Том 3, Выпуск 4 УДК 517.927, 517.954, 517.983
Стр. 87–119 (2025) MSC 34B45, 35F16, 47B25, 47A52

Продолжения фазовых траекторий и расширения дифференциальных операторов

В.Ж. Сакбаев

Аннотация. Траектории движения вдоль бездивергентных векторных полей в фазовом пространстве автономных систем дифференциальных уравнений изучаются наряду с соответствующим эволюционным дифференциальным уравнением первого порядка (уравнением Лиувилля), описывающим сдвиг аргумента заданной на фазовом пространстве функции вдоль траекторий векторного поля. В качестве фазового пространства рассматриваются конечные графы и плоские области. Отсутствие глобального по времени решения задачи Коши для системы дифференциальных уравнений приводит к отсутствию порождаемой задачей Коши группы преобразований пространства начальных данных. Продолжение совокупности фазовых траекторий сопоставляется с косоэрмитовым расширением дифференциального оператора, заданного на гладких финитных функциях на фазовом пространстве. Установлено, какие косоэрмитовы расширения дифференциального оператора первого порядка ассоциированы с детерминированными продолжениями фазового потока, а какие – со стохастическими продолжениями траекторий через границу фазового пространства.

Ключевые слова: фазовый поток, инвариантная мера, расширение фазового пространства, расширение линейного оператора, индексы дефекта, купмановское представление.

DOI: 10.26907/2949-3919.2025.4.87-119

Введение

Гамильтоновы системы, фазовым пространством которых является евклидово пространство, наделенное трансляционно инвариантной симплектической формой [1–3], являются одним из основных объектов рассмотрения математической физики. Наличие инвариантной относительно гамильтонова потока меры на расширенном фазовом пространстве позволяет получить купмановское унитарное представление потока в гильбертовом пространстве функций, квадратично интегрируемых по инвариантной мере.

Непродолжаемые решения уравнений с частными производными возникают в ряде задач математической физики, в том числе, в задачах газодинамики [4,5], задачах нелинейной оптики [1,3,6], задачах описания атмосферных явлений [7]. Эффект продолжаемости

Поступила: 12.09.2025. Принята: 14.10.2025. Опубликована: 24.12.2025.

или непродолжаемости решения зависит от выбора функционального пространства и связан с уходом фазовой траектории в пространстве начальных данных на бесконечность рассматриваемого функционального пространства.

Ограниченное гладкое векторное поле на евклидовом фазовом пространстве E однозначно определяет фазовый поток, который в случае бездивергентности поля допускает унитарное представление в гильбертовом пространстве $L_2(E)$. В нашей работе изучается автономная система дифференциальных уравнений, фазовым пространством E которого может служить либо геометрический граф, представляющий собой конечный набор промежутков, либо область в двумерной евклидовой плоскости. В случае неограниченного векторного поля или предкомпактности фазового пространства временной промежуток существования фазовой траектории может быть ограниченным.

Для фазовых траекторий автономной системы дифференциальных уравнений исследуются явления ухода на бесконечность или достижения границы фазового пространства за конечное время. В рассматриваемых в работе задачах фазовое пространство за исключением конечного множества точек положений равновесия допускает расслоение на одномерные фазовые траектории. Множество концов фазовых траекторий будем называть множеством граничных точек стока (либо источника), если движение от некоторой внутренней точки фазового пространства вдоль векторного поля к концу фазовой траектории (либо к некоторой внутренней точке фазового пространства вдоль векторного поля от конца фазовой траектории) происходит за конечное время. Определение граничной (или концевой) точки фазовой траектории будет дано ниже в разделе 1 для графа и в разделе 4 для фазовой плоскости.

Наряду с автономной системой дифференциальных уравнений на фазовом пространстве рассматривается задача Коши для уравнения Лиувилля, описывающего купмановское представление сдвигов аргумента функции, заданной на фазовом пространстве, вдоль векторного поля системы дифференциальных уравнений [8]. Как известно, дифференциальный оператор Лиувилля, действующий в пространстве функций на фазовом пространстве, квадратично интегрируемых по мере, инвариантной относительно сдвига вдоль векторного поля, кососимметричен. Мы покажем, что его отрицательный и положительный индексы дефекта определяются мощностями множеств граничных точек стока и источника соответственно. В классе граничных условий, обеспечивающих корректную разрешимость задачи Коши для уравнения Лиувилля [9], найдены те, при которых оператор Лиувилля косоэрмитов. Выделены такие косоэрмитовы расширения кососимметричного оператора Лиувилля, которые генерируют купмановские унитарные представления фазовых потоков, полученных с помощью гамильтоновых продолжений локальных фазовых траекторий.

Показано, что множество гамильтоновых продолжений фазового потока, порождаемого векторными полями в фазовом пространстве, параметризуется множеством отображений границы стоков на границу источников, тогда как множество косоэрмитовых расширений соответствующего дифференциального оператора – группой унитарных преобразований гильбертова пространства (конечномерного в случае графа и сепарабельного в случае гамильтоновой системы на плоскости [10]). Теоремы 12 и 20 устанавливают, что подгруппа перестановок в группе унитарных преобразований пространства граничных значений соответствует тем косоэрмитовым расширениям, которые задают купмановское унитарное представление некоторых гамильтоновых продолжений фазового потока. Другие косоэрмитовы расширения генерируют унитарные группы, являющиеся представлениями недетерминированных продолжений локальных траекторий систем обыкновенных дифференциальных уравнений посредством рассеяния в граничных точках.

Рассматриваются потоки частиц в векторных полях на графах. Получено описание множества самосопряженных расширений соответствующих операторов Шредингера, первоначально заданных на пространствах гладких функций с носителями, не содержащими вершин графа. При описании самосопряженных расширений дифференциальных операторов на геометрическом графе не учитывается тот факт, какие ребра графа имеют общие вершины, а также фактор близости или удаленности вершин графа друг от друга. В рассматриваемой модели переходы с одного ребра на другое возможны независимо от близости конца одного ребра к началу другого. Существуют и такие модели динамики частиц на графе, в которых переход с одного ребра на другое возможен только если ребра имеют общую вершину [11, 12].

Рассмотрены также потоки на фазовой плоскости двумерной гамильтоновой системы, траектории которой являются непродолжаемыми в том смысле, что уходят на бесконечность за конечное время. Например, уход на бесконечность возможен и для фазовых траекторий двумерных гамильтоновых систем, описываемых уравнениями Эмдена–Фаулера. В работах [13, 14] для класса дифференциальных уравнений типа Эмдена–Фаулера исследуется структура семейства как продолжаемых, так и сингулярных непродолжаемых решений, получены оценки промежутков существования непродолжаемых траекторий.

В этой работе расслоённое на фазовые траектории фазовое пространство гамильтоновой системы рассмотрено как граф с континуальным множеством ребер. Как и в случае графа с конечным множеством ребер, продолжения совокупности фазовых траекторий до фазового потока параметризуются биективным отображением множества граничных точек стока на множество граничных точек источника, сохраняющим значения функционала энергии.

Влияние достижимости конечности времени движения по фазовой траектории на корректность задачи Коши для дифференциальных уравнений на функцию, заданную на фазовом пространстве, изучалось в работах [15–17] в случае уравнений первого порядка или второго порядка с вырождением [15, 18].

Структура нашей статьи такова.

В разделе 1 исследован оператор, заданный невырожденным векторным полем на геометрическом графе, определена зависимость индексов дефекта оператора от свойств векторного поля на графе.

В разделах 2 и 3 установлена связь детерминированных продолжений траекторий на графе и рассеяния траекторий на вершинах графа со свойствами косоэрмитовых расширений кососимметрического оператора Лиувилля.

В разделе 4 рассмотрены дифференциальные операторы, порожденные гамильтоновыми векторными полями на фазовой плоскости двумерной гамильтоновой системы, время движения по фазовым траекториям которой ограничено. Рассмотрены детерминированные и стохастические продолжения траекторий через момент ухода на бесконечность и их связь со свойствами косоэрмитовых расширений оператора Лиувилля.

1. Дифференциальные операторы на графах

Исследуем динамику частиц на графе с конечным числом ребер. Граф Γ мы будем отождествлять с занумерованным конечным множеством интервалов. Таким образом, Γ – граф, если существует $N \in \mathbb{N}$ такое, что $\Gamma = \bigcup\limits_{j\in I} \Gamma_j$, где $I = \{1, \ldots, N\}$ – множество индексов графа, $\Gamma_j = (j, \Delta_j)$, где j – номер ребра Γ_j, $\Delta_j = (\alpha_j, \beta_j)$ – интервал j-го ребра Γ_j. Точка $\mathbf{x}$ графа Γ представляет собой упорядоченную пару (j, x), где $j \in I$, $x \in \Delta_j$. Если $\mathbf{x} = (j, x)$, то $\mathbf{x} \in \Gamma_j$ и x – координата точки $\mathbf{x}$ ребра Γ_j. На каждом ребре $\Gamma_i \subset \Gamma$ его ориентация (т. е. ориентация промежутка Δ_j) выбрана по возрастанию числового параметра x_j от α_j до β_j. Границей графа Γ будем называть множество

$$\partial\Gamma = \bigcup_{j=1}^{N} \partial\Gamma_j = \bigcup_{j=1}^{N} (j, \partial\Delta_j).$$

При этом точку (j, α_j) будем называть началом ребра Γ_j, а точку (j, β_j) – его концом. Граф Γ можно вложить в d-мерное евклидово пространство $\mathbb{R}^d$ так, что

$$\Gamma_j = \{\mathbf{a}_j + \mathbf{e}_j x_j,\ x_j \in (\alpha_j, \beta_j)\}, \quad j \in I$$

при некоторых $\mathbf{a}_j$, $\mathbf{e}_j \in \mathbb{R}^d$, $\|\mathbf{e}_j\| = 1$.

Пусть на графе Γ задана числовая функция b такая, что ее сужение b_j на каждое ребро Γ_j является непрерывно дифференцируемой функцией параметра $x_j \in (\alpha_j, \beta_j)$. Предположим, что

$$b(x_j)|_{\Gamma_j} \neq 0 \quad \forall\ x_j \in \Gamma_j,\ j \in I. \tag{1}$$

Заметим, что если множество нулей функции b на каждом ребре Γ_j конечно, то удалив конечный набор точек графа можно разбить его на конечное множество ребер, на каждом из которых выполнено условие невырожденности (1).

С каждой точкой $x \in \Gamma$ связано касательное пространство $\mathbb{T}(x)$, представляющее собой ориентированную вектором $\mathbf{e}_{j(x)}$ прямую, ориентация которой согласована с ориентацией на интервале Γ_j. Ориентация каждого ребра Δ_j графа Γ выбрана согласованно с заданным на ребре Δ_j невырожденным векторным полем $\mathbf{b}$ в том смысле, что $\mathbf{b}|_{\Gamma_j} = b_j \mathbf{e}_j$

при $b_j(x) > 0\ \forall\, j \in I$, $x \in \Delta_j$. В противном случае $\exists\, j \in I:\ b_j(x) < 0\ \forall\, x \in \Delta_j$ на ребре Δ_j можно поменять ориентацию заменой параметра. Следовательно, совокупность числовых функций b_j, $j \in I$, задает невырожденное в силу (1) векторное поле $\mathbf{b} = \{\mathbf{b}_j = b_j \mathbf{e}_j,\ j \in I\}$ касательных векторов к графу Γ.

Комплекснозначная функция u, определенная на графе Γ, задается множеством $\{u_j,\ j \in I\}$ ее сужений на ребра Γ_j. Предполагается, что на Γ задана борелевская мера, определяемая требованием, чтобы ее сужение на каждое ребро $\Gamma_j = (j, \Delta_j)$ совпадало со стандартной мерой Лебега на интервале Δ_j; тогда $L_2(\Gamma) = \oplus_{j\in I} L_2(\Gamma_j)$.

Пусть $C_0^\infty(\Gamma)$ – линейное пространство бесконечно дифференцируемых функций на Γ с компактными носителями. То есть, если $u \in C_0^\infty(\Gamma)$, то $u(x) = u(j, x_j) = u_j(x_j)$, $x \in \Gamma$, $j \in I$, $x_j \in \Delta_j$ и при каждом $j \in I$ выполняется условие $u_j \in C_0^\infty(\Delta_j)$.

Положим $\mathbf{L}_0 = \oplus_{j\in I} \mathbf{L}_0^j$ – линейный оператор в $C_0^\infty(\Gamma)$, определяемый соотношениями

$$(\mathbf{L_0}u)(x) = (\mathbf{L_0}u)(j, x_j) = \mathbf{L}_0^j u_j(x_j), \quad j \in I,\ x_j \in \Delta_j;$$

$$\mathbf{L}_0^j u_j(x) = b_j \frac{\partial}{\partial x} u_j(x) + c_j u_j(x), \quad x \in \Delta_j;\ j \in I,$$

где b_j, c_j – достаточно гладкие функции на интервале Δ_j.

Замечание 1. При изучении квантовой динамики необходимо потребовать, чтобы оператор $\mathbf{L}_0$ был кососимметрическим оператором в пространстве $L_2(\Gamma)$, т. е.

$$(\mathbf{L}_0 u, v) + (u, \mathbf{L}_0 v) = 0 \quad \forall\ u, v \in D(\mathbf{L_0}).$$

Условие кососимметричности оператора $\mathbf{L}_0$ сводится к условию

$$\int\limits_{\Delta_j} \left(2c_j(x) - \frac{\partial}{\partial x} b_j(x)\right) u_j(x) \bar{v}_j(x) dx = 0 \quad \forall\ u_j, v_j \in C_0^\infty(\Gamma_j),\ \forall\ j \in I.$$

Следовательно, оператор $\mathbf{L}_0$ кососимметричен тогда и только тогда, когда

$$c_j(x) = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} b_j(x),\ x \in \Delta_j,\ j \in I. \tag{2}$$

Далее будем считать выполненным условие (2) и изучать косоэрмитовы расширения кососимметрического оператора $\mathbf{L}_0$, заданного на области определения $C_0^\infty(\Gamma)$ дифференциальным выражением

$$\mathbf{L_0} u = \{\mathbf{L}_0^j u_j,\ j \in I\}, \quad \mathbf{L}_0^j u_j = \frac{1}{2} b_j \frac{\partial}{\partial x} u_j + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x}(b_j u_j). \tag{3}$$

Оператор $\mathbf{L}_0$ плотно определен в $L_2(\Gamma)$, кососимметричен, замыкаем, но не косоэрмитов; область определения $D(\mathbf{L}_0^*)$ сопряженного оператора $\mathbf{L}_0^*$ определяется так:

$$D(\mathbf{L}_0^*) = \left\{ u \in \oplus_{j\in I} W^1_{2,loc}(\Delta_j) \equiv W^1_{2,loc}(\Gamma) \bigcap L_2(\Gamma): \ \frac{1}{2}b_j \frac{\partial}{\partial x}u_j + \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x}(b_j u_j) \in L_2(\Gamma_j) \right\}, \quad (4)$$

при этом действие оператора $\mathbf{L}_0^*$ на функцию $v \in D(\mathbf{L}_0^*)$ задается равенством

$$\mathbf{L_0}^* u = \left\{ (\mathbf{L}_0^j)^* u_j, \ j \in I \right\}, \quad (\mathbf{L}_0^j)^* v_j = -\frac{1}{2} b_j \frac{\partial}{\partial x} u_j - \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x}(b_j u_j), \quad j \in I. \quad (5)$$

Сужения всякой функции $u \in W_2^1(\Gamma)$ на интервалы Δ_j, $j \in I$ обладают граничными значениями, которые мы будем обозначать через $u_j(\alpha_j)$, $u_j(\beta_j)$; символ $u(\alpha)$ определяется равенством $u(\alpha) = (u_1(\alpha_1), u_2(\alpha_2), \ldots, u_N(\alpha_N)) \in \mathbb{C}^N$; то же верно для $u(\beta)$, для которого мы будем использовать аналогичные обозначения. Оператор $\mathbf{L}_0^*$ не является кососимметрическим и для любых $u, v \in D(\mathbf{L}_0^*)$ справедливо равенство

$$(\mathbf{L}_0^* u, v)_H + (u, \mathbf{L}_0^* v)_H = \sum_{j\in I} (\mathbf{b}_j(x_j) u_j(x_j) \bar{v}(x_j)|_{x_j=\alpha_j+0} - \mathbf{b}_j(x_j) u_j(x_j)\bar{v}(x_j)|_{x_j=\beta_j-0}.$$

Заметим, что из $u, v \in D(\mathbf{L}_0^*)$ следует, что $b_j u_j \bar{v}_j \in W^1_{1,loc}(\Delta_j)\ \forall\, j \in I$. Следовательно, функция $b_j u_j \bar{v}_j$ имеет след на границе интервала Δ_j при каждом $j \in I$.

Опишем движение по ребру $\Gamma_j = (j, \Delta_j)$ в векторном поле скоростей $\mathbf{b}_j(x)$, $x \in \Delta_j$. Пусть функция $\Phi(t, x)$, $(t, x) \in (T_1, T_2) \times \Delta_j$, где $T_1 < 0 < T_2$, является решением задачи Коши

$$\frac{d}{dt}\Phi(t, x) = b_j(\Phi(t, x)), \ \ t \in (T_1, T_2),\ x \in \Delta_j; \qquad \Phi(0, x) = x_0, \ \ x_0 \in \Delta_j. \quad (6)$$

Так как поле $\mathbf{b}_j$ является непрерывно дифференцируемым на промежутке Δ_j, то либо при каждом $x_0 \in \Delta$ задача Коши имеет глобальное решение на всей прямой $(-\infty, \infty)$, либо при некоторых $x_0 \in \Delta$ промежуток существования решения задачи Коши ограничен либо снизу числом $T_*(x_0)$, либо сверху числом $T^*(x_0)$. При этом ребро Γ_j будем называть фазовой траекторией решения задачи Коши (6), а точки (j, α_j), (j, β_j) – началом и концом фазовой траектории Γ_j.

Пусть $x_0 \in \Delta_j$ и $\Delta_{j-}(x_0) = \{x \in \Delta_j : \ x < x_0\}$, $\Delta_{j+}(x_0) = \{x \in \Delta_j : \ x_0 < x\}$. Время движения по ребру Δ_j от точки x_0 до точки $x: \ x_0 < x$ определяется равенством

$$\int\limits_0^{T_j(x_0,x)} b_j(\mathbf{\Phi}_s(x_0))ds = x - x_0 \quad \text{или} \quad T_j(x_0, x) = \int\limits_{x_0}^{x} \frac{1}{b_j(\xi)} d\xi.$$

Аналогично, время движения по ребру Δ_j от точки x до точки $x_0: \ x \prec x_0$ определяется равенством

$$\int\limits_{T_j(x,x_0)}^{0} b_j(\mathbf{\Phi}_s(x))ds = x_0 - x \quad \text{или} \quad T_j(x, x_0) = \int\limits_{x}^{x_0} \frac{1}{b_j(\xi)} d\xi.$$

Фиксируем некоторую точку $x_0 \in \Delta_j$. Рассмотрим несобственные интегралы

$$I_{j+}(x_0) = \int\limits_{x_0}^{\beta_j} \frac{1}{b_j(s)} ds; \quad I_{j-}(x_0) = \int\limits_{x_0}^{\alpha_j} \frac{1}{b_j(s)} ds. \tag{7}$$

В силу условия (1) невырожденности на графе Γ непрерывного векторного поля $\mathbf{b}$ движение по каждому отрезку $[x_1, x_2] \subset \Delta_j$ вдоль поля $\mathbf{b}_j$ происходит за конечное время. Поэтому при каждом $j \in I$ интервал движения по ребру Δ_j ограничен (неограничен) снизу если и только если несобственный интеграл I_{j-} сходится (расходится). Аналогичное утверждение справедливо о полуограниченности сверху интервала движения по ребру Δ_j.

Через M_0 обозначим множество таких концов промежутков Δ_j, движение от которых до некоторой точки внутри Δ_j (или в обратном направлении) занимает бесконечно много времени. Через M_+ (множество источников) – множество таких концов промежутков Δ_j, движение от которых до какой-либо внутренней точки промежутка Δ_j происходит за конечное время. Через M_- (множество стоков) – множество таких концов промежутков Δ_j, движение к которым от какой-либо внутренней точки промежутка Δ_j происходит за конечное время. Мощности множеств $M_\pm$, как показано ниже, определяют размерности дефектных подпространств $n_\pm = \dim(\mathrm{Ker}(\mathbf{L}_0^* \pm \mathbf{I})) = \mathrm{codim}(\overline{\mathrm{Im}(\mathbf{L}_0 \pm \mathbf{I})})$ (см. [10]).

Приведем два подхода к описанию множества косоэрмитовых расширений кососимметрического оператора $\mathbf{L}_0$ на графе. В первом из них учитывается геометрическая близость концов ребер графа и переходы с одного ребра на другое возможны лишь для ребер, примыкающих к общей вершине [11, 12, 19, 20]. В другом подходе (более близком к описанию квантовых явлений типа туннельного эффекта) возможны переходы с любого ребра графа на любое другое [17]. Причем от геометрической близости конца одного ребра до начала другого может зависеть только интенсивность перехода, что отражается выбором косоэрмитова расширения оператора $\mathbf{L}_0$. В работе [21] исследовано асимптотическое поведение при стремлении времени к бесконечности решения задачи Коши для уравнения Шредингера, задаваемого самосопряженными условиями согласования в вершинах, на графе с локализованным начальным условием. Получена оценка асимптотического распределения решения по ребрам графа.

2. Унитарная группа сдвигов в бездивергентном векторном поле

Рассмотрим случай, когда $\mathrm{div}(\mathbf{b}) = 0$ на Γ. В этом случае $b_j = \mathrm{const} > 0 \; \forall \, j \in I$. При этом кососимметричность оператора $\mathbf{L}_0$ равносильна условию $c_j = 0 \; \forall \, j \in I$. В свою очередь, унитарные сдвиги вдоль векторного поля $\mathbf{b}$ порождаются некоторым максимальным кососимметрическим расширением оператора $\mathbf{L}_0$.

В предположении бездивергентности поля $\mathbf{b}$ время достижения граничных точек графа Γ порождает следующее разбиение его границы:

- $M_0 = \{\alpha_j : \, \alpha_j = -\infty\} \bigcup \{\beta_j : \, \beta_j = +\infty\}$ – множество граничных точек, движение вдоль поля b к которым или от которых к внутренним точкам занимает бесконечное время;

- $M_+ = \{\alpha_j : \alpha_j \in \mathbb{R}\}$ – множество точек границы графа, движение из которых к внутренним точкам происходит за конечное время;
- $M_- = \{\beta_j : \beta_j \in \mathbb{R}\}$ – множество граничных точек, к которым траектории некоторых внутренних точек при движении в поле скоростей $\mathbf{b}$ приходят за конечное время.

Тогда индексы дефекта определяются равенствами

$$n_+ = \dim(\mathrm{Ker}(\mathbf{L}_0^* + \mathbf{I})) = |M_-|; \quad n_- = \dim(\mathrm{Ker}(\mathbf{L}_0^* - \mathbf{I})) = |M_+|;$$

а дефектные подпространства определяются равенствами

$$\mathcal{N}_+ = \mathrm{Ker}(\mathbf{L}_0^* + \mathbf{I}) = \mathrm{span}\left\{e^{\frac{1}{b_j}x_j} \,|\, j : \ \beta_j \in M_-\right\},$$
$$\mathcal{N}_- = \mathrm{Ker}(\mathbf{L}_0^* - \mathbf{I}) = \mathrm{span}\left\{e^{-\frac{1}{b_j}x_j} \,|\, j : \ \alpha_j \in M_+\right\}.$$

Согласно теореме фон Неймана, кососимметрический оператор $\mathbf{L}_0$ допускает косоэрмитово расширение тогда и только тогда, когда $n_- = n_+ \equiv m$. При этом множество косоэрмитовых расширений может быть параметризовано множеством $\mathcal{U}(\mathcal{N}_-, \mathcal{N}_+)$ изометрических отображений пространства $\mathcal{N}_-$ на пространство $\mathcal{N}_+$, где норма на пространствах $\mathcal{N}_\pm$ определяется нормой графика оператора $\mathbf{L}_0^*$ [10].

Гамильтонианом будем называть всякое самосопряженное расширение $i\mathbf{L}$ оператора $i\mathbf{L}_0$. При этом область определения $D(i\mathbf{L})$ гамильтониана состоит из функций, для граничных значений которых $U = (u(\alpha), u(\beta)) \in \mathbb{C}^m \times \mathbb{C}^m$ справедливо равенство

$$A(U) := B_1 u(\alpha) + B_2 u(\beta) = 0, \tag{8}$$

где B_1, B_2 – линейные операторы в $\mathbb{C}^m$. Поскольку оператор $\mathbf{L}$ косоэрмитов, то пространства граничных значений функций из $\mathbf{D}(\mathbf{L})$ и из $\mathbf{D}(\mathbf{L}^*)$ совпадают. В таком случае они являются m-мерными, значит, ранг системы уравнений (8) равен m.

Лемма 2. *Если оператор* $\mathbf{L}$*, с областью определения*

$$D(\mathbf{L}) = \{u \in D(\mathbf{L}_0^*) : \ B_1 u(\alpha) + B_2 u(\beta) = 0\}$$

является косоэрмитовым, то B_1, B_2 *– невырожденные матрицы.*

Доказательство. Предположим противное, что $\mathrm{Rg}(B_1) = r_1 < m$ и $K_1 = \mathrm{Ker}(B_1) \neq 0$. Тогда если $x_1 \in K_1 \subset \mathbb{C}^m$, то вектор $U = (x_1, 0)$ удовлетворяет равенству (8) и, следовательно, U является граничным значением некоторой функции $u \in D(\mathbf{L})$. Так как оператор $\mathbf{L}$ является косоэрмитовым, то $D(\mathbf{L}^*) = D(\mathbf{L})$ и потому $u \in D(\mathbf{L}^*)$. Следовательно, $(\mathbf{L}u, u) + (u, \mathbf{L}u) = 0$, значит $(\mathbf{B}u(\beta), u(\beta))_{\mathbb{C}^m} - (\mathbf{B}u(\alpha), u(\alpha))_{\mathbb{C}^m} = (\mathbf{B}x_1, x_1) = 0$. Так как

$\mathbf{B}$ – диагональная матрица с коэффициентами $b_1, \ldots, b_m$ на диагонали, то она положительно определена и потому $x_1 = 0$, что противоречит нетривиальности ядра K_1. □

Из леммы 2 следует, что условие (8) приобретает вид

$$u(\beta) = Ju(\alpha), \tag{9}$$

где $J = B_2^{-1}B_1$ – невырожденный оператор в пространстве $\mathbb{C}^m$, снабженным стандартным скалярным произведением.

Необходимым условием кососимметричности оператора $\mathbf{L}$ с областью определения

$$D(\mathbf{L}) = \{u \in D(\mathbf{L}_0^*) : \ u(\beta) = Ju(\alpha)\} \tag{10}$$

является равенство $J^*\mathbf{B} = \mathbf{B}J^{-1}$, ибо для любых $u, v \in D(\mathbf{L}) = \{u \in D(\mathbf{L}_0^*) : \ u(\beta) = Ju(\alpha)\}$ справедливо равество

$$\begin{aligned}(\mathbf{L}u, v)_H + (u, \mathbf{L}v)_H &= (\mathbf{B}u(\beta), v(\beta))_{\mathbb{C}^m} - (\mathbf{B}u(\alpha), v(\alpha))_{\mathbb{C}^m} \\ &= (u(\alpha), J^*\mathbf{B}^*v(\beta) - \mathbf{B}^*v(\alpha))_{\mathbb{C}^m} = 0 \ \forall \ u(\alpha) \in L_2(M_+).\end{aligned}$$

Так как матрица $\mathbf{B}$ является диагональной и невырожденной, то $v(\alpha) = (\mathbf{B}^*)^{-1}J$. Поэтому из косоэрмитовости оператора $\mathbf{L}$ следует условие $J^*\mathbf{B} = \mathbf{B}J^{-1}$.

Если же условие кососимметричности $J^*\mathbf{B} = \mathbf{B}J^{-1}$ оператора $\mathbf{L}$ выполнено, то оператор $\mathbf{L}$ является не только кососимметричным, но и косоэрмитовым, ибо в этом случае $D(\mathbf{L}^*) = D(\mathbf{L})$. Таким образом, справедлива следующая теорема.

Теорема 3. *Оператор $\mathbf{L}$, область определения которого задана соотношением (10), косоэрмитов тогда и только тогда, когда*

$$J^*\mathbf{B}J = \mathbf{B}. \tag{11}$$

Если предположить, что

$$b_1 = \ldots = b_m, \tag{12}$$

то оператор $\mathbf{L}$, область определения которого задана соотношением (10), косоэрмитов тогда и только тогда, когда матрица J унитарна, т. е. $J^* = J^{-1}$. Значит, при условии (12) и выборе в пространстве $\mathbb{C}^m$ стандартного скалярного произведения множество косоэрмитовых расширений оператора $\mathbf{L}_0$ параметризуется группой унитарных изоморфизмов $\mathcal{U}(\mathbb{C}^m)$.

Произвольное расширение оператора $\mathbf{L}_0$, являющееся сужением $\mathbf{L}_0^*$, задается линейным подпространством в пространстве граничных значений оператора $\mathbf{L}_0^*$, задаваемым условием вида (8). Условие (11) задает всевозможные граничные условия, при которых расширение кососимметричного оператора $\mathbf{L}$ является косоэрмитовым.

Напомним, что дифференциальный оператор $\mathbf{L}_0$ задается векторным полем $\mathbf{b}$ посредством обыкновенного дифференциального уравнения на графе (3) и однородных граничных условий Дирихле на границе $\partial\Gamma$. Бездивергентное векторное поле $\mathbf{b}:\Gamma\to T(\Gamma)$ однозначно определяет локальное решение $X(t,x^0)$, $t\in\Delta(x_0)$, задачи Коши для дифференциального уравнения

$$\frac{d}{dt}x_j(t)=b_j(x_j(t)),\ \ x_j(0)=x_j^0,\quad x_j^0\in\Delta_j,\ j\in I.$$

Для продолжения локально заданных преобразований $X(t,x^0)$, $t\in\Delta(x_0)$, $x_0\in\Gamma$, до однопараметрической группы преобразований $\Phi_t:\ \Gamma\to\Gamma,\ t\in\mathbb{R}$, требуется задать детерминированное продолжение траекторий, достигающих границы фазового пространства задачи Коши (6) за конечное время, т. е. траекторий на ребрах Γ_j с номерами $j=1,\dots,m$.

Семейство детерминированных продолжений может быть параметризовано группой $\mathcal{P}=\mathcal{P}(m)$ перестановок множества из m элементов по следующему правилу. По точке $x\in\Gamma$ определим начальный номер $j_0(x)\in\{1,\dots,m\}$ такой, что $x\in\Gamma_{j_0(x)}\subset\Gamma$, и зададим последовательность номеров

$$\begin{cases} j_0(x):\ x\in\Gamma_{j_0(x)},\\ j_k(x)=\sigma^{k-1}(j_0(x)),\quad k\in\mathbb{N}.\end{cases}$$

Тогда выбор некоторой перестановка $\sigma\in\mathcal{P}$ и некоторой точки $x\in\Gamma$ задает последовательность моментов достижения границы $\{\tau_k(x)\}$ из точки x, где

$$\tau_k(x)=\begin{cases}\dfrac{\beta_{j_0(x)}-x^0_{j_0(x)}}{b_{j_0(x)}},\quad k=1;\\[2ex] \tau_{k-1}(x)+\dfrac{\beta_{j_{k-1}(x)}-\alpha_{j_{k-1}(x)}}{b_{j_{k-1}(x)}},\quad k\geq 2.\end{cases}$$

Заметим, что некоторые моменты достижения границы могут быть равны $+\infty$.

Тогда соответствующее перестановке σ продолжение фазовой траектории точки $x\in\Gamma$ через моменты достижения границы $\partial\Gamma$ задается на интервалах между временами достижения границы равенствами

$$\mathbf{X}_\sigma(t,x)=x_{j_{k(x,t)}}(t),\quad k=k(x,t)=\min\{i\in\mathbb{N}:\ \tau_i\geq t\},$$

$$x_{j_{k(x,t)}}(t)=\begin{cases}x_{j_0(x)}+b_{j_0(x)}t,\ \ t\in[0,\tau_1),\ k(x,t)=1;\\ \alpha_{j_{k-1}(x)}+b_{j_{k-1}(x)}(t-\tau_{k-1}(x)),\ \ t\in[\tau_{k-1},\tau_k),\ k=k(x,t)\geq 2.\end{cases}\tag{13}$$

Такое продолжение соответствует склейке границ ребер графа, при которой конец β_i, $i\in 1,\dots,N$, i-го ребра графа отождествляется с началом $\alpha_{\sigma(i)}$ $\sigma(i)$-го ребра $\Gamma_{\sigma(i)}$.

Заданная перестановкой $\sigma\in\mathcal{P}$ продолжение X_σ траекторий на графе является однопараметрической группой преобразований фазового пространства Γ на себя, каждое из которых при условии (12) сохраняет меру Лебега на множестве Γ. При таких условиях группа преобразований $X_\sigma(t)$, $t \in \mathbb{R}$, при каждом $p \in [1, \infty]$ индуцирует однопараметрическую сильно непрерывную группу $\mathbf{U}_\sigma$ изометрических преобразований банахова пространства $L_p(\Gamma)$, действующих по правилу

$$\mathbf{U}_\sigma(t)u(x) = u(X_\sigma(-t, x)), \quad t \in \mathbb{R},\ x \in \Gamma.$$

Если условие (12) нарушено, то преобразования $\mathbf{X}_\sigma(t)$, $t \in \mathbb{R}$, может не сохранять меру Лебега на графе, а группа $\mathbf{U}_\sigma$ преобразований может не быть изометрической.

Теорема 4. *Пусть* $p \in [1, +\infty]$. *Тогда семейство отображений* $\mathbf{V}_\sigma(t)$, $t \in \mathbb{R}$, *действующих в пространстве* $L_p(\Gamma)$ *по правилу*

$$\mathbf{V}_\sigma(t)u(x) = \mathbf{M}_\sigma(t)(x)u(X_\sigma(-t, x)), \quad t \in \mathbb{R},\ \ x \in \Gamma,$$

является однопараметрической группой изометрий в пространстве $L_p(\Gamma)$, *сильно непрерывной при* $p \in [1, +\infty)$. *Здесь*

$$\mathbf{M}_\sigma(t)u(x) = \sqrt[p]{\frac{b_{j_{k(-t,x)-1}(x)}}{b_{j_0(x)}}}, \quad x \in \Gamma,\ t \in \mathbb{R}.$$

Доказательство. Сначала заметим, что преобразование $\mathbf{V}_\sigma(t)$ сохраняет норму на линейных комбинациях индикаторных функций промежутков и что линейное пространство таких функций инвариантно относительно операторов $\mathbf{V}_\sigma(t)$. В силу плотности в $L_p(\Gamma)$ пространства простых функций операторы $\mathbf{V}_\sigma(t)$ изометричны в $L_p(\Gamma)$.

Заметим, что $\mathbf{M}_\sigma(s)\mathbf{M}_\sigma(t) \neq \mathbf{M}_\sigma(s+t)$ и $\mathbf{M}_\sigma(t)\mathbf{U}_\sigma(s) \neq \mathbf{U}_\sigma(s)\mathbf{M}_\sigma(t)$, но

$$\mathbf{M}_\sigma(t)\mathbf{U}_\sigma(t)\mathbf{M}_\sigma(s)\mathbf{U}_\sigma(s) = \mathbf{M}_\sigma(t+s)\mathbf{U}_\sigma(t+s) \quad \forall\, t, s \in \mathbb{R}. \tag{14}$$

Проверим свойство (14) и что семейство $\mathbf{V}_\sigma$ является однопараметрической группой операторов. Имеем $\mathbf{V}_\sigma(0) = \mathbf{I}$. Пусть $s, t \in \mathbb{R}$, u – простая функция на Γ. Пусть $x \in \Gamma$ и $y(x) = \mathbf{X}(-t, x)$, $z(x) = \mathbf{X}(-s, x)$. Определим функцию

$$v(x) = \mathbf{V}_\sigma(t)u(x) = \sqrt[p]{\frac{b(y(x))}{b(x)}}u(y(x)), \quad x \in \Gamma.$$

Тогда если $w(x) = \mathbf{V}_\sigma(s)v(x) = \sqrt[p]{\dfrac{b(z(x))}{b(x)}}v(z(x))$, то с учетом выражения для функции v получим $v(z(x)) = \sqrt[p]{\dfrac{b(z(y(x)))}{b(z(x))}}u(z(y(x)))$, поэтому

$$w(x) = \mathbf{V}_\sigma(s)v(x) = \sqrt[p]{\frac{b(z(x))}{b(x)}}\sqrt[p]{\frac{b(z(y(x)))}{b(z(x))}}u(z(y(x))) = \sqrt[p]{\frac{b(z(y(x)))}{b(x)}}u(z(y(x))).$$

Следовательно, $\mathbf{V}_\sigma(t+s)=\mathbf{V}_\sigma(s)\mathbf{V}_\sigma(t)$, $t,s\in\mathbb{R}$. Сильная непрерывность группы $\mathbf{V}_\sigma$ следует из непрерывности в среднем оператора сдвига в пространстве $L_p(\mathbb{R})$ при $p\in[1,+\infty)$. □

В случае $p=2$ однопараметрическая группа $\mathbf{V}_\sigma$ является унитарной, а ее генератор – косоэрмитовым расширением оператора $\mathbf{L}_0$, область определения которого задается оператором J с матрицей $J_{kj}=\sqrt{\frac{b_j}{b_{\sigma(j)}}}\delta_{k,\sigma(j)}$, $j,k\in\overline{1,\ldots,N}$, т. е. условия (9) обретают вид

$$u(\beta_j+0)=\sqrt{\frac{b_{\sigma^{-1}(j)}}{b_j}}u(\alpha_{\sigma^{-1}(j)}-0),\quad j\in\overline{1,\ldots,N}. \tag{15}$$

Для задания генератора изометрической полугруппы $\mathbf{V}_\sigma$ в пространстве $L_1(\Gamma)$ его область определения задается граничными условиями $J_{kj}=\frac{b_j}{b_{\sigma(j)}}\delta_{k,\sigma(j)}$, $j,k\in\overline{1,\ldots,m}$,

$$u(\beta_j+0)=\frac{b_{\sigma^{-1}(j)}}{b_j}u(\alpha_{\sigma^{-1}(j)}-0),\quad j\in\overline{1,\ldots,N}, \tag{16}$$

обеспечивающими сохранение L_1-нормы.

Следствие 5. *Пусть $\sigma\in\mathcal{P}$. Тогда условия (16) для дифференциального оператора (3) определяют изометрическую группу $\mathbf{W}_\sigma$ в банаховом пространстве $L_1(\Gamma)$, задаваемую сдвигом аргумента (13) и масштабированием (16) при переходе с одного ребра на другое. Конус неорицательных элементов пространства $L_1(\Gamma)$ инвариантен относительно $\mathbf{W}_\sigma$.*

Доказательство. Краевые условия (16) при каждом $\sigma\in\mathcal{P}$ задают на пространстве простых функций $S(\Gamma)$ группу $\mathbf{W}_\sigma(t)$, $t\in\mathbb{R}$, действующую по правилу $\mathbf{W}_\sigma(t)=\mathbf{M}_\sigma(t)\mathbf{U}_\sigma(t)$, $t\in\mathbb{R}$. Групповое свойство у однопараметрического семейства преобразований $\mathbf{W}_\sigma$ установлено в теореме 4. При каждом $t\in\mathbb{R}$ образом простой неотрицательной функции под действием преобразования $\mathbf{W}_\sigma(t)$ по построению является простая неотрицательная функция, причем преобразование $\mathbf{W}_\sigma(t)$ сохраняет $L_1(\Gamma)$-норму простой неотрицательной функции. В случае знакопеременной простой функции это же верно для действия преобразования $\mathbf{W}_\sigma$ на неотрицательную и отрицательную компоненты, поскольку носитель образа неотрицательной компоненты функции не пересекается с носителем образа отрицательной компоненты. Это же верно и для комплекснозначной простой функции. Значит, однопараметрическое семейство преобразований $\mathbf{W}_\sigma$ пространства $S(\Gamma)$ сохраняет $L_1(\Gamma)$-норму векторов и неотрицательный конус пространства $L_1(\Gamma)$. По непрерывности оно продолжается до однопараметрической группы преобразований пространства $L_1(\Gamma)$, сильно непрерывной в силу непрерывности в среднем оператора сдвига аргумента в пространстве $L_1(\mathbb{R})$. Как и в случае пространства $S(\Gamma)$, конус неотрицательных элементов пространства $L_1(\mathbb{R})$ инвариантен относительно группы $\mathbf{W}_\sigma$. □

Замечание 6. Множество косоэрмитовых расширений кососимметрического оператора $\mathbf{L}_0 : C_0^\infty(\Gamma) \to L_2(\Gamma)$ параметризуется множеством матриц J, удовлетворяющих условию (11). Условие (15) для дифференциального оператора (3) определяют унитарную эволюцию в гильбертовом пространстве $L_2(\Gamma)$, задаваемую сдвигом аргумента (13) и масштабированием (15) при переходе с одного ребра на другое. Если косоэрмитово расширение с матрицей (15) ассоциировано с детерминированным потоком $\mathbf{X}$ на графе Γ, то косоэрмитово расширение с произвольной матрицей J, удовлетворяющей условию (11), задает унитарную динамику амплитуды в пространстве $L_2(\Gamma)$ со всевозможными линейными условиями на граничные значения функции, согласованные с сохранением гильбертовой нормы и обратимостью преобразований гильбертова пространства амплитуд. Каждое такое расширение описывает продолжение движения по ребрам графа в поле скоростей $\mathbf{b}$ с удовлетворяющей (11) матрицей перехода амплитуды с каждого ребра на другое по достижении границы ребра. В [19] исследована статистика волнового пакета, рассеиваемого на вершинах графа по закону, определяемому выбором граничных условий, обеспечивающих самосопряженность оператора Шредингера на графе.

3. Унитарная группа на графе с переменным полем скоростей

Рассмотрим унитарную эволюцию на графе с переменными коэффициентами, когда векторное поле $\mathbf{b}$ на ребрах Γ_j графа Γ является переменным и непрерывно дифференцируемым. В этом случае оператор $\mathbf{L}_0$, заданный дифференциальным выражением (3) на области определения $C_0^1(\Delta)$, кососимметричен, но не косоэрмитов. Сопряженный оператор $\mathbf{L}_0^*$ задан равенством (5) на области определения (4).

Лемма 7. *Пусть* $\dfrac{1}{b_j} \in L_1(\Delta_j)$*. Тогда если* $u_j \in D(\mathbf{L}_{0,j})$*, то функция* $\sqrt{b_j}u_j$ *принадлежит пространству* $W^1_{1,loc}(\Delta_j)$ *и имеет конечный след при* $x_j \to \alpha_j + 0$ *и при* $x \to \beta_j - 0$*.*

Доказательство. Так как $b_j \in C^1(\Delta_j)$ и $u_j \in W^1_{2,loc}(\Delta_j)$, то для любого отрезка $[c,d] \subset \Delta_j$ выполняется условие $\sqrt{b_j}u_j|_{[c,d]} \in W^1_2([c,d])$, и потому $\sqrt{b_j}u_j|_{[c,d]} \in C([c,d])$. Кроме того, на интервале Δ_j выполняется равенство

$$\frac{d}{dx_j}\sqrt{b_j}u_j = \frac{1}{\sqrt{b_j}}\left(\frac{1}{2}\frac{db_j}{dx_j}u_j + b_j\frac{du_j}{dx_j}\right). \tag{17}$$

Поскольку $u_j \in D(\mathbf{L}_{0,j})$, то $\dfrac{1}{2}\dfrac{db_j}{dx_j}u_j + b_j\dfrac{du_j}{dx_j} \in L_2(\Delta_j)$. Кроме того, $\dfrac{1}{\sqrt{b_j}} \in L_2(\Delta_j)$. Следовательно, согласно (17) справедливо $\dfrac{d}{dx_j}\sqrt{b_j}u_j \in L_1(\Delta_j)$. Таким образом, функция $\sqrt{b_j}u_j$, как было показано выше, непрерывна на интервале Δ_j и обладает абсолютно интегрируемой на этом интервале производной. Следовательно, $\sqrt{b_j}u_j \in W^1_{1,loc}(\Delta_j)$ и существуют конечные следы $\sqrt{b_j}u_j|_{x_j=\alpha_j}$ и $\sqrt{b_j}u_j|_{x_j=\beta_j}$. □

Теорема 8. *Индексы дефекта n_+ и n_- симметричного оператора $i\mathbf{L}_0$ равны мощности множеств M_- и M_+ соответственно.*

Доказательство. Поскольку $n_\pm = \dim(\mathrm{Ker}(\mathbf{L}_0^* \pm I))$, то

$$n_- = \sum_{j=1}^N n_-^j; \quad n_+ = \sum_{j=1}^N n_+^j,$$

где $n_\pm^j$ – индексы дефекта оператора $\mathbf{L}_0^j$ в пространстве $H_j = L_2(\Delta_j)$.

Далее, согласно (5) для каждого $j \in 1, \dots, N$

$$u_j \in (\mathrm{Ker}((\mathbf{L}_0^j)^* \pm I) \quad \Leftrightarrow \quad -\frac{d}{dx}(b_j u_j) + \frac{1}{2}\frac{db_j}{dx}u = \mp u_j, \ \ u_j \in H_j \bigcap W_{2,loc}^1(\Delta_j). \tag{18}$$

Поэтому для всякого решения уравнения (18) справедливо равенство

$$u_{j,\pm}(x) = c_j \exp(\int\limits_{x_0}^{x} \frac{\pm 1 - \frac{1}{2}(\mathrm{div} b_j)}{b_j(s)} ds) = c_j \sqrt{\frac{b_j(x_0)}{b_j(x)}} \exp\left(\pm \int\limits_{x_0}^{x} \frac{1}{b_j(s)} ds\right), \quad x \in \Delta_j. \tag{19}$$

При этом $\mathbf{L}_0^* u = \pm u$, тогда и только тогда, когда функция u удовлетворяет равенству (19) и $u \in L_2(\Delta_j)$.

Фиксируем некоторое $x_0 \in \Delta_j$. Рассмотрим несобственные интегралы (7)

$$I_{j,+}(x_0) = \int\limits_{x_0}^{\beta_j} \frac{1}{b(s)} ds; \quad I_{j,-}(x_0) = \int\limits_{x_0}^{\alpha_j} \frac{1}{b(s)} ds, \quad j \in I.$$

В силу предположения о положительности функции b на промежутке Δ интеграл I_+ (I_-) по ориентированному промежутку I_+ (I_-) неотрицателен (неположителен).

Функция $u_\pm$, определяемая равенством (19), принадлежит пространству $L_2(\Delta_j)$ если и только если ее сужения на оба промежутка $\Delta_{j,-} = (\alpha_j, x_0)$ и $\Delta_{j,+} = (x_0, \beta_j)$ принадлежат пространствам $L_2(\Delta_{j,-})$ или $L_2(\Delta_{j,+})$ соответственно. Поэтому функция $u_{j,-}$, определяемая равенством (19), принадлежит пространству H_j тогда и только тогда, когда интеграл $I_{j,+}$ сходится (при этом условие $u_{j,-}|_{\Delta_{j,-}} \in L_2(\Delta_{j,-})$ выполняется как в случае сходимости интеграла $I_{j,-}$, так и в случае его расходимости за счет знака функции b_j). Наоборот, функция $u_{j,+}$, определяемая равенством (19), принадлежит пространству H_j тогда и только тогда, когда интеграл $I_{j,-}$ сходится (независимо от сходимости интеграла $I_{j,+}$).

Значит, симметричный оператор $\mathbf{L}_{0,j}$, заданный на ребре Γ_j равенством (3), имеет индекс дефекта $n_+^j = \dim(\mathrm{Ker}(\mathbf{L}_{0,j}^* + \mathbf{I})) = |M_-(\Delta_j)|$, который принимает значения 0 или 1 в зависимости от того, бесконечно (или конечно) время $I_{j,-}$ (7) движения по ребру Δ_j от некоторой точки внутри ребра до его конца со скоростью b_j. Аналогичное утверждение имеет место и для индекса дефекта $n_-^j = \dim(\mathrm{Ker}(\mathbf{L}_{0,j}^* - \mathbf{I})) = |M_+(\Delta_j)|$. Следовательно, для графа из N ребер рассматриваемого вида симметричный оператор $\mathbf{L}_0$, заданный соотношением (3), имеет индексы дефекта $n_\pm = \dim(\mathrm{Ker}(\mathbf{L}_0^* \pm \mathbf{I})) = |M_\mp(\Gamma)| = \sum\limits_{j=1}^{N} n_\pm^j$. □

Заметим, что область определения $C_0^1(\Delta_j)$ инвариантна относительно преобразования $\mathbf{U}_t$ сдвига аргумента оператором $\mathbf{\Phi}_t$ (см. (6)), если для любой точки $x_0 \in \Delta_j$, и любого $T > 0$ $\Phi_T(x_0) \in \Delta_j$, т. е., любая точка области Δ_j при движении вдоль поля $\mathbf{b}_j$ не выходит на границу $\partial\Delta_j$. В этом случае $n_\pm^j = 0$ и замыкание оператора $\mathbf{L}_{0,j}$ является косоэрмитовым. В общем случае переменного векторного поля индексы дефекта $n_\pm$ оператора $\mathbf{L}_0$ равны мощности множеств $M_\mp$ соответственно. Если $n_- = n_+$, то множество косоэрмитовых расширений параметризуется группой унитарный матриц $\mathcal{U}(m)$ (где $m = n_-$), в противном случае $n_- \neq n_+$ косоэрмитовых расширений оператора $\mathbf{L}_0$ не существует.

Теорема 9. *Пусть* $\dfrac{1}{b|_{\Gamma_f}} \in L_1(\Gamma)$. *Тогда* $n_- = n_+ = N$ *и множество косоэрмитовых расширений оператора* $\mathbf{L}_0$ *образуют такие операторы* $\mathbf{L}_J$, *что* $J \in \mathcal{U}(N)$. *При каждом* $J \in \mathcal{U}(N)$ *область определения оператора* $\mathbf{L}_J$ *задается равенством*

$$D(\mathbf{L}_J) = \left\{ u \in D(\mathbf{L}_0^*) : \ \sqrt{b}u|_\beta = J\sqrt{b}u|_\alpha \right\}. \tag{20}$$

Доказательство. Равенство $n_- = n_+ = N$ следует из теоремы 8. Как и в случае оператора с постоянными коэффициентами, условие

$$(\mathbf{L}_J u, v) - (u, \mathbf{L}_J v) = 0 \quad \forall\, u, v \in D(\mathbf{L}_J)$$

кососимметричности оператора $\mathbf{L}_J$ обретает вид равенства

$$\sum_{j=1}^{N} \int\limits_{\Delta_j} \left[\frac{d}{dx_j}(b_j u_j \bar{v}_j) \right] dx_j = 0,$$

эквивалентного следующим условиям

$$\sum_{j=1}^{N} [\sqrt{b_j} u_j|_{x_j=\beta_j} \sqrt{b_j}\bar{v}_j|_{x_j=\beta_j} - \sqrt{b_j} u_j|_{x_j=\alpha_j} \sqrt{b_j}\bar{v}_j|_{x_j=\alpha_j}] = 0,$$

$$\sum_{j=1}^{N} \sum_{m=1}^{N} \sqrt{b_j} u_j|_{x_j=\beta_j} \bar{J}_{j,m} \sqrt{b_m}\bar{v}_m|_{x_m=\alpha_m} - \sum_{j=1}^{N} \sqrt{b_j} u_j|_{x_j=\alpha_j} \sqrt{b_j}\bar{v}_j|_{x_j=\alpha_j} = 0,$$

$$\sum_{k=1}^{N} \left[\sum_{j=1}^{N} \sqrt{b_j} u_j|_{x_j=\beta_j} \bar{J}_{j,k} - \sqrt{b_k} u_k|_{x_k=\alpha_k} \right] \sqrt{b_k}\bar{v}_k|_{x_k=\alpha_k} = 0 \quad \forall\, v \in D(\mathbf{L}_J),\ u \in D(\mathbf{L}_J^*).$$

Следовательно, $u \in D(\mathbf{L}_J^*)$ тогда и только тогда, когда $u \in D(\mathbf{L}_0^*)$ и

$$\sqrt{b_k} u_k|_{x_k=\alpha_k} = \sum_{j=1}^{N} \bar{J}_{j,k} \sqrt{b_j} u_j|_{x_j=\beta_j} \quad \forall\, k = 1, \ldots, N,$$

т. е.

$$(\mathbf{J}^*)^{-1}(\sqrt{\mathbf{B}}u)(\alpha) = (\sqrt{\mathbf{B}}u)(\beta).$$

Таким образом, $\mathbf{L}_J = -\mathbf{L}_J^*$ тогда и только тогда, когда $J \in \mathcal{U}(N)$. $\square$

Замечание 10. Условие $\mathbf{J} \in \mathcal{U}(N)$ равносильно условию (11) в случае постоянных на интервалах Δ_j функций b_j.

Замечание 11. Среди косоэрмитовых расширений выделим те, что соответствуют детерминированным продолжениям траекторий с конца одного ребра графа на начало другого. Как и в случае оператора $\mathbf{L}_0$ с постоянными коэффициентами, такие расширения параметризуются подгруппой перестановок $\mathcal{P}(N)$ в группе унитарных матриц $\mathcal{U}(N)$.

Теорема 12. *Удовлетворяющая условию (20) матрица J является матрицей перестановок из группы $\mathcal{P}(N)$ тогда и только тогда, когда соответствующая унитарная группа $e^{t\mathbf{L}_J}$, $t \in \mathbb{R}$, сохраняет положительность элементов пространства H.*

Доказательство. Если матрица J является матрицей перестановок, то тогда индикаторная функция измеримого множества переходит при преобразованиях $e^{t\mathbf{L}_J}$, $t \in \mathbb{R}$ в индикаторную функцию измеримого множества. Значит, сохраняется знак неотрицательной простой функции и знак неотрицательной функции из пространства H.

Наоборот, если сохраняется знак неотрицательной функции из пространства H, то все элементы матрицы J должны быть положительны (иначе не сохранится положительность образа индикаторной функции произвольного ребра). Поэтому в силу ортогональности N столбцов матрицы J каждый столбец может содержать только один ненулевой элемент. Значит, так как матрица J унитарна, то она является матрицей перестановки. $\square$

4. Унитарная эволюция, порожденная гамильтоновым полем

Рассмотрим задачу определения фазового потока на двумерном фазовом пространстве гамильтоновой системы с траекториями, уходящими на бесконечность за конечное время. И связанную с ней задачу определения унитарной динамики в пространстве функций на фазовой плоскости, квадратично интегрируемых по инвариантной относительно потока мере.

Пусть евклидово пространство $E = \mathbb{R}^2$ является двумерным фазовым пространством гамильтоновой системы, снабженным стандартной однородной (инвариантной относительно сдвига) симплектической формой ω, имеющей канонический вид в некотором ортонормированном базисе (ОНБ) $\mathcal{E} = \{e_1, e_2\}$ пространства E. Пусть $Q = \mathrm{span}(e_1)$ – пространство координат и $P = \mathrm{span}(e_2)$ – пространство импульсов. Рассмотрим гамильтонову систему, задаваемую на фазовом пространстве (E, ω) функцией Гамильтона (частный случай гамильтониана осциллятор Дюффинга [22])

$$H(q,p) = \frac{1}{2}p^2 - \frac{1}{4}q^4, \quad (q,p) \in E.$$

Траектории гамильтоновой системы, описываемые системой уравнений

$$\dot{q} = p, \qquad \dot{p} = q^3, \tag{21}$$

лежат на линиях уровня функции Гамильтона

$$H(q,p) = c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Тогда искомая функция q удовлетворяет уравнению Эмдена–Фаулера $\dfrac{d^2}{dt^2}q = q^3$, следовательно, $\dfrac{1}{2}(\dot{q})^2 - \dfrac{1}{4}q^4 = c$ при $c \in \mathbb{R}$. Поэтому $\dot{q} = \sqrt{2c + \dfrac{1}{2}q^4}$ если $\dot{q} \geq 0$ и $\dot{q} = -\sqrt{2c + \dfrac{1}{2}q^4}$ если $\dot{q} < 0$. Поэтому если $c \neq 0$, то траектория $\gamma_c^{\pm}$ представляет собой неограниченую гладкую кривую, время движения по которой конечно.

Изучению решений уравнений типа Эмдена–Фаулера посвящен ряд работ, в которых установлены условия глобального существования решения или его ухода на бесконечность за конечное время, получены асимптотические оценки на поведение решения при приближении к границе интервала существования. В [13] получены точные выражения для длины промежутка $(T_*(z), T^*(z))$ существования решения задачи Коши для уравнения (21) и исследованы свойства оператора сдвига вдоль траекторий в пределах области существования решений. В [23] оператор сдвига вдоль траекторий определен с помощью перехода через бесконечность с возвращением на одну из ветвей поверхности уровня гамильтониана. В [24] траектории продлены на расширенное фазовое пространство, содержащее подпространство, изоморфное исходному фазовому пространству.

Решением задачи Коши для системы уравнений Гамильтона (21) с начальным условием $(q(0), p(0)) = z_0 \in E$ называется отображение $\Phi(\cdot, z_0) : O(0) \to E$ окрестности точки $0 \in \mathbb{R}$ в пространство E, удовлетворяющее системе (21) и условию $\Phi(0, z_0) = z_0$.

Для каждой точки $z_0 = (q_0, p_0) \in E = \mathbb{R}^2$ обозначим через $(T_*(z_0), T^*(z_0))$ максимальный интервал существования траектории $\gamma(z_0) = \{\Phi(t, 0, z_0),\ t \in (T_*(z_0), T^*(z_0))\}$, проходящей через точку z_0 в момент времени $t_0 = 0$. При этом $-\infty < T_*(z_0) < T^*(z_0) < +\infty$ для всех $z_0 \in E$ таких, что $H(z_0) \neq 0$.

Пусть $\Phi(t, (q_0, p_0)),\ t \in (T_*(z_0), T_*(z_0))$ – решение задачи Коши для системы уравнений Гамильтона (21), определенное на максимальном интервале существования.

Величины T_*, T^* непрерывно зависят от точки $z_0 \in E$. Если $z_0 = (q_0, 0)$ и $q_0 \neq 0$ (или $z_0 = (0, p_0)$ и $p_0 \neq 0$), то $T_*(z_0) = -T^*(z_0)$ в силу обратимости уравнений Гамильтона по времени и $T^*(q_0,0) < \dfrac{1}{|q_0|}$ $\left(\text{или } T^*(q_0,0) < \dfrac{1}{|q_0|}\right)$. При $t \to T_*(z_0)+0$ и при $t \to T^*(z_0)-0$ траектория $\gamma(z_0)$ асимптотически приближается к одной из четырех сепаратрис γ_0, задаваемых уравнением $H(z)=0$ [23].

Точку $z=(q,p)$ фазового пространства назовем эквивалентной точке $z_0=(q_0,p_0)$, если она принадлежит траектории $\gamma(z_0)=\{z(t),\ t\in (T_*(z_0),T^*(z_0))\}$. Пусть $S=R^2/\sim$. Значит, фазовое пространство E допускает расслоение на фазовые траектории $E=\bigcup\limits_{s\in S}\gamma_s$, для каждой из которых выполняется условие $z_0\in\gamma_s \Rightarrow \Phi_t(z_0)\in\gamma_s\ \forall\, t\in (T_*(z_0),T^*(z_0))$. Поэтому фазовую плоскость можно рассматривать как граф, состоящий из континуального множества ребер $E=\Gamma=\{\gamma_s,\ s\in S\}$.

В [23] описаны продолжения траектории гамильтоновой системы через моменты ухода на бесконечность с помощью добавления к фазовому пространству бесконечно удаленных точек и склеивания по ним концов траекторий. Построенные продолжения траекторий удовлетворяют следующим условиям:

A) отображение сдвига фазового пространства вдоль продолженных траекторий является измеримым биективным отображением расширенного фазового пространства на себя при каждом значении временного параметра;

B) значение энергии сохраняется на продолженной траектории;

C) фазовый объем сохраняется продолженным потоком.

Продолжение фазовых траекторий, удовлетворяющее условиям A)–C), существует и не единственно. Приведем пример двух различных реализаций таких продолжений.

Пусть $c>0$ и интервал $(-T_*,T_*)$ параметризует как движение по кривой

$$\gamma_c^+ = \left\{p=\sqrt{2c+\frac{1}{2}q^4},\ q\in\mathbb{R}\right\},$$

так и движение по кривой

$$\gamma_c^- = \left\{p=-\sqrt{2c+\frac{1}{2}q^4},\ q\in\mathbb{R}\right\}.$$

Следовательно, $q(t)\to\pm\infty$ при $t\to\pm(T_*-0)$, для траектории γ_c^+; и $q(t)\to\mp\infty$ при $t\to\pm(T_*-0)$, для траектории γ_c^-.

Первое продолжение фазовой траектории реализуется так, что траектория γ_c^+ и γ_c^- может быть продолжена периодически с периодом $2T_*$ равенством

$$\gamma_c^+(t)=\gamma_c^+(t|_{mod\,2T_*});\quad \gamma_c^-(t)=\gamma_c^-(t|_{mod\,2T_*});\quad t\in\mathbb{R}.$$

Другое продолжение фазовой траектории реализуется так, что траектории γ_c^+ и γ_c^- может быть продолжена периодически с периодом $4T_*$ с детерминированным переходом с траектории γ_c^+ на траекторию γ_c^- в моменты времени $t=T_*(1+4k),\ k\in\mathbb{Z}$ и обратно в моменты времени $t = T_*(-1+4k),\ k \in \mathbb{Z}$.

Такие же два различных способа продолжения траекторий существуют и для фазовых траекторий $\gamma_c^{\pm}$, лежащих на поверхности уровня $H = c$ при $c < 0$.

Таким образом, существует не менее двух различных удовлетворяющих условиям A), B), C) продолжений фазовых потоков на расширение $\bar{E}$ исходного фазового пространства E посредством добавления бесконечно удаленной границы с заданием процедуры склейки траекторий на границе [23]. Два из таких продолжений траектории $(q(t,z_0),p(t,z_0))$, $t \in (T_*(z_0),T^*(z_0))$, задаются равенствами

$$\begin{aligned} (q(t,z_0),p(t,z_0) &= (q(T_*+\{t\},z_0),p(T_*+\{t\},z_0)), \quad z_0 \in E_Q, \\ (q(t,z_0),p(t,z_0) &= (q(T_*+\{t\},z_0),p(T_*+\{t\},z_0)), \quad z_0 \in E_P, \end{aligned} \tag{22}$$

или

$$\begin{aligned} (q(t,z_0),p(t,z_0) &= ((-1)^m q(T_*+\{t\},z_0),p(T_*+\{t\},z_0)), \quad z_0 \in E_Q, \\ (q(t,z_0),p(t,z_0) &= (q(T_*+\{t\},z_0),(-1)^m p(T_*+\{t\},z_0)), \quad z_0 \in E_P, \end{aligned} \tag{23}$$

для произвольного $t \in \mathbb{R}$, где $\{t\}(z_0) \in (T_*(z_0),T^*(z_0)):\ \exists\, m \in \mathbb{Z}:\ m(T^*-T_*)+\{t\} = t$.

С векторным полем $\mathbf{b} = J\nabla H$ связан дифференциальный оператор $\mathbf{L}_0 : C_0^\infty(E) \to L_2(E)$, действующий по правилу

$$\mathbf{L}_0 u(z) = (J\nabla H(z), \nabla u(z)), \ \ z \in E; \quad u \in C_0^\infty. \tag{24}$$

Оператор $\mathbf{L}_0$ является плотно определенным симметрическим оператором в пространстве $H = L_2(E)$. Сопряженный оператор $\mathbf{L}_0^*$ имеет область определения

$$D(\mathbf{L_0}^*) = \{u \in L_2(E) :\ (J\nabla H, u) \in L_2(E)\}.$$

Если время движения точки z_0 по любой фазовой траектории бесконечно $(T_*(z_0) = -\infty, T^*(z_0) = +\infty)$, то пространство функций $C_0^\infty(E)$ инвариантно относительно группы преобразований

$$\mathbf{U}_\Phi(t)u(x) = u(\Phi_{-t}(x)), \quad t \in \mathbb{R},\ x \in E.$$

В таком случае пространство $C_0^\infty(E)$ является существенной областью определения генератора полугруппы $\mathbf{U}_\Phi$ в силу [25, предложение 5.1].

В случае кососимметрического оператора (24) на плоскости при наличии траекторий, уходящих на бесконечность за конечное время, в работе [23,24] дано описание множества гамильтоновых расширений потоков вдоль уходящих на бесконечность траекторий в двумерном фазовом пространстве. Каждому такому расширению фазового потока соответствует некоторое косоэрмитово расширение кососимметрического оператора (24).

Расширения фазового потока, описанные в ([23, 24]), определены с помощью расширения фазового пространства E посредством присоединения к нему бесконечно удаленных точек – стоков траекторий

$$\partial E_- = \{(\gamma_c^-, T_*(c)),\ c \in \mathbb{R}\backslash\{0\}\} \bigcup \{(\gamma_c^+, T_*(c)),\ c \in \mathbb{R}\backslash\{0\}\}$$

и источников траекторий

$$\partial E_+ = \{(\gamma_c^-, -T_*(c)),\ c \in \mathbb{R}\backslash\{0\}\} \bigcup \{(\gamma_c^+, -T_*(c)),\ c \in \mathbb{R}\backslash\{0\}\}.$$

Детерминированное продолжение траекторий потока задается некоторым биективным отображением границы стоков ∂E_- на границу стоков ∂E_+. При этом продолжения из [23, 24] сохраняют меру Лебега на фазовом пространстве E и значение функционала энергии в точках траектории. Каждая траектория γ, достигшая в некоторый момент времени $t = T_\gamma$ точки $A_\gamma^- \in \partial E_-$, продолжается в правую полуокрестность точки T_γ траекторией $\gamma'(\gamma)$ выходящей из точки $A^+(\gamma) \in \partial E_+$ в момент времени T_γ. Таким образом, продолжение фазового потока задается отображением части границы ∂E_- на ее часть ∂E_+, причем отображение должно быть биективным и сохраняющим значение функционала энергии. Тем самым, продолжения траекторий, определенные в [23,24], естественно назвать гамильтоновыми продолжениями траекторий.

Поскольку продолженный поток Φ сохраняет меру Лебега λ на фазовом пространстве E, то он допускает представление в пространстве $L_p(E, \mu, \mathbb{C})$, $1 \leq p \leq +\infty$ группой изометрий $\mathbf{U}_\Phi(t)$, $t \in \mathbb{R}$ такой, что

$$\mathbf{U}_\Phi(t)u(x) = u(\Phi_{-t}(x)), \quad t \in \mathbb{R},\ x \in E.$$

При $p = 2$ поток Φ представим унитарной группой $\mathbf{U}_\Phi$ в пространстве $L_2(E, \lambda)$.

Помимо косоэрмитовых расширений, параметризованных различными способами гамильтонова продления фазовых траекторий, другие расширения кососимметрического оператора соответствуют унитарной группе с рассеянием амплитуды состояния при выходе с концевых точек графа из множества ∂E_-. Такие продолжения могут быть заданы либо выбором косоэрмитовых граничных условий типа (15), либо посредством унитарных отображений подпространства $\mathrm{Ker}(\mathbf{L}_0^* - \mathbf{I})$ на подпространство $\mathrm{Ker}(\mathbf{L}_0^* + \mathbf{I})$.

Опишем инвариантные подпространства групп унитарных операторов $\mathbf{U}_{\mathbf{\Phi}}$, соответствующих выборам продолжений потока Φ согласно правилам (22) и (23). Фиксируем два положительных числа c_1, c_2 ($c_1 < c_2$) и рассмотрим в фазовой плоскости обрасти

$$A_\pm(c_1, c_2) = \{(q,p) \in E:\ c_1 < H(q,p) < c_2,\ \pm p > 0\};$$

$$B_\pm(c_1, c_2) = \{(q,p) \in E:\ -c_2 < H(q,p) < -c_1,\ \pm q > 0\}.$$

Легко проверяются все пункты следующего утверждения.

Лемма 13. *Пусть $0 < c_1 < c_2$. Тогда области $A_\pm(c_1, c_2)$, $B_\pm(c_1, c_2)$ имеют конечную меру Лебега. Индикаторная функция множества A_+, A_-, B_-, B_+ инвариантна относитель-*

но группы унитарных преобразований $\mathbf{U}_{\mathbf{\Phi}}$ *для потока* Φ*, задаваемого условиями* (22)*, но не инвариантны относительно всех унитарных преобразований группы* $\mathbf{U}_{\tilde{\mathbf{\Phi}}}$ *в случае потока* $\tilde{\Phi}$*, задаваемого условиями* (23)*. Инвариантными относительно унитарной группы* $\mathbf{U}_{\tilde{\mathbf{\Phi}}}$ *являются функции* $\chi_{A_-} + \chi_{A_+}$ *и* $\chi_{B_-} + \chi_{B_+}$*.*

Следствие 14. *Пусть* $0 < c_1 < c_2$*. Тогда*

$$\chi_{A_\pm(c_1,c_2)},\ \chi_{B_\pm(c_1,c_2)} \in \operatorname{Ker}(\mathbf{L}_{\mathbf{\Phi}}), \qquad \chi_{A_+(c_1,c_2)} + \chi_{A_-(c_1,c_2)},\ \chi_{B_+(c_1,c_2)} + \chi_{B_-(c_1,c_2)} \in \operatorname{Ker}(\mathbf{L}_{\tilde{\mathbf{\Phi}}}),$$

где $\mathbf{L}_{\mathbf{\Phi}}$, $\mathbf{L}_{\tilde{\mathbf{\Phi}}}$ *– генераторы групп* $\mathbf{U}_{\mathbf{\Phi}}$, $\mathbf{U}_{\tilde{\mathbf{\Phi}}}$*.*

Поскольку $\mathbf{L}_{\mathbf{\Phi}}$ является сужением оператора $\mathbf{L}_0^*$, то справедливо утверждение.

Следствие 15. *Пусть* $0 < c_1 < c_2$*. Тогда* $\chi_{A_\pm(c_1,c_2)},\ \chi_{B_\pm(c_1,c_2)} \in \operatorname{Ker}(\mathbf{L}_0^*)$*.*

Лемма 16. *Система функций* $\left\{\chi_{A_\pm(c_1,c_2)},\ \chi_{B_\pm(c_1,c_2)},\ c_1, c_2 \in \mathbb{R}\right\}$ *полна в* $\operatorname{Ker}(\mathbf{L}_0^*)$*.*

Доказательство. Условие $\phi \in \operatorname{Ker}(\mathbf{L}_0^*)$ заключается в том, что $(\mathbf{a}, \nabla\phi) = 0$. Это равносильно тому, что ϕ является первым интегралом автономной системы дифференциальных уравнений (21). Поскольку система функционально независимых первых интегралов состоит из одного элемента (которым может быть выбрана функция h), то $\phi = g \circ h$, где g – измеримая функция вещественного аргумента такая, что $\phi \in L_2(E)$. Следовательно, ϕ может быть аппроксимирована индикаторными функциями множеств $A_\pm(c_1, c_2)$, $B_\pm(c_1, c_2)$. □

Аналогично лемме 16 доказывается

Лемма 17. *Система функций* $\left\{e^{\mp T(q,p)}\chi_{A_{c_1,c_2}},\ e^{\mp T(q,p)}\chi_{B_{c_1,c_2}},\ c_1, c_2 \in \mathbb{R}\right\}$ *полна в дефектном подпространстве* $D_\pm = \operatorname{Ker}(\tilde{\mathbf{L}}_0 \pm \mathbf{I})$*.*

Множество всех косоэрмитовых расширений оператора $\tilde{\mathbf{L}}_0$ параметризуется множеством изометрических изоморфизмов $\mathcal{U}(D_-, D_+)$ (см. лемму 17) согласно теореме фон Неймана [10]. Опишем те из косоэрмитовых расширений, которые задают продолжения траекторий фазового потока $\hat{\Phi}$, сохраняющие меру Лебега и энергию.

Фазовая плоскость E после удаления множества нулевой меры $\gamma_0 = \{h(q,p) = 0\}$ является объединением четырех областей $E_\pm^{>} = \left\{(q,p) \in E:\ h(q,p) > 0, \pm p > 0\right\}$, $E_\pm^{<} = \left\{(q,p) \in E:\ h(q,p) < 0, \pm q > 0\right\}$.

Каждой точке $(q,p) \in E_+^{>}$ однозначно сопоставляется число $T(q,p)$, равное времени движения в поле скоростей $\mathbf{a}(q,p)$, $(q,p) \in E$ к точке (q,p) от точки пересечения кривой $\gamma_{(q,p)} = \left\{(q',p') \in D_+^{>}:\ h(q',p') = h(q,p)\right\}$ с осью $q = 0$, т. е. от точки $\left(0, \sqrt{2h(q,p)}\right)$. Для каждой точки $(q,p) \in E_+^{<}$ число $T(q,p)$ определяется как время движения к точке (q,p) от точки $\left((-4h(q,p))^{\frac{1}{4}}, 0\right)$ в поле скоростей $\mathbf{a}(q,p)$, $(q,p) \in E$. Так заданные на множествах $E_+^{>}, E_+^{<}$ функции T непрерывно дифференцируемы. Аналогично определяются функции $T(q,p)$, $(q,p) \in E_i$, в областях $E_-^{>}, E_-^{<}$.

Каждая из четырех областей $E_+^>, E_-^>, E_+^<, E_-^<$ диффеоморфно отображается на соответствующую область $G_\pm^>$, $G_\pm^<$ изменения переменных (c,s)

$$G_\pm^> = \big\{c = h(q,p),\ s = T(q,p),\ (q,p) \in E_\pm^>\big\};$$
$$G_\pm^< = \big\{c = -h(q,p),\ s = T(q,p),\ (q,p) \in E_\pm^<\big\}.$$

Например,

$$G_+^> = \Big\{(c,s) \in \mathbb{R}^2 :\ c > 0,\ s \in \big(-T\big(0,\sqrt{2c}\big), T\big(0,\sqrt{2c}\big)\big)\Big\} = G_-^>.$$

Отображение $(q,p) \to (c(q,p), s(q,p))$ диффеоморфно отображает область $E_+^>$ на область $G_+^>$, при этом якобиан отображения тождественно равен единице, поскольку $\nabla T(q,p) = \dfrac{\mathbf{a}(q,p)}{|\mathbf{a}(q,p)|^2}$. Отображение области $E_-^>$ на область $G_-^>$ отличается лишь тем, что его якобиан равен -1.

Аналогично,

$$G_+^< = \left\{(c,s) \in \mathbb{R}^2 :\ c > 0,\ s \in \left(T\left((4c)^{\frac14}, 0\right), T\left((4c)^{\frac14}, 0\right)\right)\right\} = G_-^<.$$

Якобиан отображения $(q,p) \to (c(q,p), s(q,p))$ равен 1 в области $E_-^<$, равен -1 в областях $E_+^<$. Области $E_+^>, E_-^>, E_+^<, E_-^<$ $(G_+^>, G_-^>, G_+^<, G_-^<)$ будем обозначать через E_1, E_2, E_3, E_4 (G_1, G_2, G_3, G_4) соответственно. Положим

$$G = \bigcup_{j\in\{1,\dots,4\}} (j, G_j) = \big\{(j, G_j),\ j \in \{1,\dots,4\}\big\}.$$

Тогда $L_2(E) = \oplus_{j=1}^4 L_2(E_j)$ и $L_2(G) = \oplus_{j=1}^4 L_2(G_j)$.

Рассмотрим множество граничных точек $\partial G = \big\{(j, \partial G_j),\ j \in \{1,\dots,4\}\big\}$, где

$$\partial G_1 = \Big\{c \geq 0,\ |s| = T\big(0,\sqrt{2c}\big)\Big\} = \partial G_2; \quad \partial G_3 = \left\{c \geq 0,\ |s| = T\left((4c)^{\frac14}, 0\right)\right\} = \partial G_4.$$

При каждом $j \in \{1,\dots,4\}$ определим на множестве G_j функцию Гамильтона $\tilde h_j(c,s) = c,\ (c,s) \in G_j$, связанную с функцией $h_j :\ E_j \to \mathbb{R}$ равенством $\tilde h_j \circ S = h_j$. Продолжим функцию $\tilde h_j$ по непрерывности на множество $\overline{G}_j = G_j \bigcup \partial G_j$. Гамильтоново векторное поле

$$\tilde{\mathbf{a}}(c,s) = (0,1), \quad (c,s) \in G_j, \tag{25}$$

порожденное функцией Гамильтона $\tilde h_j$, постоянно. Система уравнений (см. [26])

$$\frac{d}{dt}c = 0, \quad \frac{d}{dt}s = 1, \tag{26}$$

является представлением системы уравнений Гамильтона (21) в системе координат действие-угол посредством канонической в области E_j замены координат $(q,p) \to (c,s)$.

Следовательно, фазовое пространство гамильтоновых систем (21) (или (26)) представляет собой "континуальный граф" с континуальным множеством ребер, каждым ребром которого является одна из фазовых траекторий

$$\gamma_{\pm}^{>}(a) = \{(q,p) \in E : \ h(q,p) = a, \ \pm p > 0\}, \quad a > 0,$$

$$\gamma_{\pm}^{<}(a) = \{(q,p) \in E : \ h(q,p) = a, \ \pm q > 0\}, \quad a < 0,$$

(или одна из фазовых траекторий $\Delta_j(a) = \{(c,s) \in G_j : \ \tilde{h}(c,s) = a\}$, $j = 1,\dots,4$, $a \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$). Проблема продолжения траекторий, покидающих фазовое пространство гамильтоновой системы (26) за конечное время, решается как и аналогичная проблема для конечного графа, рассмотренная в разделах 2 и 3.

Как и в случае конечного графа, граница фазового пространства гамильтоновой системы (25) допускает разбиение $\partial G = \partial G^- \bigcup \partial G^+$ на границу стоков $\partial G^- = \bigcup\limits_{j=1}^{4} (j, \partial G_j^-)$ и границу источников $\partial G^+ = \bigcup\limits_{j=1}^{4} (j, \partial G_j^+)$. Границы $\partial G_j^{\mp}$ имеют вид $\{(c, \pm T_j(c)), c \in \mathbb{R}_+\}$. Здесь $T_{1,2}(c) = \sqrt{2c}$, $c \in \mathbb{R}_+$, и $T_{3,4} = (4c)^{\frac{1}{4}}$, $c \in \mathbb{R}_+$.

Введем оператор замены $\mathcal{S}: \ L_2(E) \to L_2(G)$, при каждом $j = 1,\dots,4$ сопоставляющий функции $u(q,p)$, $(q,p) \in E_j$, $u \in L_2(E_j)$ функцию $\psi(c,s)$, $(c,s) \in G_j$ согласно равенству $u(q,p) = \psi(c(q,p), s(q,p))$, $(q,p) \in E_j$. Тогда $\psi(c,s) = u(q(c,s), p(c,s))$, $(c,s) \in G_j$, причем в силу равенства единице модуля якобиана диффеоморфизма $E_j \to G_j$ имеем $\psi \in L_2(G_j)$ и $\|u\|_{L_2(E_j)} = \|\psi\|_{L_2(G_j)}$. Следовательно, $\mathcal{S}$ – изометрический изоморфизм, отображающий $L_2(E_j)$ на $L_2(G_j)$ при каждом $j = 1,\dots,4$. Кроме того, если $u \in C_0^1(E_j)$, то $\mathcal{S}u \in C_0^1(G_j)$, и наоборот.

Лемма 18. *Оператор* $\tilde{\mathbf{L}}_0 : C_0^1(G) \to L_2(G)$ *такой, что*

$$\tilde{\mathbf{L}}_0 \mathcal{S} u = \mathcal{S} \mathbf{L}_0 u \quad \forall\, u \in C_0^1(E), \tag{27}$$

действует на произвольную функцию $\psi \in C_0^1(G)$ *согласно равенству* $\tilde{\mathbf{L}}_0 \psi = \dfrac{\partial}{\partial s}\psi$.

Доказательство. Пусть $i \in \{1,\dots,4\}$ и $u \in C_0^1(E_i)$. Тогда если $\psi_i = \mathcal{S}u_i$, то условие (27) эквивалентно следующему

$$\tilde{\mathbf{L}}_0 \psi_i(c,s) = \mathcal{S}\mathbf{L}_0 \psi_i(c(q,p), s(q,p)) = \mathcal{S}\left[\frac{\partial}{\partial c}\psi_i(c,s)(\mathbf{a}, \nabla c(q,p)) + \frac{\partial}{\partial s}\psi_i(c,s)(\mathbf{a}, \nabla s(q,p))\right]$$
$$= \mathcal{S}\left[\frac{\partial}{\partial s}\psi_i(c(q,p), s(q,p))\right] = \frac{\partial}{\partial s}\psi_i(c,s) \quad \forall\, \psi_i \in C_0^1(G_i).$$

Полученное равенство верно для каждой компоненты ψ_i функции $\psi \in C_0^1(G)$. □

Оператор $\tilde{\mathbf{L}}_0$ плотно определен, симметричен, а его сопряженный имеет область определения $D(\tilde{\mathbf{L}}_0^*) = \oplus_{j=1}^4 W_2^{0,1}(G_j)$, где $W_2^{0,1}(G_j)$ – пространство Соболева функций $\psi_j \in L_2(G_j)$, обладающих обобщенной производной $\frac{\partial}{\partial s}\psi_j \in L_2(G_j)$. При этом

$$\tilde{\mathbf{L}}_0^*\psi(c,s) = \frac{\partial}{\partial s}\psi(c,s) \quad \forall\,\psi \in D(\tilde{\mathbf{L}}_0^*).$$

Следовательно, всякая функция $\psi \in D(\tilde{\mathbf{L}}_0^*)$ имеет граничные значения

$$\partial\psi = \big(\oplus_{j=1}^4\, \partial\psi_j^+\big) \,\oplus\, \big(\oplus_{j=1}^4\, \partial\psi_j^-\big),$$

где $\psi_j = \psi|_{G_j}$, $\partial\psi_j^\pm = \psi|_{\partial G_j^\pm}$. При этом $\big\{\partial\psi_j^\mp(c, \pm T_j(c)),\ c \in \mathbb{R}_+\big\} \in L_2(\mathbb{R}_+)$ при каждом $j = 1,\dots,4$.

Следовательно, $\oplus_{j=1}^4 L_2(\mathbb{R}_+) \oplus \oplus_{j=1}^4 L_2(\mathbb{R}_+)$ – пространство граничных значений $\partial\psi = \partial\psi_- \oplus \partial\psi_+$ функции $\psi \in D(\tilde{\mathbf{L}}_0^*)$. Как и в теореме 9, получим

Теорема 19. *Сужение $\tilde{\mathbf{L}}_\mathbf{J}$ оператора $\tilde{\mathbf{L}}_0^*$ на подпространство $D(\tilde{\mathbf{L}}_J)$ пространства $D(\tilde{\mathbf{L}}_0^*)$ является косоэрмитовым расширением оператора $\tilde{\mathbf{L}}_0$ тогда и только тогда, когда*

$$D(\tilde{\mathbf{L}}_J) = \big\{\psi \in D(\tilde{\mathbf{L}}_0^*):\ \partial\psi_+ = J\partial\psi_-\big\},$$

где J – унитарный оператор в пространстве $\oplus_{j=1}^4 L_2(\mathbb{R}_+)$.

Теорема 20. *Для косоэрмитова расширения $\tilde{\mathbf{L}}_J$ оператора $\tilde{\mathbf{L}}_0$ найдется группа $\tilde{\mathbf{\Phi}}(t)$, $t \in \mathbb{R}$, сохраняющих меру Лебега преобразований пространстве G, продолжающая сдвиги вдоль векторного поля (25), удовлетворяющая условиям*

$$\tilde{h} \circ \tilde{\mathbf{\Phi}}(t) = \tilde{h} \quad \forall\, t \in \mathbb{R}, \tag{28}$$

$$e^{t\tilde{\mathbf{L}}_J} = \mathbf{U}_{\tilde{\mathbf{\Phi}}}(t), \quad t \in \mathbb{R}, \tag{29}$$

если и только если группа $e^{t\tilde{\mathbf{L}}_J}$, $t \in \mathbb{R}$, сохраняет множество значений произвольной функции из пространства $L_2(G)$ и операторы группы $e^{t\tilde{\mathbf{L}}_J}$ коммутируют с оператором **c** *умножения на аргумент c.*

Доказательство. Достаточность. Как и в доказательстве леммы 12, если $e^{t\tilde{\mathbf{L}}_J} = \mathbf{U}_{\tilde{\mathbf{\Phi}}}(t)$, $t \in \mathbb{R}$, при некотором удовлетворяющем условиям измеримости и сохранения меры Лебега продолжении $\tilde{\mathbf{\Phi}}$ потока вдоль векторного поля (25) в фазовом пространстве G, то операторы группы $e^{t\tilde{\mathbf{L}}_J}$ не меняют множества значений функции из $L_2(E)$ и унитарны. Если, кроме того, $\tilde{h} \circ \tilde{\mathbf{\Phi}}(t) = \tilde{h}\ \ \forall\, t \in \mathbb{R}$, то операторы группы $\mathbf{U}_{\tilde{\mathbf{\Phi}}}(t)$, $t \in \mathbb{R}$, коммутируют с оператором **c** умножения на аргумент c.

Необходимость. **1)** Предположим, что унитарная группа $e^{t\tilde{\mathbf{L}}_J}$ сохраняет множество значений произвольной функции из $L_2(G)$. Тогда индикаторная функция некоторого множества A из борелевской σ-алгебры $\mathcal{B}(G)$, порожденной множествами вида (i, A_i),

$i \in \{1, \ldots, 4\}$, $A_i \in \mathcal{B}(G_i)$, преобразуется операторами $e^{t\tilde{\mathbf{L}}_J}$ в индикаторную функцию измеримого множества A_t. Причем $\lambda(A_t) = \lambda(A)$ в силу унитарности преобразования $e^{t\tilde{\mathbf{L}}_J}$.

2) Пусть $A, B \in \mathcal{B}(G)$ – дизъюнктные борелевские подмножества G с конечной мерой Лебега. Тогда $e^{t\tilde{\mathbf{L}}_J}\chi_A$, $e^{t\tilde{\mathbf{L}}_J}\chi_B$ при любом $t \in \mathbb{R}$ – индикаторные функции, ортогональные в пространстве $L_2(G)$, и потому имеющие дизъюнктные носители A_t, B_t.

3) Поскольку операторы группы $e^{t\tilde{\mathbf{L}}_J}$, $t \in \mathbb{R}$, коммутируют с оператором $\mathbf{c}$ умножения на аргумент c, то для любого измеримого подмножества B множества A верно равенство

$$\left(\mathbf{c}e^{t\tilde{\mathbf{L}}_J}\chi_B, e^{t\tilde{\mathbf{L}}_J}\chi_B\right) = (\mathbf{c}\chi_B, \chi_B). \tag{30}$$

Следовательно, если множество $A \subset G = \big\{(j, G_j),\ j \in 1, \ldots, 4\big\}$ лежит в полосе $\big\{(j, (c, s)) \in G :\ c \in K\big\}$, где K – компакт в $\mathbb{R}$, то и множество A_t лежит в той же полосе.

4) Поскольку $\tilde{\mathbf{L}}_J u = \tilde{\mathbf{L}}_0 u$ для любой функции $u \in C_0^1(G)$, то для функции χ_A, где множество $A \in \mathcal{B}(G)$ лежит в слое $\big\{(i, (c, s)) \in G :\ c \in K,\ s \in (-T_i(c), T_i(c) - \tau(c))\big\}$, равенство $\tilde{\mathbf{L}}_J \chi_A = \big\{(i, (c, s)) \in G :\ (i, (c, s - t)) \in A\big\}$ справедливо при всех $t \in [0, \tau(c))$.

На множестве $\mathbb{R}\backslash\{0\}$ равенство $T_*(c) = \begin{cases} T\big(0, \sqrt{2c}\big), & c > 0; \\ T\left((-4c)^{\frac{1}{4}}, 0\right), & c < 0, \end{cases}$ определяет непрерывную функцию. Для каждого компактного множества $K \in \mathcal{B}(\mathbb{R}\backslash\{0\})$ определим положительные числа $\tau(K) = \inf\limits_{c \in K} T_*(c)$ и $\mathcal{T}(K) = \sup\limits_{c \in K} T_*(c)$.

В силу непрерывности функции T_* на множестве $\mathbb{R}\backslash\{0\}$ для каждого $c \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ найдется такое $\delta = \delta(c) \in (0, |c|)$, что $\mathcal{T}([c - \delta, c + \delta]) - \tau([c - \delta, c + \delta]) < \dfrac{1}{2}\tau(c)$. Следовательно, для любого компакта $K \subset [c - \delta, c + \delta]$ выполняется условие $\mathcal{T}(K) - \tau(K) \leq \dfrac{1}{2}\tau(c)$.

Фиксируем некоторые $c_0 \neq 0$ и $i \in \{1, \ldots, 4\}$. При всевозможных $\epsilon \in \left(0, \dfrac{1}{2}\tau(c_0)\right)$ и для произвольного компакта $K \subset [c_0 - \delta(c_0), c_0 + \delta(c_0)]$ рассмотрим множество

$$A = A(i, K, \epsilon) = \big\{(j, (c, s)) \in G :\ j = i,\ c \in K,\ s \in (T_*(c) - \epsilon, T_*(c))\big\}.$$

Как показано в пункте **3)**, множество $A_t(i, K, \epsilon) \subset \big\{(j, (c, s)) \in G :\ c \in K\big\}$ при всех $t \in \mathbb{R}$.

Согласно **4)**, множество $A_\epsilon(i, K, \epsilon)$ лежит в слое

$$\big\{(j, (c, s)) \in G :\ c \in K,\ s \in (-T_{i,*}(c), -T_{i,*}(c) + \epsilon)\big\}.$$

Следовательно, при всех $t \in \left(\epsilon, \dfrac{1}{2}\tau(c_0)\right)$ проекции определенных по множеству A в пункте **1)** множеств $A_t(i, K, \epsilon)$ не зависят от t и

$$A_t(i, K, \epsilon) = \{(j, (c, s)) \in G :\ j \in \{1, \ldots, 4\},\ c \in K_{i,j},\ s \in (-T_{j,*}(c) + t - \epsilon, -T_{j,*}(c) + t)\}, \tag{31}$$

где $K_{i,j}$ – измеримые множества в $\mathbb{R}$, не зависящие от s и от t.

Для фиксированного индекса $i=1$ определим отображение Λ_1, сопоставляющее каждому компакту $K=[c-\delta(c),c+\delta(c)]$ множество $K_1'=\big\{(j,K_{1,j}),\ j\in\{1,\dots,4\}\big\}\in\mathcal{B}(G)$ такое, что выполнено (31). Так как $A\in G_1$, то $c>0$ для любого $c\in K$. Следовательно, $K_{1,3}=K_{1,4}=\emptyset$ в силу условия (30). Так как $\lambda_{\mathbb{R}^2}(A)=\epsilon\lambda_{\mathbb{R}}(K)$, то согласно **1)** отображение Λ_1 сохраняет меру Лебега $\lambda(K)=\lambda(K_1')=\lambda(K_{1,1})+\lambda(K_{1,2})$. Причем $K_{1,1}\bigcap K_{1,2}=\emptyset$, $K_{1,1}\bigcup K_{1,2}=K$ согласно **2), 3)**. Следовательно, $A_t(1,K,\epsilon)=A_t'\bigsqcup A_t''$, где

$$A_t'=\big\{(j,(c,s))\in G:\ j=1,\,c\in K_{1,1},\,s\in(-T_{1,*}(c)+t-\epsilon,-T_{1,*}(c)+t)\big\},$$
$$A_t''=\big\{(j,(c,s))\in G:\ j=2,\,c\in K_{1,2},\,s\in(-T_{2,*}(c)+t-\epsilon,-T_{2,*}(c)+t)\big\},\ t\in\left(\epsilon,\frac{1}{2}\tau(c_0)\right).$$

Так как $e^{t\tilde{\mathbf{L}}_J}$ является однопараметрической группой, то $(A_t(i,K,\epsilon))_{-t}=A(i,K,\epsilon)$. Положим $A'=(A_t')_{-t}$. Тогда, как было доказано, $A'\subset A(1,K,\epsilon)$ и

$$A'=\big\{(j,(c,s))\in G:\ j=1,\,c\in K',\,s\in(T_{1,*}(c)-\epsilon,T_{1,*}(c))\big\}$$

при некотором $K'\subset K$. Следовательно, $e^{t\tilde{\mathbf{L}}_J}\chi_{A'}=\chi_{A_\epsilon'}$. Так как $\lambda(K')=\lambda(K_{1,1})$ в силу **1)**, то $K'=K_{1,1}$ с точностью до множества нулевой меры. Так как группа $e^{t\tilde{\mathbf{L}}_J}$ сохраняет свойство дизъюнктности носителей функций и унитарна, то $e^{t\tilde{\mathbf{L}}_J}\chi_{A''}=\chi_{A_\epsilon''}$, где $K''=K\backslash K'$, $A''=A\backslash A'$ и $A_t''=A_t\backslash A_t'$.

Определим на отрезке K отображение Λ_1 по правилу $\Lambda_1(c)=1$, $c\in K'$, $\Lambda_1(c)=2$, $c\in K''$. В силу линейности операторов группы $e^{t\tilde{\mathbf{L}}_J}$, если $\tilde K,\hat K$ – отрезки, то отображения Λ_1 на них заданы согласовано в том смысле, что если $\bar K=\hat K\bigcap\tilde K$, то $\bar K'=\hat K'\bigcap\tilde K'$. Поэтому отображение Λ_1 продолжается на всю полупрямую $c\geq 0$ до двухзначного измеримого отображения, согласованного с группой $e^{t\tilde{\mathbf{L}}_J}$ в том смысле, что определяемое равенством (31) множество лежит в G_1 для любого $K\subset\Lambda_1^{-1}(1)$, и лежит в G_2 для любого $K\subset\Lambda_1^{-1}(2)$.

Рассмотрим множество $B=\big\{(j,(c,s)):\ j=2,\ c\in K,s\in(T_{2,*}(c)-\epsilon,T_{2,*}(c))\big\}$ и при всех $t\in\left(\epsilon,\frac{1}{2}\tau(c_0)\right)$ – множество $B_t=B_t'\bigsqcup B_t''$, где

$$B_t'=\big\{(j,(c,s))\in G:\ j=2,\,c\in K_{2,2},\,s\in(-T_{2,*}(c)+t-\epsilon,-T_{2,*}(c)+t)\big\},$$
$$B_t''=\big\{(j,(c,s))\in G:\ j=1,\,c\in K_{2,1},\,s\in(-T_{2,*}(c)+t-\epsilon,-T_{2,*}(c)+t)\big\},$$

где $K_{2,1}$, $K_{2,2}$ – некоторые измеримые подмножества $\mathbb{R}$. В силу пп. **3)** и **4)** при всех $t\in\left(\epsilon,\frac{1}{2}\tau(c_0)\right)$ множество B_t лежит в полосе

$$\big\{(j,(c,s)):\ j\in\{1,2\},\,c\in K,\,s\in(-T_{2,*}(c)+t-\epsilon,-T_{2,*}(c)+t)\big\}$$

и при этом $\lambda_{\mathbb{R}^2}(B_t)=\lambda_{\mathbb{R}^2}(B)=\epsilon\lambda_{\mathbb{R}^1}(K)$. В силу условия **2)** $B_t\bigcap A_t=\emptyset$ при всех $t\in\mathbb{R}$. Это возможно если и только если $K_{2,2}=K_{1,1}$, $K_{2,1}=K_{1,2}$.

Как и выше для Λ_1, тем самым на полупрямой $c \geq 0$ определяется измеримая функция Λ_2, принимающая два значения 1 и 2. В силу **2)** имеем $A_t \bigcap B_t = \emptyset \ \forall t \in \mathbb{R}$, поэтому $\Lambda_1(c) \neq \Lambda_2(c)$ и $\{\Lambda_1(c), \Lambda_2(c)\} = \{1,2\}$ при любых $c > 0$. Значит, $\Lambda_2(c) = 2$ при $c \in \Lambda_1^{-1}(1)$ и $\Lambda_2(c) = 1$ при $c \in \Lambda_1^{-1}(2)$. Аналогичным образом на полупрямой $c < 0$ определяются измеримые двухзначные отображения Λ_3 и Λ_4 со значениями 3 и 4.

Следовательно, группа $e^{t\tilde{\mathbf{L}}_J}$ определяет отображение $J : \partial G^- \to \partial G^+$ по следующему правилу $J(j,(c,T_{j,*}(c))) = (\Lambda_j(c),(c,-T_{\Lambda(j),*}(c))),\ c \geq 0$. Если положить

$$\Phi_t^J(+0,(j,c,T_{j,*}(c))) = (\Lambda_j(c), c, -T_{\Lambda_j(c),*}(c)) \quad \forall c \in \mathbb{R}\backslash\{0\}, \tag{32}$$

то на фазовом пространстве G определен поток Φ_t^J, задаваемый сдвигами вдоль векторного поля (25) внутри областей G_j, $j = 1,\dots,4$, и условиями (32) перехода с одной траектории на другую при выходе траекторий на границу областей G_j, $j = 1,\dots,4$.

Таким образом, выбор косоэрмитова расширения $\tilde{\mathbf{L}}_J$ оператора $\tilde{\mathbf{L}}_0$ определяет измеримое сохраняющее меру Лебега биективное отображение J множества ∂G^- на множество ∂G^+, удовлетворяющее условию консервативности $\tilde{h} \circ J|_{\partial G^-} = \tilde{h}|_{\partial G^-}$. Следовательно, определено продолжение потока $\mathbf{\Phi}_J$ на фазовом пространстве E, удовлетворяющее условию консервативности (28) и связанное с группой $e^{t\tilde{\mathbf{L}}_J}$ формулой (29). □

Замечание 21. Поскольку линейные операторы $\mathbf{L}_0$ и $\tilde{\mathbf{L}}_0$ связаны унитарным преобразованием замены аргумента (27), утверждение теоремы 20 справедливо и для связи между косоэрмитовыми расширениями оператора $\mathbf{L}_0$ и продолжениями локальных траекторий гамильтоновой системы (21) до гамильтонова потока.

Список литературы

[1] J. Bourgain, *Periodic nonlinear Schrödinger equation and invariant measures*, Comm. Math. Phys. **166** (1), 1–26 (1994).
DOI: https://doi.org/10.1007/BF02099299

[2] P. Chernoff, J. Marsden, *Properties of infinite dimensional Hamiltonian systems*, Lecture Notes Math. **425**, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 1974.
DOI: https://doi.org/10.1007/bfb0073665

[3] P.E. Zhidkov, *On invariant measure for some infinite-dimensional dynamical systems*, Ann. Inst. H. Poincare. Sect. A **62** (3), 267–287 (1995).
URL: https://link.springer.com/chapter/10.1007/978-94-017-0693-3_32

[4] Я.Б. Зельдович, Ю.П. Райзер, *Физика ударных волн и высокотемпературных гидродинамических явлений*, Наука, М., 1966.

[5] О.А. Олейник, Е.В. Радкевич, *Уравнения второго порядка с неотрицательной характеристической формой*, Изд-во Моск. ун-та, М., 2010.

[6] В.И. Таланов, *Некоторые вопросы теории самофокусировки*, УФН **107** (3), 514–515 (1972).
DOI: https://doi.org/10.3367/UFNr.0107.197207m.0514

[7] O.S. Rozanova, *Formation of singularities of solutions of the equations of motion of compressible fluids subjected to external forces in the case of several spatial variables*, J. Math. Sci. **143** (4), 3355–3376 (2007).
DOI: https://doi.org/10.1007/s10958-007-0214-2

[8] M. Reed, B. Simon, *Methods of modern mathematical physics.* I: *Functional Analysis*, Academic Press, New York-London, 1972
DOI: https://doi.org/10.1016/B978-0-12-585001-8.X5001-6

[9] И.В. Волович, В.Ж. Сакбаев, *Об универсальной краевой задаче для уравнений математической физики*, Тр. МИАН **285**, 64–88 (2014).
DOI: https://doi.org/10.1134/S037196851402006X

[10] Н.И. Ахиезер, И.М. Глазман, *Теория линейных операторов в гильбертовом пространстве*, Наука, М., 1966.

[11] Ю.В. Покорный, О.М. Пенкин, В.Л. Прядиев, А.В. Боровских, К.П. Лазарев, С.А. Шабров, *Дифференциальные уравнения на геометрических графах*, Физматлит, М., 2004.

[12] В.Л. Прядиев, *Метод граничных режимов в решении начально-краевой задачи для волнового уравнения на геометрическом графе*, СМФН **71** (2), 287–298 (2025).
DOI: https://doi.org/10.22363/2413-3639-2025-71-2-287-298

[13] G.L. Alfimov, M.E. Lebedev, *Complete description of bounded solutions for a Duffing-type equation with a periodic piecewise constant coefficient*, Rus. J. Nonlin. Dyn. **19** (4), 473–506 (2023).
DOI: https://doi.org/10.20537/nd231102

[14] С.А. Степин, А.И. Шафаревич, *Промежуточные асимптотики решений уравнений типа Эмдена–Фаулера*, Докл. РАН. Матем., информ., проц. упр. **520** (1), 24–28 (2024).
DOI: https://doi.org/10.31857/S2686954324060048

[15] Г. Фикера, *К единой теории краевых задач для эллиптико-параболических уравнений второго порядка*, Математика **7** (6), 99–122 (1963).
URL: https://www.mathnet.ru/rus/mat288

[16] T.V. Anoop, V. Bobkov, M. Ghosh, *Neumann domains of planar analytic eigenfunctions*, arXiv:2410.07811 [math.AP], 2024.
URL: https://arxiv.org/abs/2410.07811

[17] V.Zh. Sakbaev, O.G. Smolyanov, *Diffusion and quantum dynamics on graphs*, Dokl. Math. **88** (1), 404–408 (2013).
DOI: https://doi.org/10.1134/S1064562413040108

[18] В.Ж. Сакбаев, *О спектральных аспектах регуляризации задачи Коши для вырожденного уравнения*, Дифференциальные уравнения и динамические системы, Сб. статей, Тр. МИАН **261**, 258–267 (2008).
URL: https://www.mathnet.ru/rus/tm754

[19] А.А. Толченников, В.Л. Чернышев, А.И. Шафаревич, *Асимптотические свойства и классические динамические системы в квантовых задачах на сингулярных пространствах*, Нелинейная динам. **6** (3), 623–638 (2010).
URL: https://doi.org/10.20537/nd1003010

[20] В.Л. Чернышев, А.И. Шафаревич, *Квазиклассический спектр оператора Шрёдингера на геометрическом графе*, Матем. заметки **82** (4), 606–620 (2007).
DOI: https://doi.org/10.4213/mzm3853

[21] V.L. Chernyshev, A.I. Shafarevich, *Statistics of Gaussian packets on metric and decorated graphs*, Philos. Trans. R. Soc. Lond. Ser. A Math. Phys. Eng. Sci. **372**, art. 20130145 (2014).
DOI: https://doi.org/10.1098/rsta.2013.0145

[22] А.Д. Морозов, *К вопросу о полном качественном исследовании уравнения Дюффинга*, Ж. вычисл. матем. и матем. физ. **13** (5), 1134–1152 (1973).
URL: https://www.mathnet.ru/rus/zvmmf6552

[23] В.А. Глазатов, В.Ж. Сакбаев, *Динамика нелинейных волновых систем, допускающая формирование особенностей*, Изв. вузов. Радиофизика **68** (5–6), 496–504 (2025).
DOI: https://doi.org/10.52452/00213462_2025_68_05_496

[24] V.A. Glazatov, V.Zh. Sakbaev, *Analysis of exploding solutions of an infinite-dimensional linear Hamiltonian system in phase space extensions*, Lobachevskii J. Math. **46** (3), 1271–1283 (2025).
DOI: https://doi.org/10.1134/S1995080225605624

[25] K.-J. Engel, R. Nagel, *One-parameter semigroups for linear evolution equations*, Graduate texts in mathematics **194**, Springer-Verlag, New-York, 2000.
DOI: https://doi.org/10.1007/b97696

[26] М.А. Айзерман, *Классическая механика*, Москва, Наука, 1980.

Всеволод Жанович Сакбаев
Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН,
Миусская пл., д. 4, г. Москва, 125047, Россия,
e-mail: fumi2003@mail.ru

Volume 3, Issue 4 UDC 517.927, 517.954, 517.983
pp. 87–119 (2025) MSC 34B45, 35F16, 47B25, 47A52

Extensions of phase trajectories and extensions of differential operators

V.Zh. Sakbaev

Abstract. The trajectories of motion along divergence-free vector fields in the phase space of autonomous systems of differential equations are studied, along with the corresponding first-order evolutionary differential equation (the Liouville equation), which describes the shift of the argument of a given function on the phase space along the trajectories of the vector field. Finite graphs and planar domains are considered as the phase space. The absence of a global-in-time solution to the Cauchy problem for the system of differential equations leads to the absence of a transformation group of the initial data space generated by the Cauchy problem. The extension of the set of phase trajectories is associated with a skew-Hermitian extension of the differential operator defined on smooth, compactly supported functions on the phase space.

It is established which skew-Hermitian extensions of the first-order differential operator are associated with deterministic extensions of the phase flow, and which are associated with stochastic extensions of trajectories through the boundary of the phase space.

Keywords: phase flow, invariant measure, extension of a phase space, extension of a linear operator, deficiency indices, Koopman representation.

DOI: 10.26907/2949-3919.2025.4.87-119

References

[1] J. Bourgain, *Periodic nonlinear Schrödinger equation and invariant measures*, Comm. Math. Phys. **166** (1), 1–26 (1994).
DOI: https://doi.org/10.1007/BF02099299

[2] P. Chernoff, J. Marsden, *Properties of infinite dimensional Hamiltonian systems*, Lecture Notes Math. **425**, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 1974.
DOI: https://doi.org/10.1007/bfb0073665

[3] P.E. Zhidkov, *On invariant measure for some infinite-dimensional dynamical systems*, Ann. Inst. H. Poincare. Sect. A **62** (3), 267–287 (1995).
URL: https://link.springer.com/chapter/10.1007/978-94-017-0693-3_32

Received: 12 September 2025. Accepted: 14 October 2025. Published: 24 December 2025.

[4] Ya.B. Zeldovich, Yu.P. Rayzer, *Physics of Shock Waves and High-Temperature Hydrodynamic Phenomena. Vol.* I, II, Academic Press, Inc., New York, 1966, 1967.

[5] O.A. Oleĭnik, E. V. Radkevič, *Second-order equations with nonnegative characteristic form*, Plenum Press, New York-London, 1973.
DOI: https://doi.org/10.1007/978-1-4684-8965-1

[6] V.I. Talanov, *Certain problems in the theory of self-focusing*, Phys. Usp. **15** (4), 521–522 (1973).
DOI: https://doi.org/10.1070/PU1973v015n04ABEH005010

[7] O.S. Rozanova, *Formation of singularities of solutions of the equations of motion of compressible fluids subjected to external forces in the case of several spatial variables*, J. Math. Sci. **143** (4), 3355–3376 (2007).
DOI: https://doi.org/10.1007/s10958-007-0214-2

[8] M. Reed, B. Simon, *Methods of modern mathematical physics.* I: *Functional Analysis*, Academic Press, New York-London, 1972
DOI: https://doi.org/10.1016/B978-0-12-585001-8.X5001-6

[9] I.V. Volovich, V.Zh. Sakbaev, *Universal boundary value problem for equations of mathematical physics*, Proc. Steklov Inst. Math., **285**, 56–80 (2014).
DOI: https://doi.org/10.1134/S0081543814040063

[10] N.I. Akhiezer, I.M. Glazman, *Theory of linear operators in Hilbert space*, Dover Publications, Inc., New York, 1993.

[11] Yu.V. Pokorny, O.M. Penkin, V.L. Pryadiev, A.V. Borovskih, K.P. Lazarev, S.A. Shabrov, *Differential equations on geometrical graphs*, Fizmatlit, Moscow, 2004 [in Russian].

[12] V.L. Pryadiev, *The boundary regimes method in solving of the initial-boundary value problem for the wave equation on a geometrical graph*, CMFD **71** (2), 287–298 (2025) [in Russian].
DOI: https://doi.org/10.22363/2413-3639-2025-71-2-287-298

[13] G.L. Alfimov, M.E. Lebedev, *Complete description of bounded solutions for a Duffing-type equation with a periodic piecewise constant coefficient*, Rus. J. Nonlin. Dyn. **19** (4), 473–506 (2023).
DOI: https://doi.org/10.20537/nd231102

[14] S.A. Stepin, A.I. Shafarevich, *Intermediate asymptotics for solutions to equations of Emden–Fowler type*, Dokl. Math. **110** (3), 469–473 (2024).
DOI: https://doi.org/10.1134/S1064562424702302

[15] G. Fichera, *On a unified theory of boundary value problems for ellipticparabolic equations of second order*, in: Boundary problems in differential equations, Univ. of Wisconsin, Madison, 97–120 (1960).

[16] T.V. Anoop, V. Bobkov, M. Ghosh, *Neumann domains of planar analytic eigenfunctions*, arXiv:2410.07811 [math.AP], 2024.
URL: https://arxiv.org/abs/2410.07811

[17] V.Zh. Sakbaev, O.G. Smolyanov, *Diffusion and quantum dynamics on graphs*, Dokl. Math. **88** (1), 404–408 (2013).
DOI: https://doi.org/10.1134/S1064562413040108

[18] V.Zh. Sakbaev, *Spectral aspects of regularization of the Cauchy problem for a degenerate equation*, Proc. Steklov Inst. Math. **261**, 253–261 (2008).
DOI: https://doi.org/10.1134/S008154380802020X

[19] A.A. Tolchennikov, V.L. Chernyshov, A.I. Shafarevich, *Asymptotic properties and classical dynamical systems in quantum problems on singular spaces*, Rus. J. Nonlin. Dyn. **6** (3), 623–638 (2010) [in Russian].
DOI: https://doi.org/10.20537/nd1003010

[20] V.L. Chernyshev, A.I. Shafarevich, *Semiclassical spectrum of the Schrödinger operator on a geometric graph*, Math. Notes **82**:4, 542–554 (2007).
DOI: https://doi.org/10.1134/S0001434607090313

[21] V.L. Chernyshev, A.I. Shafarevich, *Statistics of Gaussian packets on metric and decorated graphs*, Philos. Trans. R. Soc. Lond. Ser. A Math. Phys. Eng. Sci. **372**, art. 20130145 (2014).
DOI: https://doi.org/10.1098/rsta.2013.0145

[22] A.D. Morozov, *Approach to a complete qualitative study of Duffing's equation*, USSR. Comput. Math. Math. Phys. **13** (5), 45–66 (1973).
DOI: https://doi.org/10.1016/0041-5553(73)90034-7

[23] V.A. Glazatov, V.Zh. Sakbaev, *Dynamics of nonlinear wave systems, admitting singularity formation*, Izv. Vuz. Radiofizika **68** (5–6), 496–504 (2025) [in Russian].
DOI: https://doi.org/10.52452/00213462_2025_68_05_496

[24] V.A. Glazatov, V.Zh. Sakbaev, *Analysis of exploding solutions of an infinite-dimensional linear Hamiltonian system in phase space extensions*, Lobachevskii J. Math. **46** (3), 1271–1283 (2025).
DOI: https://doi.org/10.1134/S1995080225605624

[25] K.-J. Engel, R. Nagel, *One-parameter semigroups for linear evolution equations*, Graduate texts in mathematics **194**, Springer-Verlag, New-York, 2000.
DOI: https://doi.org/10.1007/b97696

[26] M.A. Aizerman, *Classical mechanics*, Nauka, Moscow, 1980 [in Russian].

Vsevolod Zhanovich Sakbaev
Keldysh Institute of Applied Mathematics (Russian Academy of Sciences),
4 Miysskaya sq., Moscow 125047, Russia,
e-mail: fumi2003@mail.ru