(0)}} p_1 \geq 2$. Так как $R(Y^{(0)})$ конечно, а $\text{ord}_{Y^{(0)}} p_1 \geq 2$, то найдется компонента $Y_{i_1}^{(0)}(p_1)$ точки p_1 в $Y^{(0)}$ ($1 \leq i_1 \leq \text{ord}_{Y^{(0)}} p_1$) со следующим свойством:

$$\text{card } R(Y_{i_1}^{(0)}(p_1)) < \text{card } R(Y^{(0)}). \quad (5)$$

Пусть x_1 – любая точка из $M \cap Y_{i_1}^{(0)}(p_1)$. Согласно лемме 16 найдется такое натуральное число n_1 , кратное периоду точки p_1 , что

$$\{f^{n_1 i}(x_1)\}_{i \geq 0} \subset Y_{i_1}^{(0)}(p_1).$$

Положим $M_1 = \overline{\{f^{n_1 i}(x_1)\}_{i \geq 0}}$. Так как $x_1 \in M$, то из теоремы 6 получаем $x_1 \in \text{Rec}(f)$. Согласно (3) имеем $x_1 \in \text{Rec}(f^{n_1})$. Тогда из теоремы 6 следует, что M_1 – минимальное множество относительно f^{n_1} . Поскольку $p_1 \notin M$, то $M_1 \subset Y_{i_1}^{(0)}(p_1)$. Следовательно, $[M_1] \subset Y_{i_1}^{(0)}(p_1)$. Положим $Y^{(1)} = [M_1]$. Учитывая (5), получаем

$$\text{card } R(Y^{(1)}) < \text{card } R(Y^{(0)}).$$

Если $\text{card } R(Y^{(1)}) = \emptyset$, то $Y^{(1)}$ – дуга, и лемма 17 доказана. В противном случае повторим рассуждения, приведенные выше. Так как множество точек ветвления конечного дерева конечно, то найдется натуральное число $k \leq \text{card } R(Y^{(0)})$ такое, что $Y^{(k)} = [M_k]$ является дугой, где M_k – минимальное множество относительно $f^{n_1 \dots n_k}$. Лемма 17 доказана. $\square$

Для доказательства следующего утверждения нам потребуются определения монотонного отображения и ретракции пространства на подмножество.

Определение 18 ([1, Том 2, §46, I]). Непрерывное отображение $f : X \rightarrow X$ конечного дерева X называется монотонным, если полный прообраз $f^{-1}(A)$ любого связного подмножества A из $f(X)$ связан в X .

Определение 19 ([1, Том 1, §13, V]). Подмножество A пространства X называется ретрактом пространства X , если существует непрерывное отображение r , называемое ретракцией пространства X на множество A , такое, что $r(x) = x$ для $x \in A$.

Следующая лемма устанавливает факт существования монотонной ретракции на любом конечном дереве.

Лемма 20 ([30]). Пусть $f : X \rightarrow X$ – непрерывное отображение конечного дерева X . Тогда для любого подмножества A в X существует монотонная ретракция $r : X \rightarrow A$.

Докажем еще одно вспомогательное утверждение.

Лемма 21. Пусть X – конечное дерево, а непрерывное отображение $f : X \rightarrow X$ имеет нулевую топологическую энтропию и бесконечное минимальное множество M , у которого $[M]$ является дугой. Тогда отображение $f|_M$ топологически сопряжено двоичному счетчику τ_2 .

Доказательство. Положим $I = [M]$. Согласно [лемме 14](#) выполнено включение: $E(I) \subset M$. Тогда из непрерывности f и равенства $f(M) = M$ следует, что $I \subseteq f(I)$. Рассмотрим следующие случаи:

- (i) $f(I) = I$;
- (ii) $I \neq f(I)$.

Рассмотрим первый случай. Пусть $h : I \rightarrow [0; 1]$ – любой гомеоморфизм дуги I на отрезок $[0; 1]$. Положим

$$\varphi = h \circ f \circ h^{-1} : [0; 1] \rightarrow [0; 1].$$

Поскольку топологическая энтропия отображений f и h равна нулю, то топологическая энтропия отображения φ также равна 0. Более того, φ имеет бесконечное минимальное множество $h(M)$. В силу [теоремы 9](#) получаем, что отображение $\varphi|_{h(M)}$ топологически сопряжено двоичному счетчику τ_2 . Следовательно, отображение $f|_M$ также топологически сопряжено τ_2 , и в первом случае [лемма 21](#) доказана.

Пусть имеет место второй случай. Тогда $I \subset f(I)$. В силу [леммы 21](#) существует монотонная ретракция $r : X \rightarrow I$ конечного дерева X на дугу I . Положим

$$g = r \circ f : I \rightarrow I.$$

Из непрерывности f и r следует, что g – непрерывное отображение дуги I на себя. Поскольку монотонное отображение конечного дерева имеет нулевую топологическую энтропию (см. [7, теорема В]), то топологическая энтропия g равна 0. Так как $f(M) = M$, а $r(x) = x$ для любой точки $x \in M \subset I$, то g имеет минимальное множество M , и $g|_M = f|_M$. В силу рассмотренного первого случая отображение $g|_M$ топологически сопряжено двоичному счетчику τ_2 . Поскольку $g|_M = f|_M$, то отображение $f|_M$ также топологически сопряжено τ_2 .

[Лемма 21](#) доказана. $\square$

Доказательство [теоремы 1](#). Пусть $f : X \rightarrow X$ – непрерывное отображение конечного дерева X , у которого топологическая энтропия равна 0, и f имеет бесконечное минимальное множество M . Покажем, что любая точка x из M является почти периодической.

В силу [леммы 17](#) найдутся натуральное число k и множество M_0 в M такие, что M_0 – минимальное множество относительно f^k , и $[M_0]$ является дугой. Согласно [лемме 21](#)

сужение $f^k_{|M_0}$ отображения f^k на M_0 топологически сопряжено двоичному счетчику. Следовательно, любая точка x из M_0 является почти периодической относительно f^k . Согласно определению почти периодической точки относительно f^k получаем, что для любой окрестности $U(x)$ точки x существует натуральное число s такое, что

$$(f^k)^{si}(x) = f^{(ks)i}(x) \in U(x).$$

Отсюда следует, что $x \in \text{AP}(f)$.

Положим $M_i = f^i(M_0)$ для $1 \leq i \leq k-1$, $M = M_0 \cup \dots \cup M_{k-1}$. Из определения почти периодической точки следует, что для любой точки x из M_0 имеем: $f^i(x) \in \text{AP}(f^k)$ ($1 \leq i \leq k-1$). Следовательно, $M_i \subset \text{AP}(f^k)$ ($1 \leq i \leq k-1$). Повторяя приведенные выше рассуждения, получаем, что $M_i \subset \text{AP}(f)$ ($1 \leq i \leq k-1$). Таким образом, любая точка из M является почти периодической относительно f . В силу [теоремы 8](#) существует такая последовательность α , что отображение $f_{|M}$ топологически сопряжено счетчику τ_α . Утверждение 1) [теоремы 1](#) доказано.

Докажем утверждение 2) [теоремы 1](#). В силу утверждения 1) [теоремы 1](#) существует последовательность $\alpha = (j_1, \dots, j_i, \dots)$ такая, что отображение $f_{|M}$ топологически сопряжено счетчику τ_α . Следовательно, отображение $f^k_{|M}$ топологически сопряжено отображению τ_α^k . Но M состоит из k инвариантных относительно f^k подмножеств M_i ($0 \leq i \leq k-1$), поэтому отображение $f^k_{|M_i}$ топологически сопряжено счетчику τ_α^k . С другой стороны, из доказательства утверждения 1) следует, что отображение $f^k_{|M_i}$ топологически сопряжено τ_2 для каждого числа $0 \leq i \leq k-1$. Поэтому из определения счетчика получаем, что существует $n \in \mathbb{N}$ такое, что $j_i = 2$ для всех $i \geq n+1$, т. е. последовательность α имеет вид [\(1\)](#).

[Теорема 1](#) доказана.

3. Доказательство теорем [2](#) и [3](#)

Начнем с вспомогательных определений. Пусть n – натуральное число, и $n \geq 2$. Положим

$$Z_n = \{z \in \mathbb{C} : z^n \in [0; 1]\}. \quad (6)$$

При $n = 2$ множество Z_2 есть отрезок $[-1; 1]$. Если $n \geq 3$, то множество Z_n называется n -одом. Отметим, что n -од имеет единственную точку ветвления 0.

Доказательство [теоремы 2](#) начнем со случая, когда конечное дерево является n -одом, $n \geq 3$ (для $n = 2$ см. [теорему 9](#)).

Лемма 22. Для любой последовательности α вида $(n, 2, 2, \dots)$, где $n \geq 2$ существует непрерывное отображение $f : Z_n \rightarrow Z_n$ n -ода Z_n такое, что топологическая энтропия f равна 0, и f имеет бесконечное минимальное множество M , на котором f топологически сопряжено счетчику τ_α .

Доказательство. Начнем с построения вспомогательных отображений.

1. Пусть $g(z) = \lambda^* z(1 - z) : [0; 1] \rightarrow [0; 1]$ – непрерывное отображение отрезка $[0; 1]$, где $\lambda^* \approx 3,56995$ – предельное значение параметров удвоения периодов (см., например, [11]). Отображение g имеет бесконечное минимальное множество M_0 , на котором g топологически сопряжено двоичному счетчику τ_2 (см., например, [31], [2, гл. 1, §2]). Топологическая энтропия g равна 0 [2, гл. 3, §3].

2. Введем обозначение $I_j = [0; e^{2\pi i j/n}]$, где $0 \leq j \leq n - 1$. Тогда $Z_n = \bigcup_{j=0}^{n-1} I_j$. Определим вспомогательное отображение $\varphi_n : Z_n \rightarrow Z_n$, задающее поворот на угол $2\pi/n$ против часовой стрелки, т. е.

$$\varphi_n(z) = z \cdot e^{2\pi i/n}, \text{ если } z \in Z_n. \quad (7)$$

Тогда

$$\varphi_n(I_j) = \begin{cases} I_{j+1}, & \text{если } 0 \leq j \leq n-2; \\ I_0, & \text{если } j = n-1. \end{cases} \quad (8)$$

Отметим, что φ_n – гомеоморфизм, $\varphi_n(0) = 0$ для любого $n \in \mathbb{N}$, а любая точка $z \in Z_n \setminus \{0\}$ является периодической периода n .

3. Перейдем к построению отображения $f : Z_n \rightarrow Z_n$. Положим

- 1) $f(z) = \varphi_n \circ g(z)$, если $z \in I_0$;
- 2) $f(z) = \varphi_n(z)$, если $z \in \bigcup_{j=1}^{n-1} I_j$.

Изучим свойства отображения f .

(i) Поскольку топологическая энтропия отображений g и φ_n равна 0, то топологическая энтропия f также равна нулю.

(ii) Напомним, что отображение g имеет бесконечное минимальное множество M_0 такое, что отображение $g|_{M_0}$ топологически сопряжено двоичному счетчику τ_2 . Положим $M_j = f^j(M_0)$ для $1 \leq j \leq n-1$. Тогда отображение f имеет бесконечное минимальное множество

$$M = M_0 \cup \dots \cup M_{n-1}.$$

(iii) Покажем, что $f|_M$ топологически сопряжено счетчику τ_α , где $\alpha = (n, 2, 2, \dots)$.

Из задания отображения f следует, что $f^n(M_j) = M_j$, и $f|_{M_j}^n$ топологически сопряжено счетчику τ_2 ($0 \leq j \leq n-1$). Следовательно, относительно отображения f^n каждой точке $z \in M_j$ соответствует бесконечная последовательность $(k_1, \dots, k_i, \dots)$, где $k_i \in \{0, 1\}$. Доопределим каждую бесконечную последовательность следующим образом: если $z \in M_j$, $0 \leq j \leq n-1$, то данной точке будет соответствовать последовательность $(j, k_1, \dots, k_i, \dots)$. Тогда согласно (8) получаем, что $f(z)$ соответствует последовательность $(j+1, k_1, \dots, k_i, \dots)$, если $0 \leq j \leq n-2$, и $(0, \tau_2(k_1, \dots, k_i, \dots))$, если $j = n-1$. Таким образом, отображение $f|_M$ топологически сопряжено счетчику τ_α при $\alpha = (n, 2, 2, \dots)$. [Лемма 22](#) доказана. $\square$

Доказательство теоремы 2. Пусть последовательность α имеет вид $(j_1, \dots, j_n, 2, 2, \dots)$, где $j_i \geq 2$ для $1 \leq i \leq n$. В силу [леммы 22](#) утверждение теоремы справедливо, если $n = 1$. Поэтому рассмотрим случай, когда $n \geq 2$.

I. Начнем с построения конечного дерева X .

Для каждого числа j_i ($1 \leq i \leq n$) положим

$$L_{j_i} = \bigcup_{k=0}^{j_i-1} \left[\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \mathbf{i}; \frac{k}{j_i-1} \right]. \quad (9)$$

При $j_i = 2$ множество L_{j_i} является дугой. Если $j_i \geq 3$, то L_{j_i} гомеоморфно j_i -оду, при этом $\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \mathbf{i} \in R(L_{j_i})$. Отметим, что $\text{diam } L_{j_i} = 1$ ($1 \leq i \leq n$). Множество концевых точек континуума L_{j_i} имеет вид: $\left\{ \frac{k}{j_i-1} \right\}_{k=0}^{j_i-1}$.

Для каждого числа $2 \leq i \leq n$ введем вспомогательную функцию

$$g_i(z) = \frac{z}{j_1 \cdot \dots \cdot j_{i-1}}, \text{ если } z \in L_{j_i}. \quad (10)$$

Положим $\tilde{L}_{j_i} = g_i(L_{j_i})$ для $2 \leq i \leq n$. Тогда из задания отображения $g_i(z)$ следует, что

$$\text{diam } \tilde{L}_{j_i} = \frac{1}{j_1 \cdot \dots \cdot j_{i-1}}. \quad (11)$$

Точку $g_i\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \mathbf{i}\right)$ обозначим через p_i ($2 \leq i \leq n$).

Для построения конечного дерева X будем объединять L_{j_1} и копии множеств $\tilde{L}_{j_i}$ ($2 \leq i \leq n$) следующим образом:

1. Положим $Y_1 = L_{j_1}$, $a_{i_1} = \frac{i_1}{j_1-1}$ для $0 \leq i_1 \leq j_1-1$.

2. Для каждого числа $0 \leq i_1 \leq j_1-1$ определим отображение $\psi_{i_1}(z)$, задающее параллельный перенос множества $\tilde{L}_{j_2}$ на $\mathbb{C}$ таким образом, чтобы $\psi_{i_1}(p_2) = a_{i_1}$. Положим $G_{i_1} = \psi_{i_1}(\tilde{L}_{j_2})$, $a_{i_1, i_2} = \psi_{i_1}\left(g_2\left(\frac{i_2}{j_2-1}\right)\right)$ для $0 \leq i_s \leq j_s-1$, $s \in \{1, 2\}$. Так как $g_2\left(\frac{i_2}{j_2-1}\right) \in E(\tilde{L}_{j_2})$ для любого числа $0 \leq i_2 \leq j_2-1$, то $a_{i_1, i_2} \in E(G_{i_1})$ ($0 \leq i_1 \leq j_1-1$).

Пусть $Y_2 = \bigcup_{i_1=0}^{j_1-1} G_{i_1}$. Из построения Y_2 следует, что $Y_1 \cap Y_2 = \{a_{i_1}\}_{i_1=0}^{j_1-1}$. Согласно (11) выполнено условие: $G_{i_1} \cap G_{s_1} = \emptyset$, если $i_1 \neq s_1$ ($0 \leq i_1, s_1 \leq j_1-1$). Поэтому $Y_1 \cup Y_2$ – конечное дерево, у которого $a_{i_1} \in R(Y_1 \cup Y_2)$, а $a_{i_1, i_2} \in E(Y_1 \cup Y_2)$, где $0 \leq i_s \leq j_s-1$, $s \in \{1, 2\}$.

3. Для любого набора чисел (i_1, i_2) , где $0 \leq i_s \leq j_s-1$, $s \in \{1, 2\}$, определим отображение $\psi_{i_1, i_2}(z)$, задающее параллельный перенос $\tilde{L}_{j_3}$ на $\mathbb{C}$ таким образом, чтобы

$\psi_{i_1, i_2}(p_3) = a_{i_1, i_2}$. Положим $G_{i_1, i_2} = \psi_{i_1, i_2}(\tilde{L}_{j_3})$, $a_{i_1, i_2, i_3} = \psi_{i_1, i_2}\left(g_3\left(\frac{i_3}{j_3 - 1}\right)\right)$, где $0 \leq i_s \leq j_s - 1$ ($1 \leq s \leq 3$). Поскольку $g_3\left(\frac{i_3}{j_3 - 1}\right) \in E(\tilde{L}_{j_3})$, то $a_{i_1, i_2, i_3} \in E(G_{i_1, i_2})$. В силу (11) имеем

$$G_{i_1, i_2} \cap G_{k_1, k_2} = \emptyset, \text{ если } (i_1, i_2) \neq (k_1, k_2). \quad (12)$$

Объединение всех G_{i_1, i_2} обозначим через Y_3 , где $0 \leq i_s \leq j_s - 1$, $s \in \{1, 2\}$. Из построения Y_3 и условия (12) следует, что $Y_1 \cup Y_2 \cup Y_3$ – конечное дерево.

4. Повторим рассуждения пункта 3 для $3 \leq k \leq n - 2$. В результате мы построим конечное дерево $Y_1 \cup \dots \cup Y_{n-1}$, причем $a_{i_1, \dots, i_{n-1}} \in E(Y_1 \cup \dots \cup Y_{n-1})$ ($0 \leq i_s \leq j_s - 1$, $1 \leq s \leq n - 1$).

5. Опишем построение для $k = n - 1$.

Для любого набора чисел $(i_1, \dots, i_{n-1})$, где $0 \leq i_s \leq j_s - 1$, $1 \leq s \leq n - 1$, определим отображение $\psi_{i_1, \dots, i_{n-1}}(z)$, задающее параллельный перенос $\tilde{L}_{j_n}$ на $\mathbb{C}$ таким образом, чтобы $\psi_{i_1, \dots, i_{n-1}}(p_n) = a_{i_1, \dots, i_{n-1}}$. Положим $G_{i_1, \dots, i_{n-1}} = \psi_{i_1, \dots, i_{n-1}}(\tilde{L}_{j_n})$, где $0 \leq i_s \leq j_s - 1$, $1 \leq s \leq n - 1$. Обозначим через Y_n объединение всех $G_{i_1, \dots, i_{n-1}}$. Из (11) следует, что

$$G_{i_1, \dots, i_{n-1}} \cap G_{k_1, \dots, k_{n-1}} = \emptyset, \text{ если } (i_1, \dots, i_{n-1}) \neq (k_1, \dots, k_{n-1}).$$

Кроме этого, $G_{i_1, \dots, i_{n-1}} \cap Y_{n-1} = \{a_{i_1, \dots, i_{n-1}}\}$. Поэтому $Y_1 \cup \dots \cup Y_n$ – конечное дерево. Положим

$$X = Y_1 \cup \dots \cup Y_n.$$

Из построения дерева X следует, что $\text{card } R(X) = 1 + j_1 + \dots + j_{n-1}$. Концевыми точками дерева X являются точки $\psi_{i_1, \dots, i_{n-1}}\left(g_n\left(\frac{i_n}{j_n - 1}\right)\right)$, которые мы обозначим через $a_{i_1, \dots, i_n}$, где $1 \leq i_s \leq j_s - 1$, $1 \leq s \leq n$.

II. Перейдем к построению отображения $f : X \rightarrow X$.

Для любого числа $1 \leq k \leq n - 1$ определим Z_{j_k} как в (6), отображение $\varphi_{j_k} : Z_{j_k} \rightarrow Z_{j_k}$ как в (7), и пусть отображение $f : Z_{j_n} \rightarrow Z_{j_n}$ будет таким, как в доказательстве леммы 22. Положим $\chi = f : Z_{j_n} \rightarrow Z_{j_n}$.

Разобьем задание отображения $f : X \rightarrow X$ на несколько шагов.

1) Пусть $h : Z_{j_1} \rightarrow Y_1$ – любой гомеоморфизм такой, что $h(Z_{j_1}) = Y_1$. Положим

$$f(z) = h \circ \varphi_{j_1} \circ h^{-1}(z), \text{ если } z \in Y_1.$$

Тогда $p_1 \in \text{Fix}(f)$, а любая точка x из $Y_1 \setminus \{p_1\}$ – периодическая точка периода j_1 . При этом, для любой точки $a_{i_1} \in E(Y_1)$ выполнено условие: $f(a_{i_1}) = a_{i_1+1}$, если $0 \leq i_1 \leq j_1 - 2$,

и $f(a_{i_1}) = a_0$, если $i_1 = j_1 - 1$. Следовательно,

$$f([p_1; a_{i_1}]) = \begin{cases} [p_1; a_{i_1+1}], & \text{если } 0 \leq i_1 \leq j_1 - 2; \\ [p_1; a_0], & \text{если } i_1 = j_1 - 1. \end{cases} \quad (13)$$

2) Пусть $2 \leq k \leq n - 1$. Опишем задание отображения $f : Y_k \rightarrow Y_k$ на множестве Y_k .

Пусть $h_{i_1, \dots, i_{k-1}} : Z_{j_k} \rightarrow G_{i_1, \dots, i_{k-1}}$ — произвольный гомеоморфизм такой, что $h_{i_1, \dots, i_{k-1}}(Z_{j_k}) = G_{i_1, \dots, i_{k-1}}$, где $0 \leq i_s \leq j_s - 1$, $1 \leq s \leq k - 1$. Определим $f : Y_k \rightarrow Y_k$ таким образом, чтобы для любой точки $z \in G_{i_1, \dots, i_{k-1}}$ выполнялось равенство:

$$f^{j_1 \dots j_{k-1}}(z) = h_{i_1, \dots, i_{k-1}} \circ \varphi_{j_k} \circ h_{i_1, \dots, i_{k-1}}^{-1}(z).$$

Тогда любая точка z из $Y_k \setminus \bigcup_{\substack{0 \leq i_s \leq j_s - 1 \\ 1 \leq s \leq k}} \{a_{i_1, \dots, i_{k-1}}\}$ является периодической периода j_k относительно $f^{j_1 \dots j_{k-1}}$, и, следовательно, периодической периода $j_1 \dots j_k$ относительно отображения f . Более того, для каждой точки $a_{i_1, \dots, i_k} \in E(Y_k)$ справедливо:

$$\begin{aligned} f^{j_1 \dots j_{k-1}}(a_{i_1, \dots, i_{k-1}, i_k}) &= a_{i_1, \dots, i_{k-1}, (i_k+1)}, & \text{если } 0 \leq i_k \leq j_k - 2, \\ f^{j_1 \dots j_{k-1}}(a_{i_1, \dots, i_{k-1}, i_k}) &= a_{i_1, \dots, i_{k-1}, 0}, & \text{если } i_k = j_k - 1. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$f^{j_1 \dots j_{k-1}}([p_1; a_{i_1, \dots, i_{k-1}, i_k}]) = \begin{cases} [p_1; a_{i_1, \dots, i_{k-1}, (i_k+1)}], & \text{если } 0 \leq i_k \leq j_k - 2; \\ [p_1; a_{i_1, \dots, i_{k-1}, 0}], & \text{если } i_k = j_k - 1. \end{cases} \quad (14)$$

3) Пусть $h_{i_1, \dots, i_{n-1}} : Z_{j_n} \rightarrow G_{i_1, \dots, i_{n-1}}$ — гомеоморфизм Z_{j_n} на $G_{i_1, \dots, i_{n-1}}$. Зададим отображение $f : Y_n \rightarrow Y_n$ таким образом, чтобы для любой точки $z \in G_{i_1, \dots, i_{n-1}} \subset Y_n$ выполнялось равенство:

$$f^{j_1 \dots j_{n-1}}(z) = h_{i_1, \dots, i_{n-1}} \circ \chi \circ h_{i_1, \dots, i_{n-1}}^{-1}(z).$$

Тогда $f^{j_1 \dots j_{n-1}}(G_{i_1, \dots, i_{n-1}}) = G_{i_1, \dots, i_{n-1}}$ для любых $0 \leq i_s \leq j_s - 1$, $1 \leq s \leq n - 1$. Пусть $i_1 = \dots = i_{n-1} = 0$. Согласно [лемме 22](#) отображение $f^{j_1 \dots j_{n-1}}$ имеет минимальное множество $M_0 \subset \underbrace{G_{0, \dots, 0}}_{n-1}$ такое, что $f^{j_1 \dots j_{n-1}}|_{M_0}$ топологически сопряжено счетчику τ_{α_1} , где $\alpha_1 = (j_n, 2, 2, \dots)$. Положим $M_j = f^j(M_0)$ для любого числа $1 \leq j \leq j_1 \dots j_{n-1} - 1$. Тогда отображение f имеет минимальное множество

$$M = \bigcup_{j=0}^{j_1 \dots j_{n-1} - 1} M_j.$$

Учитывая (13) и (14), получаем, что отображение $f|_M$ топологически сопряжено отобра-

жению τ_α , где $\alpha = (j_1, \dots, j_{n-1}, j_n, 2, 2, \dots)$.

Отметим, что f непрерывное отображение, имеющее нулевую топологическую энтропию. Теорема 2 доказана.

Доказательство теоремы 3. Пусть $\alpha = (j_1, \dots, j_n, \dots)$ – любая последовательность натуральных чисел, где $j_n \geq 2$. Начнем с построения дендрита Y .

Пусть для любого числа $i \in \mathbb{N}$ определены континуумы L_{j_i} как в (9), для любого натурального числа $i \geq 2$ определены отображения $g_i(z)$ как в (10). Положим $\tilde{L}_{j_i} = g_i(L_{j_i})$ для $i \geq 2$. Так же как в доказательстве теоремы 2 обозначим через p_i вершину $\tilde{L}_{j_i}$ для каждого числа $i \in \mathbb{N}$. Предположим, что построены множества $Y_1, \dots, Y_n$ как в п. I доказательства теоремы 2. Обозначим концевые точки множества Y_n через $a_{i_1, \dots, i_n}$ так же как в п. I доказательства теоремы 2.

Для любого набора чисел $(i_1, \dots, i_n)$, где $0 \leq i_s \leq j_s - 1$, $1 \leq s \leq n$, определим отображение $\psi_{i_1, \dots, i_n}(z)$, задающее параллельный перенос $\tilde{L}_{j_{n+1}}$ на $\mathbb{C}$ таким образом, чтобы $\psi_{i_1, \dots, i_n}(p_{n+1}) = a_{i_1, \dots, i_n}$. Положим $G_{i_1, \dots, i_n} = \psi_{i_1, \dots, i_n}(\tilde{L}_{j_{n+1}})$, где $0 \leq i_s \leq j_s - 1$, $1 \leq s \leq n$. Из (11) следует, что

$$G_{i_1, \dots, i_n} \cap G_{k_1, \dots, k_n} = \emptyset, \text{ если } (i_1, \dots, i_n) \neq (k_1, \dots, k_n). \quad (15)$$

Отметим, что $G_{i_1, \dots, i_n} \cap Y_n = \{a_{i_1, \dots, i_n}\}$ для любых $0 \leq i_s \leq j_s - 1$, где $1 \leq s \leq n$. Обозначим через Y_{n+1} объединение всех $G_{i_1, \dots, i_n}$. Применим принцип математической индукции. В результате построим последовательность множеств $\{Y_n\}_{n \geq 1}$ таких, что

$$Y_n \cap Y_{n+1} = \bigcup_{\substack{0 \leq i_s \leq j_s - 1 \\ 1 \leq s \leq n}} \{a_{i_1, \dots, i_n}\}. \quad (16)$$

Положим $Y = \overline{\bigcup_{n=1}^{+\infty} Y_n}$. Из построения Y следует, что Y связно и замкнуто. В силу (11) получаем, что

$$\text{diam } Y = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{j_1 \cdot \dots \cdot j_n}. \quad (17)$$

Так как для каждого $n \geq 1$ выполнено неравенство: $j_n \geq 2$, то

$$\frac{1}{j_1 \cdot \dots \cdot j_n} \leq \frac{1}{2^n}.$$

Следовательно, ряд в (17) сходится, и Y – ограничено. Таким образом, Y – континуум. Локальная связность Y следует из (11), поскольку

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \text{diam } G_{i_1, \dots, i_n} = 0.$$

Из (15) и (16) получаем, что континуум Y не содержит дуг, гомеоморфных окружности. Следовательно, Y – дендрит.

Пусть e – любая точка из $E(Y)$, а $p_1 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$. Согласно утверждению 1) [леммы 5](#) существует единственная дуга $[p_1; e]$ в Y , соединяющая точки p_1 и e . Из построения Y следует существование последовательности точек $\{a_{i_1, \dots, i_n}\}_{n \geq 1} \subset R(Y)$ ($0 \leq i_s \leq j_s - 1$, $1 \leq s \leq n$), принадлежащих дуге $[p_1; e]$ таких, что

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_{i_1, \dots, i_n} = e.$$

В результате каждой концевой точке e из Y поставлена в соответствие бесконечная последовательность $(i_1, \dots, i_n, \dots)$, где $0 \leq i_n \leq j_n - 1$, $n \in \mathbb{N}$.

Построенный дендрит Y является обобщением дендрита Гехмана [\[32\]](#) (конструктивное построение дендрита Гехмана, отличное от [\[32\]](#), см. также в [\[7\]](#)). Отметим, что дендрит Y является топологическим пределом конечных деревьев $Y_1 \cup \dots \cup Y_n$ при $n \rightarrow \infty$.

Перейдем к построению отображения $f : Y \rightarrow Y$. Идея построения отображения взята из [\[7, теорема С\]](#), где построены дендрит X и непрерывное отображение $f : X \rightarrow X$ для последовательности $\alpha = 2$.

Зададим отображение f на Y_1 как в п. 1) построения отображения f в доказательстве [теоремы 2](#). На каждом множестве Y_n ($n \geq 2$) определим f как в п. 2) построения отображения f в доказательстве той же теоремы. В результате каждая точка z из $Y_n \setminus \bigcup_{\substack{0 \leq i_s \leq j_s - 1 \\ 1 \leq s \leq n-1}} \{a_{i_1, \dots, i_{n-1}}\}$ является периодической периода $j_1 \cdot \dots \cdot j_n$ для любого числа $n \in \mathbb{N}$.

Пусть $e \in E(Y)$, и $e = \lim_{n \rightarrow +\infty} a_{i_1, \dots, i_n}$, где $a_{i_1, \dots, i_n} \in R(Y)$. Так же как в [\[7, теорема С\]](#) положим

$$f(e) = \lim_{n \rightarrow +\infty} f(a_{i_1, \dots, i_n}).$$

Построенное отображение f непрерывно, и $f(E(Y)) = E(Y)$. Более того, f – гомеоморфизм.

Покажем, что любая точка e из $E(Y)$ является почти периодической относительно отображения f . Пусть $U(e)$ – произвольная окрестность точки p . Из построения Y и условия [\(11\)](#) получаем, что существуют натуральные числа $n \geq 1$, $i_1, \dots, i_n$, где $0 \leq i_s \leq j_s - 1$ ($1 \leq s \leq n$), такие, что $G_{i_1, \dots, i_n} \subset U(e)$. Из построения отображения f следует равенство

$$f^{j_1 \cdot \dots \cdot j_n}(G_{i_1, \dots, i_n}) = G_{i_1, \dots, i_n}.$$

Положим $k_0 = j_1 \cdot \dots \cdot j_n$. Тогда $f^{k_0 k}(e) \in U(e)$ для любого числа $k \in \mathbb{N}$, т. е. $e \in \text{AP}(f)$. Согласно [теореме 8](#) найдется последовательность α_1 такая, что отображение $f|_{E(Y)}$ топологически сопряжено счетчику τ_{α_1} . С учетом [\(13\)](#) и [\(14\)](#) получаем, что $\alpha_1 = (j_1, \dots, j_n, \dots)$, т. е. $\alpha_1 = \alpha$. [Теорема 3](#) доказана.

4. Доказательство теоремы 4

Начнем с необходимых определений.

Пусть непрерывное отображение $f : X \rightarrow X$ дендрита X имеет минимальное множество M . Минимальное множество M называется *вполне минимальным*, если для любого натурального числа $n \geq 1$ множество M является минимальным для f^n .

Следуя работе [10], *регулярным периодическим разложением множества M* будем называть набор множеств $M_0, \dots, M_{k-1} \subset M$ таких, что $M = M_0 \cup \dots \cup M_{k-1}$, $f(M_i) = M_{i+1 \pmod k}$, и каждое M_i является минимальным относительно f^k . Число k называется длиной M . Множество длин всех регулярных периодических разложений множества M называется *идеалом разложения* и обозначается через $DI(M)$.

Если при некотором натуральном $n \geq 2$ множество M не является минимальным относительно f^n , то M имеет регулярное периодическое разложение длины k , являющееся делителем числа n [4]. Отметим, что $DI(M) = \{1\}$ тогда и только тогда, когда множество M является вполне минимальным [10].

Минимальное множество M будем называть *относительно вполне минимальным*, если существует регулярное периодическое разложение $M_0, \dots, M_{n-1}$ при $n \geq 2$ такое, что каждое множество M_i является вполне минимальным относительно отображения f^n .

Отметим, что минимальное множество M не является вполне минимальным и относительно вполне минимальным, если идеал разложения $DI(M)$ бесконечен [10]. В этом случае M будем называть *минимальным множеством с бесконечным идеалом*.

Нам потребуются следующие вспомогательные утверждения.

Теорема 23 ([8]). Пусть X – дендрит со счетным числом концевых точек, а $f : X \rightarrow X$ – непрерывное отображение, имеющее бесконечное минимальное множество M , которое является вполне минимальным или относительно вполне минимальным. Тогда топологическая энтропия отображения f положительна.

Теорема 24 ([10, теорема 4.4]). Пусть $f : X \rightarrow X$ – минимальное отображение компактного метрического пространства X с бесконечным идеалом. Тогда существует такая последовательность α , что отображение f полусопряжено счетчику τ_α .

Доказательство теоремы 4. Так как дендрит X имеет счетное число концевых точек, то в силу теоремы 23 множество M является минимальным с бесконечным идеалом. Тогда согласно теореме 24 существует последовательность α такая, что отображение $f|_M$ полусопряжено счетчику τ_α . Теорема 4 доказана.

Список литературы

- [1] К. Куратовский, *Топология*, Т. 1, Мир, М., 1966; Т. 2, Мир, М., 1969.
- [2] А.Н. Шарковский, Ю.Л. Майстренко, Е.Ю. Романенко, *Разностные уравнения и их приложения*, Наук. думка, Киев, 1986.

-
- [3] L. Alsedà, X. Ye, *No division and the set of periods for tree maps*, Ergodic Theory Dynam. Systems **15** (2), 221–237 (1995).
DOI: <https://doi.org/10.1017/S0143385700008348>
- [4] X. Ye, *D-function of a minimal set and an extension of Sharkovskii's theorem to minimal sets*, Ergodic Theory Dynam. Systems **12** (2), 365–376 (1992).
DOI: <https://doi.org/10.1017/S0143385700006817>
- [5] L. Alsedà, X. Ye, *Minimal sets of maps of Y* , J. Math. Anal. Appl. **187** (1), 324–338 (1994).
DOI: <https://doi.org/10.1006/jmaa.1994.1359>
- [6] B. Hasselblat, A. Katok, *A first course in dynamics. With a panorama of recent developments*, Cambridge University Press, New York, 2003.
- [7] Л.С. Ефремова, Е.Н. Махрова, *Динамика монотонных отображений дендритов*, Матем. сб. **192** (6), 15–30 (2001).
DOI: <https://doi.org/10.4213/sm570>
- [8] E.N. Makhrova, *Remarks on minimal sets on dendrites and finite graphs*, J. Difference Equ. Appl. **29** (9–12), 1313–1322 (2023).
DOI: <https://doi.org/10.1080/10236198.2023.2220417>
- [9] L. Block, J. Keesling, *A characterization of adding machine maps*, Topology Appl. **140** (2–3), 151–161 (2004).
DOI: <https://doi.org/10.1016/j.topol.2003.07.006>
- [10] J. Banks, *Regular periodic decompositions for topologically transitive maps*, Ergodic Theory Dynam. Systems **17** (3), 505–529 (1997).
DOI: <https://doi.org/10.1017/S0143385797069885>
- [11] М. Фейгенбаум, *Универсальность в поведении нелинейных систем*, УФН **141** (2), 343–374 (1983).
DOI: <https://doi.org/10.3367/UFNr.0141.198310e.0343>
- [12] Z. Nitecki, *Topological dynamics on the interval*, in: A. Katok, Ergodic theory and dynamical systems II, Progr. Math. **21**, Birkhäuser, Boston, MA, 1–73 (1982).
https://doi.org/10.1007/978-1-4899-2689-0_1
- [13] A. Blokh, *The “spectral” decomposition for one-dimensional maps*, in: Dynam. Report. Expositions Dynam. Systems **4**, 1–59 (1995).
DOI: https://doi.org/10.1007/978-3-642-61215-2_1
- [14] F. Balibrea, R. Hric, L'. Snoha, *Minimal sets on graphs and dendrites*, Internat. J. Bifur. Chaos Appl. Sci. Engrg. **13** (7), 1721–1725 (2003).
DOI: <https://doi.org/10.1142/S0218127403007576>
- [15] F. Balibrea, T. Downarowicz, R. Hric, L'. Snoha, V. Špitalský, *Almost totally disconnected minimal systems*, Ergodic Theory Dynam. Systems **29** (3), 737–766 (2009).
DOI: <https://doi.org/10.1017/S0143385708000540>

-
- [16] H.-O. Peitgen, P.H. Richter, *The beauty of fractals. Images of complex dynamical systems*, Springer-Verlag, Berlin, 1986.
DOI: <https://doi.org/10.1007/978-3-642-61717-1>
- [17] S.J. Agronsky, J.G. Ceder, *What sets can be ω -limit sets in E^n ?*, Real Anal. Exchange **17** (1), 97–109 (1991/1992).
DOI: <https://doi.org/10.2307/44152199>
- [18] F. Balibrea, J.L. García-Guirao, *Continua with empty interior as ω -limit sets*, Appl. Gen. Topol. **6** (2), 195–205 (2005).
- [19] L.S. Efremova, *Example of the smooth skew product in the plane with the one-dimensional ramified continuum as the global attractor*, in: *European Conference on Iteration Theory 2010*, ESAIM Proc. **36**, EDP Sci., Les Ulis, 15–25 (2012).
DOI: <https://doi.org/10.1051/proc/201236002>
- [20] L.S. Efremova, *Ramified continua as global attractors of C^1 -smooth self-maps of a cylinder close to skew products*, J. Difference Equ. Appl. **29** (9–12), 1244–1274 (2023).
DOI: <https://doi.org/10.1080/10236198.2023.2204144>
- [21] D. Drozdov, A. Tetenov, *On the classification of fractal square dendrites*, Adv. Theory Nonlinear Anal. Appl. **7** (3), 19–96 (2023).
DOI: <https://doi.org/10.17762/atnaa.v7.i3.276>
- [22] В.Ж. Сакбаев, О.Г. Смолянов, *Диффузия и квантовая динамика на графах*, Докл. РАН, **451** (2), 141–145 (2013).
DOI: <https://doi.org/10.7868/s0869565213200061>
- [23] Л.С. Ефремова, Е.Н. Махрова, *Одномерные динамические системы*, УМН **76** (5), 81–146 (2021).
DOI: <https://doi.org/10.4213/rm9998>
- [24] Дж.Д. Биркгоф, *Динамические системы*, Регулярная и хаотическая динамика, Москва–Ижевск, 2002.
- [25] R. Munasinghe, *Composants, unstable sets, and minimal sets of inverse limit spaces*, Thesis (Ph.D.), University of Wyoming. ProQuest LLC, Ann Arbor, MI, 1992.
- [26] S. Kolyada, L'. Snoha, *Minimal dynamical systems*, Scholarpedia **4** (11), art. 5803.
URL: https://www.scholarpedia.org/article/Minimal_dynamical_systems
- [27] R.L. Adler, A.G. Konheim, M.H. McAndrew, *Topological entropy*, Trans. Amer. Math. Soc. **114**, 309–319 (1965).
DOI: <https://doi.org/10.1090/S0002-9947-1965-0175106-9>
- [28] Е.Н. Махрова, *Структура дендритов со свойством существования периодических точек*, Изв. вузов. Матем. (11), 41–45 (2011).
URL: <https://www.mathnet.ru/ivm8393>

-
- [29] E.N. Makhrova, *Remarks on the existence of periodic points for continuous maps on dendrites*, Lobachevskii J. Math. **43** (7), 1711–1719 (2022).
DOI: <https://doi.org/10.1134/S1995080222100274>
- [30] G.R. Gordon Jr., L. Lum, *Monotone retracts and some characterizations of dendrites*, Proc. Amer. Math. Soc. **59** (1), 156–158 (1976).
DOI: <https://doi.org/10.1090/S0002-9939-1976-0423317-X>
- [31] Ю.С. Барковский, Г.М. Левин, *О предельном канторовом множестве*, УМН **35** (2), 201–202 (1980).
URL: <https://www.mathnet.ru/rus/rm3269>
- [32] H.M. Gehman, *Concerning the subsets of a plane continuous curve*, Ann. Math. **27** (1), 29–46 (1925).
DOI: <https://doi.org/10.2307/1967832>

Елена Николаевна Махрова

Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского,
пр-т Гагарина, д. 23, г. Нижний Новгород, 603022, Россия,
e-mail: elena_makhrova@inbox.ru

On minimal sets of continuous maps on one-dimensional continua

E.N. Makhrova

Abstract. Let X be a finite tree and let $f : X \rightarrow X$ be a continuous map with zero topological entropy and an infinite minimal set M . We show that the restriction of $f|_M$ of f to M is topologically conjugate to adding-machine τ_α , where $\alpha = (j_1, \dots, j_n, 2, 2, \dots)$ be the sequence for $j_i \geq 2$ if $1 \leq i \leq n$. We describe the topological structure of finite trees on which there exist continuous maps with zero topological entropy and an infinite minimal set M on which the map $f|_M$ is topologically conjugate to adding machine τ_α , where $\alpha = (j_1, \dots, j_n, 2, 2, \dots)$. At the same time, for any sequence $\alpha = (j_1, \dots, j_i, \dots)$, where $j_i \geq 2$ for all $i \geq 1$, there exist a dendrite X that is not a finite tree and a continuous map f with zero topological entropy and an infinite minimal set M on which the map f is topologically conjugate to adding machine τ_α .

We also show that for any sequence $\alpha = (j_1, \dots, j_n, \dots)$, where $j_i \geq 2$ for all $i \geq 1$, there exist a dendrite X that is not a finite tree and a continuous map f with zero topological entropy and an infinite minimal set M such that $f|_M$ is topologically conjugate to adding-machine τ_α .

Keywords: dendrite, finite tree, minimal set, adding-machine, topological entropy, almost periodic point, recurrent point.

DOI: 10.26907/2949-3919.2025.3.110-135

References

- [1] K. Kuratowski, *Topology*. Vol. 1, Academic Press, New York-London, 1966; Academic Press, New York-London, 1968.
DOI: <https://doi.org/10.1016/C2013-0-11022-7>
<https://doi.org/10.1016/C2013-0-11023-9>
- [2] A.N. Sharkovsky, Yu.L. Maistrenko, E.Yu. Romanenko, *Difference equations and their applications*, Kluwer Academic Publishers Group, Dordrecht, 1993.
DOI: <https://doi.org/10.1007/978-94-011-1763-0>

Acknowledgements. This research is supported by Russian Science Foundation (RSF) under grant 24-21-00242, <https://rscf.ru/project/24-21-00242/>.

Received: 07 June 2025. Accepted: 09 September 2025. Published: 16 October 2025.

-
- [3] L. Alsedà, X. Ye, *No division and the set of periods for tree maps*, Ergodic Theory Dynam. Systems **15** (2), 221–237 (1995).
DOI: <https://doi.org/10.1017/S0143385700008348>
- [4] X. Ye, *D-function of a minimal set and an extension of Sharkovskii's theorem to minimal sets*, Ergodic Theory Dynam. Systems **12** (2), 365–376 (1992).
DOI: <https://doi.org/10.1017/S0143385700006817>
- [5] L. Alsedà, X. Ye, *Minimal sets of maps of Y* , J. Math. Anal. Appl. **187** (1), 324–338 (1994).
DOI: <https://doi.org/10.1006/jmaa.1994.1359>
- [6] B. Hasselblat, A. Katok, *A first course in dynamics. With a panorama of recent developments*, Cambridge University Press, New York, 2003.
- [7] L.S. Efremova, E.N. Makhrova, *The dynamics of monotone maps of dendrites*, Sb. Math. **192** (6), 807–821 (2001).
DOI: <https://doi.org/10.1070/SM2001v192n06ABEH000570>
- [8] E.N. Makhrova, *Remarks on minimal sets on dendrites and finite graphs*, J. Difference Equ. Appl. **29** (9–12), 1313–1322 (2023).
DOI: <https://doi.org/10.1080/10236198.2023.2220417>
- [9] L. Block, J. Keesling, *A characterization of adding machine maps*, Topology Appl. **140** (2–3), 151–161 (2004).
DOI: <https://doi.org/10.1016/j.topol.2003.07.006>
- [10] J. Banks, *Regular periodic decompositions for topologically transitive maps*, Ergodic Theory Dynam. Systems **17** (3), 505–529 (1997).
DOI: <https://doi.org/10.1017/S0143385797069885>
- [11] M.J. Feigenbaum, *Universal behavior in nonlinear systems*, Los Alamos Sci. **1** (1), 4–27 (1980).
DOI: [https://doi.org/10.1016/0167-2789\(83\)90112-4](https://doi.org/10.1016/0167-2789(83)90112-4)
- [12] Z. Nitecki, *Topological dynamics on the interval*, in: A. Katok, Ergodic theory and dynamical systems II, Progr. Math. **21**, Birkhäuser, Boston, MA, 1–73 (1982).
https://doi.org/10.1007/978-1-4899-2689-0_1
- [13] A. Blokh, *The “spectral” decomposition for one-dimensional maps*, in: Dynam. Report. Expositions Dynam. Systems **4**, 1–59 (1995).
DOI: https://doi.org/10.1007/978-3-642-61215-2_1
- [14] F. Balibrea, R. Hric, L'. Snoha, *Minimal sets on graphs and dendrites*, Internat. J. Bifur. Chaos Appl. Sci. Engrg. **13** (7), 1721–1725 (2003).
DOI: <https://doi.org/10.1142/S0218127403007576>
- [15] F. Balibrea, T. Downarowicz, R. Hric, L'. Snoha, V. Špitalský, *Almost totally disconnected minimal systems*, Ergodic Theory Dynam. Systems **29** (3), 737–766 (2009).
DOI: <https://doi.org/10.1017/S0143385708000540>

-
- [16] H.-O. Peitgen, P.H. Richter, *The beauty of fractals. Images of complex dynamical systems*, Springer-Verlag, Berlin, 1986.
DOI: <https://doi.org/10.1007/978-3-642-61717-1>
- [17] S.J. Agronsky, J.G. Ceder, *What sets can be ω -limit sets in E^n ?*, Real Anal. Exchange **17** (1), 97–109 (1991/1992).
DOI: <https://doi.org/10.2307/44152199>
- [18] F. Balibrea, J.L. García-Guirao, *Continua with empty interior as ω -limit sets*, Appl. Gen. Topol. **6** (2), 195–205 (2005).
- [19] L.S. Efremova, *Example of the smooth skew product in the plane with the one-dimensional ramified continuum as the global attractor*, in: *European Conference on Iteration Theory 2010*, ESAIM Proc. **36**, EDP Sci., Les Ulis, 15–25 (2012).
DOI: <https://doi.org/10.1051/proc/201236002>
- [20] L.S. Efremova, *Ramified continua as global attractors of C^1 -smooth self-maps of a cylinder close to skew products*, J. Difference Equ. Appl. **29** (9–12), 1244–1274 (2023).
DOI: <https://doi.org/10.1080/10236198.2023.2204144>
- [21] D. Drozdov, A. Tetenov, *On the classification of fractal square dendrites*, Adv. Theory Nonlinear Anal. Appl. **7** (3), 19–96 (2023).
DOI: <https://doi.org/10.17762/atnaa.v7.i3.276>
- [22] V.Zh. Sakbaev, O.G. Smolyanov, *Diffusion and quantum dynamics on graphs*, Dokl. Math. **88** (1), 404–408 (2013).
DOI: <https://doi.org/10.1134/S1064562413040108>
- [23] L.S. Efremova, E.N. Makhrova, *One-dimensional dynamical systems*, Russian Math. Surveys **76** (5), 821–881 (2021).
DOI: <https://doi.org/10.1070/RM9998>
- [24] G.D. Birkhoff, *Dynamical systems*, AMS, New York, 1927.
- [25] R. Munasinghe, *Composants, unstable sets, and minimal sets of inverse limit spaces*, Thesis (Ph.D.), University of Wyoming. ProQuest LLC, Ann Arbor, MI, 1992.
- [26] S. Kolyada, L'. Snoha, *Minimal dynamical systems*, Scholarpedia **4** (11), art. 5803.
URL: [https://www.scholarpedia.org/article/Minimal\\$_\\$_dynamical\\$_\\$_systems](https://www.scholarpedia.org/article/Minimal$_$_dynamical$_$_systems)
- [27] R.L. Adler, A.G. Konheim, M.H. McAndrew, *Topological entropy*, Trans. Amer. Math. Soc. **114**, 309–319 (1965).
DOI: <https://doi.org/10.1090/S0002-9947-1965-0175106-9>
- [28] E.N. Makhrova, *The structure of dendrites with the periodic point property*, Russian Math. (Iz. VUZ) **55** (11) 33–37 (2011).
DOI: <https://doi.org/10.3103/S1066369X11110053>

-
- [29] E.N. Makhrova, *Remarks on the existence of periodic points for continuous maps on dendrites*, Lobachevskii J. Math. **43** (7), 1711–1719 (2022).
DOI: <https://doi.org/10.1134/S1995080222100274>
- [30] G.R. Gordon Jr., L. Lum, *Monotone retracts and some characterizations of dendrites*, Proc. Amer. Math. Soc. **59** (1), 156–158 (1976).
DOI: <https://doi.org/10.1090/S0002-9939-1976-0423317-X>
- [31] Yu.S. Barkovskii, G.M. Levin, *A Cantor limit set*, Russ. Math. Surveys **35**(2), 235–236 (1980).
DOI: <https://doi.org/10.1070/RM1980v035n02ABEH001644>
- [32] H.M. Gehman, *Concerning the subsets of a plane continuous curve*, Ann. Math. **27** (1), 29–46 (1925).
DOI: <https://doi.org/10.2307/1967832>

Elena Nikolaevna Makhrova

Lobachevsky State University of Nizhny Novgorod,
23 Gagarin ave., Nizhny Novgorod 603022, Russia,
E-mail: elena_makhrova@inbox.ru