

Топологическая энтропия, подкова и минимальные множества непрерывных отображений дендритов

Е.Н. Махрова

Аннотация. Пусть X – дендрит со счетным множеством концевых точек, а $f : X \rightarrow X$ – непрерывное отображение. Показано, что топологическая энтропия отображения f положительна тогда и только тогда, когда существует натуральное число n такое, что отображение f^n имеет дуговую подкову. Также установлена ключевая роль бесконечных минимальных множеств при изучении динамики указанных отображений. В частности, доказано, что положительность топологической энтропии таких отображений влечет существование бесконечного минимального множества M в X , сужение отображения на котором $f|_M$ имеет положительную топологическую энтропию.

Ключевые слова: дендрит, топологическая энтропия, подкова, дуговая подкова, минимальное множество, периодическая точка, рекуррентная точка.

DOI: 10.26907/2949-3919.2025.4.65-86

Введение

1. Под *континуумом* понимаем компактное связное метрическое пространство. *Дендритом* называется локально связный континуум, не содержащий подмножеств, гомеоморфных окружности. Дендрит с конечным числом концевых точек называется конечным деревом (определение концевой точки и свойства дендритов см. в [разделе 1](#), п. 1). Стоит отметить, что любой дендрит является одномерным разветвленным континуумом, и именно к этому классу пространств в последние два десятилетия наблюдается растущий интерес, обусловленный их возникновением в различных разделах математики (см., например, [\[1–9\]](#)).

Пусть X – дендрит. Следуя работе [\[10\]](#), связное подмножество дендрита X , замыкание которого гомеоморфно отрезку $[0; 1]$ на прямой $\mathbb{R}^1$, будем называть *дугой*.

Символом $[x; y]$ будем обозначать дугу с концами в точках x и y , содержащую эти точки. Положим $(x; y) = [x; y] \setminus \{x\}$, $[x; y) = [x; y] \setminus \{y\}$, $(x; y) = [x; y] \setminus \{x; y\}$.

Пусть $f : X \rightarrow X$ – непрерывное отображение дендрита X . Непустое множество $M \subset X$ называется *минимальным относительно f* , если оно замкнуто, инвариантно и не содержит собственных подмножеств, удовлетворяющих указанным свойствам.

Благодарности. Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 24-21-00242, <https://rscf.ru/project/24-21-00242>.

Будем говорить, что *отображение f имеет подкову*, если существуют замкнутые непересекающиеся подконтинуумы A, B в X , для которых

$$f(A) \cap f(B) \supset A \cup B.$$

Подкову будем обозначать через (A, B) .

Подкова (A, B) называется *дуговой*, если существует дуга $[\alpha; \beta]$ в X такая, что $A, B \subset [\alpha; \beta]$. Данное понятие является обобщением 2-подковы, рассмотренной в [11]. Дуговая подкова (A, B) , в отличие от 2-подковы, допускает существование точек ветвления на дугах A и B . Важным свойством непрерывных отображений на дендритах со счетным множеством конечных точек является следующее: если непрерывное отображение f имеет подкову, то f^n имеет дуговую подкову при некотором натуральном n [12]. Однако, данное утверждение неверно для отображений на дендрите, имеющем несчетное множество конечных точек [13].

Определение топологической энтропии для отображений на компактных метрических пространствах приводится в работах [14] и [15]. Известно, что для непрерывных отображений на одномерных континуумах, таких как отрезок, конечное дерево или конечный граф, топологическая энтропия служит не только количественной мерой сложности динамики, но и тесно связана с ее качественными характеристиками (см., например, [16, глава 3, теорема 3.11], [11]). Однако для дендритов, обладающих более сложной топологической структурой по сравнению с отрезком и конечными деревьями, многие установленные взаимосвязи между свойствами топологической энтропии и динамическими свойствами отображений перестают выполняться (см, например, [10, 17–20]). В частности, если для отображений на отрезке и конечных деревьях положительность топологической энтропии эквивалентна существованию подковы [11, 21, 22], то для отображений на дендритах это условие перестает быть достаточным для существования подковы [18, пример 6].

В нашей работе выделен класс дендритов, имеющих счетное число конечных точек, на которых изучается взаимосвязь между свойствами топологической энтропии заданных на них непрерывных отображений и существованием дуговой подковы у итерации f^n при некотором натуральном n . При этом показана ключевая роль бесконечных минимальных множеств при решении указанного вопроса. Тем более, что конечные минимальные множества, т.е. периодические орбиты, не оказывают влияние на топологическую энтропию и другие качественные характеристики непрерывных отображений, заданных на дендритах [10, теорема 19]. Как показывают результаты работ [23, 24], где изучается взаимосвязь между свойствами топологической энтропии и свойствами бесконечных минимальных множеств непрерывных отображений на одномерных разветвленных континуумах, именно бесконечные минимальные множества играют фундаментальную роль при изучении динамики указанных отображений.

2. Перейдем к основным результатам работы.

Первая теорема определяет ключевую роль бесконечных минимальных множеств у непрерывных отображений с положительной топологической энтропией, заданных

на дендритах со счетным множеством концевых точек.

Теорема 1. Пусть X – дендрит со счетным множеством концевых точек, а непрерывное отображение $f : X \rightarrow X$ имеет положительную топологическую энтропию. Тогда найдется такое бесконечное минимальное множество M в X , что топологическая энтропия отображения $f|_M$ положительна.

Отметим существование дискретных динамических систем с положительной топологической энтропией, у которых сужение отображения на любое минимальное множество имеет нулевую топологическую энтропию (см., например, [25]). Вопрос о справедливости утверждения теоремы 1 для непрерывных отображений на дендритах, имеющих несчетное множество концевых точек, в настоящее время остается открытым.

Следующая теорема устанавливает взаимосвязь между свойствами топологической энтропии и существованием дуговой подковы у непрерывных отображений на дендритах со счетным множеством концевых точек.

Теорема 2. Пусть X – дендрит со счетным множеством концевых точек, а непрерывное отображение $f : X \rightarrow X$ имеет положительную топологическую энтропию. Тогда найдется такое натуральное число n , что отображение f^n имеет дуговую подкову.

Если дендрит X имеет несчетное множество концевых точек, то утверждение теоремы 2 неверно (см. [18, пример 6]). Более того, любая итерация отображения f из указанного примера не имеет никакой подкову.

Поскольку наличие подковы у отображения f , заданного на любом компактном топологическом пространстве, влечет положительность топологической энтропии отображения f (см., например, [10, предложение 1]), то из теоремы 2 получаем критерий положительности топологической энтропии непрерывных отображений на дендритах со счетным множеством концевых точек в терминах существования подковы. Этот результат обобщает классические теоремы о взаимосвязи свойств топологической энтропии и существованием подковы для непрерывных отображений на отрезке и конечных графах, в частности, на дендритах с конечным числом концевых точек, т. е. на конечных деревьях [11, 21, 22].

Следствие 3. Пусть X – дендрит со счетным числом концевых точек, а отображение $f : X \rightarrow X$ непрерывно. Тогда следующие утверждения эквивалентны:

- 1) f имеет положительную топологическую энтропию;
- 2) существует такое натуральное число $n \geq 1$, что f^n имеет дуговую подкову.

В заключение данного раздела отметим, что несчетность множества концевых точек у дендрита X связана с существованием дендрита Гехмана на X , который имеет счетное число точек ветвления, порядок каждой точки ветвления равен 3, а множество концевых точек гомеоморфно канторову множеству (построение дендрита Гехмана см., например, [10, 26, 27]). В [28] установлено, что множество концевых точек $E(X)$ дендрита X несчетно тогда и только тогда, когда X содержит дендрит, гомеоморфный дендриту Гехмана. Таким образом, отсутствие на дендрите X подмножества, гомеоморфного дендриту Гехмана, эквивалентно тому, что множество $E(X)$ концевых точек дендрита X счетно.

1. Предварительные сведения

1. Пусть X – дендрит, A – подмножество в X . Обозначим через $\text{diam } A$ диаметр множества A ; $\text{card } A$ мощность множества A , $\partial(A)$ границу множества A , $\bar{A}$ замыкание множества A . Множество натуральных чисел обозначим через $\mathbb{N}$.

Пусть p – любая точка из X . Поскольку любой дендрит является локально связным континуумом, то под окрестностью точки p будем понимать открытое связное множество в X , содержащее p .

Сформулируем определение конечного или счетного порядка ω точки дендрита (здесь ω – счетный ординал, соответствующий множеству натуральных чисел в их естественном порядке).

Определение 4 ([29, гл. 6, §51, I], [10, 30]). Пусть X – дендрит, p – точка в X , а $\mathfrak{n} \in \mathbb{N}$. Будем говорить, что

- 1) порядок точки p не превосходит $\mathfrak{n}$ ($\text{ord } p \leq \mathfrak{n}$), если для любого $\varepsilon > 0$ существует $0 < \delta < \varepsilon$ такое, что мощность границы δ -окрестности точки p не превосходит $\mathfrak{n}$;
- 2) порядок точки p равен $\mathfrak{n}$ ($\text{ord } p = \mathfrak{n}$), если $\text{ord } p \leq \mathfrak{n}$, и соотношение $\text{ord } p \leq \mathfrak{m}$ не имеет места ни при каком $\mathfrak{m} < \mathfrak{n}$;
- 3) порядок точки p равен ω ($\text{ord } p = \omega$), если существует $\varepsilon_0 > 0$ такое, что для любого $0 < \delta < \varepsilon_0$ мощность $\text{card}(\partial U_\delta(p))$ границы δ -окрестности $U_\delta(p)$ точки p конечна, причем множество $\{\text{card}(\partial U_\delta(p))\}_{\delta > 0}$ не ограничено сверху (при $\delta \rightarrow +0$).

Точки дендрита X порядка, большего 2 (равного 1) называются *точками ветвления* (концевыми точками) X .

Обозначим через $R(X)$ ($E(X)$) множество точек ветвления (концевых точек) континуума X , через $E^{(1)}(X)$ ($R^{(1)}(X)$) множество предельных точек множества $E(X)$ ($R(X)$), через $R_\omega(X)$ множество точек дендрита X , порядок которых равен ω . Следующие три леммы являются характеристическими свойствами дендритов.

Лемма 5 ([29, гл. 6, §51, VI], [27, 30]). Пусть X – дендрит. Тогда

- 1) любые две различные точки $z_1, z_2 \in X$ можно соединить единственной дугой;
- 2) множество $R(X)$ точек ветвления дендрита X не более, чем счетно;
- 3) X – регулярный континуум, т. е. $\text{ord } z$ или конечен, или $\text{ord } z = \omega$ для любой точки $z \in X$;
- 4) любой подконтинуум дендрита есть дендрит.

Лемма 6 ([31, утверждение 2.1]). Для любого дендрита X выполнено равенство

$$E^{(1)}(X) = R^{(1)}(X) \cup R_\omega(X).$$

Лемма 7 ([31, теорема 2.1]). Если множество $E(X)$ концевых точек дендрита X плотно в себе (т. е. не содержит изолированных точек), то $E(X)$ несчетно.

Докажем следующее свойство дендритов, имеющих счетное множество концевых точек.

Лемма 8. Пусть дендрит X имеет счетное множество концевых точек. Тогда найдутся точки $e \in E(X)$ и $a \in X \setminus E(X)$ такие, что $[a; e] \cap R(X) = \emptyset$.

Доказательство. Поскольку множество $E(X)$ концевых точек счетно, то по лемме 7 найдется точка $e \in E(X) \setminus E^{(1)}(X)$. Тогда согласно лемме 6 имеем: $e \notin R^{(1)}(X)$. Следовательно, найдется окрестность $U(e)$ точки e такая, что

$$U(e) \cap R(X) = \emptyset. \quad (1)$$

Пусть a – любая точка из $U(e)$. В силу утверждения 1) леммы 5 существует единственная дуга $[a; e]$, соединяющая точки a и e . Так как окрестность $U(e)$ точки e связная, то $[a; e] \subset U(e)$. Тогда с учетом (1) получаем, что $[a; e] \cap R(X) = \emptyset$. Лемма 8 доказана. $\square$

Отметим, что утверждение леммы 8 неверно для выше упомянутого дендрита Гехмана, у которого множество концевых точек несчетно.

Следующая лемма является следствием утверждения из [32, лемма 4].

Лемма 9 ([32]). Пусть X – дендрит, Y – подконтинуум в X . Тогда

$$\text{card } E(Y) \leq \text{card } E(X).$$

2. Пусть $f : X \rightarrow X$ – непрерывное отображение дендрита X , p – произвольная точка в X . Точка p называется

- *периодической точкой отображения f* , если существует такое $n \in \mathbb{N}$, что $f^n(p) = p$; наименьшее n , удовлетворяющее данному условию называется *периодом* точки p . Если $n = 1$, то p называется *неподвижной точкой отображения f* ;
- *устойчивой по Пуассону* (англ. *recurrent*) *относительно f* , если для любой окрестности $U(p)$ точки p найдется такое $n \in \mathbb{N}$, что $f^n(p) \in U(p)$;
- *рекуррентной* (англ. *uniformly recurrent*) *относительно f* , если p – устойчивая по Пуассону и для любой окрестности $U(p)$ точки p существует $k_0 \in \mathbb{N}$ такое, что если $f^j(p) \in U(p)$ для некоторого $j \geq 1$, то существует натуральное число $0 < k \leq k_0$, для которого $f^{j+k}(p) \in U(p)$.

Обозначим через $\text{Fix}(f)$, $\text{Per}(f)$, $\text{Poiss}(f)$, $\text{Rec}(f)$ – множество неподвижных точек, периодических точек, устойчивых по Пуассону точек, рекуррентных точек отображения f , соответственно.

Из приведенных выше определений справедливы следующие включения:

$$\text{Fix}(f) \subseteq \text{Per}(f) \subseteq \text{Rec}(f) \subseteq \text{Poiss}(f). \quad (2)$$

Приведем необходимые нам утверждения, отражающие свойства минимальных множеств. Лемма 10 устанавливает впервые полученную Дж. Биркгофом [33, глава 7, §7]

взаимосвязь между рекуррентными точками и минимальными множествами у непрерывных отображений на компактных метрических пространствах.

Лемма 10 ([34, глава V, утверждение 5]). Пусть $f : X \rightarrow X$ – непрерывное отображение компактного метрического пространства X . Тогда

- 1) если f имеет минимальное множество M , а $x \in M$, то $x \in \text{Rec}(f)$;
- 2) если $x \in \text{Rec}(f)$, то множество $\overline{\{f^i(x)\}_{i \geq 0}}$ является минимальным относительно f .

Лемма 11 ([34, глава V, лемма 7]). Для любого непрерывного отображения $f : X \rightarrow X$ компактного метрического пространства X и для произвольного $n \in \mathbb{N}$ имеет место равенство $\text{Rec}(f) = \text{Rec}(f^n)$.

Пусть отображение f имеет бесконечное минимальное множество M . Положим

$$[M] = \bigcup_{x, y \in M} [x, y].$$

Поскольку M – замкнутое множество, то следующее утверждение является прямым следствием результатов [35] (см. [35, лемма 6]).

Лемма 12. Если непрерывное отображение $f : X \rightarrow X$ дендрита X имеет бесконечное минимальное множество M , то $[M]$ является дендритом, причем $E([M]) \subset M$.

В [17, теорема С] представлен пример непрерывного отображения дендрита, имеющего такое бесконечное минимальное множество M , что дендрит $[M]$ имеет несчетное множество концевых точек. В заключительной части работы мы построим пример непрерывного отображения на дендрите, у которого существует бесконечное минимальное множество M , но $[M]$ обладает иной структурой, а именно $[M]$ имеет счетное число концевых точек.

2. Доказательство теоремы 1

Начнем со вспомогательных утверждений.

Теорема 13 ([36]). Пусть $f : X \rightarrow X$ – непрерывное отображение дендрита X со счетным множеством концевых точек. Тогда $\overline{\text{Per}(f)} = \overline{\text{Poiss}(f)}$.

Следствие 14. Пусть X – дендрит со счетным множеством концевых точек, а непрерывное отображение $f : X \rightarrow X$ имеет бесконечное минимальное множество M . Тогда любая точка x из M является предельной точкой для множества $\text{Per}(f)$ периодических точек отображения f , т. е. $x \in \overline{\text{Per}(f)} \setminus \text{Per}(f)$.

Доказательство. Пусть x – любая точка из M . Тогда в силу утверждения 1) [леммы 10](#) получаем, что $x \in \text{Rec}(f)$. Поскольку M – бесконечное минимальное множество, то $x \in \text{Rec}(f) \setminus \text{Per}(f)$. Из [теоремы 13](#) и включений (2) следует равенство:

$$\overline{\text{Per}(f)} = \overline{\text{Rec}(f)}.$$

Отсюда получаем, что $x \in \overline{\text{Per}(f)} \setminus \text{Per}(f)$. [Следствие 14](#) доказано. $\square$

Отметим, что утверждение [следствия 14](#) неверно, если множество концевых точек дендрита X несчетно (см, например, [\[10, теорема 22\]](#), [\[35, теорема 3\]](#), [\[18, пример 6\]](#)).

Следующее утверждение справедливо для непрерывных отображений, заданных только на компактных метрических пространствах. Первоначальное доказательство было получено для непрерывных отображений отрезка в работе [\[37\]](#), а затем разработанная методика была распространена на общий случай непрерывных отображений, заданных на любых компактных метрических пространствах в [\[19, 38\]](#).

Лемма 15 ([\[19, 37, 38\]](#)). Пусть $f : X \rightarrow X$ – непрерывное отображение компактного метрического пространства X . Тогда для любого инвариантного подмножества Y в X имеет место равенство: $h(f|_Y) = h(f|_{\overline{Y}})$.

Лемма 16 ([\[38, лемма 2.5\]](#), [\[19, утверждение 3.6\]](#)). Пусть $f : X \rightarrow X$ – непрерывное отображение компактного метрического пространства X , и $h(f|_{\text{Rec}(f)}) > 0$. Тогда существует такое минимальное множество M , что $h(f|_M) > 0$.

Теорема 17 ([\[14\]](#), [\[34, глава VIII, п. 1\]](#)). Пусть $f : X \rightarrow X$ – непрерывное отображение компактного метрического пространства X . Тогда $h(f) = h(f|_{\overline{\text{Poiss}(f)}})$.

Перейдем к доказательству первой теоремы.

Доказательство [теоремы 1](#). Так как дендрит X имеет счетное число концевых точек, то из [теоремы 13](#) следует равенство: $\overline{\text{Per}(f)} = \overline{\text{Poiss}(f)}$. Тогда из включений (2) вытекает, что $\overline{\text{Rec}(f)} = \overline{\text{Poiss}(f)}$. Применяя [теорему 17](#) и [лемму 15](#), получаем цепочку равенств:

$$h(f) = h(f|_{\overline{\text{Poiss}(f)}}) = h(f|_{\overline{\text{Rec}(f)}}) = h(f|_{\text{Rec}(f)}).$$

Так как $h(f) > 0$, то из установленного равенства « $h(f) = h(f|_{\text{Rec}(f)})$ » заключаем, что $h(f|_{\text{Rec}(f)}) > 0$. Тогда по [лемме 16](#) существует минимальное множество M в X такое, что $h(f|_M) > 0$. В силу положительности энтропии отображения $f|_M$ множество M является бесконечным. [Теорема 1](#) доказана. $\square$

Замечание 18. Из доказательства [теоремы 1](#) следует, что полученный результат остается справедливым для непрерывных отображений произвольных компактных метрических пространств при выполнении условия $\overline{\text{Rec}(f)} = \overline{\text{Poiss}(f)}$. Необходимо отметить, что указанное равенство не выполняется для непрерывных отображений дендритов с несчетным множеством концевых точек [\[39, теорема 5.2\]](#), [\[40, пример 17\]](#).

3. Доказательство теоремы 2

Пусть $f : X \rightarrow X$ – непрерывное отображение компактного метрического пространства X . Топологическую энтропию отображения f будем обозначать через $h(f)$. Начнем со вспомогательных утверждений.

Лемма 19 ([34, глава VII, утверждение 5]). Пусть $f : X \rightarrow X$ – непрерывное отображение компактного метрического пространства X , а Y – замкнутое инвариантное подмножество в X . Тогда $h(f|_Y) \leq h(f)$.

Следующее утверждение вытекает из результатов работ [21] и [11].

Лемма 20 ([21], [11, теорема В]). Пусть непрерывное отображение $f : [a; b] \rightarrow [a; b]$ дуги $[a; b]$ имеет положительную топологическую энтропию. Тогда найдется такое $n \in \mathbb{N}$, что отображение f^n имеет дуговую подкову.

Лемма 21. Пусть $f : X \rightarrow X$ – непрерывное отображение дендрита X , а $p \in \text{Fix}(f)$. Если существуют точка $y \in X \setminus \{p\}$ и натуральное число $s \geq 2$ такие, что $y \in (p; f(y))$, а $p \in (f^s(y); y)$, то f^s имеет дуговую подкову.

Доказательство. Поскольку отображение f непрерывно, то $f([p; y])$ связно. Тогда из условия $y \in (p; f(y))$ получаем, что

$$f([p; y]) \supseteq [p; f(y)] \supset [p; y].$$

Следовательно, существует такая точка $y_1 \in (p; y)$, что $f(y_1) = y$. Тогда

$$f([p; y_1]) \supseteq [p; f(y_1)] = [p; y] \supset [p; y_1].$$

Поэтому найдется точка $y_2 \in (p; y_1)$ такая, что $f(y_2) = y_1$. Повторяя приведенные рассуждения $s - 1$ раз, получим набор точек $\{y_i\}_{i=1}^{s-1}$ таких, что $y_i \in (p; y_{i-1})$ и $f(y_i) = y_{i-1}$ для $2 \leq i \leq s - 1$. Тогда $f^i(y_i) = y$ ($1 \leq i \leq s - 1$).

Покажем, что отображение f^s имеет подкову $([p; y_{s-1}], [y_{s-2}; f(y)])$.

1. Из построения точек $\{y_i\}_{i=1}^{s-1}$ следует, что $y_{s-1} \in (p; y_{s-2})$. Следовательно,

$$[p; y_{s-1}] \cap [y_{s-2}; f(y)] = \emptyset.$$

2. Используя непрерывность f , построение точек $\{y_i\}_{i=1}^{s-1}$ получаем:

$$\begin{aligned} f^s([p; y_{s-1}]) &\supseteq f([p; f^{s-1}(y_{s-1})]) = f([p; y]) \supseteq [p; f(y)] \supset [p; y_{s-1}] \cup [y_{s-2}; f(y)], \\ f^s([y_{s-2}; f(y)]) &\supseteq f^2([f^{s-2}(y_{s-2}); f^{s-1}(y)]) = f^2([y; f^{s-1}(y)]) \supseteq f([f(y); f^s(y)]). \end{aligned}$$

Из условий нашей леммы « $y \in (p; f(y))$ », « $p \in (f^s(y); y)$ » и построения точек $\{y_i\}_{i=1}^{s-1}$ вытекает цепочка включений:

$$f([f(y); f^s(y)]) \supset f([p; y]) \supseteq [p; f(y)] \supset [p; y_{s-1}] \cup [y_{s-2}; f(y)].$$

Следовательно,

$$f^s([p; y_{s-1}]) \cap f^s([y_{s-2}; f(y)]) \supseteq [p; y_{s-1}] \cup [y_{s-2}; f(y)].$$

Учитывая, что обе дуги $[p; y_{s-1}]$ и $[y_{s-2}; f(y)]$ содержатся в $[p; f(x)]$, заключаем, что подкова $([p; y_{s-1}], [y_{s-2}; f(y)])$ является дуговой. [Лемма 21](#) доказана. $\square$

Для доказательства следующего утверждения нам потребуются определения монотонного отображения и ретракции пространства на подмножество.

Определение 22 ([29, т. 2, §46, II]). Непрерывное отображение $f : X \rightarrow X$ дендрита X называется монотонным, если полный прообраз $f^{-1}(A)$ любого связного подмножества A из $f(X)$ связан в X .

Определение 23 ([29, т. 1, §13, V]). Подмножество A пространства X называется ретрактом пространства X , если существует непрерывное отображение r , называемое ретракцией пространства X на множество A , такое, что $r(x) = x$ для $x \in A$.

Отметим, что континуум является дендритом тогда и только тогда, когда для любого его подконтинуума существует монотонная ретракция [41].

Пусть $f : X \rightarrow X$ – непрерывное отображение дендрита X , и существует дуга $[a; b]$ в X такая, что

$$(a; b) \cap R(X) = \emptyset.$$

Тогда $X \setminus (a; b)$ состоит из двух связных множеств (одно из которых может быть одноточечным). Обозначим через V_a и V_b связные множества из $X \setminus (a; b)$, для которых

$$V_a \cap [a; b] = \{a\}, \quad V_b \cap [a; b] = \{b\}.$$

Определим монотонную ретракцию $r : X \rightarrow [a; b]$ по следующей формуле:

$$r(x) = \begin{cases} x, & \text{если } x \in [a; b]; \\ a, & \text{если } x \in V_a; \\ b, & \text{если } x \in V_b. \end{cases} \quad (3)$$

Положим

$$g = r \circ f : [a; b] \rightarrow [a; b]. \quad (4)$$

Так как отображения f и r непрерывные, то g также непрерывное отображение. Из задания отображений r и g вытекает следующая формула, связывающая отображения f и g :

$$g(x) = \begin{cases} f(x), & \text{если } f(x) \in [a; b]; \\ a, & \text{если } f(x) \in V_a; \\ b, & \text{если } f(x) \in V_b. \end{cases}$$

Справедливо следующее утверждение.

Лемма 24. Пусть $f : X \rightarrow X$ – непрерывное отображение дендрита, и существует дуга $[a; b]$ в X , для которой $(a; b) \cap R(X) = \emptyset$. Тогда если отображение $g : [a; b] \rightarrow [a; b]$ определено как в (4), то для любой дуги $[c; d]$ из $[a; b]$ и произвольного числа $n \in \mathbb{N}$ справедливо:

$$f^n([c; d]) \supseteq g^n([c; d]).$$

Доказательство. Доказательство проведем методом математической индукции. Справедливость утверждения для $n = 1$ следует из задания отображений r и g , т. е.

$$f([c; d]) \supseteq g[c; d]. \quad (5)$$

Предположим, что утверждение справедливо для n и докажем его справедливость для $n + 1$. Используя предположение для n , получим:

$$f^{n+1}([c; d]) = f(f^n([c; d])) \supseteq f(g^n([c; d])). \quad (6)$$

Поскольку g непрерывно, то $g^n([c; d])$ – связный компакт. Более того, по определению отображения g имеем: $g^n([c; d]) \subseteq [a; b]$. Следовательно, $g^n([c; d])$ – дуга. Тогда, продолжая (6), применим (5). В результате получим:

$$f(g^n([c; d])) \supseteq g(g^n([c; d])) = g^{n+1}([c; d]).$$

Таким образом, $f^{n+1}([c; d]) \supseteq g^{n+1}([c; d])$. Лемма 24 доказана. $\square$

Доказательство теоремы 2 начнем со случая, когда отображение $f : X \rightarrow X$ дендрита X имеет бесконечное минимальное множество M , у которого континуум $[M]$ является дугой.

Лемма 25. Пусть непрерывное отображение $f : X \rightarrow X$ дендрита X имеет бесконечное минимальное множество M в X , на котором $h(f|_M) > 0$. Если $[M] = [a; b]$, причем $(a; b) \cap R(X) = \emptyset$, то найдется такое число $n \in \mathbb{N}$, что отображение f^n имеет дуговую подкову.

Доказательство. Из [леммы 12](#) получаем, что $\{a, b\} \subset M$. Поскольку $f(M) = M$, а $f([a; b])$ связно, то

$$f([a; b]) \supseteq [a; b].$$

Рассмотрим следующие 2 случая:

- I. $f([a; b]) = [a; b]$;
- II. $f([a; b]) \supset [a; b]$.

Пусть имеет место первый случай. Поскольку $M \subset [a; b]$, и $h(f|_M) > 0$, то в силу [леммы 19](#) получаем, что $h(f|_{[a; b]}) > 0$. Поэтому согласно [лемме 20](#) найдется натуральное число $n \geq 1$ такое, что $f^n|_{[a; b]}$ имеет дуговую подкову (I, J) . В первом случае [лемма 25](#) доказана.

Пусть имеет место второй случай. Определим отображения

$$r : X \rightarrow [a; b] \quad \text{и} \quad g : [a; b] \rightarrow [a; b]$$

как в [\(3\)](#) и [\(4\)](#). Поскольку $M \subset [a; b]$, то $g|_M = f|_M$. Тогда из условия « $h(f|_M) > 0$ » вытекает, что $h(g|_M) > 0$. Поэтому согласно [лемме 19](#) получаем, что $h(g) > 0$. Применяя к отображению g [лемму 20](#), заключаем, что существует такое число $n \in \mathbb{N}$, что отображение g^n имеет дуговую подкову (I, J) . Тогда из [леммы 24](#) следует, что

$$f^n(I) \supseteq g^n(I), \quad f^n(J) \supseteq g^n(J).$$

Поэтому отображение f^n имеет дуговую подкову (I, J) . [Лемма 25](#) доказана. $\square$

Доказательство теоремы 2. Поскольку $h(f) > 0$, то согласно [теореме 1](#) найдется такое бесконечное минимальное множество M в X , что $h(f|_M) > 0$.

Положим $Y = [M]$. Из [леммы 12](#) следует, что Y – дендрит. Так как $Y \subseteq X$, а множество $E(X)$ конечных точек дендрита X счетно, то в силу [леммы 9](#) множество $E(Y)$ конечных точек континуума Y не более, чем счетно. Тогда согласно [лемме 8](#) найдутся точки $e \in E(Y)$ и $a \in Y \setminus E(Y)$, удовлетворяющие свойству:

$$(a; e) \cap R(Y) = \emptyset. \tag{7}$$

Согласно [следствию 14](#) найдется точка $p \in \text{Per}(f) \cap (a; e)$; пусть t – ее период. Поскольку $e \in E(Y)$, то из [леммы 12](#) получаем, что $e \in M$. Тогда в силу утверждения 1) [леммы 10](#) имеем: $e \in \text{Res}(f)$. Поэтому из [\(7\)](#) и включения « $M \subset Y$ » следует, что

$$(p; e) \cap M \neq \emptyset.$$

Поскольку минимальное множество M замкнуто, то найдется точка $y \in (p; e) \cap M$ такая, что

$$[p; y) \cap M = \emptyset. \tag{8}$$

Выберем окрестность $U(y)$ точки y таким образом, чтобы $U(y) \subset (p; e)$. Из [леммы 11](#) следует, что $y \in \text{Rec}(f^m)$. Поэтому найдется натуральное число k такое, что $f^{mk}(y) \in U(y)$. Согласно [\(8\)](#) имеем: $f^{mk}(y) \in (y; e]$.

Положим $g = f^{mk}$. Тогда $g(y) \in (y; e)$. Рассмотрим следующие 2 случая.

Случай 1. Существует натуральное число $s_0 \geq 2$ такое, что $g^{s_0}(y) \notin [p; e]$. Тогда в силу [леммы 21](#) отображение g^{s_0} имеет дуговую подкову. Следовательно, отображение f^n имеет дуговую подкову при $n = mks_0$. Таким образом, в первом случае утверждение [теоремы 2](#) справедливо.

Случай 2. Для любого натурального числа s выполнено условие:

$$g^s(y) \in (p; e].$$

Положим $M_0 = \overline{\{g^s(y)\}_{s \geq 0}}$. Тогда $M_0 \subset (p; e]$. Следовательно, $[M_0]$ является дугой.

Из [леммы 11](#) следует, что $y \in \text{Rec}(g)$. Тогда в силу утверждения 2) [леммы 10](#) имеем, что M_0 – минимальное множество относительно отображения g . Согласно [лемме 25](#) найдется натуральное число $l \geq 1$ такое, что отображение g^l имеет дуговую подкову. Следовательно, отображение f^n имеет дуговую подкову, где $n = mkl$. [Теорема 2](#) доказана. $\square$

4. Пример непрерывного отображения дендрита с бесконечным минимальным множеством

В этой части работы мы построим дендрит X и непрерывное отображение на нем, имеющее бесконечное минимальное множество M такое, что $[M]$ является дендритом со счетным множеством концевых точек. Для этого нам понадобится следующее утверждение.

Лемма 26 ([42, лемма 4]). Пусть X – дендрит, M – замкнутое подмножество в X , а $\chi : M \rightarrow X$ – непрерывное отображение. Тогда существует непрерывное отображение $f : X \rightarrow X$ такое, что $f|_M = \chi|_M$.

Пример 27. Начнем с построения дендрита X . Положим

$$X = [0; 1] \cup \bigcup_{j=1}^{+\infty} \left[\frac{1}{3^j}; \frac{1}{3^j} + \frac{\mathbf{i}}{3^j} \right].$$

Отметим, что X – дендрит, у которого $R(X) = \left\{ \frac{1}{3^j} \right\}_{j=1}^{+\infty}$, а $E(X) = \left\{ \frac{1}{3^j} + \frac{\mathbf{i}}{3^j} \right\}_{j=1}^{+\infty}$.

Для построения отображения $f : X \rightarrow X$ нам понадобятся три вспомогательных отображения.

1. Пусть $g = \lambda^* x(1 - x) : [0; 1] \rightarrow [0; 1]$, где λ^* – предельное значение параметров удвоения периодов у квадратичных отображений (см., например, [43], [16, глава 1, §2]). От-

метим, что отображение g имеет бесконечное минимальное множество M , гомеоморфное канторову множеству, причем $g|_M$ – гомеоморфизм. Так как $g(0) = 0$, а $g(1) = 0$, то точки 0 и 1 не принадлежат M .

2. Пусть K – классическое канторово множество на $[0; 1]$. Зададим любой гомеоморфизм $\varphi : [0; 1] \rightarrow [-1/2; 3/2]$ таким образом, чтобы

$$\varphi(0) = -\frac{1}{2}, \quad \varphi(1) = \frac{3}{2}, \quad \varphi(M) = K.$$

3. Определим отображение $\psi : [-1/2; 3/2] \rightarrow X$, положив $\psi(x) = 0$, если $x \in [-1/2; 0]$; $\psi(x) = 1$, если $x \in [1; 3/2]$; $\psi(x) = x$, если $x \in [2/3; 1]$.

Для каждого натурального числа $j \geq 1$ определим линейный гомеоморфизм $\psi : \left[\frac{2}{3^{j+1}}; \frac{1}{3^j} \right] \rightarrow \left[\frac{1}{3^j}; \frac{1}{3^j} + \frac{\mathbf{i}}{3^j} \right]$ так, чтобы выполнялись равенства:

$$\psi \left(\frac{2}{3^{j+1}} \right) = \frac{1}{3^j}, \quad \psi \left(\frac{1}{3^j} \right) = \frac{1}{3^j} + \frac{\mathbf{i}}{3^j}.$$

Пусть $\psi : \left[\frac{1}{3}; \frac{2}{3} \right] \rightarrow \left[\frac{1}{3} + \frac{\mathbf{i}}{3}; \frac{2}{3} \right]$ – линейный гомеоморфизм такой, что

$$\psi \left(\frac{2}{3} \right) = \frac{2}{3}, \quad \psi \left(\frac{1}{3} \right) = \frac{1}{3} + \frac{\mathbf{i}}{3}.$$

Для любого натурального числа $j \geq 2$ определим линейный гомеоморфизм $\psi : \left[\frac{1}{3^j}; \frac{2}{3^j} \right] \rightarrow \left[\frac{1}{3^j} + \frac{\mathbf{i}}{3^j}; \frac{1}{3^j} \right]$ таким образом, чтобы

$$\psi \left(\frac{1}{3^j} \right) = \frac{1}{3^j} + \frac{\mathbf{i}}{3^j}, \quad \psi \left(\frac{2}{3^j} \right) = \frac{1}{3^j}.$$

Положим $G = \psi(K)$. Тогда из задания отображения φ получаем, что $G = \psi(\varphi(M))$. Отметим также, что $\psi([-1/2; 3/2]) = X$, и $\psi : K \rightarrow G$ – гомеоморфизм.

Зададим отображение $\chi : G \rightarrow G$, положив

$$\chi(x) = \psi \circ \varphi \circ g \circ \varphi^{-1} \circ \psi^{-1}(x) \text{ для любой точки } x \in G.$$

В силу [леммы 26](#) существует непрерывное отображение $f : X \rightarrow X$ такое, что $f|_G = \chi|_G$. По построению отображения f множество G является бесконечным минимальным множеством относительно отображения f , причем $E(X) \subset G$. Следовательно, $X = [G]$, т. е. $[G]$ является дендритом со счетным множеством концевых точек.

Список литературы

- [1] S.J. Agronsky, J.G. Ceder, *What sets can be ω -limit sets in E^n ?*, Real Anal. Exchange **17** (1), 97–109 (1991/1992).
- [2] S.J. Agronsky, J.G. Ceder, *Each Peano subspace of E^k is an ω -limit set*, Real Anal. Exchange **17** (1), 371–378 (1991/1992).
- [3] F. Balibrea, J.L. García-Guirao, *Continua with empty interior as ω -limit sets*, Appl. Gen. Topol. **6** (2), 195–205 (2005).
- [4] A. Blokh, Ch. Cleveland, M. Misiurewicz, *Julia sets of expanding polynomials*, Ergodic Theory Dynam. Systems **25** (6), 1691–1718 (2005).
DOI: <https://doi.org/10.1017/S0143385705000210>
- [5] D. Drozdov, A. Tetenov, *On the classification of fractal square dendrites*, Adv. Theory Nonlinear Anal. Appl. **7** (3), 19–96 (2023).
DOI: <https://doi.org/10.17762/atnaa.v7.i3.276>
- [6] L.S. Efremova, *Example of the smooth skew product in the plane with the one-dimensional ramified continuum as the global attractor*, in: *European Conference on Iteration Theory 2010*, ESAIM Proc. **36**, EDP Sci., Les Ulis, 15–25 (2012).
DOI: <https://doi.org/10.1051/proc/201236002>
- [7] L.S. Efremova, *Ramified continua as global attractors of C^1 -smooth self-maps of a cylinder close to skew products*, J. Difference Equ. Appl. **29** (9–12), 1244–1274 (2023).
DOI: <https://doi.org/10.1080/10236198.2023.2204144>
- [8] H.-O. Peitgen, P.H. Richter, *The beauty of fractals. Images of complex dynamical systems*, Springer-Verlag, Berlin, 1986.
DOI: <https://doi.org/10.1007/978-3-642-61717-1>
- [9] В.Ж. Сакбаев, О.Г. Смолянов, *Диффузия и квантовая динамика на графах*, Докл. РАН, **451** (2), 141–145 (2013).
DOI: <https://doi.org/10.7868/s0869565213200061>
- [10] Л.С. Ефремова, Е.Н. Махрова, *Одномерные динамические системы*, УМН **76** (5), 81–146 (2021).
DOI: <https://doi.org/10.4213/rm9998>
- [11] J. Llibre, M. Misiurewicz, *Horseshoes, entropy and periods for graph maps*, Topology **32** (3), 649–664 (1993).
DOI: [https://doi.org/10.1016/0040-9383\(93\)90014-M](https://doi.org/10.1016/0040-9383(93)90014-M)
- [12] Е.Н. Махрова, *Структура дендритов, допускающих существование дуговой подковы*, Изв. вузов. Матем. (8), 64–74 (2015).
<https://www.mathnet.ru/rus/ivm9028>

-
- [13] Е.Н. Махрова, *Существование линейной подковы непрерывных отображений дендритов*, Изв. вузов. Матем. (3), 40–46 (2013).
<https://www.mathnet.ru/rus/ivm8781>
- [14] Е.И. Динабург, *Связь между различными энтропийными характеристиками динамических систем*, Изв. АН СССР. Сер. матем. **35** (2), 324–366 (1971).
<https://www.mathnet.ru/im1975>
- [15] R. Bowen, *Entropy for group endomorphisms and homogeneous spaces*, Trans. Amer. Math. Soc. **153**, 401–414 (1971).
DOI: <https://doi.org/10.1090/S0002-9947-1971-0274707-X>
- [16] А.Н. Шарковский, Ю.Л. Майстренко, Е.Ю. Романенко, *Разностные уравнения и их приложения*, Наук. думка, Киев, 1986.
- [17] Л.С. Ефремова, Е.Н. Махрова, *Динамика монотонных отображений дендритов*, Матем. сб. **192** (6), 15–30 (2001).
DOI: <https://doi.org/10.4213/sm570>
- [18] Z. Kočan, V. Kornecká-Kurková, M. Málek, *Entropy, horseshoes and homoclinic trajectories on trees, graphs and dendrites*, Ergodic Theory Dynam. Systems **31** (1), 165–175 (2011).
DOI: <https://doi.org/10.1017/S0143385709001011>
- [19] Z. Kočan, V. Kurková, M. Málek, *Counterexample of continuous maps on dendrites*, J. Difference Equ. Appl. **22** (2), 253–271 (2016).
DOI: <https://doi.org/10.1080/10236198.2015.1081385>
- [20] Е.Н. Махрова, *О гомоклинических точках и топологической энтропии непрерывных отображений на одномерных разветвленных континуумах*, Уфимск. матем. журн. **17** (3), 82–99 (2025).
<https://www.mathnet.ru/rus/ufa741>
- [21] M. Misiurewicz, *Horseshoes for mappings of an interval*, Bull. Acad. Pol. Sci., Ser. Sci. Math. **27** (2), 167–169 (1979).
<http://rcin.org.pl/publication/81514?language=en>
- [22] M. Misiurewicz, W. Szlenk, *Entropy of piecewise monotone mappings*, Studia Math. **67** (1), 45–63 (1980).
DOI: <https://doi.org/10.4064/sm-67-1-45-63>
- [23] E.N. Makhrova, *Remarks on minimal sets on dendrites and finite graphs*, J. Difference Equ. Appl. **29** (9–12), 1313–1322 (2023).
DOI: <https://doi.org/10.1080/10236198.2023.2220417>
- [24] Е.Н. Махрова *О минимальных множествах непрерывных отображений на одномерных континуумах*, Матем. теор. комп. науки **3** (3), 110–135 (2025).
DOI: <https://doi.org/10.26907/2949-3919.2025.3.110-135>

-
- [25] E. Glasner, B. Weiss, *Sensitive dependence on initial conditions*, Nonlinearity **6** (6), 1067–1075 (1993).
<https://doi.org/10.1088/0951-7715/6/6/014>
 - [26] H.M. Gehman, *Concerning the subsets of a plane continuous curve*, Ann. Math. **27** (1), 29–46 (1925).
 DOI: <https://doi.org/10.2307/1967832>
 - [27] S. Nadler, *Continuum theory. An introduction*, Marcel Dekker, New York, 1992.
 DOI: <https://doi.org/10.1201/9781315274089>
 - [28] D. Arévalo, W.J. Charatonik, P.P. Covarrubias, L. Simón, *Dendrites with a closed set of end points*, Topology Appl. **115** (1), 1–17 (2001).
 DOI: [https://doi.org/10.1016/S0166-8641\(00\)00058-4](https://doi.org/10.1016/S0166-8641(00)00058-4)
 - [29] К. Куратовский, *Топология*, Т. 1, Мир, М., 1966; Т. 2, Мир, М., 1969.
 - [30] J.J. Charatonik, W.J. Charatonik, *Dendrites*, Aportaciones Mat. Comun. **22**, 227–253 (1998).
https://www.researchgate.net/publication/285354319_Dendrites
 - [31] S. Zafiridou, *Classification of dendrites with a countable set of end points*, Topology Appl. **159** (7), 1661–1669 (2012).
 DOI: <https://doi.org/10.1016/j.topol.2011.07.027>
 - [32] J. Nikiel, *A characterization of dendroids with uncountably many end-points in the classical sense*, Houston J. Math. **9** (3), 421–432 (1983).
<https://api.core.ac.uk/oai/oai:CiteSeerX.psu:10.1.1.432.8438>
 - [33] Дж.Д. Биркгоф, *Динамические системы*, Регулярная и хаотическая динамика, Москва–Ижевск, 2002.
 - [34] L.S. Block, W.A. Coppel, *Dynamics in one dimension*, Lecture Notes in Mathematics **1513**, Springer-Verlag, Berlin, 1992.
 DOI: <https://doi.org/10.1007/BFb0084762>
 - [35] E.N. Makhrova, *Remarks on the existence of periodic points for continuous maps on dendrites*, Lobachevskii J. Math. **43** (7), 1711–1719 (2022).
 DOI: <https://doi.org/10.1134/S1995080222100274>
 - [36] J. Mai, E. Shi, $\bar{R} = \bar{P}$ for maps of dendrites X with $\text{Card}(\text{End}(X)) < c$, Internat. J. Bifur. Chaos Appl. Sci. Engrg. **19** (4), 1391–1396 (2009).
 DOI: <https://doi.org/10.1142/S021812740902372X>
 - [37] V.V. Fedorenko, A.N. Šarkovskii, J. Smítal, *Characterizations of weakly chaotic maps of the interval*, Proc. Amer. Math. Soc. **110** (1), 141–148 (1990).
 DOI: <https://doi.org/10.1090/S0002-9939-1990-1017846-5>

- [38] Z. Kočan, *Triangular maps of the square*, Grazer Math. Ber. **350**, 156–168 (2006).
- [39] G. Acosta, R. Hernández-Gutiérrez, I. Naghmouchi, P. Oprocha, *Periodic points and transitivity on dendrites*, Ergodic Theory Dynam. Systems **37** (7), 2017–2033 (2017).
DOI: <https://doi.org/10.1017/etds.2015.137>
- [40] L. Hoehn, C. Mouron, *Hierarchies of chaotic maps on continua*, Ergodic Theory Dynam. Systems **34** (6), 1897–1913 (2014).
DOI: <https://doi.org/10.1017/etds.2013.32>
- [41] G.R. Gordh, L. Lum, *Monotone retracts and some characterizations of dendrites*, Proc. Amer. Math. Soc. **59** (1), 156–158 (1976).
DOI: <https://doi.org/10.1090/S0002-9939-1976-0423317-X>
- [42] F. Balibrea, R. Hric, L'. Snoha, *Minimal sets on graphs and dendrites*, Internat. J. Bifur. Chaos Appl. Sci. Engrg. **13** (7), 1721–1725 (2003).
DOI: <https://doi.org/10.1142/S0218127403007576>
- [43] М. Фейгенбаум, *Универсальность в поведении нелинейных систем*, УФН **141** (2), 343–374 (1983).
DOI: <https://doi.org/10.3367/UFNr.0141.198310e.0343>

Елена Николаевна Махрова

Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского,
пр-т Гагарина, д. 23, г. Нижний Новгород, 603022, Россия,
e-mail: elena_makhrova@inbox.ru

Topological entropy, horseshoe and minimal sets of continuous maps of dendrites

E.N. Makhrova

Abstract. Let X be a dendrite with a countable set of end points, and let $f : X \rightarrow X$ be a continuous map. We show that the topological entropy of f is positive if and only if there exists a natural number $n \geq 1$ such that f^n has an arc horseshoe. We also demonstrate the fundamental role of infinite minimal sets in the dynamics of these maps. In particular, we prove that the positivity of the topological entropy of such maps implies the existence of an infinite minimal set M in X such that the restriction $f|_M$ has positive topological entropy.

Keywords: dendrite, topological entropy, horseshoe, arc horseshoe, minimal set, periodic point, recurrent point.

DOI: 10.26907/2949-3919.2025.4.65-86

References

- [1] S.J. Agronsky, J.G. Ceder, *What sets can be ω -limit sets in E^n ?*, Real Anal. Exchange **17** (1), 97–109 (1991/1992).
- [2] S.J. Agronsky, J.G. Ceder, *Each Peano subspace of E^k is an ω -limit set*, Real Anal. Exchange **17** (1), 371–378 (1991/1992).
- [3] F. Balibrea, J.L. García-Guirao, *Continua with empty interior as ω -limit sets*, Appl. Gen. Topol. **6** (2), 195–205 (2005).
- [4] A. Blokh, Ch. Cleveland, M. Misiurewicz, *Julia sets of expanding polynomials*, Ergodic Theory Dynam. Systems **25** (6), 1691–1718 (2005).
DOI: <https://doi.org/10.1017/S0143385705000210>
- [5] D. Drozdov, A. Tetenov, *On the classification of fractal square dendrites*, Adv. Theory Nonlinear Anal. Appl. **7** (3), 19–96 (2023).
DOI: <https://doi.org/10.17762/atnaa.v7.i3.276>

Acknowledgements. This research is supported by Russian Science Foundation (RSF) under grand 24-21-00242, <https://rscf.ru/project/24-21-00242>.

Received: 12 July 2025. Accepted: 09 September 2025. Published: 24 December 2025.

-
- [6] L.S. Efremova, *Example of the smooth skew product in the plane with the one-dimensional ramified continuum as the global attractor*, in: *European Conference on Iteration Theory* 2010, ESAIM Proc. **36**, EDP Sci., Les Ulis, 15–25 (2012).
DOI: <https://doi.org/10.1051/proc/201236002>
- [7] L.S. Efremova, *Ramified continua as global attractors of C^1 -smooth self-maps of a cylinder close to skew products*, J. Difference Equ. Appl. **29** (9–12), 1244–1274 (2023).
DOI: <https://doi.org/10.1080/10236198.2023.2204144>
- [8] H.-O. Peitgen, P.H. Richter, *The beauty of fractals. Images of complex dynamical systems*, Springer-Verlag, Berlin, 1986.
DOI: <https://doi.org/10.1007/978-3-642-61717-1>
- [9] V.Zh. Sakbaev, O.G. Smolyanov, *Diffusion and quantum dynamics on graphs*, Dokl. Math. **88** (1), 404–408 (2013).
DOI: <https://doi.org/10.1134/S1064562413040108>
- [10] L.S. Efremova, E.N. Makhrova, *One-dimensional dynamical systems*, Russian Math. Surveys **76** (5), 821–881 (2021).
DOI: <https://doi.org/10.1070/RM9998>
- [11] J. Llibre, M. Misiurewicz, *Horseshoes, entropy and periods for graph maps*, Topology **32** (3), 649–664 (1993).
DOI: [https://doi.org/10.1016/0040-9383\(93\)90014-M](https://doi.org/10.1016/0040-9383(93)90014-M)
- [12] E.N. Makhrova, *The structure of dendrites admitting an existence of an arc horseshoe*, Russian Math. (Iz. VUZ) **59** (8), 52–61 (2015).
<https://doi.org/10.3103/S1066369X1508006X>
- [13] E.N. Makhrova, *The existence of a linear horseshoe of continuous maps of dendrites*, Russian Math. (Iz. VUZ) **57** (3), 32–37 (2013).
DOI: <https://doi.org/10.3103/S1066369X13030043>
- [14] E.I. Dinaburg, *On the relations among various entropy characteristics of dynamical systems*, Math. USSR-Izv. **5** (2), 337–378 (1971).
DOI: <https://doi.org/10.1070/IM1971v005n02ABEH001050>
- [15] R. Bowen, *Entropy for group endomorphisms and homogeneous spaces*, Trans. Amer. Math. Soc. **153**, 401–414 (1971).
DOI: <https://doi.org/10.1090/S0002-9947-1971-0274707-X>
- [16] A.N. Sharkovsky, Yu.L. Maistrenko, E.Yu. Romanenko, *Difference equations and their applications*, Kluwer Academic Publishers Group, Dordrecht, 1993.
DOI: <https://doi.org/10.1007/978-94-011-1763-0>
- [17] L.S. Efremova, E.N. Makhrova, *The dynamics of monotone maps of dendrites*, Sb. Math. **192** (6), 807–821 (2001).
DOI: <https://doi.org/10.1070/SM2001v192n06ABEH000570>

-
- [18] Z. Kočan, V. Kornecká-Kurková, M. Málek, *Entropy, horseshoes and homoclinic trajectories on trees, graphs and dendrites*, Ergodic Theory Dynam. Systems **31** (1), 165–175 (2011). DOI: <https://doi.org/10.1017/S0143385709001011>
 - [19] Z. Kočan, V. Kurková, M. Málek, *Counterexample of continuous maps on dendrites*, J. Difference Equ. Appl. **22** (2), 253–271 (2016). DOI: <https://doi.org/10.1080/10236198.2015.1081385>
 - [20] E.N. Makhrova, *On homoclinic points and topological entropy of continuous maps on one-dimensional ramified continua*, Ufa Math. J. **17** (3), 79–95 (2025). DOI: <https://doi.org/10.13108/2025-17-3-79>
 - [21] M. Misiurewicz, *Horseshoes for mappings of an interval*, Bull. Acad. Pol. Sci., Ser. Sci. Math. **27** (2), 167–169 (1979). <http://rcin.org.pl/publication/81514?language=en>
 - [22] M. Misiurewicz, W. Szlenk, *Entropy of piecewise monotone mappings*, Studia Math. **67** (1), 45–63 (1980). DOI: <https://doi.org/10.4064/sm-67-1-45-63>
 - [23] E.N. Makhrova, *Remarks on minimal sets on dendrites and finite graphs*, J. Difference Equ. Appl. **29** (9–12), 1313–1322 (2023). DOI: <https://doi.org/10.1080/10236198.2023.2220417>
 - [24] E.N. Makhrova *On minimal sets of continuous maps on one-dimensional continua*, Mathematics and Theoretical Computer Science **3** (3), 110–135 (2025) [in Russian]. DOI: <https://doi.org/10.26907/2949-3919.2025.3.110-135>
 - [25] E. Glasner, B. Weiss, *Sensitive dependence on initial conditions*, Nonlinearity **6** (6), 1067–1075 (1993). <https://doi.org/10.1088/0951-7715/6/6/014>
 - [26] H.M. Gehman, *Concerning the subsets of a plane continuous curve*, Ann. Math. **27** (1), 29–46 (1925). DOI: <https://doi.org/10.2307/1967832>
 - [27] S. Nadler, *Continuum theory. An introduction*, Marcel Dekker, New York, 1992. DOI: <https://doi.org/10.1201/9781315274089>
 - [28] D. Arévalo, W.J. Charatonik, P.P. Covarrubias, L. Simón, *Dendrites with a closed set of end points*, Topology Appl. **115** (1), 1–17 (2001). DOI: [https://doi.org/10.1016/S0166-8641\(00\)00058-4](https://doi.org/10.1016/S0166-8641(00)00058-4)
 - [29] K. Kuratowski, *Topology*. Vol. 1, Academic Press, New York-London, 1966; Vol. 2, Academic Press, New York-London, 1968. DOI: <https://doi.org/10.1016/C2013-0-11022-7>
<https://doi.org/10.1016/C2013-0-11023-9>

-
- [30] J.J. Charatonik, W.J. Charatonik, *Dendrites*, Aportaciones Mat. Comun. **22**, 227–253 (1998).
https://www.researchgate.net/publication/285354319_Dendrites
- [31] S. Zafiridou, *Classification of dendrites with a countable set of end points*, Topology Appl. **159** (7), 1661–1669 (2012).
DOI: <https://doi.org/10.1016/j.topol.2011.07.027>
- [32] J. Nikiel, *A characterization of dendroids with uncountably many end-points in the classical sense*, Houston J. Math. **9** (3), 421–432 (1983).
<https://api.core.ac.uk/oai/oai:CiteSeerX.psu:10.1.1.432.8438>
- [33] G.D. Birkhoff, *Dynamical systems*, AMS, New York, 1927.
- [34] L.S. Block, W.A. Coppel, *Dynamics in one dimension*, Lecture Notes in Mathematics **1513**, Springer-Verlag, Berlin, 1992.
DOI: <https://doi.org/10.1007/BFb0084762>
- [35] E.N. Makhrova, *Remarks on the existence of periodic points for continuous maps on dendrites*, Lobachevskii J. Math. **43** (7), 1711–1719 (2022).
DOI: <https://doi.org/10.1134/S1995080222100274>
- [36] J. Mai, E. Shi, $\overline{R} = \overline{P}$ for maps of dendrites X with $\text{Card}(\text{End}(X)) < c$, Internat. J. Bifur. Chaos Appl. Sci. Engrg. **19** (4), 1391–1396 (2009).
DOI: <https://doi.org/10.1142/S021812740902372X>
- [37] V.V. Fedorenko, A.N. Šarkovskii, J. Smítal, *Characterizations of weakly chaotic maps of the interval*, Proc. Amer. Math. Soc. **110** (1), 141–148 (1990).
DOI: <https://doi.org/10.1090/S0002-9939-1990-1017846-5>
- [38] Z. Kočan, *Triangular maps of the square*, Grazer Math. Ber. **350**, 156–168 (2006).
- [39] G. Acosta, R. Hernández-Gutiérrez, I. Naghmouchi, P. Oprocha, *Periodic points and transitivity on dendrites*, Ergodic Theory Dynam. Systems **37** (7), 2017–2033 (2017).
DOI: <https://doi.org/10.1017/etds.2015.137>
- [40] L. Hoehn, C. Mouron, *Hierarchies of chaotic maps on continua*, Ergodic Theory Dynam. Systems **34** (6), 1897–1913 (2014).
DOI: <https://doi.org/10.1017/etds.2013.32>
- [41] G.R. Gordh, L. Lum, *Monotone retracts and some characterizations of dendrites*, Proc. Amer. Math. Soc. **59** (1), 156–158 (1976).
DOI: <https://doi.org/10.1090/S0002-9939-1976-0423317-X>
- [42] F. Balibrea, R. Hric, L'. Snoha, *Minimal sets on graphs and dendrites*, Internat. J. Bifur. Chaos Appl. Sci. Engrg. **13** (7), 1721–1725 (2003).
DOI: <https://doi.org/10.1142/S0218127403007576>

- [43] M.J. Feigenbaum, *Universal behavior in nonlinear systems*, Los Alamos Sci. **1** (1), 4–27 (1980).

DOI: [https://doi.org/10.1016/0167-2789\(83\)90112-4](https://doi.org/10.1016/0167-2789(83)90112-4)

Elena Nikolaevna Makhrova

Lobachevsky State University of Nizhny Novgorod,
23 Gagarin ave., Nizhny Novgorod 603022, Russia,
e-mail: elena_makhrova@inbox.ru