МАТЕМАТИКА И ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ КОМПЬЮТЕРНЫЕ НАУКИ

Издается с 2023 года
Выходит 4 раза в год
ISSN 2949-3919

Том 3
Выпуск 2

Казань
2025

МАТЕМАТИКА И ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ КОМПЬЮТЕРНЫЕ НАУКИ

Издается с 2023 года
Выходит 4 раза в год
ISSN 2949-3919

Том 3
Выпуск 2

Казань
2025

Учредитель: ФГАОУ ВО КПФУ
Адрес редакции: 420008, Республика Татарстан, г. Казань, Казанский федеральный университет, Институт математики и механики, ул. Кремлевская, д. 35, комн. 501.
Тел. +7 843 233-70-60
E-mail: mathematics.tcs@gmail.com
URL: https://mathtcs.ru/

Издается с 2023 года.
Выходит 4 раза в год.
ISSN 2949-3919
Регистрационный номер СМИ: Эл № ФС77-84704

Сетевое издание «Математика и теоретические компьютерные науки» основано в 2023 году Научно-образовательным математическим центром Приволжского федерального округа (НОМЦ ПФО). Его учредителем является ФГАОУ ВО «Казанский (Приволжский) федеральный университет». Издание ориентировано на публикацию научных статей по следующим направлениям фундаментальной и прикладной математики, теоретической информатики и компьютерных наук:

- вещественный, комплексный и функциональный анализ;
- дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление;
- математическая физика;
- геометрия и топология;
- теория вероятностей и математическая статистика;
- математическая логика, алгебра и теория чисел;
- вычислительная математика;
- теория вычислимости и сложности вычислений;
- дискретная математика и математическая кибернетика;
- теоретическая информатика;
- математические методы в искусственном интеллекте.

Также принимаются к печати обзоры, научно-популярные статьи, статьи о математической жизни. Все статьи проходят процедуру рецензирования. Все опубликованные статьи находятся в открытом доступе. Языки журнала – русский и английский.

СОДЕРЖАНИЕ

Бикчентаев А.М. Полуортогональные проекторы в унитальных C^*-алгебрах 4

Касымов Н.Х., Каримова Н.Р., Ходжамуратова И.А. О негативности отделимых нумераций полей конечной характеристики 19

Корнеева Н.Н., Гизатуллина Л.А. Связь регулярности двумерных и соответствующих им одномерных языков 32

Мясников К.М., Кудинов А.В. Влияние аксиомы связности на сложность модальной логики 58

Орлов Ю.Н., Сакбаев В.Ж. Формулы Фейнмана–Каца для решений эволюционных уравнений I. Обобщенные случайные процессы и семейства операторов 85

Сабитов И.Х. Зависят ли свойства плоской замкнутой кривой от выбора точки начала ее обхода? 136

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ЖИЗНЬ

Календарь конференций (август 2025 г. – октябрь 2025 г.) 145

Том 3, Выпуск 2 УДК 517.983, 517.986
Стр. 4–18 (2025) MSC 46L05, 47B20

Полуортогональные проекторы в унитальных C^*-алгебрах

А.М. Бикчентаев

Аннотация. Пусть $\mathcal{A}^{\mathrm{sem}} = \{A \in \mathcal{A} : \operatorname{Re} A = A^*A\}$ – множество всех полуортогональных проекторов унитальной C^*-алгебры $\mathcal{A}$, I – единица $\mathcal{A}$. Формула $U = 2A - I$ ($A \in \mathcal{A}^{\mathrm{sem}}$) задает биекцию между множеством $\mathcal{A}^{\mathrm{sem}}$ и множеством всех изометрий из $\mathcal{A}$. Для любого натурального числа $n \geq 2$ существует некоммутативный многочлен степени n, который выдает полуортогональный проектор при подстановке произвольного набора $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{A}^{\mathrm{sem}}$. Каждый элемент $A \in \mathcal{A}^{\mathrm{sem}}$ гипонормален и лежит в единичном шаре C^*-алгебры $\mathcal{A}$. Если $A \in \mathcal{A}^{\mathrm{sem}}$, то A^2 гипонормален. Если $A, A^2 \in \mathcal{A}^{\mathrm{sem}}$, то A является проектором. Если $A \in \mathcal{A}^{\mathrm{sem}}$ и $A = A^n$ для некоторого $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, то A является нормальным элементом, и A – проектор при $n = 2$.

Ключевые слова: гильбертово пространство, линейный оператор, полуортогональный проектор, изометрия, C^*-алгебра.

DOI: 10.26907/2949-3919.2025.2.4-18

Введение

Понятие полуортогонального проектора в $\mathbb{M}_n(\mathbb{C})$ было введено и изучено в [1]. Различные свойства полуортогональных проекторов в контексте алгебры $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ всех линейных ограниченных операторов в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$, а затем и в контексте унитальных C^*-алгебр были исследованы в [2–4]. Пусть $\mathcal{A}^{\mathrm{sem}} := \{A \in \mathcal{A} : \ \operatorname{Re} A = |A|^2\}$ – множество всех полуортогональных проекторов унитальной C^*-алгебры $\mathcal{A}$, $\mathcal{A}_1$ – единичный шар $\mathcal{A}$, $\mathcal{A}^{\mathrm{sa}}$ и $\mathcal{A}^{\mathrm{pr}}$ – эрмитова часть и множество проекторов $\mathcal{A}$, соответственно. Перечислим полученные в нашей статье результаты. Формула $U := 2A - I$ ($A \in \mathcal{A}^{\mathrm{sem}}$) задает биекцию между множествами $\mathcal{A}^{\mathrm{sem}}$ и $\mathcal{A}^{\mathrm{iso}} := \{A \in \mathcal{A} : \ A^*A = I\}$. Имеем $\mathcal{A}^{\mathrm{sem}} \cap \mathcal{A}^{\mathrm{sa}} = \mathcal{A}^{\mathrm{pr}}$ (теорема 1). Каждый элемент $A \in \mathcal{A}^{\mathrm{sem}}$ гипонормален (следствие 2). Для каждого набора элементов $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{A}^{\mathrm{sem}}$ элемент

$$A := \frac{(2A_1 - I) \cdots (2A_n - I) + I}{2}$$

Благодарности. Работа выполнена в рамках реализации программы развития Научно-образовательного математического центра Приволжского федерального округа (соглашение № 075-02-2025-1725/1).

Поступила: 26.02.2025. Принята: 02.07.2025. Опубликована: 16.07.2025.

также лежит в множестве $\mathcal{A}^{\mathrm{sem}}$ (следствие 3). Значит, для любого натурального числа $n \geq 2$ существует некоммутативный многочлен степени n, который выдает полуортогональный проектор при подстановке произвольного набора $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{A}^{\mathrm{sem}}$. Имеем включение $\mathcal{A}^{\mathrm{sem}} \subset \mathcal{A}_1$ (следствие 4). Пусть $A_1, \ldots, A_n, A \in \mathcal{A}^{\mathrm{sem}}$, $\lambda_1, \ldots, \lambda_n > 0$ и $\lambda_1 + \cdots + \lambda_n = 1$. Если $\lambda_1 A_1 + \cdots + \lambda_n A_n = A$, то $A_1 = \cdots = A_n = A$ (следствие 6). Имеем $\mathcal{A}^{\mathrm{sem}} \cap \mathcal{A}^{\mathrm{iso}} = \{I\}$ (следствие 7). Если $A \in \mathcal{A}$ с $\|A\| < 1$, то элемент $(I + A)/2$ является средним арифметическим нормальных полуортогональных проекторов из $\mathcal{A}$ (предложение 8). Для $A, B \in \mathcal{A}^{\mathrm{sem}}$ пишем $A \leq_1 B$, если $A + A^* = A^*B + B^*A$. Отношение $\leq_1$ на $\mathcal{A}^{\mathrm{sem}}$ является антисимметричным и рефлексивным. Его сужение на $\mathcal{A}^{\mathrm{pr}}$ совпадает с обычным отношением частичного порядка $\leq$. В алгебре $\mathcal{B}(\mathcal{H})$, $\dim \mathcal{H} = +\infty$, существует гипонормальный оператор, квадрат которого не гипонормален [5, задача 209]. Если $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})^{\mathrm{sem}}$, то A^2 гипонормален (теорема 22). Пусть $\mathcal{A}$ – унитальная C^*-алгебра. Если $A, A^2 \in \mathcal{A}^{\mathrm{sem}}$, то $A \in \mathcal{A}^{\mathrm{pr}}$ (теорема 23). Если $A \in \mathcal{A}^{\mathrm{sem}}$ и $A = A^n$ для некоторого $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, то A является нормальным элементом, и $A \in \mathcal{A}^{\mathrm{pr}}$ при $n = 2$ (теорема 24).

1. Обозначения и определения

C^*-*алгеброй* называется комплексная банахова $*$-алгебра $\mathcal{A}$ такая, что $\|A^*A\| = \|A\|^2$ для всех $A \in \mathcal{A}$. Пусть $\mathcal{A}$ – унитальная C^*-алгебра с единицей I, $\mathcal{A}_1 := \{A \in \mathcal{A} :\ \|A\| \leq 1\}$ – единичный шар алгебры $\mathcal{A}$. Элемент $A \in \mathcal{A}$ называется *гипонормальным*, если $A^*A \geq AA^*$; *нормальным*, если $A^*A = AA^*$; *изометрией*, если $A^*A = I$; *коизометрией*, если $AA^* = I$. Положим

$$\mathcal{A}^{\mathrm{iso}} := \{A \in \mathcal{A} :\ A^*A = I\}, \qquad \mathcal{A}^{\mathrm{u}} := \{A \in \mathcal{A} :\ A^*A = AA^* = I\},$$
$$\mathcal{A}^{\mathrm{pr}} := \{A \in \mathcal{A} :\ A = A^2 = A^*\}, \qquad \mathcal{A}^{\mathrm{pi}} := \{A \in \mathcal{A} :\ A^*A \in \mathcal{A}^{\mathrm{pr}}\}.$$

Для C^*-алгебры $\mathcal{A}$ через $\mathcal{A}^{\mathrm{id}}$, $\mathcal{A}^{\mathrm{sa}}$ и $\mathcal{A}^+$ будем обозначать ее подмножества идемпотентов ($A = A^2$), эрмитовых ($A^* = A$) элементов и положительных элементов, соответственно. Если $A \in \mathcal{A}$, то $|A| = \sqrt{A^*A} \in \mathcal{A}^+$ и $\mathrm{Re}\, A = (A + A^*)/2 \in \mathcal{A}^{\mathrm{sa}}$; $\mathrm{S}(A) = (A - A^*)/2$ – косоэрмитова часть элемента A. Пусть

$$\mathcal{A}^{\mathrm{sem}} := \{A \in \mathcal{A} :\ \mathrm{Re}\, A = |A|^2\}$$

– множество всех полуортогональных проекторов унитальной C^*-алгебры $\mathcal{A}$. Если I – единица алгебры $\mathcal{A}$, то формула $S_P = 2P - I$ задает биекцию между $\mathcal{A}^{\mathrm{id}}$ и множеством $\mathcal{A}^{\mathrm{sym}}$ всех симметрий ($S^2 = I$) в $\mathcal{A}$.

Для $P, Q \in \mathcal{A}^{\mathrm{pr}}$ будем писать $P \sim Q$ (эквивалентность Мюррея–фон Неймана), если $P = U^*U$ и $Q = UU^*$ для некоторого $U \in \mathcal{A}$. Проектор P в C^*-алгебре $\mathcal{A}$ называется *конечным*, если $P \sim Q \leq P$ влечет $Q = P$. Унитальная C^*-алгебра $\mathcal{A}$ называется *конечной*, если I является конечным проектором [6, гл. III, определение 1.3.1].

Следом на C^*-алгебре $\mathcal{A}$ называется такое отображение $\varphi : \mathcal{A}^+ \to [0, +\infty]$, что

$$\varphi(X+Y) = \varphi(X) + \varphi(Y), \quad \varphi(\lambda X) = \lambda\varphi(X) \quad \text{для всех } X, Y \in \mathcal{A}^+,\ \lambda \geq 0$$

(при этом $0 \cdot (+\infty) \equiv 0$); $\varphi(Z^*Z) = \varphi(ZZ^*)$ для всех $Z \in \mathcal{A}$. Для следа φ определим (см. [6, гл. II, II.6.7.3]) $\mathfrak{M}_\varphi^+ = \{X \in \mathcal{A}^+ :\ \varphi(X) < +\infty\}$. Ограничение $\varphi|_{\mathfrak{M}_\varphi^+}$ корректно продолжается по линейности до функционала на $\mathfrak{M}_\varphi = \mathrm{lin}_{\mathbb{C}}\mathfrak{M}_\varphi^+$, который будем обозначать той же буквой φ. Такое продолжение позволяет отождествлять конечные следы (т. е. $\varphi(X) < +\infty$ для всех $X \in \mathcal{A}^+$) с положительными следовыми функционалами на $\mathcal{A}$.

Пусть $\mathcal{H}$ – гильбертово пространство над полем $\mathbb{C}$, $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ – $*$-алгебра всех линейных ограниченных операторов в $\mathcal{H}$. Любую C^*-алгебру можно реализовать как C^*-подалгебру в $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ для некоторого гильбертова пространства $\mathcal{H}$ (теорема Гельфанда–Наймарка; см. [7, теорема 3.4.1]). Подпространство $\mathcal{K} \subset \mathcal{H}$ является *инвариантным* относительно оператора $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$, если $A\xi \in \mathcal{K}$ для каждого $\xi \in \mathcal{K}$. При $\dim \mathcal{H} = n < \infty$ алгебра $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ отождествляется с полной матричной алгеброй $\mathbb{M}_n(\mathbb{C})$.

2. Полуортогональные проекторы в унитальных C^*-алгебрах

Пусть $\mathcal{A}$ – унитальная C^*-алгебра.

Теорема 1. *Формула $U := 2A - I$ ($A \in \mathcal{A}^{\mathrm{sem}}$) задает биекцию между множествами $\mathcal{A}^{\mathrm{sem}}$ и $\mathcal{A}^{\mathrm{iso}}$. Имеем $\mathcal{A}^{\mathrm{sem}} \cap \mathcal{A}^{\mathrm{sa}} = \mathcal{A}^{\mathrm{pr}}$.*

Доказательство. Если $A \in \mathcal{A}^{\mathrm{sem}}$, то

$$U^*U = (2A - I)^*(2A - I) = 4A^*A - 2A - 2A^* + I = I$$

и $U \in \mathcal{A}^{\mathrm{iso}}$. Обратно, если $U \in \mathcal{A}^{\mathrm{iso}}$, то для элемента $A = (U + I)/2$ имеем

$$|A|^2 = \frac{U^* + I}{2} \cdot \frac{U + I}{2} = \frac{U + U^* + 2I}{4} = \frac{U + I}{4} + \frac{U^* + I}{4} = \mathrm{Re}\, A$$

и $A \in \mathcal{A}^{\mathrm{sem}}$. Если $A \in \mathcal{A}^{\mathrm{sem}}$ и $A = A^*$, то $A = |A|^2$ и $A \in \mathcal{A}^{\mathrm{pr}}$. Включение $\mathcal{A}^{\mathrm{pr}} \subset \mathcal{A}^{\mathrm{sem}}$ очевидно. □

Следствие 2. *Каждый элемент $A \in \mathcal{A}^{\mathrm{sem}}$ гипонормален.*

Доказательство. Поскольку проектор $UU^* \leq I$, имеем

$$A^*A = \frac{U^* + U}{4} + \frac{1}{2}I \geq \frac{U + U^*}{4} + \frac{1}{4}UU^* + \frac{1}{4}I = AA^*.$$

Утверждение доказано. □

Следствие 3. *Для каждого набора элементов $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{A}^{\mathrm{sem}}$ элемент*

$$A := \frac{(2A_1 - I) \cdots (2A_n - I) + I}{2} \tag{1}$$

также лежит в множестве $\mathcal{A}^{\mathrm{sem}}$.

Доказательство. В силу теоремы 1 элементы $U_k := 2A_k - I$, $k = 1, \dots, n$, лежат в множестве $\mathcal{A}^{\mathrm{iso}}$. Поскольку произведение любого конечного набора элементов из $\mathcal{A}^{\mathrm{iso}}$ снова лежит в $\mathcal{A}^{\mathrm{iso}}$, имеем $U := U_1 \cdots U_n \in \mathcal{A}^{\mathrm{iso}}$. Для элемента $A := (U + I)/2$ выполнено равенство

$$(2A_1 - I) \cdots (2A_n - I) = 2A - I,$$

т. е. A из (1) лежит в множестве $\mathcal{A}^{\mathrm{sem}}$. В частности, если $A_1, A_2, A_3 \in \mathcal{A}^{\mathrm{sem}}$, то элементы

$$2A_1A_2 - A_1 - A_2 + I, \qquad 4A_1A_2A_3 - 2A_1A_2 - 2A_1A_3 - 2A_2A_3 + A_1 + A_2 + A_3$$

лежат в $\mathcal{A}^{\mathrm{sem}}$. Для $A_1 = A_2$ имеем $2A_1^2 - 2A_1 + I \in \mathcal{A}^{\mathrm{sem}}$. □

Другими словами, для любого натурального числа $n \geq 2$ существует некоммутативный многочлен степени n, который выдает полуортогональный проектор при подстановке произвольного набора $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{A}^{\mathrm{sem}}$.

Следствие 4. *Имеем включение $\mathcal{A}^{\mathrm{sem}} \subset \mathcal{A}_1$.*

Доказательство. Если $A \in \mathcal{A}^{\mathrm{sem}}$, то $2A - I \in \mathcal{A}^{\mathrm{iso}}$ и

$$2\|A\| = \|2A - I + I\| \leq \|2A - I\| + \|I\| = 1 + 1 = 2$$

в силу неравенства треугольника для нормы $\|\cdot\|$. □

Лемма 5 ([8, гл. I, теорема 10.2])**.** *Если C^*-алгебра $\mathcal{A}$ унитальна, то $A \in \mathcal{A}_1$ является крайней точкой множества $\mathcal{A}_1$ тогда и только тогда, когда A^*A (значит, и AA^*) является проектором и выполнено условие $(I - A^*A)\mathcal{A}(I - AA^*) = \{0\}$.*

В частности, изометрии и коизометрии являются крайними точками множества $\mathcal{A}_1$.

Следствие 6. *Пусть $A_1, \dots, A_n, A \in \mathcal{A}^{\mathrm{sem}}$, $\lambda_1, \dots, \lambda_n > 0$ и $\lambda_1 + \dots + \lambda_n = 1$. Если*

$$\lambda_1 A_1 + \dots + \lambda_n A_n = A, \tag{2}$$

то $A_1 = \dots = A_n = A$.

Доказательство. Пусть $A_1 = \dfrac{U_1 + I}{2}$, …, $A_n = \dfrac{U_n + I}{2}$, $A = \dfrac{U + I}{2}$ – представления теоремы 1 с $U_1, \dots, U_n, U \in \mathcal{A}^{\mathrm{iso}}$. Тогда из равенства (2) имеем $\lambda_1 U_1 + \dots + \lambda_n U_n = U$ и из леммы 5 получаем $U_1 = \dots = U_n = U$. □

Следствие 7. *Имеем* $\mathcal{A}^{\mathrm{sem}} \cap \mathcal{A}^{\mathrm{iso}} = \{I\}$.

Доказательство. Если $A \in \mathcal{A}^{\mathrm{sem}} \cap \mathcal{A}^{\mathrm{iso}}$, то $\mathrm{Re}\, A = |A|^2 = I^2 = I$ и

$$\frac{1}{2}A + \frac{1}{2}A^* = I.$$

Заметим, что I лежит в множестве $\mathrm{extr}\, \mathcal{A}_1$ всех крайних точек множества $\mathcal{A}_1$. Так как A является изометрией, то A^* – коизометрия и поэтому $A, A^* \in \mathrm{extr}\, \mathcal{A}_1$. Теперь из леммы 5 получаем $A = A^* = I$. □

Предложение 8. *Если* $A \in \mathcal{A}$ *с* $\|A\| < 1$, *то элемент* $(I + A)/2$ *является средним арифметическим нормальных полуортогональных проекторов из* $\mathcal{A}$.

Доказательство. Если $A \in \mathcal{A}$ с $\|A\| < (n-2)n^{-1}$, то $A = \dfrac{1}{n}(U_1 + \cdots + U_n)$ с некоторыми $U_1, \ldots, U_n \in \mathcal{A}^{\mathrm{u}}$ (см. [9]). Поэтому

$$A = \frac{2}{n}\left(\frac{U_1 + I}{2} + \cdots + \frac{U_n + I}{2}\right) - I \quad \text{и} \quad \frac{A + I}{2} = \frac{1}{n}\left(\frac{U_1 + I}{2} + \cdots + \frac{U_n + I}{2}\right).$$

Заметим, что $\dfrac{U_1 + I}{2}, \ldots, \dfrac{U_n + I}{2} \in \mathcal{A}^{\mathrm{sem}}$ и являются нормальными элементами. □

Теорема 9. *Для* $A \in \mathcal{A}^{\mathrm{sem}}$ *следующие условия эквивалентны*:

(i) A *нормален*;

(ii) $2A - I \in \mathcal{A}^{\mathrm{u}}$;

(iii) $A^* \in \mathcal{A}^{\mathrm{sem}}$.

Доказательство. (i) ⇒ (ii). Если A является нормальным элементом в $\mathcal{A}^{\mathrm{sem}}$, то $U := 2A - I$ является нормальной изометрией в $\mathcal{A}$, см. теорему 1. Следовательно, $U \in \mathcal{A}^{\mathrm{u}}$.

(ii) ⇒ (i). Каждый элемент $U \in \mathcal{A}^{\mathrm{u}}$ нормален.

(i) ⇒ (iii). Имеем $A + A^* = 2A^*A = 2AA^*$. □

Следствие 10. *Если* C^**-алгебра* $\mathcal{A}$ *конечна, то каждый элемент* $A \in \mathcal{A}^{\mathrm{sem}}$ *является нормальным.*

Доказательство. Если C^*-алгебра $\mathcal{A}$ конечна, то все изометрии и коизометрии из $\mathcal{A}$ являются унитарными элементами. □

Другие примеры, когда $A \in \mathcal{A}^{\mathrm{sem}}$ является нормальным см., например, в [3, §4].

Теорема 11. *Имеем* $\mathcal{A}^{\mathrm{sem}} \cap \mathcal{A}^{\mathrm{pi}} = \mathcal{A}^{\mathrm{pr}}$.

Доказательство. Для частичной изометрии $A \in \mathcal{A}^{\mathrm{sem}}$ имеем $A + A^* = 2P$ с $P := A^*A \in \mathcal{A}^{\mathrm{pr}}$. Поэтому декартово разложение элемента A есть $A = P + iB$ с $B \in \mathcal{A}^{\mathrm{sa}}$ и $i \in \mathbb{C}$, $i^2 = -1$. Из равенства $(P - iB)(P + iB) = P$ получаем

$$i(PB - BP) = -B^2. \tag{3}$$

Умножив обе части равенства (3) слева и справа на проектор P, имеем $PB^2P = |BP|^2 = 0$. Поэтому $\||BP|\| = \sqrt{\||BP|^2\|} = 0$. Значит, $\|BP\| = \| \, |BP| \, \| = 0$ и $BP = 0$ в силу точности нормы $\| \cdot \|$. Теперь $PB = (BP)^* = 0$ и из (3) получаем $B^2 = |B|^2 = 0$. Так как

$$\| \, |B|^2 \| = \| \, |B| \, \|^2 = \|B\|^2 = 0,$$

получаем $B = 0$ и $A = P$, что и требовалось. □

Предложение 12. *Пусть $A \in \mathcal{A}^{\mathrm{sem}}$ нормален и элемент $U := 2A - I$ представляется в виде произведения $U = S_1 S_2$ с некоторыми $S_1, S_2 \in \mathcal{A}^{\mathrm{u}} \cap \mathcal{A}^{\mathrm{sa}} \, (= \mathcal{A}^{\mathrm{sym}} \cap \mathcal{A}^{\mathrm{sa}})$. Тогда $A^* = S_1 A S_1$.*

Доказательство. Очевидно,

$$2S_1AS_1 - I = S_1(2A - I)S_1 = S_2S_1 = (S_1S_2)^* = 2A^* - I,$$

поэтому $A^* = S_1AS_1$. Поскольку $S_k = 2P_k - I$ с $P_k = \dfrac{I + S_k}{2} \in \mathcal{A}^{\mathrm{pr}}$, $k = 1, 2$, имеем

$$\begin{aligned} 2A - I &= (2P_1 - I)(2P_2 - I), \\ A &= 2P_1P_2 - P_1 - P_2 + I. \end{aligned}$$

□

Следствие 13. *Пусть элемент A как в предложении 12. Тогда*

(i) *если φ – след на C^*-алгебре $\mathcal{A}$ и $A \in \mathfrak{M}_\varphi$, то $\varphi(A) \in \mathbb{R}$;*

(ii) *если $\mathcal{A} = \mathbb{M}_n(\mathbb{C})$, то определитель $\det(A) \in \mathbb{R}$.*

Доказательство. (i). Имеем $A^* \in \mathfrak{M}_\varphi$ и $\varphi(A^*) = \overline{\varphi(A)} = \varphi(S_1AS_1) = \varphi(S_1^2A) = \varphi(A) \in \mathbb{R}$ в силу равенства $\varphi(XY) = \varphi(YX)$ для всех $X \in \mathcal{A}$ и $Y \in \mathfrak{M}_\varphi$ [7, гл. 6, упражнение 4]; черта сверху означает комплексное сопряжение.

(ii). Из теоремы об определителе произведения матриц и равенства $\det(X^*) = \overline{\det(X)}$ для всех $X \in \mathbb{M}_n(\mathbb{C})$ [10, гл. 0, §0.3, 0.3.1] получаем

$$\begin{aligned} \overline{\det(A)} &= \det(A^*) = \det(S_1AS_1) = \det(S_1)^2 \det(A) = \det(S_1^2) \det(A) = \det(I) \det(A) \\ &= \det(A) \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Утверждение доказано. □

Пример 14. Пусть $\mathcal{A} = \mathbb{M}_2(\mathbb{C})$ и

$$A_\varepsilon = \begin{pmatrix} \varepsilon & -\sqrt{\varepsilon - \varepsilon^2} \\ \sqrt{\varepsilon - \varepsilon^2} & \varepsilon \end{pmatrix} \quad \text{для} \quad 0 \le \varepsilon \le 1. \tag{4}$$

Тогда $A_\varepsilon \in \mathcal{A}^{\mathrm{sem}}$ и $U_\varepsilon := 2A_\varepsilon - I$ представляется в виде произведения $U_\varepsilon = S_1S_2$ с матрицами

$$S_1 = \begin{pmatrix} 2t-1 & 2\sqrt{t-t^2} \\ 2\sqrt{t-t^2} & 1-2t \end{pmatrix}, \quad S_2 = \begin{pmatrix} 1-2t & 2\sqrt{t-t^2} \\ 2\sqrt{t-t^2} & 2t-1 \end{pmatrix}, \quad t := 2 - 2\sqrt{1-\varepsilon},$$

из $\mathcal{A}^{\mathrm{u}} \cap \mathcal{A}^{\mathrm{sa}}$, т. е. элемент A_ε удовлетворяет условию факторизации предложения 12.

Пример 15. Если $\mathcal{A} = \mathcal{B}(\mathcal{H})$, $\dim \mathcal{H} \le +\infty$, то $\{\|A\| : A \in \mathcal{A}^{\mathrm{sem}}\} = [0,1]$. Для каждого $\varepsilon \in [0,1]$ определенный в (4) оператор A_ε удовлетворяет условию

$$A_\varepsilon^* A_\varepsilon = \varepsilon \operatorname{diag}(1,1).$$

Поэтому $\varepsilon = \|A_\varepsilon^* A_\varepsilon\| = \|A_\varepsilon\|^2$ и $\|A_\varepsilon\| = \sqrt{\varepsilon}$, $0 \le \varepsilon \le 1$. Напомним, что

$$\{\|A\| : A \in \mathcal{A}^{\mathrm{pr}}\} = \{0,1\}, \qquad \{\|A\| : A \in \mathcal{A}^{\mathrm{id}}\} = \{0\} \cup [1,+\infty).$$

Предложение 16. *Пусть $\mathcal{A}$ – унитальная C^*-алгебра. Формула $A^\perp := I - A$ $(A \in \mathcal{A}^{\mathrm{sem}})$ задает инволюцию на множестве $\mathcal{A}^{\mathrm{sem}}$. Имеем $A^* A^\perp := i \operatorname{Im} A$.*

Доказательство. Очевидно, $(A^\perp)^\perp = A$ для всех $A \in \mathcal{A}^{\mathrm{sem}}$ и

$$A^{\perp *} A^\perp = I + A^*A - A - A^* = I - \frac{A + A^*}{2} = \frac{A^\perp + A^{\perp *}}{2} = \operatorname{Re}(A^\perp),$$
$$A^* A^\perp = A^* - A^*A = A^* - \frac{A + A^*}{2} = \frac{A^* - A}{2} = i\,\frac{A^* - A}{2i} = i \operatorname{Im} A.$$

Утверждение доказано. □

Из теоремы 1 следует $A - A^\perp \in \mathcal{A}^{\mathrm{iso}}$.

Предложение 17. *Если элемент $A \in \mathcal{A}^{\mathrm{sem}}$ обратим, то $\operatorname{Re}(A^{-1}) = I$. В частности, если $A^{-1} \in \mathcal{A}^{\mathrm{sem}}$, то $A = I$.*

Доказательство. Элемент $2A - I$ является изометрией, см. теорему 1. Имеем соотношения

$$(2A - I)A^{-1} = 2I - A^{-1}, \quad (A^{-1})^* = (A^*)^{-1}, \quad (2A^* - I)(2A - I) = I,$$

$$\begin{aligned}(A^{-1})^* &= (A^*)^{-1}(2A^* - I)(2A - I)A^{-1} = (2I - (A^{-1})^*)(2I - A^{-1}) \\ &= 4I - 2(A^{-1})^* - 2A^{-1} + (A^{-1})^* A^{-1}.\end{aligned}$$

Следовательно, $(A^{-1})^* + A^{-1} = 2I$ и $\operatorname{Re}(A^{-1}) = I$. В частности, если $A^{-1} \in \mathcal{A}^{\mathrm{sem}}$, то $|A^{-1}| = I$, т. е. A^{-1} является обратимой изометрией; значит, $A^{-1} \in \mathcal{A}^{\mathrm{u}}$. Таким образом, $A = (A^{-1})^{-1} = (A^{-1})^* \in \mathcal{A}^{\mathrm{u}}$ и $A = I$ в силу следствия 7. □

Теорема 18. *Для $A, B \in \mathcal{A}^{\mathrm{sem}}$ имеем следующие эквивалентности*:

(i) $A + B \in \mathcal{A}^{\mathrm{sem}} \Leftrightarrow A^*B + B^*A = 0$;

(ii) $A - B \in \mathcal{A}^{\rm sem} \Leftrightarrow A^*B + B^*A = 2B^*B$;

(iii) $A - B \in \mathcal{A}^+ \Leftrightarrow \mathrm{S}(A) = \mathrm{S}(B)$ *и* $B^*B \le A^*A$.

Доказательство. Заметим, что

$$|X+Y|^2 + |X-Y|^2 = 2|X|^2 + 2|Y|^2 \ \text{ для всех } \ X, Y \in \mathcal{A}. \tag{5}$$

(i), $\Rightarrow$. Складывая почленно равенства $A + A^* = 2|A|^2$ и $B + B^* = |B|^2$, получаем $A + A^* + B + B^* = 2|A|^2 + 2|B|^2 = 2|A+B|^2$. Теперь из (5) имеем $|A+B|^2 = |A-B|^2$, т. е. $A^*B + B^*A = 0$.

(ii), $\Rightarrow$. Имеем

$$2|A-B|^2 = A^* - B^* + A - B = A^* + A - (B^* + B) = 2|A|^2 - 2|B|^2. \tag{6}$$

Из (5) с $X = A - B$ и $Y = B$ получаем $2|A-B|^2 + 2|B|^2 = |A|^2 + |A-2B|^2$. Теперь отсюда и из (6) имеем $|A|^2 = |A-2B|^2$, т. е. $A^*B + B^*A = 2B^*B$.

(iii), $\Rightarrow$. Имеем $A^* - B^* = (A-B)^* = A - B \in \mathcal{A}^+$, поэтому

$$2(A-B) = A + A^* - B - B^* = 2(A^*A - B^*B) \ge 0$$

и $B^*B \le A^*A$. Очевидно, что

$$\mathrm{S}(A) - \mathrm{S}(B) = \frac{A - A^*}{2} - \frac{B - B^*}{2} = \frac{1}{2}((A-B) - (A^* - B^*)) = \frac{1}{2}((A-B) - (A-B)^*) = 0.$$

(iii), $\Leftarrow$. Имеем

$$\begin{aligned} A - B &= \frac{A - B + (A-B)^*}{2} + \frac{A - B - (A-B)^*}{2} = \frac{A + A^* - (B + B^*)}{2} + \mathrm{S}(A) - \mathrm{S}(B) \\ &= A^*A - B^*B \ge 0. \end{aligned}$$

Теорема доказана. $\square$

Пример 19. Если $A \in \mathcal{A}^{\rm sem}$, то $A^\perp \in \mathcal{A}^{\rm sem}$ в силу предложения 16 и $A + A^\perp = I \in \mathcal{A}^{\rm sem}$. Предложение 16 дает

$$A^*A^\perp + A^{\perp *}A = \frac{A^* - A}{2} + A - A^*A = \frac{A^* + A}{2} - A^*A = 0,$$

т. е. импликация "(i), $\Rightarrow$" теоремы 18 выполнена.

Для $A, B \in \mathcal{A}^{\rm sem}$ пишем $A \le_1 B$, если $A + A^* = A^*B + B^*A$. Например, для 3×3

полуортогональных бистохастических матриц

$$A=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix},\quad B=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1&0&1\\1&1&0\\0&1&1\end{pmatrix}$$

имеем $A\leq_1 B$, $A\leq_1 B^*$. Очевидно, $A=AB=AB^*$ является проектором.

Предложение 20. *Пусть $A,B\in\mathcal{A}^{\mathrm{sem}}$. Тогда*

(i) $0\leq_1 A$, $A\leq_1 I$, $A\leq_1 A$;

(ii) $A\leq_1 B\Leftrightarrow B^{\perp}\leq_1 A^{\perp}$;

(iii) $A\leq_1 B^{\perp}\Leftrightarrow A^*B+B^*A=0$ *и при этом* $A+B\in\mathcal{A}^{\mathrm{sem}}$ *в силу теоремы* 18;

(iv) *если $A\leq_1 B$, $B\leq_1 A$, то $A=B$*;

(v) *если $A,B\in\mathcal{A}^{\mathrm{pr}}$, то $A\leq_1 B\Leftrightarrow A\leq B$.*

Доказательство. (iv). Из соотношений

$$A+A^*=A^*B+B^*A,\qquad B+B^*=B^*A+A^*B$$

получаем $A+A^*=B+B^*$. Поэтому

$$|A-B|^2=(A-B)^*(A-B)=A^*A+B^*B-A^*B-B^*A=\frac{A+A^*}{2}+\frac{A+A^*}{2}-A-A^*=0$$

и $|A-B|=0$. Следовательно, $\|A-B\|=\||A-B|\|=0$ и $A=B$.

(v), $\Rightarrow$. Имеем $2A=AB+BA\geq 0$, поэтому $AB=BA$ в силу [11, лемма 2]. Следовательно, $A=AB$ и $A\leq B$.

(v), $\Leftarrow$. Если $A\leq B$, то $A=AB=BA$ и $2A=AB+BA$, т. е. $A\leq_1 B$. Предложение доказано. □

Таким образом, отношение $\leq_1$ на $\mathcal{A}^{\mathrm{sem}}$ является антисимметричным и рефлексивным. Его сужение на $\mathcal{A}^{\mathrm{pr}}$ совпадает с обычным отношением частичного порядка $\leq$.

Теорема 21. *Пусть $A\in\mathcal{A}^{\mathrm{sem}}$ нормален. Тогда*

$$A\leq_1 A^*\ \Leftrightarrow\ A^*\leq_1 A\ \Leftrightarrow\ A+A^*=A^2+A^{*2}\ \Leftrightarrow\ A\in\mathcal{A}^{\mathrm{pr}}.$$

Доказательство. Если $A\in\mathcal{A}^{\mathrm{sem}}$ нормален, то $A^*\in\mathcal{A}^{\mathrm{sem}}$, см. теорему 9. Очевидно, $A\leq_1 A^*\ \Leftrightarrow\ A^*\leq_1 A\ \Leftrightarrow\ A+A^*=A^2+A^{*2}$. Положим $A=(U+I)/2$ – представление теорем 1, 9 с $U\in\mathcal{A}^{\mathrm{u}}$. Тогда равенство $A+A^*=A^2+A^{*2}$ перепишется в виде

$$\frac{1}{2}U^2+\frac{1}{2}U^{*2}=I.$$

Поскольку $U^2, U^{*2}, I \in \mathcal{A}^{\mathrm{u}}$, из леммы 5 имеем $U^2 = U^{*2} = I$. Умножив обе части равенства $U^2 = I$ слева на элемент U^*, получаем $U = U^*$. Следовательно, $U = 2P - I$ для некоторого $P \in \mathcal{A}^{\mathrm{pr}}$. Таким образом, $A = P \in \mathcal{A}^{\mathrm{pr}}$. □

В алгебре $\mathcal{B}(\mathcal{H})$, $\dim \mathcal{H} = +\infty$, существует гипонормальный оператор, квадрат которого не гипонормален [5, задача 209].

Теорема 22. *Пусть $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})^{\mathrm{sem}}$ и $P \in \mathcal{B}(\mathcal{H})^{\mathrm{pr}}$. Тогда*

(i) *A^2 гипонормален;*

(ii) *если $P\mathcal{H}$ – инвариантное подпространство оператора A, то $AP \in \mathcal{B}(\mathcal{H})^{\mathrm{sem}}$.*

Доказательство. (i). Поскольку

$$\begin{aligned} 4|A^2|^2 &= 4A^{2*}A^2 = 4A^{*2}A^2 = 4A^*(A^*A)A = 2A^*(A + A^*)A \\ &= 2(A^*A)A + 2A^*(A^*A) = (A + A^*)A + A^*(A + A^*) \\ &= A^2 + 2A^*A + A^{*2} = A^2 + A + A^* + A^{*2}, \end{aligned} \tag{7}$$

условие гипонормальности оператора A^2 перепишется в виде неравенства

$$A^2 + A + A^* + A^{*2} \geq 4A^2A^{*2}. \tag{8}$$

Умножив обе части неравенства (8) на 4 и подставив $2A = V + I$ с подходящей изометрией V (см. теорему 1), с учетом равенств $V^*V = I$ и $VV^* = P$ ($\in \mathcal{B}(\mathcal{H})^{\mathrm{pr}}$), получаем равносильное к (8) неравенство

$$5I \geq V^2V^{2*} + 2V^2V^* + 2VV^{*2} + 4VV^* - 2V - 2V^*,$$

вытекающее из соотношений

$$5I + 2V + 2V^* \geq 4I + P + 2V + 2V^* = (V + 2I)(V + 2I)^* \geq (V + 2I)P(V + 2I)^*.$$

(ii). Если $P \in \mathcal{B}(\mathcal{H})^{\mathrm{id}}$, то $P\mathcal{H}$ является инвариантным подпространством оператора $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ тогда и только тогда, когда $AP = PAP$ [12, гл. 0, теорема 0.1]. Для $P \in \mathcal{B}(\mathcal{H})^{\mathrm{pr}}$ имеем $PA^* = (AP)^* = (PAP)^* = PA^*P$. Отсюда и из равенства $AP = PAP$ получаем $PA^*AP = PA^* \cdot AP = PA^*P \cdot PAP = PA^*PAP$. Заменяя здесь оператор A^*A на $\operatorname{Re} A$, имеем

$$PAP + (PAP)^* = PAP + PA^*P = 2PA^*P \cdot PAP = 2(PAP)^*PAP,$$

т. е. $PAP = AP \in \mathcal{B}(\mathcal{H})^{\mathrm{sem}}$. Таким образом, сужение полуортогонального проектора на его инвариантное подпространство также является полуортогональным проектором. □

Теорема 23. *Если $\mathcal{A}$ – унитальная C^*-алгебра и $A, A^2 \in \mathcal{A}^{\mathrm{sem}}$, то $A \in \mathcal{A}^{\mathrm{pr}}$.*

Доказательство. Пусть $A = (U + I)/2$, $A^2 = (V + I)/2$ – представление теоремы 1 с $U, V \in \mathcal{A}^{\mathrm{iso}}$. Тогда

$$\Big(\frac{U+I}{2}\Big)^2 = \frac{V+I}{2},$$

поэтому $V = (U^2 + 2U - I)/2$. Равенство $V^*V = I$ перепишется в виде

$$\frac{1}{2}U^2 + \frac{1}{2}U^{*2} = I.$$

Поскольку U^2 – изометрия, элемент $U^{*2} = U^{2*}$ является коизометрией и из леммы 5 имеем $U^2 = U^{*2} = I$. Умножив обе части равенства $U^2 = I$ слева на элемент U^*, получаем $U = U^*$. Следовательно,

$$A^* = \Big(\frac{U+I}{2}\Big)^* = \frac{U+I}{2} = A$$

и $A \in \mathcal{A}^{\mathrm{pr}}$ в силу теоремы 1. □

Теорема 24. *Пусть $\mathcal{A}$ – унитальная C^*-алгебра. Если $A \in \mathcal{A}^{\mathrm{sem}}$ и $A = A^n$ для некоторого $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, то A является нормальным элементом, и $A \in \mathcal{A}^{\mathrm{pr}}$ при $n = 2$.*

Доказательство. Пусть $A = (U + I)/2$ – представление теоремы 1 с $U \in \mathcal{A}^{\mathrm{iso}}$. Покажем, что $U \in \mathcal{A}^{\mathrm{u}}$. Из равенства $A^n = A$ по формуле бинома Ньютона имеем

$$U^n + \binom{1}{n}U^{n-1} + \binom{2}{n}U^{n-2} + \cdots + \binom{1}{n}U + I = 2^{n-1}(U + I), \tag{9}$$

где $\binom{k}{n}$ – число сочетаний из n по k. Умножив обе части равенства (9) слева на элемент $U^{*n} = U^{n*}$, получаем

$$I + \binom{1}{n}U^* + \binom{2}{n}U^{*2} + \cdots + \binom{1}{n}(U^*)^{n-1} + U^{*n} = 2^{n-1}((U^*)^{n-1} + U^{*n}).$$

Переходя здесь к сопряженным элементам, с учетом равенства $X^{**} = X$, $X \in \mathcal{A}$, имеем

$$I + \binom{1}{n}U + \binom{2}{n}U^2 + \cdots + \binom{1}{n}U^{n-1} + U^n = 2^{n-1}(U^{n-1} + U^n).$$

Отсюда и из (9) вытекает равенство

$$U + I = U^{n-1} + U^n. \tag{10}$$

Если $n = 2$, то из (10) получаем $U^2 = I$; умножив обе части последнего равенства слева на элемент U^*, имеем $U = U^*$. Поэтому $A = (U + I)/2 = (U^* + I)/2 = A^*$ и $A \in \mathcal{A}^{\mathrm{pr}}$ в силу теоремы 1. Если $n > 2$, то умножив обе части равенства (10) слева на элемент UU^*, получаем

$$U + UU^* = U^{n-1} + U^n,$$

что вместе с (10) дает $U + I = U + UU^*$. Следовательно, $UU^* = I(= U^*U)$ и U является унитарным элементом; в частности, U нормален. Поскольку $A = (U + I)/2$, элемент A также нормален. □

Список литературы

[1] J. Gross, G. Trenkler, S.-O. Troschke, *On semi-orthogonality and a special class of matrices*, Linear Algebra Appl. **289** (1–3), 169–182 (1999).
URL: https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0024379597100027

[2] А.М. Бикчентаев, *Полуортогональные проекторы в гильбертовом пространстве*, в кн.: На рубеже веков. Научн.-исследов. ин-т матем. и механ. им. Н.Г. Чеботарева Казанск. гос. ун-та. 1998–2002 гг., с. 108–114, Изд-во Казан. матем. о-во, Казань, 2003.

[3] А.М. Бикчентаев, *Идеальные F-нормы на C^*-алгебрах.* II, Изв. вузов. Матем. (3), 90–96 (2019).
DOI: https://doi.org/10.26907/0021-3446-2019-3-90-95

[4] A.M. Bikchentaev, *Rearrangements of tripotents and differences of isometries in semifinite von Neumann algebras*, Lobachevskii J. Math. **40** (10), 1450–1454 (2019).
DOI: https://doi.org/10.1134/S1995080219100068

[5] P.R. Halmos, *A Hilbert space problem book*, Graduate Texts in Math., vol. **19**. Springer, New York, 1982.
DOI: https://doi.org/10.1007/978-1-4684-9330-6

[6] B. Blackadar, *Operator algebras, theory of C^*-algebras and von Neumann algebras*, Encyclopaedia of mathematical sciences **122**. Operator algebras and non-commutative geometry **3**. Springer-Verlag, Berlin, 2006.
DOI: https://doi.org/10.1007/3-540-28517-2

[7] Дж. Мерфи, *C^*-алгебры и теория операторов*, Факториал, М., 1997.

[8] M. Takesaki, *Theory of operator algebras.* I, Encyclopaedia of mathematical sciences **124**. Operator algebras and non-commutative geometry **5**. Springer-Verlag, Berlin, 2002.
URL: https://link.springer.com/book/9783540422488

[9] U. Haagerup, R.V. Kadison, G.K. Pedersen, *Means of unitary operators, revisited*, Math. Scand. **100** (2), 193–197 (2007).
DOI: https://doi.org/10.7146/math.scand.a-15021

[10] Р. Хорн, Ч. Джонсон, *Матричный анализ*, Мир, М., 1989.

[11] А.М. Бикчентаев, *Об операторно монотонных и операторно выпуклых функциях*, Изв. вузов. Матем. (5), 70–74 (2016).
URL: https://www.mathnet.ru/rus/ivm9113

[12] H. Radjavi, P. Rosenthal, *Invariant subspaces*, Second edition. Dover Publications, Inc., Mineola, NY, 2003.

Айрат Мидхатович Бикчентаев
Казанский (Приволжский) федеральный университет,
Научно-образовательный математический центр ПФО,
ул. Кремлевская, д. 18, г. Казань, 420008, Россия,
e-mail: Airat.Bikchentaev@kpfu.ru

Volume 3, Issue 2 UDC 517.983, 517.986
pp. 4–18 (2025) MSC 46L05, 47B20

Semi-orthogonal projections in unital C^*-algebras

A.M. Bikchentaev

Abstract. Let $\mathcal{A}^{\mathrm{sem}} = \{A \in \mathcal{A} : \operatorname{Re} A = A^*A\}$ be the set of all semi-orthogonal projections of the unital C^*-algebra $\mathcal{A}$, I be the identity of $\mathcal{A}$. The formula $U = 2A - I$ ($A \in \mathcal{A}^{\mathrm{sem}}$) defines a bijection between the set $\mathcal{A}^{\mathrm{sem}}$ and the set of all isometries from $\mathcal{A}$. For any natural number $n \geq 2$, there exists a non-commutative polynomial of degree n that yields a semi-orthogonal projection when substituted for an arbitrary set $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{A}^{\mathrm{sem}}$. Each element $A \in \mathcal{A}^{\mathrm{sem}}$ is hyponormal and lies in the unit ball of the C^*-algebra $\mathcal{A}$. If $A \in \mathcal{A}^{\mathrm{sem}}$, then A^2 is hyponormal. If $A, A^2 \in \mathcal{A}^{\mathrm{sem}}$, then A is a projection. If $A \in \mathcal{A}^{\mathrm{sem}}$ and $A = A^n$ for some $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, then A is a normal element, and A is a projection for $n = 2$.

Keywords: Hilbert space, linear operator, semi-orthogonal projection, isometry, C^*-algebra.

DOI: 10.26907/2949-3919.2025.2.4-18

References

[1] J. Gross, G. Trenkler, S.-O. Troschke, *On semi-orthogonality and a special class of matrices*, Linear Algebra Appl. **289** (1–3), 169–182 (1999).
URL: https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0024379597100027

[2] A.M. Bikchentaev, *Semi-orthogonal projectors in a Hilbert space*, in: At the turn of the 20th–21st centuries, 108–114, Kazanskoe Matematicheskoe Obshchestvo, Kazan', 2003 [in Russian].

[3] A.M. Bikchentaev, *Ideal F-norms on C^*-algebras.* II, Russian Math. (Iz. VUZ) **63** (3), 78–82 (2019).
DOI: https://doi.org/10.3103/S1066369X19030071

[4] A.M. Bikchentaev, *Rearrangements of tripotents and differences of isometries in semifinite von Neumann algebras*, Lobachevskii J. Math. **40** (10), 1450–1454 (2019).
DOI: https://doi.org/10.1134/S1995080219100068

[5] P.R. Halmos, *A Hilbert space problem book*, Graduate Texts in Math., vol. **19**. Springer, New York, 1982.
DOI: https://doi.org/10.1007/978-1-4684-9330-6

Acknowledgements. The work is performed under the development program of Volga Region Mathematical Center (agreement no. 075-02-2025-1725/1).

Received: 26 February 2025. Accepted: 02 July 2025. Published: 16 July 2025.

[6] B. Blackadar, *Operator algebras, theory of C^*-algebras and von Neumann algebras*, Encyclopaedia of mathematical sciences **122**. Operator algebras and non-commutative geometry **3**. Springer-Verlag, Berlin, 2006.
DOI: https://doi.org/10.1007/3-540-28517-2

[7] G.J. Murphy, *C^*-algebras and operator theory.* Academic Press, Inc., Boston, MA, 1990.

[8] M. Takesaki, *Theory of operator algebras.* I, Encyclopaedia of mathematical sciences **124**. Operator algebras and non-commutative geometry **5**. Springer-Verlag, Berlin, 2002.
URL: https://link.springer.com/book/9783540422488

[9] U. Haagerup, R.V. Kadison, G.K. Pedersen, *Means of unitary operators, revisited*, Math. Scand. **100** (2), 193–197 (2007).
DOI: https://doi.org/10.7146/math.scand.a-15021

[10] R.A. Horn, C.R. Johnson, *Matrix analysis.* Second edition. Cambridge University Press, Cambridge, 2013.
DOI: https://doi.org/10.1017/CBO9781139020411

[11] A.M. Bikchentaev, *On operator monotone and operator convex functions*, Russian Math. (Iz. VUZ) **60** (5), 61–65 (2016).
DOI: https://doi.org/10.3103/S1066369X16050054

[12] H. Radjavi, P. Rosenthal, *Invariant subspaces*, Second edition. Dover Publications, Inc., Mineola, NY, 2003.

Airat Midkhatovich Bikchentaev
Kazan Federal University,
Volga Region Mathematical Center,
18 Kremlyovskaya str., Kazan 420008, Russia,
e-mail: Airat.Bikchentaev@kpfu.ru

Том 3, Выпуск 2 УДК 510.57, 512.62
Стр. 19–31 (2025) MSC 03D45, 12E15

О негативности отделимых нумераций полей конечной характеристики

Н.Х. Касымов, Н.Р. Каримова, И.А. Ходжамуратова

Аннотация. Установлено, что эффективно невырожденная нумерация любого поля конечной характеристики является негативной.

Ключевые слова: отделимая нумерация поля, эффективно порожденная топология, негативность и позитивность, непрерывность.

DOI: 10.26907/2949-3919.2025.2.19-31

Введение

Следуя Ю.Л. Ершову [1] дадим определение нумерованной универсальной алгебры эффективной сигнатуры $\sigma = \langle =, f_0^{m_0}, f_1^{m_1}, \dots \rangle$ (где m_i – число аргументов функции, в которую интерпретируется функциональный символ $f_i^{m_i}$ и отображение $h : n \longmapsto m_n$ вычислимо).

Определение 1. Алгоритмическим представлением (или нумерацией) универсальной алгебры $\mathfrak{A} = \langle A; g_0, g_1, \dots \rangle$ сигнатуры σ называется всякое отображение $\nu : \omega \longrightarrow A$ множества натуральных чисел ω на основное множество A алгебры $\mathfrak{A}$, для которого выполнено следующее условие:

существует двухместная вычислимая функция G такая, что для любого $n \in \omega$, любых $y_1, \dots, y_{m_n}$ имеет место равенство

$$g_n(\nu y_1, \dots, \nu y_{m_n}) = \nu G(n, c^{m_n}(y_1, \dots, y_{m_n})),$$

где c^{m_n} – канторовская функция нумерации всех упорядоченных последовательностей натуральных чисел длины m_n, т. е. $c^2(x, y) = [(x+y)^2+3x+y]/2$, $c^3(x_1, x_2, x_3) = c^2(c^2(x_1, x_2), x_3)$ и $c^{n+1}(x_1, \dots, x_{n+1}) = c^n(c^2(x_1, x_2), \dots, x_{n+1})$.

Другими словами, по ν-номерам элементов из A и номеру операции g_n можно эффективно найти некоторый ν-номер результата применения этой операции к данным элементам.

Благодарности. Работа выполнена в рамках реализации Программы развития Научно-образовательного центра Приволжского федерального округа (соглашение № 075-02-2025-1725/1).

Поступила: 18.12.2024. Принята: 02.07.2025. Опубликована: 16.07.2025.

Если $\nu : \omega \longrightarrow A$ – нумерация алгебры $\mathfrak{A}$, то пара $(\mathfrak{A}, \nu)$ называется нумерованной алгеброй. Отметим, что всякая не более чем счетная алгебра эффективной сигнатуры имеет нумерацию (см. [1]).

Ядром алгоритмического представления ν нумерованной алгебры $(\mathfrak{A}, \nu)$ будем называть эквивалентность $\{\langle x, y\rangle \mid \nu x = \nu y\}$. Если ν – представление, то его ядро будем обозначать через $\ker(\nu)$. Нумерация называется вычислимой (позитивной, негативной), если ее ядро вычислимо (вычислимо перечислимо, коперечислимо).

Для фиксированной системы классической является проблема изучения различных ее алгоритмических представлений и соотношений между ними (см. работу [2] С.С. Гончарова и Ю.Л. Ершова), в частности, проблема существования хороших представлений (в первую очередь – вычислимых) и их числа (в том числе единственности, с точностью до вычислимого изоморфизма).

С другой стороны, в ряде задач разумно фиксировать ядро представления и изучать общие свойства систем, обладающих представлениями с данным ядром. Этот подход представляется целесообразным с точки зрения теории алгоритмических представлений систем в целом ряде задач, в том числе в теоретической информатике (см. обзоры [3, 4]).

Близким к данному направлению является исследование алгоритмических свойств эквивалентностей на множестве натуральных чисел, которому в настоящее время уделяется большое внимание. Библиографию по этим вопросам можно найти в списках литературы к работам [5, 6]. К этой же проблематике тесно примыкают вопросы строения универсальных алгебр, представимых над эквивалентностями.

В сложных самоорганизующихся системах, по-видимому, важное значение имеет проблема распознавания. Если система задана своим алгоритмическим представлением, то с математической точки зрения это означает, что любая пара различных элементов отделяется алгоритмически определяемыми окрестностями. Важнейшими типами отделимых нумераций алгебр являются эффективно отделимые, т. е. такие, для которых существуют вычислимые (в смысле [7]) семейства отделяющих вычислимо перечислимых множеств. Основания теории отделимо нумерованных множеств и связи между отделимостью и эффективной отделимостью были введены, развиты и исследованы Ю.Л. Ершовым (см.[7]).

Находясь в рамках парадигмы о существовании у нумерованной алгебры эффективной системы алгоритмически порождаемых окрестностей, достаточных для распознавания отделимости любой пары ее элементов, нужно отметить, что именно исследовавшееся Ю.Л. Ершовым в [7] наиболее общее понятие отделимой нумерации в случае нумераций универсальных алгебр можно трактовать как одно из математических уточнений понятия сложной развивающейся системы, интенсионально заданной семейством представляющих вычислимых функций вместе с ядрами гомоморфизмов (нумераций) и допускающей эффективное распознавание различия составляющих ее элементов путем отделения их подходящими алгоритмически определяемыми окрестностями.

Слово *эквивалентность* означает отношение эквивалентности на множестве натуральных чисел ω. Если η – эквивалентность, то множество $\alpha \subseteq \omega$ называется *η-замкнутым*, если α является объединением подходящих η-классов (т. е. $x \in \alpha \wedge x = y \pmod{\eta} \Rightarrow y \in \alpha$).

Эквивалентность η называется вычислимо отделимой (отделимой), если для любых $x \neq y \pmod{\eta}$ существует вычислимое η-замкнутое множество, содержащее x и не содержащее y (существует такое вычислимо перечислимое η-замкнутое множество α, что $x \in \alpha \wedge y \notin \alpha$, либо $x \notin \alpha \wedge y \in \alpha$).

Если η – эквивалентность на ω, то семейство η-замкнутых вычислимых (вычислимо перечислимых) множеств задает базу вычислимой (перечислимой) топологии $\tau(\eta)_C$ (соответственно $\tau(\eta)_{CE}$) на фактор-множестве ω/η.

Пусть (N, ν) – нумерованное множество. Подмножество N_0 множества N называется *ν-вычислимым* (*ν-перечислимым, ν-коперечислимым*), если вычислимо (вычислимо перечислимо, коперечислимо) множество $\nu^{-1}N_0$. Если из контекста будет ясно, какая нумерация множества имеется в виду, то его подмножества будем называть просто *вычислимыми* (*перечислимыми, коперечислимыми*) без приставки ν. Нумерация ν называется эффективно невырожденной, если топологическое пространство, порожденное вычислимо перечислимыми подмножествами, нетривиально. Это равносильно тому, что для нумерованного множества (N, ν) существует его собственное подмножество N_0, для которого $\nu^{-1}N_0$ вычислимо перечислимо.

С каждой нумерацией ν однозначно связано ее ядро (нумерационная эквивалентность), т. е. множество $\ker(\nu) = \{\langle x, y\rangle \mid \nu x = \nu y\}$ и говоря о тех или иных свойствах нумерации часто будем подразумевать наличие этих свойств для ядра. Нумерация называется вычислимо отделимой (отделимой), если вычислимо отделимо (отделимо) ее ядро.

Нумерация ν называется эффективно отделимой, если таково ее ядро $\ker(\nu)$, т. е. существует такое вычислимое семейство $\mathfrak{S}$ вычислимо перечислимых $\ker(\nu)$-замкнутых множеств, что для любых $x, y \in \omega$ если $\nu x \neq \nu y$, то найдется $S \in \mathfrak{S}$ такое, что $\nu x \in \nu S \wedge \nu y \notin \nu S$, либо $\nu x \notin \nu S \wedge \nu y \in \nu S$ ([7]).

Таким образом, если отделимость обеспечивает T_0-отделимость пространства, порожденного ν-перечислимыми подмножествами, то эффективная отделимость гарантирует существование вычислимой нумерации для подходящего семейства отделяющих множеств.

Если (A, μ), (B, ν) – две нумерованные алгебры, то гомоморфизм $\varphi : A \to B$ называется морфизмом, если он эффективен на номерах, т. е. существует такая вычислимая функция f, что коммутативна диаграмма $\varphi\mu = \nu f$, что совершенно естественно с интенсиональной точки зрения. Поэтому все рассматриваемые нами гомоморфизмы являются морфизмами.

Важнейшими в рамках структурной теории вычислимо отделимых (отделимых) алгоритмических представлений универсальных алгебр являются негативные и эффективно отделимые алгебры, так как имеет место

Теорема 2. *Алгоритмическое представление универсальной алгебры вычислимо отделимо (отделимо) тогда и только тогда, когда она аппроксимируется негативными алгебрами (эффективно отделимыми алгебрами).*

Доказательства утверждений теоремы 2 представлены в [3, 8].

Из этой теоремы непосредственно вытекают следующие факты:

Следствие 3. *Всякая вычислимо отделимая нумерация подпрямо неразложимой универсальной алгебры является негативной.*

Следствие 4. *Всякая вычислимо отделимая нумерация универсальной алгебры с артиновой решеткой конгруэнций является негативной.*

Следствие 5. *Всякая отделимая нумерация подпрямо неразложимой универсальной алгебры является эффективно отделимой.*

Следствие 6. *Всякая отделимая нумерация универсальной алгебры с артиновой решеткой конгруэнций является эффективно отделимой.*

В частности, эти следствия имеют место для конгруэнц-простых универсальных алгебр, в том числе для полей. При этом, для вычислимо отделимых нумераций подпрямо неразложимых универсальных алгебр наличие нетривиального вычислимого подмножества обеспечивает негативность этой нумерации (см. [3]), а для отделимых нумераций, аналогично, наличие нетривиального вычислимо перечислимого подмножества обеспечивает эффективную отделимость нумерации (см. [8]). Важно отметить существование подпрямо неразложимых алгебр с артиновыми решетками конгруэнций, которые обладают эффективно отделимыми, но не негативными нумерациями (см. [9]). Простейшей алгеброй такого рода является унарная алгебра предшествования P ($P = \langle \omega; p \rangle$, где $p(n+1) = n$ и $p(0) = 0$), которая обладает отделимой (а значит и эффективно отделимой), но не негативной (и, очевидно, тем более не позитивной) нумерацией.

В рамках этого направления отметим следующий принципиальный открытый вопрос:

существует ли отделимая конгруэнц-простая универсальная алгебра, которая лежит в классе $E \setminus (\Sigma^0_1 \cup \Pi^0_1)$ (где E – класс эффективно отделимых эквивалентностей)?

Фундаментальность понятия поля в математике не требует обоснования, в связи с чем актуальным представляется изучение естественных алгоритмических представлений полей, в том числе их эффективно отделимых нумераций и нахождение условий, при которых эффективно отделимые нумерации являются негативными. Отметим, что негативные нумерации универсальных алгебр являются важнейшими среди среди равномерно вычислимо отделимых нумераций, которые присутствуют в любой m-степени (см. [10]). В настоящей работе мы показываем, что всякая эффективно невырожденная нумерация любого поля конечной характеристики является негативной.

Далее, если не оговорено противное, под топологическим пространством на фактормножестве ω/η по эквивалентности η будем подразумевать перечислимо порожденное пространство $\tau(\eta)_{CE}$. Случай $\tau(\eta)_C$-пространства, порожденного η-замкнутыми вычислимыми подмножествами будет оговариваться отдельно. Очевидно, что топология $\tau(\eta)_{CE}$ не слабее топологии $\tau(\eta)_C$, так как вычислимость есть частный случай вычислимой перечислимости.

1. Топологические пространства над вычислимо отделимыми эквивалентностями

Сформулируем самые сильные свойства отделимости для вычислимо отделимых нумераций (см. [11]):

Предложение 7. *Для произвольной эквивалентности η на ω следующие условия равносильны*:

1) *η является вычислимо отделимой эквивалентностью*;
2) *$\tau(\eta)_C$-пространство совершенно нормально и вполне несвязно.*

Прежде всего отметим следующий важный факт, касающийся вычислимо отделимо нумерованных универсальных алгебр.

Предложение 8. *Операции любой нумерованной алгебры непрерывны в вычислимо отделимо порожденном пространстве.*

Доказательство. Пусть $(\omega/\eta;\Im)$ – произвольная η-алгебра (т. е. алгебра, представимая над η). Заметим, что мы не предполагаем вычислимости семейства $\Im$ вычислимых функций, для которых η является конгруэнцией. Если f – вычислимая функция одного переменного, то утверждение предложения очевидно, так как прообраз вычислимого множества является таковым же. Допустим, что $f \in \Im$ и число аргументов n операции f не меньше двух. Зафиксируем набор $\overline{x} = \langle x_1,\dots,x_n\rangle$. Нужно показать, что для любого η-замкнутого вычислимого множества Y, содержащего число $f(x_1,\dots,x_n)$, существуют такие η-замкнутые вычислимые множества $X_1 \ni x_1,\dots,X_n \ni x_n$, что $f(X_1,\dots,X_n) \subseteq Y$. Возьмем полный f-прообраз X множества Y, т. е. $X = \{\overline{u} \mid f(\overline{u}) \in Y\}$. Очевидно, что X – непустое вычислимое множество кортежей длины n, если вычислимо множество Y. Зафиксируем любую геделевскую нумерацию всех наборов из ω^n.

Будем строить множества $X_1,\dots,X_n$ и $Z \subseteq X$ по шагам:

Шаг 0. $X_1^0 = \{x_1\},\dots,X_n^0 = \{x_n\}$ и $Z^0 = \varnothing$.

Шаг $s+1$. Пусть $\overline{z} = \langle z_1,\dots,z_n\rangle$ – первый кортеж из X, не принадлежащий множеству $X_1^s \times \dots \times X_n^s \cup Z^s$. Если $(X_1^s \cup \{z_1\}) \times \dots \times (X_n^s \cup \{z_n\}) \subseteq X$, то полагаем $X_1^{s+1} = X_1^s \cup \{z_1\},\dots,X_n^{s+1} = X_n^s \cup \{z_n\}$ и $Z^{s+1} = Z^s$ (при этом, может оказаться, что $X_i^{s+1} = X_i^s \cup \{z_i\}$ для некоторых $1 \leqslant i \leqslant n$), в противном случае $X_1^{s+1} = X_1^s,\dots,X_n^{s+1} = X_n^s$ и $Z^{s+1} = Z^s \cup \{\overline{z}\}$. Конец шага $s+1$.

Теперь определим $X_k = \bigcup_{s\in\omega} X_k^s, 1 \leqslant k \leqslant n$ и $Z = \bigcup_{s\in\omega} Z^s$.

По построению, вычислимое множество X распадается на две перечислимые дизъюнктные части – $X_1 \times \dots \times X_n$ и Z, откуда следует вычислимость прямого произведения. Заметим, что оба эти множества η-замкнуты, при этом, если какой-то набор $\langle z_1,\dots,z_n\rangle$

на некотором шаге распределяется по X_k, $1 \leqslant k \leqslant n$ (т. е. $z_1 \in X_1, \ldots, z_n \in X_n$), то все наборы, η-эквивалентные этому набору, появляющиеся на более поздних шагах, распределяются таким же образом. Корректность конструкции легко показать индукцией по шагам построения. $\square$

Важно отметить, что предъявленное выше доказательство предложения 7 не проходит для вычислимо перечислимо порожденных топологий, в связи с чем возникает открытый в настоящее время вопрос: *можно ли в формулировке предложения 7 заменить вычислимо отделимо порожденные пространства на отделимо порожденные пространства?*

Подчеркнем, что эффективная отделимость эквивалентности означает, что она лежит в классе Π^0_2 арифметической иерархии, хотя не имеет в ней четкой "координатизации", так как существуют как эффективно отделимые эквивалентности вне класса Δ^0_2, так и Δ^0_2-эквивалентности, не являющиеся эффективно отделимыми, однако как Σ^0_1-эквивалентности, так и Π^0_1-эквивалентности лежат в классе эффективно отделимых эквивалентностей (см. [7]).

2. Эффективно невырожденные представления полей

Исходя из вышесказанного отображение $\nu : \omega \longrightarrow F$ на основное множество не более чем счетного поля $\langle F; +, \bullet, \rangle$ называется алгоритмическим представлением этого поля, если существуют две такие вычислимые функции f, g, что $\nu x + \nu y = \nu f(x, y)$ и $\nu x \bullet \nu y = \nu g(x, y)$ для всех $x, y \in \omega$.

Если η – эквивалентность на ω, то поле F называется представимым над η (или η-полем), если существует вычислимая алгебра кольцевой сигнатуры $R = \langle \omega; +, \bullet \rangle$ с вычислимыми операциями $+, \bullet$, для которых η является конгруэнцией (т. е. имеют место следующие импликации: $x_0 = y_0 \pmod{\eta} \wedge x_1 = y_1 \pmod{\eta} \Rightarrow x_0 + x_1 = y_0 + y_1 \pmod{\eta}$ и $x_0 = y_0 \pmod{\eta} \wedge x_1 = y_1 \pmod{\eta} \Rightarrow x_0 \bullet x_1 = y_0 \bullet y_1 \pmod{\eta}$) такая, что F изоморфно фактор-алгебре $\langle \omega/\eta; +, \bullet \rangle$ вычислимой алгебры $R = \langle \omega; +, \bullet \rangle$ по конгруэнции η.

Заметим, что алгебра R может и не быть кольцом. В частности, в R могут не выполняться законы ассоциативности и коммутативности. Важно лишь то, что существует гомоморфизм из R на F, являющийся морфизмом, который и является алгоритмическим представлением ν, где $\nu(x) = \{x\}/\eta$ – естественный проектирующий гомоморфизм.

Определение 9. Алгоритмическое представление ν универсальной алгебры A называется эффективно невырожденным, если существует нетривиальное ν-перечислимое подмножество $A_0 \subseteq A$.

Напомним, что унарная термальная операция с фиксированными элементами алгебры в качестве параметров называется трансляцией.

Определение 10. Универсальная алгебра называется трансляционно полной, если всякая пара различных ее элементов переводится в любую другую пару различных элементов подходящей трансляцией.

Заметим, что любая трансляционно полная универсальная алгебра является конгруэнц-простой. Обратное неверно.

Определение 11. Универсальная алгебра называется трансляционно предполной, если существует такая пара ее различных элементов, в которую переводится любая пара различных элементов подходящей трансляцией.

Очевидно, что всякая трансляционно предполная универсальная алгебра подпрямо неразложима. Обратное неверно.

Предложение 12. *Всякое T_2-отделимое представление трансляционно предполной алгебры является негативным.*

Доказательство. Пусть (A,ν) – T_2-отделимо нумерованная трансляционно предполная алгебра и пара различных элементов $\langle a,b\rangle$ этой алгебры трансляционно достижима из любой пары различных элементов. Тогда эта пара содержится и в любой ее ненулевой конгруэнции (т. е. A подпрямо неразложима). Зафиксируем ν-номера этих элементов, скажем $\nu m = a, \nu n = b$. По условию существуют такие $\ker(\nu)$-замкнутые перечислимые непересекающиеся множества α и β, что $m \in \alpha$ и $n \in \beta$.

Через T_ν обозначим перечислимое множество всех трансляций алгебры A, заданных соответствующими вычислимыми представлениями операций этой алгебры в нумерации ν. Тогда $x \neq y \ \Leftrightarrow \ \exists t \in T_\nu(t(x) \in \alpha \wedge t(y) \in \beta)$. □

В [9] показано, что имеет место

Предложение 13. *Существует трансляционно предполная алгебра, обладающая таким T_1-отделимым нехаусдорфовым эффективно отделимым алгоритмическим представлением ν, что операции этой алгебры непрерывны в перечислимой $\tau(\ker(\nu))_{CE}$-топологии.*

Теорема 14. *Всякое тело является трансляционно полным.*

Доказательство. Пусть даны два произвольных различных элемента a, b тела F. Зафиксируем произвольную пару различных элементов c и d. Покажем, что существует такая трансляция $\lambda x[t(x)]$ (символ λ служит для стандартного λ-обозначения) тела F, которая переводит элемент a в c, а элемент b в d. Для этого определим следующее множество трансляций $T(a)$, имеющих очень простой вид линейных многочленов: $T(a) = \{\lambda x[f(x-a)+c] \mid f \in F\}$. Очевидно, что всякая трансляция $\lambda x[t(x)]$ из $T(a)$ переводит элемент a в c. В то же время, для любого $b \neq a$ найдется единственная трансляция $\lambda x[f_0(x-a)+c] \in T(a)$, которая переводит элемент b в d. Ясно, что этой трансляцией будет $\lambda x[f_0(x-a)+c]$ при $f_0 = (d-c)(b-a)^{-1}$. □

Следствие 15. *Всякое поле является трансляционно полным.*

3. Эффективно отделимые нумерации полей в кольцевой сигнатуре с аддитивным обращением

В следующем утверждении мы рассматриваем поле в сигнатуре $\langle +, \bullet, - \rangle$, где "$+, \bullet$" – операции сложения и умножения соответственно, а "$-$" – одноместная операция взятия аддитивно обратного элемента.

Теорема 16. *Всякое эффективно невырожденное алгоритмическое представление любого тела в кольцевой сигнатуре с аддитивным обращением является негативным.*

Доказательство. Пусть $\langle F; +, \bullet, - \rangle$ – тело, ν – его эффективно невырожденная нумерация и $\oplus, \otimes, \ominus$ – вычислимые операции представляющие сложение, умножение и аддитивное обращение соответственно в нумерации ν. По условию существует нетривиальное ν-перечислимое подмножество $F_0 \subset F$. Положим $\alpha = \nu^{-1}F_0$. Зафиксируем элементы тела $c \in \nu(\omega \setminus \alpha)$ и $d \in \nu\alpha$.

Пусть теперь даны два произвольных различных элемента a, b тела F. По теореме 14 существует такая трансляция t_b из $T(a) = \{\lambda x[f \bullet (x + (-a)) + c] \mid f \in F\}$, которая переводит элемент a в c при любом $f \in F$ и $t_b(b) = d$ при $f = (d + (-c)) \bullet (b + (-a))^{-1}$. Таким образом, для двух элементов a, b, заданных своими ν-номерами m, n соответственно в эффективно невырожденном представлении ν тела F с фиксированной перечислимой ν-окрестностью F_0 элемента d, не содержащей c, будем вычислять ν-номера для всех трансляций вида $\nu(k) \bullet (\nu(n) + (-\nu(m))) + \nu(l)$, где l – некоторый фиксированный ν-номер элемента c, пытаясь обнаружить их во множестве α, заставляя k пробегать множество всех ν-номеров элементов тела F. Если действительно $\nu m \neq \nu n$, то этот факт гарантированно подтвердится через конечное число шагов перечислением в α числа $k_0 \otimes (n \oplus (\ominus m)) \oplus l$, где k_0 – некоторый ν-номер элемента $(d + (-c)) \bullet (b + (-a))^{-1}$. Поэтому, для указанной выше трансляции t_b имеет место $t_b(a) = c \notin \nu\alpha$ при всех νk_0 и $t_b(b) = d \in \nu\alpha$ для $\nu k_0 = (d + (-c)) \bullet (b + (-a))^{-1}$, т. е. нумерация ν негативна. Формально,

$$\nu m \neq \nu n \iff \exists k\, [k \otimes (n \oplus (\ominus m)) \oplus l \in \alpha]. \qquad \square$$

Следствие 17. *Всякое эффективно невырожденное представление любого поля в сигнатуре с операцией аддитивного обращения является негативным.*

Следствие 18. *Операции любого поля в сигнатуре с аддитивным обращением непрерывны относительно всякой эффективно невырожденной топологии над его алгоритмическим представлением.*

Отметим, что максимальное различие в топологиях $\tau(\eta)_C$ и $\tau(\eta)_{CE}$ наблюдается, например, для совершенных эквивалентностей (т. е. позитивных, не обладающих нетривиальными замкнутыми относительно этой эквивалентности вычислимыми подмножествами, [7]). При этом $\tau(\eta)_C$-пространство тривиально, а $\tau(\eta)_{CE}$ – дискретно.

Для негативных эквивалентностей ситуация диаметрально противоположная, как показывает

Предложение 19 ([12]). *Если ν – негативная нумерация, то топологии $\tau(\eta)_C$ и $\tau(\eta)_{CE}$ совпадают.*

4. Эффективно отделимые нумерации полей конечной характеристики в кольцевой сигнатуре

Теорема 20. *Всякая эффективно невырожденная нумерация любого тела конечной характеристики является негативной.*

Доказательство. Идея основана на методе из теоремы 16, однако конечность характеристики позволяет обойтись без апеллирования к функции аддитивного обращения.

Пусть $\langle F; +, \bullet\rangle$ – тело конечной характеристики p, ν – его эффективно невырожденная нумерация и $\oplus, \otimes$ – вычислимые операции представляющие сложения и умножения соответственно в нумерации ν. Выше отмечалось, что всякая эффективно невырожденная нумерация любой конгруэнц-простой универсальной алгебры является эффективно отделимой (см. [8]). Поэтому существует нетривиальное ν-перечислимое подмножество $F_0 \subset F$. Пусть $\alpha = \nu^{-1}F_0$, т. е. α вычислимо перечислимо. Зафиксируем элементы $c \notin \nu\alpha$ и $d \in \nu\alpha$. Пусть теперь даны два произвольных различных элемента a, b тела F. Рассмотрим множество трансляций $T(a) = \{\lambda x[f \bullet ((p-1)a + x) + c] \mid f \in F\}$ тела F, каждая из которых переводит элемент a в c при любом $f \in F$ и $t(b) = d$ при $b \neq a$ для некоторого элемента $f \in F$. При этом, если $b \neq a$, то существует единственная трансляция $t_b \in T(a)$, которая переводит элемент b в элемент d. Таковой, как легко проверить, будет трансляция $\lambda x[f_0((p-1)a + x)]$ при $f_0 = (d-c) \bullet ((p-1)a + b)^{-1}$.

Заметим, что мы используем лишь факт существования элемента $d-c$ и среди вычислимых трансляций, представляющих трансляции поля F в нумерации ν, нет трансляций, в записи которых присутствует вычислимая функция, представляющая аддитивно обратную для поля F (вообще говоря, среди функций, представляющих на натуральных числах аддитивно обратную операцию поля, может и не быть вычислимых).

Пусть $\nu(l) = c$. Если $b \neq a$, то элемент $(p-1)a + b$ отличен от нулевого элемента поля F, а значит для него есть мультипликативно обратный элемент. В этом легко убедиться, так как из $(p-1)a + b = 0$ необходимо следует, что $b = a$ и потому для любых различных a, b элемент $(p-1)a + b$ является мультипликативно обратимым. Таким образом, для двух элементов a, b, заданных своими ν-номерами m, n соответственно в эффективно невырожденном представлении ν тела F с фиксированной перечислимой ν-окрестностью F_0 элемента d, не содержащей c, будем вычислять ν-номера для всех трансляций вида $\nu(k) \bullet ((p-1)\nu(m) + \nu(n)) + \nu(l)$, пытаясь обнаружить результат в множестве α, заставляя k пробегать множество всех ν-номеров элементов тела F. Если действительно $\nu m \neq \nu n$, то этот факт гарантированно подтвердится через конечное число шагов перечислением в α числа $k_0 \otimes ((p-1)m \oplus n) \oplus l$, где k_0 – некоторый ν-номер элемента $d \bullet ((p-1)a+b)^{-1}$. Поэтому, для указанной выше трансляции $t_b \in T(a)$ имеет место $t_b(a) = c \notin \nu\alpha$ при всех $k_0 \in \omega$ и $t_b(b) = d \in \nu\alpha$ для $\nu k_0 = (d-c) \bullet ((p-1)a+b)^{-1}$, что и означает негативность ν, так как

$$\nu m \neq \nu n \iff \exists k\, [k \otimes ((p-1)m \oplus n) \oplus l \in \alpha]. \qquad \square$$

Следствие 21. *Нумерация поля конечной характеристики негативна тогда и только тогда, когда она эффективно невырожденная.*

В связи с теоремой 20 и следствием 21 возникает принципиальный вопрос:

всякая ли эффективно невырожденная нумерация любого тела (*произвольной характеристики*) *является негативной* (*в кольцевой сигнатуре без аддитивного обращения*)*?*

Список литературы

[1] Ю.Л. Ершов, *Проблемы разрешимости и конструктивные модели*, Наука, М., 1980.

[2] С.С. Гончаров, Ю.Л. Ершов, *Конструктивные модели*, Научная книга, Новосибирск, 1999.

[3] Н.Х. Касымов, *Рекурсивно отделимые нумерованные алгебры*, УМН **51** (3), 145–176 (1996).
DOI: https://doi.org/10.4213/rm971

[4] Н.Х. Касымов, Р.Н. Дадажанов, Ф.Н. Ибрагимов, *Отделимые алгоритмические представления классических систем и их приложения*, СМФН **67** (4), 707–754 (2021).
URL: https://doi.org/10.22363/2413-3639-2021-67-4-707-754

[5] U. Andrews, S. Lempp, J.S. Miller, K.M. Ng, L.S. Mauro, A. Sorbi, *Universal computably enumerable equivalence relations*, J. Symb. Logic **79** (1), 60–88 (2014).
DOI: http://doi.org/10.1017/jsl.2013.8

[6] U. Andrews, D.F. Belin, L. San Mauro, *On the structure of computable reducibility on equivalence relations of natural numbers*, J. Symb. Logic **88** (3), 1038–1063 (2023).
DOI: https://doi.org/10.1017/jsl.2022.28

[7] Ю.Л. Ершов, *Теория нумераций*, Наука, М., 1977.

[8] Н.Х. Касымов, *О гомоморфизмах на эффективно отделимые алгебры*, Сиб. матем. журн. **57** (1), 47–66 (2016).
DOI: https://doi.org/10.17377/smzh.2016.57.105

[9] Н.Х. Касымов, А.С. Морозов, И.А. Ходжамуратова, *О T_1-отделимых нумерациях подпрямо неразложимых алгебр*, Алгебра и логика **60** (4), 400–424 (2021).
DOI: https://doi.org/10.33048/alglog.2021.60.402

[10] Н.Х. Касымов, *Нумерованные алгебры с равномерно рекурсивно отделимыми классами*, Сиб. матем. журн. **34** (5), 85–102 (1993).

URL: https://www.mathnet.ru/rus/smj836

[11] Н.Х. Касымов, *Аксиомы отделимости и разбиения натурального ряда*, Сиб. матем. журн. **34** (3), 81–85 (1993).
URL: https://www.mathnet.ru/rus/smj1654

[12] Н.Х. Касымов, Ф.Н. Ибрагимов, *Отделимые нумерации тел и эффективная вложимость в них колец*, Сиб. матем. журн. **60** (1), 82–94 (2019).
DOI: https://doi.org/10.33048/smzh.2019.60.107

Надимулла Хабибуллаевич Касымов
Национальный университет Узбекистана им. Мирзо Улугбека,
ул. Университетская, д. 4, г. Ташкент, 100174, Республика Узбекистан,
e-mail: nadim59@mail.ru

Нодира Рузимат кизи Каримова
Национальный университет Узбекистана им. Мирзо Улугбека,
ул. Университетская, д. 4, г. Ташкент, 100174, Республика Узбекистан,
E-mail: nodirakarimova@bk.ru

Индира Азатовна Ходжамуратова
Ташкентский международный университет финансового управления и технологий,
ул. Малая Кольцевая, д. 6А, г. Ташкент, 100121, Република Узбекистан,
E-mail: indiraazatovna@mail.ru

Volume 3, Issue 2
pp. 19–31 (2025)

UDC 510.57, 512.62
MSC 03D45, 12E15

Negativity of effectively separable numberings of fields the finite characteristic

N.Kh. Kasymov, N.R. Karimova, I.A. Khodzhamuratova

Abstract. We establishe that the effectively non-degenerate numbering of any field of the finite characteristic is negative.

Keywords: separable numbered of field, effectively generated topology, negativity and positivity, continuity.

DOI: 10.26907/2949-3919.2025.2.19-31

References

[1] Yu.L. Ershov, *Decidability problems and constructive models*, Nauka, M., 1980 [in Russian].

[2] S.S. Goncharov, Yu.L. Ershov, *Constructive models*, Siberian School of Algebra and Logic. Consultants Bureau, New York, 2000.

[3] N.Kh. Kasymov, *Recursively separable enumerated algebras*, Russian Math. Surveys **51** (3), 509–538 (1996).
DOI: https://doi.org/10.1070/RM1996v051n03ABEH002913

[4] N.Kh. Kasymov, R.N. Dadazhanov, F.N. Ibragimov, *Separable algorithmic representations of classical systems and their applications*, J. Math. Sci. **278** (3), 476–519 (2024).
DOI: https://doi.org/10.1007/s10958-024-06934-3

[5] U. Andrews, S. Lempp, J.S. Miller, K.M. Ng, L.S. Mauro, A. Sorbi, *Universal computably enumerable equivalence relations*, J. Symb. Logic **79** (1), 60–88 (2014).
DOI: http://doi.org/10.1017/jsl.2013.8

[6] U. Andrews, D.F. Belin, L. San Mauro, *On the structure of computable reducibility on equivalence relations of natural numbers*, J. Symb. Logic **88** (3), 1038–1063 (2023).
DOI: https://doi.org/10.1017/jsl.2022.28

[7] Yu.L. Ershov, *Theory of numberings*, Nauka, M., 1977 [in Russian].

[8] N.Kh. Kasymov, *Homomorphisms onto effectively separable algebras*, Siberian Math. J. **57** (1), 36–50 (2016).
DOI: https://doi.org/10.1134/S0037446616010055

Acknowledgements. The work is performed under the development program of Volga Region Mathematical Center (agreement no. 075-02-2025-1725/1).

Received: 18 December 2024. Accepted: 02 July 2025. Published: 16 July 2025.

[9] N.Kh. Kasymov, A.S. Morozov, I.A. Khodzhamuratova, *T_1-separable numberings of subdirectly indecomposable algebras*, Algebra and Logic **60** (4), 263–278 (2021).
URL: https://doi.org/10.1007/s10469-021-09651-x

[10] N.Kh. Kasymov, *Enumerated algebras with uniformly recursive-separable classes*, Siberian Math. J. **34** (5), 869–882 (1993).
DOI: https://doi.org/10.1007/BF00971403

[11] N.Kh. Kasymov, *Separation axioms and partitions of the set of natural numbers*, Siberian Math. J. **34** (3), 468–471 (1993).
DOI: https://doi.org/10.1007/BF00971221

[12] N.Kh. Kasymov, F.N. Ibragimov, *Separable enumerations of division rings and effective embeddability of rings therein*, Siberian Math. J. **60** (1), 62–70 (2019).
DOI: https://doi.org/10.1134/S0037446619010075

Nadimulla Khabibullaevich Kasymov
National University of Uzbekistan,
4 Universitetskaya str., Tashkent 100174, Republic of Uzbekistan,
e-mail: nadim59@mail.ru

Nodira Ruzimat kizi Karimova
National Universitet of Uzbekistan,
4 Universitetskaya str., Tashkent 100174, Republic of Uzbekistan,
E-mail: nodirakarimova@bk.ru

Indira Azatovna Khodzhamuratova
Tashkent International University of Financial Management and Technology,
6A Kichik Xalqa Yuli str., Tashkent 100121, Republic of Uzbekistan,
E-mail: indiraazatovna@mail.ru

Том 3, Выпуск 2 УДК 519.713
Стр. 32–57 (2025) MSC 68Q45

Связь регулярности двумерных и соответствующих им одномерных языков

Н.Н. Корнеева, Л.А. Гизатуллина

Аннотация. Доказаны соотношения между регулярностью двумерных и одномерных языков. Каждому двумерному языку ставятся в соответствие две последовательности одномерных языков, соответствующие строкам и столбцам двумерного языка. Для каждого из приведенных условий доказано существование как регулярных, так и нерегулярных двумерных языков: все строчные и все столбцовые языки регулярны; все строчные языки регулярны, все столбцовые языки нерегулярны; все столбцовые языки регулярны, все строчные языки нерегулярны; и все строчные, и все столбцовые языки нерегулярны.

Ключевые слова: регулярный язык, двумерный язык, конечный автомат, двумерный онлайн-автомат тесселяции.

DOI: 10.26907/2949-3919.2025.2.32-57

Введение

В данной работе изучается связь регулярности двумерных языков и одномерных языков, сопоставленных каждой строке и каждому столбцу двумерного языка. Двумерный язык – это язык, словами которого являются прямоугольные таблицы символов некоторого алфавита, т. е. двумерные слова. Каждому двумерному слову естественным образом сопоставляется некоторое множество одномерных слов, а именно, каждая строка и каждый столбец двумерного слова образуют обычные одномерные слова над тем же алфавитом. Поэтому каждому двумерному языку можно сопоставить две последовательности языков: первую образуют языки, состоящие из слов, соответствующих i-ым строкам двумерных слов, при $i = 1, 2, \ldots$, вторую – языки, состоящие из слов, соответствующих j-ым столбцам двумерных слов, при $j = 1, 2, \ldots$. В работе исследуется вопрос связи регулярности/нерегулярности двумерного языка и регулярности/нерегулярности одномерных языков, сопоставленных строкам и столбцам двумерного языка.

Напомним, что регулярный одномерный язык – это язык, который распознается детерминированным или недетерминированным конечным автоматом, или, эквивалентно, язык, заданный регулярным выражением.

Поступила: 19.09.2024. Принята: 02.07.2025. Опубликована: 16.07.2025.

Аналогично, с незначительными отличиями, можно определить и регулярные двумерные языки.

Один из способов определения регулярных двумерных языков – это их задание при помощи двумерных регулярных выражений. В этом случае возникают две возможные частичные операции конкатенации и итерации Клини, которые в работе называются горизонтальная и вертикальная конкатенация (в англоязычной литературе – column и row concatenation соответственно [1]) и горизонтальная и вертикальная итерация Клини (соответственно, column и row closure [1]). Двумерное регулярное выражение – это выражение, которое строится по индукции из атомарных выражений, т. е. $\emptyset$ и символов алфавита, при помощи операций горизонтальной и вертикальной конкатенации, горизонтальной и вертикальной итерации, объединения, пересечения и дополнения, см. [1]. В зависимости от выбора операций, с помощью которых строятся выражения, определяются различные классы языков.

Другой способ – определить регулярные двумерные языки как языки, распознаваемые конечными автоматами, работающими на двумерных объектах. В литературе предложено несколько типов таких автоматов. Первая модель двумерного автомата была предложена в [2] – это четырехсторонний автомат (four-way automata), в [3] предложена модель двумерного автомата, названная двумерный онлайн-автомат тесселяции (two-dimensional on-line tessellation automaton), которая является частным случаем клеточного автомата. В работах [3, 4] полностью описаны соотношения между классами языков, распознаваемых четырехсторонними автоматами и двумерными онлайн-автоматами тесселяции:

1) класс языков, распознаваемых детерминированными четырехсторонними автоматами, является собственным подмножеством класса языков, распознаваемых недетерминированными четырехсторонними автоматами, который является собственным подмножеством класса языков, распознаваемых двумерными недетерминированными онлайн-автоматами тесселяции;
2) класс языков, распознаваемых двумерными детерминированными онлайн-автоматами тесселяции, является собственным подмножеством класса языков, распознаваемых двумерными недетерминированными онлайн-автоматами тесселяции.

В дальнейшем вводились и другие типы автоматов, работающих на двумерных объектах. Приведем еще две модели двумерных автоматов. С одной стороны, для однозначной возможности распознавания слов двумерного языка определяется двумерный однозначный онлайн-автомат тесселяции (two-dimensional unambiguous on-line tessellation acceptor, [5]). Класс языков, распознаваемых данным типом двумерных автоматов, лежит строго между классами языков, распознаваемых двумерными детерминированными и двумерными недетерминированными онлайн-автоматами тесселяции [5]. С другой стороны, в [6] введено обобщение понятия двумерного недетерминированного онлайн-автомата тесселяции – двумерный приближенный онлайн-автомат тесселяции (two dimensional rough online tesselation automaton) – с использованием приближенных множеств в области значений его функции перехода. Очевидно, что класс языков, распознаваемых двумерными недетерминированными онлайн-автоматами тесселяции является подмножеством класса языков, распознаваемых двумерными приближенными онлайн-автоматами тесселяции (достаточно взять в качестве используемого отношения эквивалентности – отношение равенства). Однако вопрос о строгом включении или равенстве двух классов остается открытым, так как в указанной статье он не рассматривался.

Двумерный язык называется регулярным (см., например, [1]), если он распознается двумерным недетерминированным онлайн-автоматом тесселяции или, что эквивалентно, если он является проекцией языка, соответствующего регулярному выражению, в построении которого не участвует операция дополнения. Приведенное определение двумерного регулярного языка эквивалентно еще двум характеризациям двумерных языков, которые являются обобщениями известных характеризаций одномерных регулярных языков:

1) двумерные языки, распознаваемые при помощи плиточных систем (tiling system), см. [7, 8]. Этот подход является обобщением на двумерный случай характеризации одномерных регулярных языков как проекций локальных языков (см., например, [9]);
2) двумерные языки, определимые в экзистенциальной монадической логике второго порядка [10]. Это обобщение на двумерный случай результата Бюхи для одномерных регулярных языков [11].

В силу приведенных выше эквивалентных определений двумерных регулярных языков подход, основанный на двумерных недетерминированных онлайн-автоматах тесселяции, по сравнению с другими классами автоматов, кажется авторам наиболее актуальным с точки зрения установления соотношений между регулярностью двумерного языка и регулярностью соответствующих ему одномерных языков. В данной работе будем придерживаться именно этого определения регулярности двумерного языка. Однако, в большинстве случаев, для доказательства достаточно будет двумерных детерминированных онлайн-автоматов тесселяции.

В разделе 1 приводятся основные определения и обозначения, используемые в работе. В разделе 2 приводятся несколько алгоритмов построения регулярных двумерных языков из регулярных одномерных языков. В частности, в этом разделе доказано существование регулярных двумерных языков, у которых или все строчные, или все столбцовые языки регулярны. Причем в некоторых случаях в построенных двумерных языках также регулярны и все столбцовые или, соответственно, все строчные языки. Таким образом, в этом разделе доказано существование регулярного двумерного языка с регулярными как строчными, так и столбцовыми языками. В разделе 3 доказывается существование регулярных двумерных языков, у которых строчные и/или столбцовые языки нерегулярны. В разделе 4 приводятся примеры нерегулярных двумерных языков таких, что соответствующие им строчные и/или столбцовые языки могут быть и регулярными, и нерегулярными. В заключении в общем виде формулируются основные результаты работы.

1. Основные определения и обозначения

Приведем определения двумерного языка, операций на двумерных языках, которые являются естественными обобщениями аналогичных операций в одномерном случае. Эти определения можно найти, например, в обзорной статье [1].

Пусть Σ – конечный алфавит, т. е. конечное непустое множество символов (букв). Символы алфавита будем обозначать малыми латинскими буквами x, y, z, $x_1, x_2, \ldots$.

Определение 1. Двумерное слово p над алфавитом Σ – это прямоугольный массив элементов Σ, т. е.

$$p = \boxed{\begin{array}{ccc} x_{11} & \ldots & x_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{m1} & \ldots & x_{mn} \end{array}},$$

где $x_{ij} \in \Sigma$ ($i = \overline{1.m}$, $j = \overline{1.n}$).

Размером двумерного слова p считается пара (m, n), где m – число строк, n – число столбцов. Если двумерное слово имеет одну строку, то получаем обычное "одномерное" слово. Двумерное слово размера $(0, 0)$ называется пустым и обозначается λ (пустое одномерное слово также будем обозначать символом λ). Считается, что двумерные слова размера $(0, n)$ и $(m, 0)$, где $n > 0$, $m > 0$, не определены.

Множество всех двумерных слов размера (m, n) над алфавитом Σ обозначается $\Sigma^{m\times n}$, множество всех двумерных слов над алфавитом Σ – Σ^{**} (напомним, что в одномерном случае, множество всех одномерных слов над алфавитом Σ обозначается Σ^*, а множество всех непустых одномерных слов – Σ^+). Двумерный язык над Σ есть подмножество Σ^{**}.

Пусть L – двумерный язык над алфавитом Σ. Обозначим через $L_{(i)}$, $i \geq 1$, одномерный язык, состоящий из одномерных слов, находящихся в i-ой строке двумерных слов языка L; через $L^{(j)}$, $j \geq 1$, – одномерный язык, состоящий из одномерных слов, находящихся в j-ом столбце двумерных слов языка L. Таким образом, каждому двумерному языку сопоставляются две последовательности одномерных языков: $(L_{(i)})_{i\geq 1}$ и $(L^{(j)})_{j\geq 1}$.

Пусть p – двумерное слово над алфавитом Σ, $x \in \Sigma$. Как и в одномерном случае, через $|p|_x$ будем обозначать количество букв x в слове p.

Далее приведем определение частичных операций для двумерных слов.

Пусть p и q – двумерные слова над алфавитом Σ размера (m, n) и (m', n') соответственно, где $m, n, m', n' > 0$, т. е.

$$p = \boxed{\begin{array}{ccc} x_{11} & \ldots & x_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{m1} & \ldots & x_{mn} \end{array}}, \quad q = \boxed{\begin{array}{ccc} y_{11} & \ldots & y_{1n'} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ y_{m'1} & \ldots & y_{m'n'} \end{array}}.$$

Определение 2. Горизонтальная конкатенация непустых двумерных слов p и q – это частичная операция, определенная в случае $m = m'$ и сопоставляющая p и q двумерное слово:

$$p \oplus q = \begin{array}{|ccc|ccc|} \hline x_{11} & \ldots & x_{1n} & y_{11} & \ldots & y_{1n'} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{m1} & \ldots & x_{mn} & y_{m'1} & \ldots & y_{m'n'} \\ \hline \end{array}.$$

Определение 3. Вертикальная конкатенация непустых двумерных слов p и q – это частичная операция, определенная в случае $n = n'$ и сопоставляющая p и q двумерное слово:

$$p \ominus q = \begin{array}{|ccc|} \hline x_{11} & \ldots & x_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{m1} & \ldots & x_{mn} \\ \hline y_{11} & \ldots & y_{1n'} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ y_{m'1} & \ldots & y_{m'n'} \\ \hline \end{array}.$$

Кроме того, считается, что горизонтальная и вертикальная конкатенации (не пустого или пустого) двумерного слова p и пустого двумерного слова λ всегда определены и $p \oplus \lambda = \lambda \oplus p = p$ и $p \ominus \lambda = \lambda \ominus p = p$, т. е. λ является нейтральным элементом для этих операций.

Естественным образом эти операции переносятся на двумерные языки. Пусть L_1 и L_2 – двумерные языки над алфавитом Σ.

Определение 4. Горизонтальная конкатенация двумерных языков L_1 и L_2 – это двумерный язык

$$L_1 \oplus L_2 = \{p \oplus q \mid p \in L_1, q \in L_2\}.$$

Определение 5. Вертикальная конкатенация двумерных языков L_1 и L_2 – это двумерный язык

$$L_1 \ominus L_2 = \{p \ominus q \mid p \in L_1, q \in L_2\}.$$

По аналогии с “одномерным” случаем можно рассмотреть горизонтальные и вертикальные степени языка и горизонтальную и вертикальную итерации языка. Очевидно, что

$$L^{n\oplus} = L \oplus L^{(n-1)\oplus},$$
$$L^{n\ominus} = L \ominus L^{(n-1)\ominus},$$

причем $L^{1\oplus} = L^{1\ominus} = L$, $L^{0\oplus} = L^{0\ominus} = \{\lambda\}$.

Пусть теперь L – двумерный язык над алфавитом Σ.

Определение 6. Горизонтальная итерация двумерного языка L – это двумерный язык

$$L^{*\oplus} = \bigcup_{i \geq 0} L^{i\oplus}.$$

Определение 7. Вертикальная итерация двумерного языка L – это двумерный язык

$$L^{*\ominus} = \bigcup_{i \geq 0} L^{i\ominus}.$$

Следующая операция по двум одномерным языкам строит двумерный язык. Пусть L_1 и L_2 – одномерные языки над алфавитом Σ.

Определение 8. Сочетание (row-column combination) одномерных языков L_1 и L_2 – это двумерный язык, обозначаемый $L_1 \oplus L_2$, состоящий из двумерных слов $p \in \Sigma^{**}$ таких, что каждая строка слова p принадлежит L_1, а каждый столбец слова p принадлежит L_2.

Таким образом, $(L_1 \oplus L_2)_{(i)} \subseteq L_1$ и $(L_1 \oplus L_2)^{(j)} \subseteq L_2$ при любых $i, j \geq 1$.

В данной работе будут изучаться регулярные двумерные языки, т. е. такие двумерные языки, которые распознаются двумерными недетерминированными онлайн-автоматами тесселяции. Приведем определение автомата, следуя [1] (оно незначительно отличается от исходного определения [3]), и опишем его работу.

Определение 9. Двумерный недетерминированный (детерминированный) онлайн-автомат тесселяции – это совокупность $A = (\Sigma, S, I, F, \delta)$, где Σ – конечный алфавит, S – конечное множество состояний, $I \subseteq S$ $(I = \{s_0\} \subseteq S)$ – множество начальных состояний (выделенное начальное состояние), $F \subseteq S$ – множество допускающих состояний, $\delta : S \times S \times \Sigma \to 2^S$ $(\delta : S \times S \times \Sigma \to S)$ – функция перехода.

В данной работе не рассматриваются другие автоматы, работающие на двумерных словах, поэтому вместо "двумерный онлайн-автомат тесселяции" будем для краткости писать просто "двумерный автомат", уточняя при необходимости детерминированный или недетерминированный. Также сокращенно будем обозначать двумерный недетерминированный (детерминированный) онлайн-автомат тесселяции так, как принято в англоязычной литературе, – 2ota (2dota).

Рассмотрим работу лишь двумерного детерминированного онлайн-автомата тесселяции (в недетерминированном случае описание аналогичное, но необходимо работать не с состояниями, а с подмножествами состояний). Также как при работе на "одномерном" слове обычный "одномерный" детерминированный конечный автомат проходит последовательность состояний, так двумерный детерминированный онлайн-автомат тесселяции при работе на двумерном слове проходит прямоугольную таблицу состояний.

Пусть на вход двумерного детерминированного онлайн-автомата тесселяции A подано двумерное слово p размера (m, n), ограниченное специальным символом $\#$, т. е. в (i, j)-клетку прямоугольной таблицы записывается (i, j)-символ слова p – x_{ij} $(i = \overline{1.m}$, $j = \overline{1.n})$, а в 0 и $m + 1$ строку и 0 и $n + 1$ столбец – символы $\#$:

$$\boxed{\begin{array}{ccc} \# & \# & \# \\ \# & p & \# \\ \# & \# & \# \end{array}} = \boxed{\begin{array}{ccccc} \# & \# & \dots & \# & \# \\ \# & x_{11} & \dots & x_{1n} & \# \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \# & x_{m1} & \dots & x_{mn} & \# \\ \# & \# & \dots & \# & \# \end{array}}.$$

Двумерный детерминированный онлайн-автомат тесселяции A каждой (i, j)-позиции слова p сопоставляет некоторое состояние из множества S согласно правилам, определяемым функцией перехода δ. В начальный момент времени двумерный автомат находится в начальном состоянии s_0 (в случае двумерного недетерминированного автомата – в одном из начальных состояний) во всех позициях нулевой строки и нулевого столбца: $s_{i,0} = s_0$ при $i > 0$ и $s_{0,j} = s_0$ при $j > 0$. Действие функции перехода при чтении символа x_{ij} определяется состояниями, в которых находится двумерный автомат в $(i-1)$-ой строке и j-ом столбце $s_{i-1,j}$ и в i-ой строке и $(j-1)$-ом столбце $s_{i,j-1}$:

$$\begin{array}{c|cccccc} & s_0 & \dots & s_0 & s_0 & \dots & s_0 \\ \hline s_0 & & & & & & \\ \vdots & & & & & & \\ s_0 & & & & s_{i-1,j} & & \\ s_0 & & & s_{i,j-1} & x_{i,j} & & \\ \vdots & & & & & & \\ s_0 & & & & & & \end{array}.$$

Таким образом, в момент времени $t = 1$ двумерный автомат A прочитает символ x_{11} и сопоставит $(1, 1)$-позиции состояние $\delta(s_0, s_0, x_{11}) = s_{11}$. В момент времени $t = 2$ двумерный автомат A одновременно читает символы x_{12} и x_{21} и сопоставляет $(1, 2)$ и $(2, 1)$-позициям состояния $\delta(s_0, s_{11}, x_{12}) = s_{12}$ и $\delta(s_{11}, s_0, x_{21}) = s_{21}$ соответственно. Двумерный автомат продолжает читать двумерное слово p двигаясь по побочным диагоналям, до тех пор пока в момент времени $t = m + n - 1$ не сопоставит позиции (m, n) состояние $s_{m,n}$.

Если полученное состояние $s_{m,n}$ допускающее, то двумерный автомат A распознает двумерное слово p, в противном случае – не распознает. В случае двумерного недетерминированного онлайн-автомата тесселяции, автомат A распознает двумерное слово p, если существует хотя бы один путь двумерного автомата A на слове p такой, что состояние $s_{m,n}$ – допускающее.

Также будем считать, что если $s_0 \in F$ (одно из начальных состояний двумерного недетерминированного автомата принадлежит F), то двумерный автомат A распознает пустое двумерное слово λ (это допущение согласуется с исходным определением двумерного онлайн-автомата тесселяции [3], согласно которому двумерный автомат в начальный момент времени находится в начальном состоянии s_0 (в недетерминированном случае, в одном из начальных состояний) во всех (i, j)-клетках прямоугольной таблицы, где записаны символы двумерного слова p).

Язык L распознается двумерным детерминированным онлайн-автоматом тесселяции $A = (\Sigma, S, s_0, F, \delta)$, если $p \in L \Leftrightarrow \delta(s_0, s_0, p) \in F$, и распознается двумерным недерминированным онлайн-автоматом тесселяции $A = (\Sigma, S, I, F, \delta)$, если $p \in L \Leftrightarrow \delta(s_0, s_0, p) \cap F \neq \emptyset$ для некоторого $s_0 \in I$, т. е. для некоторого $s_0 \in I$ хотя бы один путь $\delta(s_0, s_0, p)$ двумерного автомата A на слове p приводит в допускающее состояние.

Классы двумерных языков, распознаваемых двумерными недетерминированными и детерминированными онлайн-автоматами тесселяции, обозначаются $\mathcal{L}(2\text{ota})$ и $\mathcal{L}(2\text{dota})$ соответственно, также будем писать $\mathcal{L}_\Sigma(2\text{ota})$ и $\mathcal{L}_\Sigma(2\text{dota})$, если необходимо указать алфавит, над которым рассматриваются языки.

Определение 10. Двумерный язык L называется регулярным, если он распознается двумерным недетерминированным онлайн-автоматом тесселяции.

В литературе в зависимости от используемого определения регулярности двумерного языка используют разные обозначения для данного класса, однако для четырех приведенных во введении эквивалентных определений также используется общее обозначение REC (recognizable two-dimensional languages, см. [1]). В данной работе необходимо отличать какой “размерности” регулярный язык рассматривается, поэтому класс одномерных регулярных языков над алфавитом Σ будем обозначать $REG_1(\Sigma)$ или REG_1, если алфавит понятен из контекста, а класс двумерных регулярных языков – $REG_2(\Sigma)$ или REG_2. Таким образом, $REC = REG_2 = \mathcal{L}(2\text{ota})$.

2. Регулярные двумерные языки, построенные из регулярных одномерных языков

Цель данного раздела – привести несколько конструкций построения регулярных двумерных языков из регулярных одномерных языков. Однако приводимые здесь результаты тесно связаны с вопросами замкнутости классов двумерных языков, распознаваемых различными типами двумерных автоматов, относительно приведенных в разделе 1 языковых операций. Известно, например, что

1) классы языков $\mathcal{L}(4\text{dfa})$ и $\mathcal{L}(4\text{fa})$, распознаваемых четырехсторонними детерминированными и недетерминированными автоматами, не замкнуты относительно горизонтальной и вертикальной конкатенации и горизонтальной и вертикальной итерации [12];
2) класс языков $REG_2 = \mathcal{L}(2\text{ota})$ замкнут относительно горизонтальной и вертикальной конкатенации и горизонтальной и вертикальной итерации [1];
3) класс языков $\mathcal{L}(2\text{uota})$, распознаваемых двумерными однозначными онлайн-автоматами тесселяции, не замкнут относительно горизонтальной и вертикальной конкатенации и горизонтальной и вертикальной итерации [5];
4) класс языков $\mathcal{L}(2\text{rota})$, распознаваемых двумерными приближенными онлайн-автоматами тесселяции, замкнут относительно горизонтальной и вертикальной

конкатенации [6], вопрос замкнутости относительно горизонтальной и вертикальной итерации в статье не рассматривался.

Для класса $\mathcal{L}$(2dota) подобные результаты, по предположению авторов, не верны, однако если применять указанные операции к одномерным языкам (для удобства на них наложены дополнительные условия, значение которых понятно из замечания 13), то соответствующие результаты справедливы (см. теоремы 11 и 17).

Теорема 11. *Если* $L_1, L_2, \ldots, L_k \in REG_1(\Sigma)$, $\lambda \in L_1 \cap L_2 \cap \cdots \cap L_k$ *или* $\lambda \notin L_1 \cup L_2 \cup \cdots \cup L_k$, *то* $L = L_1 \ominus L_2 \ominus \cdots \ominus L_k \in \mathcal{L}_\Sigma(\text{2dota})$.

Доказательство. Доказывать теорему будем для случая $k = 2$, так как в общем случае доказательство аналогично. Пусть $L = L_1 \ominus L_2$. Непустые двумерные слова языка L будут содержать ровно две строки. Язык L будет содержать пустое двумерное слово λ только в случае, если оба языка L_1 и L_2 содержат пустые одномерные слова.

Поскольку L_1 и L_2 – регулярные одномерные языки, они распознаются детерминированными конечными автоматами. Пусть $A_1 = (\Sigma, S_1, s_0^1, F_1, \delta_1)$ и $A_2 = (\Sigma, S_2, s_0^2, F_2, \delta_2)$ являются детерминированными конечными автоматами, распознающими языки L_1 и L_2 соответственно. Будем считать, что $S_1 \cap S_2 = \emptyset$. Построим двумерный детерминированный автомат $A = (\Sigma, S, s_0, F, \delta)$, распознающий язык $L = L_1 \ominus L_2$. Множеством состояний автомата будет $S = (S_1 \cup S_2) \times \{0,1\} \cup \{(s_0, \gamma), (s', 0)\}$, где $s_0, s' \notin S_1 \cup S_2$, $\gamma \in \{0,1\}$. Значение γ зависит от принадлежности/не принадлежности пустых одномерных слов языкам L_1 и L_2: если $\lambda \in L_1 \cap L_2$, то $\gamma = 1$, если $\lambda \notin L_1 \cap L_2$, то $\gamma = 0$.

Определим функцию перехода (во всех приводимых ниже формулах $x \in \Sigma$, $s_1 \in S_1$, $s_2 \in S_2$, $\alpha, \beta \in \{0,1\}$, χ_T – характеристическая функция множества T):

$\delta((s_0,\gamma),(s_0,\gamma),x) = (\delta_1(s_0^1,x), \chi_{F_1}(\delta_1(s_0^1,x)))$,
$\delta((s_0,\gamma),(s_1,\alpha),x) = (\delta_1(s_1,x), \chi_{F_1}(\delta_1(s_1,x)))$,
$\delta((s_1,\alpha),(s_0,\gamma),x) = (\delta_2(s_0^2,x), \alpha \cdot \chi_{F_2}(\delta_2(s_0^2,x)))$,
$\delta((s_1,\alpha),(s_2,\beta),x) = (\delta_2(s_2,x), \alpha \cdot \chi_{F_2}(\delta_2(s_2,x)))$,
$\delta((s_2,\alpha),(s_0,\gamma),x) = (s',0)$,
$\delta((s_2,\alpha),(s',0),x) = (s',0)$,
$\delta((s',0),(s_0,\gamma),x) = (s',0)$,
$\delta((s',0),(s',0),x) = (s',0)$.

Первые две команды отвечают работе двумерного автомата на первой строке двумерного слова, причем вторая компонента состояния говорит о принадлежности/непринадлежности полученного состояния множеству допускающих состояний F_1. Третья и четвертая команды отвечают работе двумерного автомата на второй строке двумерного слова, причем вторая компонента состояния говорит о принадлежности/непринадлежности полученного состояния множеству допускающих состояний F_2, при условии, что соответствующее состояние над ним принадлежит F_1. Иными словами, во второй строке вторая компонента будет равна единице, если прочитанное к этому моменту слово второй строки принадлежит L_2, а соответствующее ему слово первой строки принадлежит L_1. Пятая и шестая команды отвечают работе двумерного автомата на третьей строке двумерного слова, последние две команды – на четвертой и последующих строках.

Определим множество допускающих состояний: $F = \{(s, 1) \mid s \in S_2 \cup \{s_0\}\}$. Таким образом, возможны два случая:

1) если оба языка L_1 и L_2 содержат пустое одномерное слово, то

$$F = \{(s_2, 1) \mid s_2 \in S_2\} \cup \{(s_0, 1)\};$$

2) если оба языка L_1 и L_2 не содержат пустого одномерного слова, то

$$F = \{(s_2, 1) \mid s_2 \in S_2\},$$

так как $\gamma = 0$.

Покажем, что построенный двумерный детерминированный автомат A распознает язык $L = L_1 \ominus L_2$. Очевидно, что на пустом двумерном слове двумерный автомат A работает корректно в обоих случаях, поэтому рассмотрим лишь случай непустых двумерных слов. Непустое двумерное слово должно распознаваться построенным двумерным автоматом тогда и только тогда, когда оно имеет ровно две строки и слово в первой строке принадлежит L_1, а слово во второй строке принадлежит L_2.

Пусть $p = p_1 \ominus p_2 \ominus \cdots \ominus p_l$ и $\delta((s_0, \gamma), (s_0, \gamma), p) = (s, \xi)$, где $(s, \xi) \in S$, $\xi \in \{0, 1\}$.

Если $l = 1$, то $s \in S_1$ и $(s, \xi) \notin F$, следовательно, $p \notin L$.

Если $l \geq 3$, то $s = s'$ и $(s, \xi) = (s', 0) \notin F$, следовательно, $p \notin L$.

Если $l = 2$ и $p = p_1 \ominus p_2$: $(s, \xi) \in F$ тогда и только тогда, когда $s \in S_2, \xi = 1$, причем $s = \delta_2(s_0^2, p_2)$, а $\xi = \alpha \cdot \chi_{F_2}(s)$, где $\alpha = \chi_{F_1}(\delta_1(s_0^1, p_1))$. Приведенные условия эквивалентны следующим: $\chi_{F_2}(\delta_2(s_0^2, p_2)) = 1$ и $\chi_{F_1}(\delta_1(s_0^1, p_1)) = 1$ или, другими словами, $\delta_2(s_0^2, p_2) \in F_2$ и $\delta_1(s_0^1, p_1) \in F_1$. Таким образом

$$\delta((s_0, \gamma), (s_0, \gamma), p) \in F \ \Leftrightarrow\ p_1 \in L_1, p_2 \in L_2 \ \Leftrightarrow\ p = p_1 \ominus p_2 \in L_1 \ominus L_2. \qquad \square$$

Замечание 12. Если рассматривать только состояния, достижимые из начального, то обозначение состояний в доказательстве теоремы 11 можно было упростить, отождествив состояния из $S_1 \times \{0, 1\}$ с соответствующими состояниями из S_1, так как из двух состояний $(s_1, 0)$ и $(s_1, 1)$ для $s_1 \in S_1$ в двумерном автомате A будет лишь одно; (s_0, γ) – с s_0, поскольку из двух состояний $(s_0, 0)$ и $(s_0, 1)$ будет лишь одно; и $(s', 0)$ – с s'. Последнее состояние $(s', 0)$ – это состояние, которое обычно в теории автоматов называют мусорным состоянием. Однако приведенные в теореме более громоздкие обозначения удобны для обоснования корректной работы построенного двумерного автомата.

Замечание 13. Очевидно, что для языка $L = L_1 \ominus L_2 \ominus \cdots \ominus L_k \subseteq \Sigma^{**}$, построенного в теореме 11, выполнены соотношения: $L_{(1)} \subseteq L_1$, $L_{(2)} \subseteq L_2$, ..., $L_{(k)} \subseteq L_k$. Ниже доказано, что одномерные языки $L_{(1)}, L_{(2)}, \ldots, L_{(k)}$ также регулярны и

$$L_1 \ominus L_2 \ominus \cdots \ominus L_k = L_{(1)} \ominus L_{(2)} \ominus \cdots \ominus L_{(k)}.$$

Напомним стандартное определение гомоморфизма. Отображение $h : \Sigma^* \to \Sigma'^*$ называется гомоморфизмом (морфизмом), если $h(pq) = h(p)h(q)$ для любых $p, q \in \Sigma^*$. Очевидно, что достаточно задавать гомоморфизм h на однобуквенных словах, так как если $p = x_1 x_2 \ldots x_l$, то $h(p) = h(x_1)h(x_2)\ldots h(x_l)$.

Теорема 14. *Если* $L_1, L_2, \ldots, L_k \in REG_1(\Sigma)$, $\lambda \in L_1 \cap L_2 \cap \cdots \cap L_k$ *или* $\lambda \notin L_1 \cup L_2 \cup \cdots \cup L_k$, *и* $L = L_1 \ominus L_2 \ominus \cdots \ominus L_k$, *тогда* $L_{(1)}, L_{(2)}, \ldots, L_{(k)} \in REG_1(\Sigma)$ *и*

$$L_1 \ominus L_2 \ominus \cdots \ominus L_k = L_{(1)} \ominus L_{(2)} \ominus \cdots \ominus L_{(k)}.$$

Доказательство. Пусть $\Sigma' = \{a\}$ – однобуквенный алфавит. Рассмотрим гомоморфизм $h : \Sigma^* \to \Sigma'^*$, который каждую букву алфавита Σ отображает в букву $a \in \Sigma'$. Известно (см., например, [13]), что гомоморфизм и обратный гомоморфизм регулярного одномерного языка являются регулярными одномерными языками. Отсюда следует, что $h(L_1), h(L_2), \ldots, h(L_k) \in REG_1(\Sigma')$. Тогда $L' = h(L_1) \cap h(L_2) \cap \cdots \cap h(L_k) \in REG_1(\Sigma')$ как конечное пересечение регулярных одномерных языков. Следовательно, $h^{-1}(L') \in REG_1(\Sigma)$. Слова одномерного языка $h^{-1}(L')$ имеют такую длину, что существует двумерное слово, принадлежащее $L_1 \ominus L_2 \ominus \cdots \ominus L_k$, с соответствующим числом столбцов.

Докажем, что $L_{(i)} = L_i \cap h^{-1}(L')$. Действительно, $p_i \in L_{(i)}$ тогда и только тогда, когда существуют слова $p_1 \in L_{(1)}, \ldots, p_{i-1} \in L_{(i-1)}$, $p_{i+1} \in L_{(i+1)}, \ldots, p_k \in L_{(k)}$ такие, что

$$p_1 \ominus p_2 \ominus \cdots \ominus p_i \ominus \cdots \ominus p_k \in L.$$

Тогда очевидно, что $h(p_1) = h(p_2) = \cdots = h(p_i) = \cdots = h(p_k)$, следовательно, $h(p_i) \in L'$. Поскольку $L_{(i)} \subseteq L_i$, то из $p_i \in L_{(i)}$ следует $p_i \in L_i \cap h^{-1}(L')$. Обратно, если $p_i \in L_i \cap h^{-1}(L')$, то существуют слова $p_1 \in L_1, \ldots, p_{i-1} \in L_{i-1}$, $p_{i+1} \in L_{i+1}, \ldots, p_k \in L_k$ такие, что

$$h(p_1) = h(p_2) = \cdots = h(p_i) = \cdots = h(p_k),$$

значит, $p_1 \ominus p_2 \ominus \cdots \ominus p_i \ominus \cdots \ominus p_k \in L$, следовательно, $p_i \in L_{(i)}$. Отсюда $L_{(i)} \in REG_1(\Sigma)$ как пересечение регулярных одномерных языков.

Из доказанного выше соотношения следует, что

$$\begin{aligned} L_{(1)} \ominus L_{(2)} \ominus \cdots \ominus L_{(k)} &= (L_1 \cap h^{-1}(L')) \ominus (L_2 \cap h^{-1}(L')) \ominus \cdots \ominus (L_k \cap h^{-1}(L')) \\ &= L_1 \ominus L_2 \ominus \cdots \ominus L_k, \end{aligned}$$

так как для других слов не применима операция вертикальной конкатенации. □

Следствие 15. *Если $L \in REG_1(\Sigma)$, то $L^{k\ominus} \in \mathcal{L}_\Sigma(\text{2dota})$ для любого $k \geq 1$. Более того, $\left(L^{k\ominus}\right)_{(i)} = L$ при любом $i = \overline{1.k}$.*

Аналогично можно строить регулярные двумерные языки, в которых каждый столбцовый язык является регулярным одномерным языком. Поскольку обычно в одномерных языках слова записываюся в строчку, введем естественную операцию “транспонирования”, чтобы получить одномерные языки, в которых слова записываются в столбец.

Пусть $p = \boxed{\begin{matrix} x_{11} & \dots & x_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{m1} & \dots & x_{mn} \end{matrix}}$, тогда $p^T = \boxed{\begin{matrix} x_{11} & \dots & x_{m1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{1n} & \dots & x_{mn} \end{matrix}}$.

Обозначим $L^T = \{p^T \mid p \in L\}$. Легко доказывается следующий результат, из которого потом следуют транспонированные версии теоремы 14 и следствия 15:

Лемма 16.

1) *Если $L \in \mathcal{L}(\text{2ota})$, то $L^T \in \mathcal{L}(\text{2ota})$.*
2) *Если $L \in \mathcal{L}(\text{2dota})$, то $L^T \in \mathcal{L}(\text{2dota})$.*

Доказательство. Очевидно, что для построения двумерного недетерминированного или детерминированного автомата, распознающего двумерный язык L^T, необходимо “транспонировать” все команды двумерного недетерминированного или детерминированного автомата, распознающего двумерный язык L. Пусть $A = (\Sigma, S, I, F, \delta)$ – двумерный автомат, распознающий L, тогда двумерный автомат $A' = (\Sigma, S, I, F, \delta')$, где $\delta'(s,t,x) = \delta(t,s,x)$ при любых $s, t \in S$, $x \in \Sigma$, распознает L^T. □

Теорема 17. *Если $L_1, L_2, \dots, L_k \in REG_1(\Sigma)$, $\lambda \in L_1 \cap L_2 \cap \dots \cap L_k$ или $\lambda \notin L_1 \cup L_2 \cup \dots \cup L_k$, то $L = L_1^T \oplus L_2^T \oplus \dots \oplus L_k^T \in \mathcal{L}_\Sigma(\text{2dota})$, причем $L^{(1)}, L^{(2)}, \dots, L^{(k)} \in REG_1(\Sigma)$ и*

$$L_1^T \oplus L_2^T \oplus \dots \oplus L_k^T = \left(L^{(1)}\right)^T \oplus \left(L^{(2)}\right)^T \oplus \dots \oplus \left(L^{(k)}\right)^T.$$

Следствие 18. *Если $L \in REG_1(\Sigma)$, то $\left(L^T\right)^{k\oplus} \in \mathcal{L}_\Sigma(\text{2dota})$ для любого $k \geq 1$. Более того, $\left(\left(L^T\right)^{k\oplus}\right)^{(j)} = L$ при любом $j = \overline{1.k}$.*

В действительности верно также утверждение, обратное к теоремам 14 и 17: каждому регулярному двумерному языку с фиксированным числом строк или столбцов можно сопоставить регулярный одномерный язык над декартовой степенью исходного алфавита.

Теорема 19. *Если $L \in \mathcal{L}_\Sigma(\text{2ota})$ и все слова языка L содержат ровно $k \geq 1$ строк (или $k \geq 1$ столбцов), тогда $L \in REG_1\big((\Sigma^k)^T\big)$ (соответственно, $L \in REG_1\big(\Sigma^k\big)$).*

Доказательство. При $k = 1$ утверждение теоремы очевидно, так как исходный язык L одномерный. Будем доказывать теорему для случая $k = 2$ строк, так как в общем случае и в случае k столбцов доказательство аналогично. Непустые двумерные слова языка L будут содержать ровно две строки (пустых двумерных слов язык L не содержит).

Пусть L распознается двумерным недетерминированным автоматом $A = (\Sigma, S, I, F, \delta)$. Как и в "одномерном" случае, можно преобразовать двумерный автомат A таким образом, чтобы он имел лишь одно начальное состояние, т. е. можно считать, что $I = \{s_0\}$.

Будем рассматривать язык L как одномерный язык над алфавитом $(\Sigma^2)^T$. "Одномерный" недетерминированный конечный автомат $A' = ((\Sigma^2)^T, (S^2)^T, s_0', F', \delta')$ определим следующим образом:

- алфавит $(\Sigma^2)^T = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \middle| \ x, y \in \Sigma \right\}$;
- множество состояний $(S^2)^T = \left\{ \begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix} \middle| \ s, t \in S \right\}$;
- начальное состояние $s_0' = \begin{pmatrix} s_0 \\ s_0 \end{pmatrix}$;
- множество допускающих состояний $F' = \left\{ \begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix} \middle| \ s \in S, t \in F \right\}$;
- функция перехода $\delta'\left(\begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \left\{ \begin{pmatrix} s' \\ t' \end{pmatrix} \middle| \ s' \in \delta(s_0, s, x), t' \in \delta(s', t, y) \right\}$.

Таким образом построенный одномерный автомат на первой и второй строках "одномерного" слова над алфавитом $(\Sigma^2)^T$ работает как исходный двумерный автомат на соответствующем двумерном слове над алфавитом Σ. Следовательно, A' распознает все слова языка L, рассматриваемые как одномерные слова над алфавитом $(\Sigma^2)^T$, и только их. $\square$

Теорема 20. *Если* $L \in REG_1(\Sigma)$, *то* $L^{*\ominus}, \left(L^T\right)^{*\oplus} \in \mathcal{L}_\Sigma(\text{2dota})$. *Более того,* $\left(L^{*\ominus}\right)_{(i)} = L$ *при любом* $i \geq 1$ *и* $\left(\left(L^T\right)^{*\oplus}\right)^{(j)} = L$ *при любом* $j \geq 1$.

Доказательство. Докажем регулярность первого двумерного языка, регулярность второго двумерного языка будет следовать из леммы 16 и очевидного соотношения $\left(L^{*\ominus}\right)^T = \left(L^T\right)^{*\oplus}$.

Пусть $A = (\Sigma, S, s_0, F, \delta)$ – детерминированный конечный автомат, распознающий язык L. Построим двумерный детерминированный автомат $A' = (\Sigma, S', (s_0', 1), F', \delta')$, распознающий двумерный язык $L^{*\ominus}$, с множеством состояний $S' = S \times \{0, 1\} \cup \{(s_0', 1)\}$, где $s_0' \notin S$, и множеством допускающих состояний $F' = \{(s, 1) \mid s \in F\} \cup \{(s_0', 1)\}$ (в действительности, можно отождествить $(s_0', 1)$ с s_0'). Осталось определить функцию перехода (во всех приводимых ниже формулах $x \in \Sigma$, $s_1, s_2 \in S$, $\alpha \in \{0, 1\}$):

$\delta'((s_0', 1), (s_0', 1), x) = (\delta(s_0, x), \chi_F(\delta(s_0, x)))$,
$\delta'((s_0', 1), (s_1, \alpha), x) = (\delta(s_1, x), \chi_F(\delta(s_1, x)))$,
$\delta'((s_1, \alpha), (s_0', 1), x) = (\delta(s_0, x), \alpha \cdot \chi_F(\delta(s_0, x)))$,
$\delta'((s_1, \alpha), (s_2, \beta), x) = (\delta(s_2, x), \alpha \cdot \chi_F(\delta(s_2, x)))$.

Первые две команды определяют работу двумерного автомата на первой строке двумерного слова, где вторая компонента состояния говорит о принадлежности/непринадлежности полученного состояния множеству допускающих состояний F. Третья и четвертая команды отвечают работе двумерного автомата на второй и последующих строках двумерного слова, причем вторая компонента состояния говорит о принадлежности/непринадлежности полученного состояния множеству допускающих состояний F, при условии, что все полученные строго над ним состояния принадлежат F. Иными словами, вторая компонента будет равна единице, если прочитанное к этому моменту слово принадлежит L, и все слова над ним также принадлежат L.

Покажем, что построенный двумерный детерминированный автомат A' распознает язык $L^{*\ominus}$. Очевидно, что на пустом двумерном слове двумерный автомат A' работает корректно. Рассмотрим работу двумерного автомата A' на непустых двумерных словах.

Пусть $p = p_1 \ominus p_2 \ominus \cdots \ominus p_l$, где $|p_1| = |p_2| = \cdots = |p_l|$, и $\delta'((s'_0, 1), (s'_0, 1), p) = (s, \xi)$, где $(s, \xi) \in S'$, $\xi \in \{0, 1\}$. Тогда, очевидно, что $s = \delta(s_0, p_l)$ и

$$\xi = \alpha_1 \cdot \alpha_2 \cdots \alpha_{l-1} \cdot \chi_F(s) = \chi_F(\delta(s_0, p_1)) \cdot \chi_F(\delta(s_0, p_2)) \cdots \chi_F(\delta(s_0, p_{l-1})) \cdot \chi_F(\delta(s_0, p_l)).$$

Отсюда видно, что для непустого двумерного слова $(s, \xi) \in F'$ тогда и только тогда, когда $s \in F, \xi = 1$, т. е. тогда и только тогда, когда

$$\chi_F(\delta(s_0, p_1)) = 1, \;\; \chi_F(\delta(s_0, p_2)) = 1, \;\; \ldots, \;\; \chi_F(\delta(s_0, p_l)) = 1$$

или, другими словами, $\delta(s_0, p_1) \in F, \delta(s_0, p_2) \in F, \ldots, \delta(s_0, p_l) \in F$. Последние условия эквивалентны следующим: $p_1 \in L, p_2 \in L, \ldots, p_l \in L$ или $p = p_1 \ominus p_2 \ominus \cdots \ominus p_l \in L^{*\ominus}$.

Справедливость условия $\left(L^{*\ominus}\right)_{(i)} = L$ при любом $i \geq 1$ очевидна. □

Замечание 21. Теоремы 11, 17 и 20 и следствия 15, 18 можно обобщить на случай, когда используемые в них исходные языки не одномерные, а двумерные с фиксированным числом строк или столбцов (доказательства аналогичны доказательствам указанных теорем, только дополнительно нужно считать количество строк или столбцов первого и второго двумерных языков):

1) если $L_1, L_2 \in \mathcal{L}_\Sigma(\text{2dota})$ и все слова двумерного языка L_1 имеют m_1 строк, а все слова двумерного языка L_2 имеют m_2 строк, где $m_1, m_2 \geq 1$, то $L = L_1 \ominus L_2 \in \mathcal{L}_\Sigma(\text{2dota})$;
2) если $L_1, L_2 \in \mathcal{L}_\Sigma(\text{2dota})$ и все слова двумерного языка L_1 имеют n_1 столбцов, а все слова двумерного языка L_2 имеют n_2 столбцов, где $n_1, n_2 \geq 1$, то $L = L_1 \varobar L_2 \in \mathcal{L}_\Sigma(\text{2dota})$;
3) если $L \in \mathcal{L}_\Sigma(\text{2dota})$ и все слова двумерного языка L имеют m строк, где $m \geq 1$, то $L^{k\ominus}, L^{*\ominus} \in \mathcal{L}_\Sigma(\text{2dota})$ для любого $k \geq 1$;
4) если $L \in \mathcal{L}_\Sigma(\text{2dota})$ и все слова двумерного языка L имеют n столбцов, где $n \geq 1$, то $L^{k\varobar}, L^{*\varobar} \in \mathcal{L}_\Sigma(\text{2dota})$ для любого $k \geq 1$.

Таким образом, в указанных частных случаях справедлива замкнутость класса языков $\mathcal{L}(\text{2dota})$ относительно операций горизонтальной и вертикальной конкатенации и горизонтальной и вертикальной итерации.

Замечание 22. В теоремах 11, 14 и 20 (17 и 20) показано, как построить регулярный двумерный язык, каждый строчный (соответственно, столбцовый) язык которого регулярен, но ничего не говорится о регулярности столбцовых (соответственно, строчных) языков. Однако, легко видеть, что соответствующие столбцовые (соответственно, строчные) языки также регулярны, так как состоят из слов длины k или пустого слова, т. е. образуют конечные языки, которые регулярны.

Теорема 23. *Если $L_1, L_2 \in REG_1(\Sigma)$, то язык $L_1 \oplus L_2 \in \mathcal{L}_\Sigma(2\mathrm{dota})$.*

Доказательство. Пусть $A_1 = (\Sigma, S_1, s_0^1, F_1, \delta_1)$ и $A_2 = (\Sigma, S_2, s_0^2, F_2, \delta_2)$ – детерминированные конечные автоматы, распознающие языки L_1 и L_2 соответственно. Будем считать, что $S_1 \cap S_2 = \emptyset$. Построим двумерный детерминированный автомат $A = (\Sigma, S, s_0, F, \delta)$, распознающий язык $L = L_1 \oplus L_2$. Множеством состояний автомата будет

$$S = S_1 \times \{0,1\} \times S_2 \times \{0,1\} \cup \{(s_0, \gamma)\},$$

где $s_0 \notin S_1 \cup S_2$, $\gamma \in \{0,1\}$. Значение γ зависит от принадлежности/не принадлежности пустых одномерных слов языкам L_1 и L_2, так как пустое двумерное слово принадлежит L только в случае, когда оба языка L_1 и L_2 содержат пустые одномерные слова. Таким образом, если $\lambda \in L_1 \cap L_2$, то $\gamma = 1$, если $\lambda \notin L_1 \cap L_2$, то $\gamma = 0$ (в действительности, (s_0, γ) можно отождествить с s_0).

Определим функцию перехода (во всех приводимых ниже формулах $x \in \Sigma$, $s_1, s_1' \in S_1$, $s_2, s_2' \in S_2$, $\alpha, \beta, \alpha', \beta' \in \{0,1\}$):

$\delta((s_0,\gamma),(s_0,\gamma),x) = (\delta_1(s_0^1,x), \chi_{F_1}(\delta_1(s_0^1,x)), \delta_2(s_0^2,x), \chi_{F_2}(\delta_2(s_0^2,x)))$,

$\delta((s_0,\gamma),(s_1,\alpha,s_2,\beta),x) = (\delta_1(s_1,x), \chi_{F_1}(\delta_1(s_1,x)), \delta_2(s_0^2,x), \beta\cdot\chi_{F_2}(\delta_2(s_0^2,x)))$,

$\delta((s_1,\alpha,s_2,\beta),(s_0,\gamma),x) = (\delta_1(s_0^1,x), \alpha\cdot\chi_{F_1}(\delta_1(s_0^1,x)), \delta_2(s_2,x), \chi_{F_2}(\delta_2(s_2,x)))$,

$\delta((s_1,\alpha,s_2,\beta),(s_1',\alpha',s_2',\beta'),x) = (\delta_1(s_1',x), \alpha\cdot\chi_{F_1}(\delta_1(s_1',x)), \delta_2(s_2,x), \beta'\cdot\chi_{F_2}(\delta_2(s_2,x)))$.

Первые две команды отвечают работе двумерного автомата на первой строке двумерного слова, третья и четвертая команды отвечают работе двумерного автомата на второй и последующих строках двумерного слова, причем третья команда отвечает работе на первом столбце.

Определим множество допускающих состояний. Возможны два случая:

1) оба языка L_1 и L_2 содержат пустое одномерное слово, тогда

$$F = \{(s_1, 1, s_2, 1) \mid s_1 \in S_1, s_2 \in S_2\} \cup \{(s_0, 1)\}$$

(в этом случае, $\gamma = 1$);

2) хотя бы один из языков L_1 и L_2 не содержат пустого одномерного слова, тогда

$$F = \{(s_1, 1, s_2, 1) \mid s_1 \in S_1, s_2 \in S_2\}$$

(в этом случае, $\gamma = 0$).

Покажем, что построенный двумерный детерминированный автомат A распознает двумерный язык $L = L_1 \oplus L_2$. Очевидно, что на пустом двумерном слове двумерный автомат A работает корректно в обоих случаях, поэтому рассмотрим лишь случай непустых двумерных слов.

Пусть $p = p_1 \ominus p_2 \ominus \cdots \ominus p_l = q_1 \oplus q_2 \oplus \cdots \oplus q_k$ и $\delta((s_0, \gamma), (s_0, \gamma), p) = (s_1, \xi, s_2, \eta)$, где $s_1 \in S_1$, $s_2 \in S_2$, $\xi, \eta \in \{0, 1\}$, причем

$$\xi = \alpha_1 \cdot \alpha_2 \cdots \alpha_{l-1} \cdot \chi_{F_1}(s_1) = \chi_{F_1}(\delta_1(s_0^1, p_1)) \cdot \chi_{F_1}(\delta_1(s_0^1, p_2)) \cdots \chi_{F_1}(\delta_1(s_0^1, p_{l-1})) \cdot \chi_{F_1}(\delta_1(s_0^1, p_l)),$$
$$\eta = \beta_1 \cdot \beta_2 \cdots \beta_{k-1} \cdot \chi_{F_2}(s_2) = \chi_{F_2}(\delta_2(s_0^2, q_1)) \cdot \chi_{F_2}(\delta_2(s_0^2, q_2)) \cdots \chi_{F_2}(\delta_2(s_0^2, q_{k-1})) \cdot \chi_{F_2}(\delta_2(s_0^2, q_k)).$$

Тогда для непустого двумерного слова $(s_1, \xi, s_2, \eta) \in F$ тогда и только тогда, когда $s_1 \in S_1$, $s_2 \in S_2$, $\xi = 1$, $\eta = 1$, т. е. тогда и только тогда, когда

$$\chi_{F_1}(\delta_1(s_0^1, p_1)) = 1, \ \ \chi_{F_1}(\delta_1(s_0^1, p_2)) = 1, \ \ \ldots, \ \ \chi_{F_1}(\delta_1(s_0^1, p_l)) = 1$$

и

$$\chi_{F_2}(\delta_2(s_0^2, q_1)) = 1, \ \ \chi_{F_2}(\delta_2(s_0^2, q_2)) = 1, \ \ \ldots, \ \ \chi_{F_2}(\delta_2(s_0^2, q_k)) = 1$$

или, другими словами,

$$\delta_1(s_0^1, p_1) \in F_1, \ \ \delta_1(s_0^1, p_2) \in F_1, \ \ \ldots, \ \ \delta_1(s_0^1, p_l) \in F_1,$$
$$\delta_2(s_0^2, q_1) \in F_2, \ \ \delta_2(s_0^2, q_2) \in F_2, \ \ \ldots, \ \ \delta_2(s_0^2, q_k) \in F_2.$$

Последние условия эквивалентны следующим:

$$p_1 \in L_1, p_2 \in L_1, \ldots, p_l \in L_1 \quad \text{и} \quad q_1 \in L_2, q_2 \in L_2, \ldots, q_k \in L_2,$$

т. е. $p \in L_1 \oplus L_2$. □

Замечание 24. Очевидно, что $(L_1 \oplus L_2)_{(i)} \subseteq L_1$ и $(L_1 \oplus L_2)^{(j)} \subseteq L_2$ при любых $i, j \geq 1$. Однако, в общем случае, $(L_1 \oplus L_2)_{(i)} \neq (L_1 \oplus L_2)_{(i')}$ при $i \neq i'$ и $(L_1 \oplus L_2)^{(j)} \neq (L_1 \oplus L_2)^{(j')}$ при $j \neq j'$. Поэтому языки L_1 и L_2 нельзя заменить на подходящие строчные и столбцовые языки для $L_1 \oplus L_2$, как это делалось в теоремах 14 и 17.

Действительно, пусть $L_1 = aa^* + bb^*, L_2 = a(ba)^*(b + \lambda)$. Тогда $L_1 \oplus L_2$ состоит из двумерных слов вида

$$\boxed{\begin{array}{ccccc} a & a & a & a & \ldots \\ b & b & b & b & \ldots \\ a & a & a & a & \ldots \\ b & b & b & b & \ldots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{array}}\,.$$

Тогда $(L_1 \oplus L_2)_{(2i-1)} = aa^*$, $(L_1 \oplus L_2)_{(2i)} = bb^*$ и $(L_1 \oplus L_2)^{(j)} = a(ba)^*(b + \lambda) = L_2$ при $i, j \geq 1$. Очевидно, что сочетание одномерных языков aa^* и L_2 дает двумерный язык aa^*, а сочетание одномерных языков bb^* и L_2 дает пустой двумерный язык. В обоих случаях, полученные двумерные языки не совпадают с $L_1 \oplus L_2$.

Замечание 25. Для построенного в теореме 23 регулярного двумерного языка $L_1 \oplus L_2$ вопрос о регулярности соответствующих ему строчных и столбцовых одномерных языков остался открытым.

Замечание 26. Принадлежность двумерных языков над алфавитом Σ, указанных в следствиях 15 и 18 и теореме 20, классу $\mathcal{L}_\Sigma(\text{2dota})$ теперь можно получить как следствие теоремы 23.

Действительно, если $L \in REG_1(\Sigma)$, то $L^{k\ominus}, \left(L^T\right)^{k\oplus}, L^{*\ominus}, \left(L^T\right)^{*\oplus} \in \mathcal{L}_\Sigma(\text{2dota})$, так как

$$L^{k\ominus} = L \oplus (\Sigma^k \cup \{\lambda\}), \qquad \left(L^T\right)^{k\oplus} = \left(\Sigma^k \cup \{\lambda\}\right) \oplus L,$$
$$L^{*\ominus} = (L \cup \{\lambda\}) \oplus \Sigma^*, \qquad \left(L^T\right)^{*\oplus} = \Sigma^* \oplus (L \cup \{\lambda\}).$$

3. Регулярные двумерные языки, построенные из нерегулярных одномерных языков

Известно, что язык $\{a^n b^n \mid n \geq 1\}$ – нерегулярный одномерный язык (см., например, [13]). Приведем "аналог" указанного языка в двумерном случае. В отличие от одномерного случая он будет регулярным.

Рассмотрим двумерный язык

$$L = \left\{ \begin{array}{|c|c|} \hline p & q \\ \hline q & p \\ \hline \end{array} \;\middle|\; \exists n > 0 \left(p \in \{a\}^{n\times n},\ q \in \{b\}^{n\times n} \right) \right\} \tag{1}$$

над алфавитом $\Sigma = \{a, b\}$.

Предложение 27. $L \in \mathcal{L}(\text{2dota})$.

Доказательство. Построим двумерный детерминированный автомат $A = (\Sigma, S, s_0, F, \delta)$, распознающий двумерный язык (1) над алфавитом $\Sigma = \{a, b\}$, где $S = \{0, 1, \ldots, 13\}$, $s_0 = 0$, $F = \{13\}$. Двумерные слова, принадлежащие двумерному языку (1), состоят из четырех квадратных блоков одинаковых размеров, поэтому двумерный автомат A должен уметь проверять, из каких букв состоит блок, блок – квадратный, размеры разных блоков совпадают.

Определим функцию перехода.

I) На левом верхнем блоке:
$\delta(0, 0, a) = \delta(2, 3, a) = 1$,
$\delta(0, 1, a) = \delta(0, 2, a) = \delta(2, 1, a) = \delta(2, 2, a) = 2$,
$\delta(1, 0, a) = \delta(3, 0, a) = \delta(1, 3, a) = \delta(3, 3, a) = 3$.

II) На правом верхнем блоке:
$\delta(0, 2, b) = \delta(5, 6, b) = 4$,
$\delta(0, 4, b) = \delta(0, 5, b) = \delta(5, 4, b) = \delta(5, 5, b) = 5$,
$\delta(4, 1, b) = \delta(4, 2, b) = \delta(6, 1, b) = \delta(6, 2, b) = \delta(4, 6, b) = \delta(6, 6, b) = 6$.

III) На левом нижнем блоке:
$\delta(3,0,b) = \delta(8,9,b) = 7$,
$\delta(1,7,b) = \delta(3,7,b) = \delta(1,8,b) = \delta(3,8,b) = \delta(8,7,b) = \delta(8,8,b) = 8$,
$\delta(7,0,b) = \delta(9,0,b) = \delta(7,9,b) = \delta(9,9,b) = 9$.

IV) На правом нижнем блоке:
$\delta(6,8,a) = \delta(6,10,a) = \delta(10,8,a) = \delta(10,10,a) = 10$,
$\delta(4,10,a) = \delta(11,10,a) = 11$,
$\delta(10,7,a) = \delta(10,12,a) = 12$,
$\delta(11,12,a) = 13$.

V) На блоке размера (2,2):
$\delta(0,1,b) = 4$, $\delta(1,0,b) = 7$, $\delta(4,7,a) = 13$.

В определении функции перехода не указаны те пары состояний, которые будут приводить в мусорное состояние (оно также не добавлено в множество состояний двумерного автомата A).

При работе на двумерных словах двумерного языка (1) двумерный автомат A проходит следующую прямоугольную таблицу состояний:

$$
\begin{array}{c|ccccc|ccccc|}
 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\
\hline
0 & 1 & 2 & 2 & \dots & 2 & 4 & 5 & 5 & \dots & 5 \\
0 & 3 & 1 & 2 & \dots & 2 & 6 & 4 & 5 & \dots & 5 \\
0 & 3 & 3 & 1 & \dots & 2 & 6 & 6 & 4 & \dots & 5 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
0 & 3 & 3 & 3 & \dots & 1 & 6 & 6 & 6 & \dots & 4 \\
\hline
0 & 7 & 8 & 8 & \dots & 8 & 10 & 10 & 10 & \dots & 11 \\
0 & 9 & 7 & 8 & \dots & 8 & 10 & 10 & 10 & \dots & 11 \\
0 & 9 & 9 & 7 & \dots & 8 & 10 & 10 & 10 & \dots & 11 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
0 & 9 & 9 & 9 & \dots & 7 & 12 & 12 & 12 & \dots & 13 \\
\hline
\end{array}
\quad \text{или} \quad
\begin{array}{c|cc|}
 & 0 & 0 \\
\hline
0 & 1 & 4 \\
0 & 7 & 13 \\
\hline
\end{array}.
$$

Функция перехода, работая на состояниях 1, 2, 3, определяет левый верхний квадратный блок из букв a, на состояниях 4–6 и 7–9 – определяет квадратные блоки из букв b такого же размера, что и левый верхний блок из букв a, на состояниях 10–13 – проверяет, что нижний правый блок состоит из букв a и его размеры определяются последним столбцом и последней строкой правого верхнего и левого нижнего блоков из букв b соответственно. Отдельно выделены значения функции перехода, которая распознает двумерное слово размера (2,2).

Легко видеть, что построенный двумерный автомат правильно работает на двумерных словах, состоящих из одной строки и одного столбца (соответствующие двумерные слова не распознаются построенным двумерным автоматом). Очевидно также, что построенный двумерный автомат правильно работает на двумерных словах размера (2,2).

Покажем, что он правильно работает на двумерных словах большего размера, т. е. двумерных словах, содержащих не менее двух строк и не менее двух столбцов. Для того, чтобы прийти в допускающее состояние 13, двумерный автомат должен прийти в состояние 10. Это возможно только в том случае, если встретилась команда $\delta(6,8,a)$, что возможно лишь в случае, если левый верхний блок из букв a – квадратный. Действительно, если левый верхний блок из букв a прямоугольный, но не квадратный, то в случае, когда число строк меньше числа столбцов, встретятся команды $\delta(2,8,x)$ или $\delta(2,7,x)$, которые приводят в мусорное состояние, в случае, когда число строк больше числа столбцов, встретятся команды $\delta(6,3,x)$ или $\delta(4,3,x)$, которые приводят в мусорное состояние (здесь x – произвольная буква алфавита Σ). В случае если нарушено “блочное” строение двумерного слова, то построенный двумерный автомат также придет в мусорное состояние. Таким образом, в обоих случаях соответствующее двумерное слово распознаваться не будет. Далее, состояние 13 может быть получено только как $\delta(11,12,a)$, которое определяется по последнему столбцу правого верхнего и последней строке левого нижнего блоков из букв b. Эти блоки из букв b являются квадратными и их размеры совпадают с размерами левого верхнего блока из букв a, следовательно, и правый нижний блок из букв a также квадратный и имеет такие же размеры, как три других блока. $\square$

На самом деле, выше уже доказана следующая

Теорема 28. *Существует* $L \in \mathcal{L}(\text{2dota})$ *такой, что* $L_{(i)}, L^{(j)} \notin REG_1$ *при любых* $i, j \geq 1$.

Доказательство. Примером такого языка является двумерный язык (1) из предложения 27, поскольку согласно построению, одномерные языки $L_{(i)}$ и $L^{(j)}$ $(i, j \geq 1)$ – это нерегулярные языки $\{a^n b^n \mid n \geq 1\}$ или $\{b^n a^n \mid n \geq 1\}$. $\square$

Замечание 29. Аналогично доказательству предложения 27 и теоремы 28 можно получить следующие результаты:

1) существует $L \in \mathcal{L}(\text{2dota})$ такой, что $L_{(i)} \notin REG_1$, $L^{(j)} \in REG_1$ при любых $i, j \geq 1$;
2) существует $L \in \mathcal{L}(\text{2dota})$ такой, что $L_{(i)} \in REG_1$, $L^{(j)} \notin REG_1$ при любых $i, j \geq 1$.

Действительно, примерами таких двумерных языков будут языки над алфавитом $\Sigma = \{a, b\}$ следующего вида:

- для условия 1):

$$L' = \left\{ \boxed{p \mid q} \;\middle|\; \exists n > 0 \left(p \in \{a\}^{n\times n},\ q \in \{b\}^{n\times n} \right) \right\};$$

- для условия 2):

$$L'' = \left\{ \begin{array}{|c|}\hline p \\ \hline q \\ \hline \end{array} \;\middle|\; \exists n > 0 \left(p \in \{a\}^{n\times n},\ q \in \{b\}^{n\times n} \right) \right\}.$$

Двумерные детерминированные автоматы, распознающие приведенные двумерные языки, аналогичны двумерному детерминированному автомату из предложения 27. Приведем двумерный автомат лишь для двумерного языка L'. Он должен проверять, является ли блок из букв a квадратным и имеет ли блок из букв b такие же размеры, что и блок из букв a. Пусть $A = (\Sigma, S, s_0, F, \delta)$, где $S = \{0, 1, \ldots, 8\}$, $s_0 = 0$, $F = \{8\}$.

Функция перехода:

I) На левом блоке:
$\delta(0,0,a) = \delta(2,3,a) = 1$,
$\delta(0,1,a) = \delta(0,2,a) = \delta(2,1,a) = \delta(2,2,a) = 2$,
$\delta(1,0,a) = \delta(3,0,a) = \delta(1,3,a) = \delta(3,3,a) = 3$.

II') На правом блоке:
$\delta(0,2,b) = \delta(5,6,b) = 4$,
$\delta(0,4,b) = \delta(0,5,b) = \delta(5,4,b) = \delta(5,5,b) = 5$,
$\delta(4,2,b) = \delta(6,2,b) = \delta(4,6,b) = \delta(6,6,b) = 6$,
$\delta(4,1,b) = \delta(6,1,b) = \delta(6,7,b) = \delta(4,7,b) = 7$,
$\delta(5,7,b) = 8$.

V') На блоке размера (1,2):
$\delta(0,1,b) = 8$.

Приведенные команды с незначительными изменениями повторяют команды двумерного автомата из предложения 27, состояния 7 и 8 в данном случае отслеживают последнюю строку в двумерном слове.

Двумерный автомат для двумерного языка L'' строится аналогично с подходящим видоизменением команд I), III), V).

Для приведенных языков $L'_{(i)} = L''^{(j)} = \{a^n b^n \mid n \geq 1\} \notin REG_1$ при любых $i, j \geq 1$ и $L'^{(j)}, L''_{(i)} \in REG_1$, поскольку это один из двух языков aa^* или bb^* при любых $i, j \geq 1$.

4. Нерегулярные двумерные языки и соответствующие им одномерные языки

Для доказательства основных результатов этого раздела потребуется очевидная лемма, которая приведена в [3] без доказательства, поскольку ее доказательство повторяет известные доказательства для "одномерных" конечных автоматов. Приведем доказательство для недетерминированного случая, в детерминированном случае проверка аналогична.

Лемма 30.

1) *Если* $L_1, L_2 \in \mathcal{L}(\text{2ota})$, *то* $L_1 \cap L_2, L_1 \cup L_2 \in \mathcal{L}(\text{2ota})$.
2) *Если* $L_1, L_2 \in \mathcal{L}(\text{2dota})$, *то* $L_1 \cap L_2, L_1 \cup L_2 \in \mathcal{L}(\text{2dota})$.

Доказательство. Пусть двумерные недетерминированные автоматы $A_1 = (\Sigma, S_1, I_1, F_1, \delta_1)$ и $A_2 = (\Sigma, S_2, I_2, F_2, \delta_2)$ распознают двумерные языки L_1 и L_2 соответственно. Построим декартово произведение этих двумерных автоматов, т. е. двумерный недетерминированный автомат $A = A_1 \times A_2 = (\Sigma, S, I, F, \delta)$, с подходящими настройками для объединения и пересечения. В двумерном автомате A множество состояний $S = S_1 \times S_2$, множество начальных состояний $I = I_1 \times I_2$, функция перехода $\delta((s_1, s_2), (s'_1, s'_2), x) = \delta_1(s_1, s'_1, x) \times \delta_2(s_2, s'_2, x)$.

Построенный двумерный автомат A с множеством допускающих состояний $F = \{(s_1, s_2) \mid s_1 \in F_1, s_2 \in F_2\}$ распознает $L_1 \cap L_2$. Действительно,

$$\delta((I_1, I_2), (I_1, I_2), p) \cap F \neq \emptyset \;\Leftrightarrow\; \delta_1(I_1, I_1, p) \times \delta_2(I_2, I_2, p) \cap F \neq \emptyset \;\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\; \delta_1(I_1, I_1, p) \cap F_1 \neq \emptyset \text{ и } \delta_2(I_2, I_2, p) \cap F_2 \neq \emptyset \;\Leftrightarrow\; p \in L_1 \text{ и } p \in L_2 \;\Leftrightarrow\; p \in L_1 \cap L_2.$$

Построенный двумерный автомат A с множеством допускающих состояний $F = \{(s_1, s_2) \mid s_1 \in F_1 \text{ или } s_2 \in F_2\}$ распознает $L_1 \cup L_2$, так как

$$\delta((I_1, I_2), (I_1, I_2), p) \cap F \neq \emptyset \;\Leftrightarrow\; \delta_1(I_1, I_1, p) \times \delta_2(I_2, I_2, p) \cap F \neq \emptyset \;\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\; \delta_1(I_1, I_1, p) \cap F_1 \neq \emptyset \text{ или } \delta_2(I_2, I_2, p) \cap F_2 \neq \emptyset \;\Leftrightarrow\; p \in L_1 \text{ или } p \in L_2 \;\Leftrightarrow\; p \in L_1 \cup L_2. \quad \square$$

Замечание 31. Очевидно, что если $L \in \mathcal{L}(\text{2dota})$, то $\overline{L} \in \mathcal{L}(\text{2dota})$. Действительно, в исходном двумерном детерминированном автомате нужно заменить допускающие состояния на не допускающие и наоборот. Однако, как показано в [4] и в [14] существует $L \in \mathcal{L}(\text{2ota})$ такой, что $\overline{L} \notin \mathcal{L}(\text{2ota})$.

Теорема 32. *Существует $L \notin REG_2$ такой, что $L_{(i)}, L^{(j)} \in REG_1$ при любых $i, j \geq 1$.*

Доказательство. Пусть $L = \{p \mid |p|_a = |p|_b\} \subseteq \{a, b\}^{**}$ – двумерный язык над алфавитом $\Sigma = \{a, b\}$, состоящий из двумерных слов, в которых количество букв a совпадает с количеством букв b. Двумерный язык L нерегулярен. Действительно, если бы $L \in REG_2$, то $L \cap \Sigma^* \in REG_2$ как пересечение регулярных двумерных языков. Но $L \cap \Sigma^*$ состоит из одномерных слов, т. е. $L \cap \Sigma^* \in REG_1$, с одинаковым количеством букв a и b, что противоречит его регулярности.

Очевидно, что $L_{(i)} = L^{(j)} = \Sigma^* \in REG_1$ при любых $i, j \geq 1$. $\square$

Теорема 33. *Существует $L \notin REG_2$ такой, что $L_{(i)}, L^{(j)} \notin REG_1$ при любых $i, j \geq 1$.*

Доказательство. Пусть $L_1 = \{p \mid |p|_a = |p|_b\} \subseteq \{a, b\}^*$ – одномерный язык над алфавитом $\Sigma = \{a, b\}$, состоящий из одномерных слов, в которых количество букв a совпадает с количеством букв b.

Рассмотрим двумерный язык $L = (L_1)^{*\ominus} \cap \left((L_1)^T\right)^{*\oplus}$, в котором

$$L_{(i)} = L^{(j)} = L_1 \notin REG_1$$

при любых $i, j \geq 1$. Докажем, что двумерный язык L нерегулярен. Если бы $L \in REG_2$, то $L_2 = L \cap (\Sigma^+ \ominus \Sigma^+) \in REG_2$ как пересечение двух регулярных двумерных языков. Двумерные слова двумерного языка L_2 содержат ровно две строки, причем в каждой строке и каждом столбце количество букв a совпадает с количеством букв b. Следовательно, вторая строка двумерного слова двумерного языка L_2 получена из первой строки заменой буквы a на b и буквы b на a. Двумерному языку L_2 над алфавитом Σ взаимнооднозначно сопоставляется одномерный язык L_2 над алфавитом $\left\{\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix},\begin{pmatrix}b\\a\end{pmatrix}\right\}$, состоящий из непустых слов с одинаковым количеством букв $\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix}b\\a\end{pmatrix}$. Согласно теореме 19, $L_2 \in REG_1\left(\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix},\begin{pmatrix}b\\a\end{pmatrix}\right)$, что противоречит его нерегулярности. □

Замечание 34. Аналогично доказательству теоремы 33 можно получить следующие результаты:

1) существует $L \notin REG_2$ такой, что $L_{(i)} \notin REG_1$, $L^{(j)} \in REG_1$ при любых $i, j \geq 1$;
2) существует $L \notin REG_2$ такой, что $L_{(i)} \in REG_1$, $L^{(j)} \notin REG_1$ при любых $i, j \geq 1$.

Действительно, примерами таких двумерных языков будут языки $L' = (L_1)^{*\ominus}$ и $L'' = \left((L_1)^T\right)^{*\oplus}$ (где L_1 – одномерный язык из доказательства теоремы 33). Первый двумерный язык состоит из двумерных слов, в каждой строке которых количество букв a совпадает с количеством букв b, второй – из двумерных слов, в каждом столбце которых количество букв a совпадает с количеством букв b. Таким образом, $L'_{(i)} = L''^{(j)} = L_1 \notin REG_1$ и $L'^{(j)} = L''_{(i)} = \Sigma^* \in REG_1$ при любых $i, j \geq 1$. Доказательства нерегулярности приведенных двумерных языков L_1 и L_2 аналогичны доказательству в теореме 33.

Заключение

Сформулируем в общем виде основные полученные в работе результаты. Из теоремы 28 и замечаний 22, 29 следует

Теорема 35. *Для каждого из приведенных условий существует* $L \in \mathcal{L}(\text{2dota})$ (*следовательно,* $L \in REG_2$), *который ему удовлетворяет*:

a) $L_{(i)}, L^{(j)} \in REG_1$ *при любых* $i, j \geq 1$;
b) $L_{(i)}, L^{(j)} \notin REG_1$ *при любых* $i, j \geq 1$;
c) $L_{(i)} \notin REG_1$, $L^{(j)} \in REG_1$ *при любых* $i, j \geq 1$;
d) $L_{(i)} \in REG_1$, $L^{(j)} \notin REG_1$ *при любых* $i, j \geq 1$.

Теоремы 32, 33 и замечание 34 в общем виде дают следующий результат:

Теорема 36. *Для каждого из приведенных условий существует* $L \notin REG_2$, *который ему удовлетворяет:*

a) $L_{(i)}, L^{(j)} \in REG_1$ *при любых* $i, j \geq 1$;
b) $L_{(i)}, L^{(j)} \notin REG_1$ *при любых* $i, j \geq 1$;
c) $L_{(i)} \notin REG_1$, $L^{(j)} \in REG_1$ *при любых* $j \geq 1$;
d) $L_{(i)} \in REG_1$, $L^{(j)} \notin REG_1$ *при любых* $j \geq 1$.

Таким образом, в работе показано, что могут быть реализованы восемь основных соотношений между регулярностью и нерегулярностью двумерных и соответствующих им одномерных языков.

Авторы выражают благодарность Селиванову Виктору Львовичу за вопросы, связанные с нерегулярными двумерными языками, благодаря которым работа приобрела законченный вид. Также авторы благодарят рецензента за то, что обратил их внимание на статью [6].

Список литературы

[1] D. Giammarresi, A. Restivo, *Two-dimensional languages*, in: G. Rozenberg, A. Salomaa (eds), Handbook of formal languages, Vol. 3, Springer, Berlin, 215–267 (1997).
DOI: https://doi.org/10.1007/978-3-642-59126-6_4

[2] M. Blum, C. Hewitt, *Automata on a 2-dimensional tape*, Proceedings of the 8th Annual Symposium on Switching and Automata Theory, IEEE Computer Society, Washington, 155–160 (1967).
DOI: https://doi.org/10.1109/FOCS.1967.6

[3] K. Inoue, A. Nakamura, *Some properties of two-dimensional on-line tessellation acceptors*, Inform. Sci. **13** (2), 95–121 (1977).
DOI: https://doi.org/10.1016/0020-0255(77)90023-8

[4] A. Szepietowski, *Two-dimensional on-line tessellation acceptors are not closed under complement*, Inform. Sci. **64** (1–2), 115–120 (1992).
DOI: https://doi.org/10.1016/0020-0255(92)90114-N

[5] M. Anselmo, D. Giammarresi, M. Madonia, A. Restivo, *Unambiguous recognizable two-dimensional languages*, RAIRO Theor. Inform. Appl. **40** (2), 277–293 (2006).
DOI: https://doi.org/10.1051/ita:2006008

[6] N. Vijayaraghavan, N. Jansirani, V.R. Dare, *Two dimensional rough online tesselation automaton and its properties*, J. Math. Comput. Sci. **11** (3), 3482-3495 (2021).
DOI: https://doi.org/10.28919/jmcs/5739

[7] D. Giammarresi, A. Restivo, *Recognizable picture languages*, Int. J. Pattern Recognit. Artif. Intell. **6** (2–3), 241–256 (1992).
DOI: https://doi.org/10.1142/S021800149200014X

[8] K. Inoue, I. Takanami, *A characterization of recognizable picture*, Int. J. Pattern Recognit. Artif. Intell. **8** (2), 501–508 (1994).
DOI: https://doi.org/10.1142/S0218001494000255

[9] S. Eilenberg, *Automata, languages and machines*, Vol. A, in: Pure Appl. Math. **58**, New York, Academic Press, 1974.

[10] D. Giammarresi, A. Restivo, S. Seibert, W. Thomas, *Monadic second order logic over rectangular pictures and recognizability by tiling systems*, Inform. and Comput. **125** (1), 32–45 (1996).
DOI: https://doi.org/10.1006/inco.1996.0018

[11] J.R. Büchi, *Weak second-order arithmetic and finite automata*, Z. Math. Logik Grundlagen Math. **6**, 66–92 (1960).
DOI: https://doi.org/10.1002/malq.19600060105

[12] K. Inoue, I. Takanami, A. Nakamura, *A note on two-dimensional finite automata*, Information Processing Lett. **7** (1), 49–52 (1978).
DOI: https://doi.org/10.1016/0020-0190(78)90040-6

[13] Д. Хопкрофт, Р. Мотвани, Дж. Ульман, *Введение в теорию автоматов, языков и вычислений*, Издательский дом "Вильямс", М., 2008.

[14] K. Inoue, A. Nakamura, *Nonclosure properties of two-dimensional on-line tessellation acceptors and one way parallel sequential array acceptors*, Proc. IECE of Japan Trans. (E) **60** (9), 475–476 (1977).

Наталья Николаевна Корнеева
Казанский (Приволжский) федеральный университет,
ул. Кремлевская, д. 18, г. Казань, 420008, Россия,
e-mail: Natalia.Korneeva@kpfu.ru

Лилия Альбирусовна Гизатуллина
Казанский (Приволжский) федеральный университет,
ул. Кремлевская, д. 18, г. Казань, 420008, Россия,
e-mail: glilia99@mail.ru

Volume 3, Issue 2
pp. 32–57 (2025)

UDC 519.713
MSC 68Q45

Correlation of regularity of two-dimensional and corresponding one-dimensional languages

N.N. Korneeva, L.A. Gizatullina

Abstract. We prove relations between regularity of two-dimensional and one-dimensional languages. Each two-dimensional language is corresponded to two sequences of one-dimensional languages corresponding to rows and columns of the two-dimensional language. For each of the following conditions the existence of both regular and nonregular two-dimensional languages is proved: all row and all column languages are regular; all row languages are regular, all column languages are nonregular; all column languages are regular, all row languages are nonregular; both all row and all column languages are nonregular.

Keywords: regular language, two-dimensional language, finite automaton, two-dimensional on-line tessellation automaton.

DOI: 10.26907/2949-3919.2025.2.32-57

References

[1] D. Giammarresi, A. Restivo, *Two-dimensional languages*, in: G. Rozenberg, A. Salomaa (eds), Handbook of formal languages, Vol. 3, Springer, Berlin, 215–267 (1997).
DOI: https://doi.org/10.1007/978-3-642-59126-6_4

[2] M. Blum, C. Hewitt, *Automata on a 2-dimensional tape*, Proceedings of the 8th Annual Symposium on Switching and Automata Theory, IEEE Computer Society, Washington, 155–160 (1967).
DOI: https://doi.org/10.1109/FOCS.1967.6

[3] K. Inoue, A. Nakamura, *Some properties of two-dimensional on-line tessellation acceptors*, Inform. Sci. **13** (2), 95–121 (1977).
DOI: https://doi.org/10.1016/0020-0255(77)90023-8

[4] A. Szepietowski, *Two-dimensional on-line tessellation acceptors are not closed under complement*, Inform. Sci. **64** (1–2), 115–120 (1992).
DOI: https://doi.org/10.1016/0020-0255(92)90114-N

[5] M. Anselmo, D. Giammarresi, M. Madonia, A. Restivo, *Unambiguous recognizable two-dimensional languages*, RAIRO Theor. Inform. Appl. **40** (2), 277–293 (2006).
DOI: https://doi.org/10.1051/ita:2006008

Received: 19 September 2024. Accepted: 02 July 2025. Published: 16 July 2025.

[6] N. Vijayaraghavan, N. Jansirani, V.R. Dare, *Two dimensional rough online tesselation automaton and its properties*, J. Math. Comput. Sci. **11** (3), 3482-3495 (2021).
DOI: https://doi.org/10.28919/jmcs/5739

[7] D. Giammarresi, A. Restivo, *Recognizable picture languages*, Int. J. Pattern Recognit. Artif. Intell. **6** (2–3), 241–256 (1992).
DOI: https://doi.org/10.1142/S021800149200014X

[8] K. Inoue, I. Takanami, *A characterization of recognizable picture*, Int. J. Pattern Recognit. Artif. Intell. **8** (2), 501–508 (1994).
DOI: https://doi.org/10.1142/S0218001494000255

[9] S. Eilenberg, *Automata, languages and machines*, Vol. A, in: Pure Appl. Math. **58**, Academic Press, New York, 1974.

[10] D. Giammarresi, A. Restivo, S. Seibert, W. Thomas, *Monadic second order logic over rectangular pictures and recognizability by tiling systems*, Inform. and Comput. **125** (1), 32–45 (1996).
DOI: https://doi.org/10.1006/inco.1996.0018

[11] J.R. Büchi, *Weak second-order arithmetic and finite automata*, Z. Math. Logik Grundlagen Math. **6**, 66–92 (1960).
DOI: https://doi.org/10.1002/malq.19600060105

[12] K. Inoue, I. Takanami, A. Nakamura, *A note on two-dimensional finite automata*, Information Processing Lett. **7** (1), 49–52 (1978).
DOI: https://doi.org/10.1016/0020-0190(78)90040-6

[13] J.E. Hopcroft, R. Motwani, J.D. Ullman, *Introduction to automata theory, languages, and computation*, Addison-Wesley, MA, 2001.

[14] K. Inoue, A. Nakamura, *Nonclosure properties of two-dimensional on-line tessellation acceptors and one way parallel sequential array acceptors*, Proc. IECE of Japan Trans. (E) **60** (9), 475–476 (1977).

Natalia Nikolaevna Korneeva
Kazan Federal University,
18 Kremlyovskaya str., Kazan 420008, Russia,
e-mail: Natalia.Korneeva@kpfu.ru

Liliya Albirusovna Gizatullina
Kazan Federal University,
18 Kremlyovskaya str., Kazan 420008, Russia,
e-mail: glilia99@mail.ru

Том 3, Выпуск 2 УДК 510.643
Стр. 58–84 (2025) MSC 03B45

Влияние аксиомы связности на сложность модальной логики

К.М. Мясников, А.В. Кудинов

Аннотация. Доказывается, что для слабо транзитивных логик с универсальной модальностью, проверку выполнимости формулы для которых можно произвести в PSPACE, добавление аксиомы связности не увеличивает сложность этой проверки, причем строится явный алгоритм, который решает эту задачу.

Ключевые слова: модальная логика, алгоритмическая сложность, аксиома связности, универсальная модальность, слабо транзитивные логики, задача выполнимости.

DOI: 10.26907/2949-3919.2025.2.58-84

Введение

В этой работе изучается вопрос алгоритмической сложности модальных логик с универсальной модальностью. Модальная логика широко используется как формализм для описания свойств различных структур, таких как графы, порядки, топологические пространства и динамические системы. При этом вопрос выполнимости формул во многих случаях остается разрешимым, что выгодно отличает модальную логику от логики предикатов, в которой гораздо чаще встречаются неразрешимость задачи выполнимости. Но базовый язык модальной логики, состоящий из одной модальности, которую чаще всего обозначают $\Box$, обладает ограниченной выразительной силой. В литературе встречаются различные способы усилить выразительную силу модального языка, сохраняющие при этом разрешимость. Одним из таких способов является обогащение языка универсальной модальностью (см. [1]). В частности, при таком обогащении оказывается возможным выразить свойство связности, не выразимой в базовом языке. Аксиома связности была предложена в работе В. Шехтмана [2]. В этой работе В. Шехтман доказал полноту логики S4.UC относительно класса связных шкал Крипке, класса связных топологических пространств и, более того, относительно произвольного связного плотного в себе сепарабельного метрического пространства. Топология – это только одна область применения модальной логики и аксиомы связности. Модальные логики связных структур могут представлять интерес и в других областях математики и теоретической информатики.

Поступила: 02.07.2024. Принята: 11.02.2025. Опубликована: 16.07.2025.

Под сложностью проблемы выполнимости некоторой модальной логики L в данной работе понимается сложность следующей массовой задачи: *по данной формуле A определить, выполнима ли формула A на некоторой шкале логики* L. При условии полноты логики L, эта задача является двойственной к задаче выводимости в логике, так как формула A выводима в L тогда и только тогда, когда формула $\neg A$ невыполнима на шкале логики L. Одной из первых работ о сложности проблемы выполнимости для модальных логик с универсальной модальностью является работа Е. Гемаспаандры [3]. В ней автор показывает, что существуют такие разрешимые модальные логики, добавление универсальной модальности к которым приводит к неразрешимости. Но в случае, когда исходная логика транзитивна, например $\mathsf{S4}$, добавление универсальной модальности не приводит к увеличению сложности. В частности, логики $\mathsf{S4.U}$, $\mathsf{K4.U}$ и $\mathsf{D4.U}$ являются PSPACE-полными.

В данной работе мы сосредоточим внимание на алгоритмической сложности проблемы выполнимости модальных формул в языке с универсальной модальностью на классе связных шкал Крипке. Шкала Крипке называется *связной*, если она слабо связна как ориентированный граф.

Мы будем рассматривать расширения логики

$$\mathsf{wK4} = \mathsf{K} + \Box p \wedge p \to \Box\Box p.$$

Эта логика полна относительно класса слабо транзитивных шкал, т. е. шкал, в которых рефлексивное замыкание отношения R транзитивно.

Для модальной логики L минимальное расширение этой логики универсальной модальностью мы будем обозначать $\mathsf{L.U}$. Аксиоматизация логики $\mathsf{L.U}$ приведена в [1]. Формула

$$AC = \boxed{u}((\Box p \wedge p) \vee (\Box\neg p \wedge \neg p)) \to (\boxed{u}p \vee \boxed{u}\neg p)$$

выражает свойство связности шкалы. Логику, расширенную этой аксиомой, мы будем обозначать $\mathsf{L.UC} = \mathsf{L.U} + AC$.

Основным результатом работы является то, что если задача выполнимости в классе конечных шкал некоторой слабо транзитивной логики L лежит в PSPACE, то и задача выполнимости в классе конечных шкал логики $\mathsf{L.UC}$ лежит в PSPACE.

В частности, из этого следует, что логики $\mathsf{wK4.UC}$, $\mathsf{K4.UC}$, $\mathsf{D4.UC}$ и $\mathsf{S4.UC}$ являются PSPACE полными. Принадлежность к PSPACE для $\mathsf{wK4}$ была доказана в [4].

1. Определения и известные результаты

1.1. Синтаксис

Определение 1. Пусть $\mathcal{I}$ – множество, которое понимается как множество индексов модальных операторов, $\mathcal{P}$ – множество переменных. Множество $\mathcal{L}(\mathcal{I})$ модальных формул определяется рекурсивно:

- если $p \in \mathcal{P}$, то $p \in \mathcal{L}(\mathcal{I})$;

- если $\phi, \psi \in \mathcal{L}(\mathcal{I})$, то $(\phi \wedge \psi), \neg\phi \in \mathcal{L}(\mathcal{I})$;
- если $\phi \in \mathcal{L}(\mathcal{I})$, $a \in \mathcal{I}$, то $[a]\phi \in \mathcal{L}(\mathcal{I})$.

Зачастую $\mathcal{I}$ будет опускаться.

Также под модальным оператором $\langle a \rangle$ будем понимать $\neg[a]\neg$, а формулы $\phi \vee \psi$ и $\phi \to \psi$ выражаются через конъюнкцию и отрицание. Мы также будем опускать скобки, если их можно восстановить, пользуясь ассоциативностью и стандартным приоритетом операций.

В данной работе будут использоваться операторы $\Box$, $\Diamond$, $\boxed{u}$, $\Diamond_u$, $\boxed{*}$, $\Diamond_*$, через $\mathcal{L}$ будем обозначать язык с операторами $\Box$, $\Diamond$; через $\mathcal{L}_{\boxed{u}}$ – с операторами $\Box$, $\Diamond$, $\boxed{u}$, $\Diamond_u$; через $\mathcal{L}_{\boxed{*}}$ – с операторами $\Box$, $\Diamond$, $\boxed{*}$, $\Diamond_*$; через $\mathcal{L}_{\boxed{u}\boxed{*}}$ – с операторами $\Box$, $\Diamond$, $\boxed{u}$, $\Diamond_u$, $\boxed{*}$, $\Diamond_*$.

Определение 2. *Длиной* (*или размером*) *формулы* ϕ будем называть количество ее подформул (различные вхождения одной подформулы считаем столько раз, сколько этих вхождений), и обозначать через $|\phi|$.

Определение 3. *$\mathcal{I}$-модальной логикой* будем называть множество формул, являющееся подмножеством $\mathcal{L}(\mathcal{I})$, содержащее все тавтологии логики высказываний, аксиомы $[a](p \to q) \to ([a]p \to [a]q)$, где $a \in \mathcal{I}$, p и q – переменные, и замкнутое относительно правил вывода Sub $\left(\dfrac{\phi(p)}{\phi(\psi)}\right)$, Modus Ponens $\left(\dfrac{\phi, \phi \to \psi}{\psi}\right)$ и Nec $\left(\dfrac{\phi}{[a]\phi}\right)$, где $a \in \mathcal{I}$.

Минимальную модальную логику с одним модальным оператором будем обозначать K. Через $\mathsf{L} + A$, где L – модальная логика, A – множество формул, будем обозначать наименьшую логику, содержащую все формулы из $\mathsf{L} \cup A$. Если ϕ – формула, будем обозначать $\mathsf{L} + \{\phi\}$ через $\mathsf{L} + \phi$.

1.2. Семантика. В данной работе мы будем работать в основном с классами конечных шкал. Следствия основных результатов работы, касающиеся сложности проблем выводимости в модальных логиках, мы обсудим в разделе 6.

Определение 4. Будем называть *$\mathcal{I}$-шкалой Крипке* пару $F = \langle W, \{R_a\}_{a \in \mathcal{I}} \rangle$, где W – непустое множество, элементы которого называются мирами, и для каждого $a \in \mathcal{I}$ $R_a \subseteq W \times W$ – отношение достижимости. Множество W называется *носителем* F.

Замечание 5. В этой работе чаще всего будут встречаться конечные шкалы, поэтому, если не сказано иное, будем считать, что шкалы конечны.

Определение 6. *Моделью* называется пара $M = \langle F, V \rangle$, где $F = \langle W, \{R_a\}_{a \in \mathcal{I}} \rangle$ – шкала Крипке, $V : \mathcal{P} \to 2^W$ – оценка, причем $V(p)$ понимается как множество миров, в которых p истинна. Отношение истинности ($\models$) формул в мирах данной модели определяется по индукции:

- если $p \in \mathcal{P}$ – переменная, то $M, w \models p \iff w \in V(p)$;
- $M, w \models \phi \wedge \psi \iff M, w \models \phi$ и $M, w \models \psi$;
- $M, w \models \neg\phi \iff M, w \not\models \phi$;

- $M, w \models [a]\phi \iff \forall w' \; (wR_a w' \Rightarrow M, w' \models \phi)$.

Замечание 7. Из определения модальности $\langle a \rangle$ следует, что

$$M, w \models \langle a \rangle \phi \iff \exists w' \; (wR_a w' \wedge M, w' \models \phi).$$

Будем говорить, что формула ϕ *верна в модели* M ($M \models \phi$), если $\forall w \; M, w \models \phi$, и *выполнима в модели* M, если $\exists w \; M, w \models \phi$.

Будем говорить, что формула ϕ *общезначима в шкале* F ($F \models \phi$), если $\forall V \; \langle F, V \rangle \models \phi$, и *выполнима в шкале* F, если существует V, такая что ϕ выполнена в $\langle F, V \rangle$.

Будем говорить, что формула ϕ *общезначима в классе шкал* $\mathcal{F}$, если $\forall F \in \mathcal{F} \; (F \models \phi)$, и *выполнима в классе шкал* $\mathcal{F}$, если существует $F \in \mathcal{F}$, такая, что ϕ выполнима в F.

Определение 8. *Сужением шкалы* $F = \langle W, \{R_a\}_{a \in \mathcal{I}} \rangle$ *на множество* $W' \subseteq W$ будем называть шкалу $\langle W', \{R_a \cap (W' \times W')\}_{a \in \mathcal{I}} \rangle$ и обозначать через $F|_{W'}$.

Определение 9. *Сужение модели* $M = \langle F, V \rangle$ *на множество* $W' \subseteq W$, *где* W *– множество миров* F будем называть модель $\langle F|_{W'}, V' \rangle$, где $V'(p) = V(p) \cap W'$ для всех $p \in \mathcal{P}$, и обозначать через $M|_{W'}$.

1.3. Универсальный и транзитивный операторы, связность. Здесь и далее считаем, что в рассматриваемых нами шкалах есть одно отношение R, которое мы будем называть базовым, и соответствующий модальный оператор $\Box$. Также шкалы могут содержать порожденные R универсальное и/или рефлексивно-транзитивное замыкание (определены ниже). Наличие этих отношений в каждом случае будет обозначено явно. Свойства шкалы, такие как слабая связность, транзитивность, рефлексивность и другие будут относиться только к отношению R.

Определение 10. Пусть $F = \langle W, R \rangle$ – шкала Крипке. Будем писать $F_{\boxed{u}} = \langle W, \{R, R_u\} \rangle$, где $R_u = W \times W$. Оператор, соответствующий отношению R_u, будем обозначать $\boxed{u}$.

Определение 11. Пусть $F = \langle W, R \rangle$ – шкала Крипке. Будем писать $F_{\boxed{*}} = \langle W, \{R, R^*\} \rangle$, где

$$wR^*w' \iff \exists (w_1, w_2, \ldots, w_n) \; w_1 = w \wedge w_n = w' \wedge w_i R w_{i+1}, \quad (n \geqslant 1),$$

т. е. R^* – рефлексивно-транзитивное замыкание R. Модальность, соответствующую отношению R^*, будем обозначать $\boxed{*}$.

Также обозначим $F_{\boxed{u}\boxed{*}} = \langle W, \{R, R_u, R^*\} \rangle$. Если $\mathcal{F}$ – класс шкал, то $\mathcal{F}_{\boxed{u}} = \{F_{\boxed{u}}|_F \in \mathcal{F}\}$, аналогично для $\mathcal{F}_{\boxed{*}}, \mathcal{F}_{\boxed{u}\boxed{*}}$.

Определение 12. Шкала $F = \langle W, \{R_a\}_{a \in \mathcal{I}} \rangle$ называется *слабо связной по отношениям* $\{R_b\}_{b \in \mathcal{J}}$ (где $\mathcal{J} \subseteq \mathcal{I}$), если для любых w, w' существуют $w_1, w_2, \ldots, w_n$ такие, что $w = w_1$, $w' = w_n$, а также для всех i от 1 до $n - 1$ выполнено $w_i R_b w_{i+1}$, или $w_{i+1} R_b w_i$ для некоторого $b \in \mathcal{J}$ (причем для разных i могут подойти разные $b \in \mathcal{J}$). Такое отношение между вершинами w, w' назовем *отношением слабой достижимости.*

Лемма 13. *Отношение слабой достижимости является отношением эквивалентности.*

Доказательство оставим читателю.

Если $\mathcal{C}$ – класс шкал с базовым отношением R и, возможно, с порожденными универсальным и/или транзитивным отношениями, то определим

$$\mathcal{C}^{AC} = \{F \in \mathcal{C} \mid F \text{ – слабо связно по } R\}.$$

Определение 14. Введем отношение эквивалентности на шкале F с базовым отношением R: $w \sim_R w' \iff (wR^*w' \wedge w'R^*w)$. Классы эквивалентности по этому отношению будем называть *сгустками*. Проще говоря, сгустки – компоненты сильной связности ориентированного графа с ребрами R.

Определение 15. Сгусток F' в шкале F называется *максимальным*, если для любых w', w из того, что $w' \in F'$ и $w'Rw$, следует, что $w \in F'$.

Определение 16. Подшкала F' шкалы $F = \langle W, R\rangle$ называется *порожденной*, если

$$\forall w' \in F' \ \forall w \in F \ (w'R^*w \Rightarrow w \in F').$$

Определение 17. Подшкала F' шкалы F называется *корневой* с корнем w, если

$$\forall w' \in F \ (wR^*w' \iff w' \in F').$$

Замечание 18. Корневая подшкала всегда является порожденной.

Определение 19. Шкала F называется *слабо транзитивной*, если для всех $x, y, z \in F$

$$xRy \wedge yRz \wedge x \neq z \Rightarrow xRz.$$

1.4. Связь логик и классов шкал

Определение 20. Пусть $\mathcal{C}$ – класс шкал Крипке. *Логикой* класса $\mathcal{C}$ называют множество формул

$$Log(\mathcal{C}) = \{A \mid \forall F \in \mathcal{C} \ (F \models A)\}.$$

Определение 21. Пусть L – $\mathcal{I}$-логика. *Классом $\mathcal{I}$-шкал, порожденных* L, называют

$$Fr(\mathsf{L}) = \{F = \langle W, \{R_a\}_{a\in\mathcal{I}}\rangle \mid \forall \phi \in \mathsf{L} \ F \models \phi\}.$$

Классом конечных $\mathcal{I}$-шкал называют

$$Fr_{fin}(\mathsf{L}) = \{F \mid F \in Fr(L) \text{ и } F \text{ – конечна}\}.$$

Определение 22. Функция $f : W \to U$ называется *p-морфизмом* шкалы $F = \langle W, \{R_a\}_{a\in\mathcal{I}}\rangle$ на шкалу $G = \langle U, \{S_a\}_{a\in\mathcal{I}}\rangle$, если

1) f является сюръекцией;
2) $xR_a y \Rightarrow f(x)S_a f(y)$ (монотонность);
3) $f(x)S_a u \Rightarrow \exists y\ f(y) = u$ и $xR_a y$ (поднятие).

Обозначение: $f : F \twoheadrightarrow G$.

Следующая теорема хорошо известна (см. [5]).

Теорема 23 (о p-морфизме). *Пусть $F \twoheadrightarrow G$. Тогда $Log(F) \subseteq Log(G)$.*

Определение 24. Шкалы $F_1 = \langle W_1, \{R_a^1\}_{a\in\mathcal{I}}\rangle$ и $F_2 = \langle W_2, \{R_a^2\}_{a\in\mathcal{I}}\rangle$ называются *изоморфными* (обозначается $F_1 \cong F_2$), если существует биекция $f : W_1 \to W_2$ со свойством

$$\forall a \in \mathcal{I}\ wR_a^1 w' \iff f(w)R_a^2 f(w').$$

Определение 25. Логика L называется *полной по Крипке относительно класса $\mathcal{F}$*, если $Log(\mathcal{F}) = \mathsf{L}$.

Если логика L полна по Крипке относительно класса $\mathcal{F}$, то $\phi \in \mathsf{L}$ равносильно общезначимости ϕ во всех шкалах класса $\mathcal{F}$, что в свою очередь равносильно невыполнимости $\neg\phi$ в классе $\mathcal{F}$. Таким образом, задачи выполнимости и общезначимости – двойственные.

1.5. Логики и аксиомы. В этой работе нас будут интересовать слабо транзитивные шкалы и логики классов таких шкал. Наименьшей такой логикой является $\mathsf{wK4} = \mathsf{K} + (p \wedge \Box p) \to \Box\Box p$. Полнота этой логики относительно класса всех слабо транзитивных шкал была доказана в [6]. Финитная аппроксимируемость $\mathsf{wK4}$ была доказана в [7].

Среди таких логик есть широко известные логики, такие как логика класса всех транзитивных шкал $\mathsf{K4} = \mathsf{K} + \Box p \to \Box\Box p$ и логика класса всех рефлексивно-транзитивных шкал $\mathsf{S4} = \mathsf{K4} + \Box p \to p$. Соответствующие теоремы о полноте можно найти в [8].

Теорема 26. *Аксиома AC (см. введение) общезначима в шкале $F = \langle W, \{R, R_u\}\rangle$ тогда и только тогда, когда шкала F слабо связна по отношению R.*

Доказательство импликации слева направо. Докажем контрапозицию, т. е. если F не слабо связна, то AC не общезначима. Из того, что F не слабо связна следует, что $W = W_1 \sqcup W_2$, где $W_1, W_2 \neq \varnothing$, W_1, W_2 – объединения классов эквивалентности отношения слабой достижимости. Рассмотрим оценку V на шкале F, такую, что $V(p) = W_1$. Тогда в модели $M = \langle F, V\rangle$ опровергается аксиома AC, так как в любом мире ее посылка верна, а заключение – нет.

Доказательство импликации справа налево. Предположим, что AC не общезначима. Следовательно, существует оценка V шкалы F (обозначим $M = \langle F, V \rangle$) и мир $w_0 \in F$ такие, что:

1) $M, w_0 \models \boxed{u}((\Box p \wedge p) \vee (\Box\neg p \wedge \neg p))$, т. е. $\forall w\ M, w \models (\Box p \wedge p) \vee (\Box\neg p \wedge \neg p)$;
2) $M, w_0 \not\models \boxed{u}p \vee \boxed{u}\neg p$, т. е. $\exists u_1\ M, u_1 \models p$ и $\exists u_2\ M, u_2 \models \neg p$.

Из пункта 1 следует, что если wRw', то выполнено $\Box p \wedge p$ или $\Box\neg p \wedge \neg p$, следовательно, выполнена равносильность $M, w \models p \iff M, w' \models p$.

Но, по определению слабой связности, найдется путь между u_1 и u_2. Используя наблюдение выше, индукцией по длине пути легко доказать, что $M, u_1 \models p \iff M, u_2 \models p$, что противоречит пункту 2. $\Box$

1.6. Сложностные классы. Формальные определения понятий теории сложностей можно найти в [9], здесь мы дадим лишь неформальные определения сложностных классов PSPACE и $\mathsf{NPSPACE}$.

Определение 27. Множество формул Ω лежит в классе PSPACE, если существует машина Тьюринга M_T и многочлен $p(n)$ такие, что:

- $M_T(\phi) = \begin{cases} 1, & \text{если } \phi \in \Omega, \\ 0 & \text{иначе;} \end{cases}$
- на входе длины n машина M_T использует не более $p(n)$ клеток на ленте.

Определение 28. Множество формул Ω лежит в классе $\mathsf{NPSPACE}$, если существует алгоритм (машина Тьюринга) M_T и многочлен $p(n)$, такие, что:

- если $w \in \Omega$, то $\exists s : |s| < p(|w|) \wedge M_T(w, s) = 1$;
- если $w \notin \Omega$, то $\forall s : |s| < p(|w|) \Rightarrow M_T(w, s) = 0$;
- на входе длины n машина M_T использует только полиномиальное от n количество клеток на ленте.

Доказательство следующей теоремы также можно найти в [9].

Теорема 29. $\mathsf{PSPACE} = \mathsf{NPSPACE}$.

Если $\mathcal{C}$ – класс шкал, то через $\mathcal{C} - sat$ будем обозначать множество выполнимых в этом классе формул:

$$\{\phi \mid \phi \text{ выполнима в } \mathcal{C}\}.$$

2. Вытянутые шкалы

В этом разделе будет строиться преобразование шкалы, сохраняющее выполнимость данной формулы и общезначимость всех формул, приводящее ее в удобный вид. Построение и доказательство во многом повторяет доказательство [2, теорема 14], но с несколькими важными изменениями, благодаря которым оно будет работать не только для $\mathsf{S4}$-шкал, но и для произвольной шкалы.

Также в этом разделе будем считать, что шкалы унимодальны, т. е. имеют лишь одно отношение R. Будем отождествлять шкалу с ориентированным графом (имеется ребро из x в y, если xRy).

Определение 30. Шкалу $F = \langle W, R\rangle$ назовем *вытянутой*, если найдутся такие

$$F_1 = F|_{W_1}, \quad F_2 = F|_{W_2}, \ldots, \; F_n = F|_{W_n},$$
$$\widehat{F}_1 = F|_{\widehat{W}_1}, \quad \widehat{F}_2 = F|_{\widehat{W}_2}, \ldots, \; \widehat{F}_m = F|_{\widehat{W}_m},$$
$$1 = i_0 < i_1 < i_2 < \cdots < i_{m-1} < i_m = n,$$

удовлетворяющие условиям:

1) $W_1 \cup W_2 \cup \ldots \cup W_n = W$;
2) все F_i – корневые порожденные подшкалы;
3) все $\widehat{F}_i$ – непересекающиеся максимальные сгустки;
4) если $i \neq j$, то $F_i \cap F_j = \begin{cases} \widehat{F}_k, \text{ если } i_{k-1} \leqslant i \leqslant i_k \text{ и } i_{k-1} \leqslant j \leqslant i_k, \\ \varnothing \text{ иначе.} \end{cases}$

Подшкалы $F_{i_1}, F_{i_2}, \ldots, F_{i_{m-1}}$ будем называть *основными*, все остальные F_i – *висячими*, $\widehat{F}_i$ – *связующими сгустками.*

Неформально говоря, вытянутая шкала – это шкала, составленная из последовательности корневых порожденных подшкал, причем соседние сцеплены по сгустку и никаких других пересечений не имеющие. Пример изображен на рис. 1.

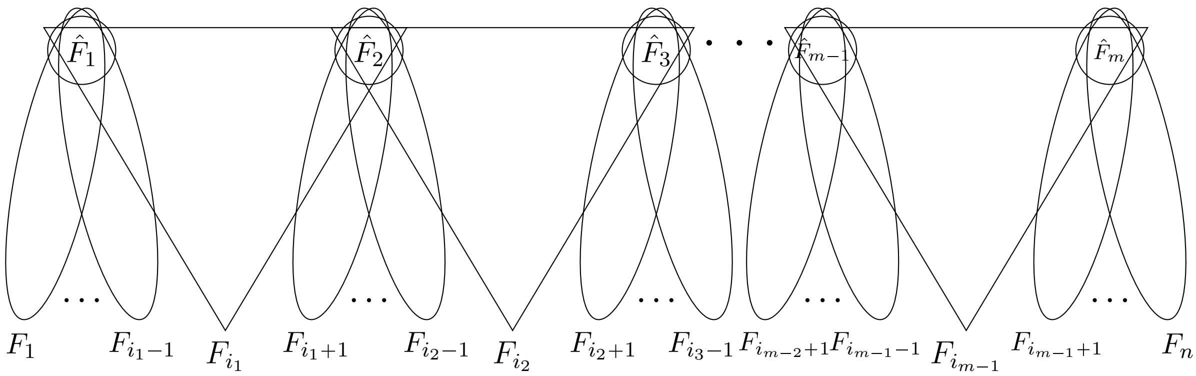

Рис. 1. Вытянутая шкала

Теорема 31. *Пусть* L *– логика,* $\mathcal{F} = Fr_{fin}(\mathsf{L})$, $F \in \mathcal{F}_{\boxed{u}}$, $F = \langle W, \{R, R_u\}\rangle$ *– слабо связная по* R. *Тогда найдется вытянутая шкала* $F' \in \mathcal{F}_{\boxed{u}}$ *такая, что существует p-морфизм* $f : F' \twoheadrightarrow F$.

Доказательство. В этом доказательстве будем считать, что в шкале есть лишь одно отношение R. В полученной шкале тривиальным образом определим отношение $R'_u = W \times W$, и легко заметить, что свойства p-морфизма для универсальных отношений выполнены.

Порожденную отношением R шкалу с корнем w обозначим $F{\uparrow}w = F|_{\{w' \mid wR^*w'\}}$. Рассмотрим ориентированный граф $sk(F)$ без петель, вершинами которого являются сгустки шкалы F, ребро ведет из одной вершины в другую, если из одной из вершин первого сгустка ведет ребро в одну из вершин второго сгустка. Заметим, что полученный граф является ациклическим. Сгусток будем являться максимальным (см. определение 15), если у соответствующей ему вершины графа $sk(F)$ нет исходящих ребер, и будем называть минимальным – если нет входящих. Из ацикличности и конечности графа $sk(F)$ следует, что из каждого сгустка (и, соответственно, из каждого мира шкалы F) достижим некоторый максимальный сгусток, а также каждый максимальный сгусток достижим из некоторого минимального сгустка.

Выделим по представителю из каждого минимального сгустка, и выпишем их в последовательность $w_1, w_2, \ldots, w_n$ так, чтобы все представители встречались хотя бы по одному разу и чтобы $F{\uparrow}w_i \cap F{\uparrow}w_{i+1} \neq \varnothing$. Это возможно, так как из слабой связности шкалы F между любыми двумя ее мирами есть путь, состоящий из прямых и обратных ребер (ребер отношений R и R^{-1}). Обозначим через W_i носитель шкалы $F{\uparrow}w_i$. Тогда $F{\uparrow}w_i = F|_{W_i}$.

Заметим, что $F{\uparrow}w$ замкнуто относительно R, т. е. если $w' \in F{\uparrow}w$ и $w'Rw''$, то $w'' \in F{\uparrow}w$. Тогда, так как $F{\uparrow}w_i \cap F{\uparrow}w_{i+1} \neq \varnothing$, то $F{\uparrow}w_i \cap F{\uparrow}w_{i+1}$ содержит некоторый максимальный сгусток. Для каждого i, такого что $1 \leqslant i \leqslant n-1$, зафиксируем некоторый такой максимальный сгусток. Пусть его миры образуют множество $\widetilde{W}_i$ и $\widetilde{F}_i = F|_{\widetilde{W}_i}$. Таким образом, $\widetilde{F}_i \subseteq F{\uparrow}w_i$ и $\widetilde{F}_i \subseteq F{\uparrow}w_{i+1}$.

Рассмотрим множество $T = \{(w,i) \mid w \in W_i\}$. Определим на T отношение эквивалентности $\sim$ как наименьшее отношение, при котором выполняются следующие условия

$$(w,i) \sim (w,i+1), \text{ если } w \in \widetilde{W}_i.$$

Таким образом, при $i < j$

$$(w,i) \sim (w,j) \iff w \in \widetilde{W}_i \text{ и } \widetilde{W}_i = \widetilde{W}_{i+1} = \ldots = \widetilde{W}_{j-1}.$$

Мирами шкалы F' будут классы эквивалентности ${}^{T}\!/\!_{\sim}$. Класс эквивалентности, порожденный (w,i), будем обозначать $[w,i]$. Отношение R' определим так: $[w,i]R'[w',i]$, если wRw'. Определим функцию f: $f([w,i]) = w$. Это определение корректно, так как если $(w^1,i) \sim (w^2,j)$, то $w^1 = w^2$. Эта функция является p-морфизмом, так как $[w,i]R'[w',i] \iff wRw'$, а также является сюръективной, благодаря выбору $w_1, w_2, \ldots, w_n$ как порождающего набора.

Предположим, что $F' \notin \mathcal{F}$. Из этого следует, что не все формулы из L общезначимы в F, т. е. найдутся $\phi \in \mathsf{L}$, а также мир $[w^0, i^0]$ такие, что $F', [w^0, i^0] \not\models \phi$. Но из условия $[w,i]R'[w',i] \iff wRw'$, а также из определения $\sim$ следует, что $F'{\uparrow}[w,i] \cong F{\uparrow}w$. Таким образом, $F, w^0 \not\models \phi$, что противоречит условию $F \in \mathcal{F}$.

Покажем, что F' – вытянутая. Для этого построим множества миров $W'_1, W'_2, \ldots, W'_n$,

$\widehat{W}'_1, \widehat{W}'_2, \ldots, \widehat{W}'_m$, а также индексы $i_1, i_2, \ldots, i_{m-1}$, задающие основные подшкалы из определения 30.

Число n определено выше как размер последовательности $w_1, w_2, \ldots, w_n$. Пусть $I = \{i \mid \widetilde{W}_{i-1} \neq \widetilde{W}_i\}$. Тогда определим $i_1, i_2, \ldots, i_{m-1}$ как набор элементов множества I, выписанных в возрастающем порядке, соответственно $m = |I|+1$. Доопределим i_0 и i_m как 1 и n соответственно. Это можно сделать, поскольку $1, n \notin I$, так как $\widetilde{W}_0$ и $\widetilde{W}_n$ не определены.

Определим W'_i как носитель $F'{\uparrow}[w_i, i]$, $\widehat{W}'_j$ – как носитель $F'{\uparrow}[\widetilde{w}_{i_{j-1}}, i_{j-1}]$, где $\widetilde{w}_i$ – некоторый представитель $\widetilde{W}_i$. В силу максимальности $\widetilde{W}_{i_{j-1}}$, имеем равенство $\widehat{W}'_j = \widetilde{W}_{i_{j-1}}$. Проверим определение вытянутой шкалы:

Пункт 1 верен, так как $w_1, w_2, \ldots, w_n$ – порождающий набор.

Пункт 2 верен по построению W'_i.

Пункт 3. $\widehat{W}'_j$ являются сгустками, так как $\widehat{W}'_j \cong \widetilde{W}_{i_{j-1}}$ по построению.

Также, по построению последовательности $\{i_j\}$, $[\widetilde{w}_{i_j}, i_j] \nsim [\widetilde{w}_{i_k}, i_k]$ при $j \neq k$, следовательно, $\widehat{W}'_j \cap \widehat{W}'_k = \varnothing$.

Пункт 4. Из определения последовательности $\{i_j\}_{j=1}^{m-1}$ следует, что

$$\widetilde{W}_{i_j} = \widetilde{W}_{i_j+1} = \ldots = \widetilde{W}_{i_{j+1}-1}.$$

Также, так как $i_j, i_{j+1} \in I$, то $\widetilde{W}_{i_j-1} \neq \widetilde{W}_{i_j}$, а также $\widetilde{W}_{i_{j+1}-1} \neq \widetilde{W}_{i_{j+1}}$. Следовательно, если $w \in \widetilde{W}_{i_j}$, то

$$(w, i_{j-1}) \nsim (w, i_j) \sim (w, i_j + 1) \sim \ldots \sim (w, i_{j+1} - 1) \sim (w, i_{j+1}) \nsim (w, i_{j+1} + 1).$$

Таким образом, нетривиальными классами эквивалентности по отношению $\sim$ в точности являются множества

$$\left\{(w, k) \mid w \in \widetilde{W}_{i_j}, i_j \leqslant k \leqslant i_{j+1}\right\}.$$

Из этого следует, что при $i \neq j$ пересечением F'_i и F'_j могут являться либо $\widehat{W}'_k$, либо $\varnothing$, причем первое выполнено в том и только том случае, когда $i, j \in [i_{k-1}; i_k]$, что в точности соответствует третьему пункту определения. □

Замечание 32. Пусть $c \in \mathbb{N}$. Тогда теорему 31 можно усилить, наложив такое ограничение на шкалу F': для любой ее подшкалы F'_i найдется не менее c подшкал F'_j среди $F'_1, F'_2, \ldots, F'_n$ таких, что $f(F'_i) = f(F'_j)$.

Доказательство. В доказательстве достаточно вместо последовательности $w_1, w_2, \ldots w_n$ рассмотреть последовательность

$$\underbrace{w_1, w_1, \ldots, w_1}_{c \text{ раз}},\ \underbrace{w_2, w_2, \ldots, w_2}_{c \text{ раз}},\ \ldots,\ \underbrace{w_n, w_n, \ldots, w_n}_{c \text{ раз}}.$$

□

3. Проверка наличия подшкалы

Для использования вытянутых подшкал в алгоритме необходимо будет научиться проверять существование модели, удовлетворяющей некоторому свойству (а именно, истинность некоторой формулы) и при этом содержащей в себе определенные подмодели (этими подмоделями будут связующие сгустки). В этом разделе будет решен этот вопрос.

Для начала сведем интересующую нас проблему к проблеме выполнимости формулы в классе $\mathcal{F}_{\boxed{u}\boxed{*}}$.

Лемма 33. *Пусть* $\mathcal{F} = Fr_{fin}(\mathsf{L})$, $\widehat{F} \in \mathcal{F}_{\boxed{u}}$ *– некоторая шкала,* $\widehat{M} = \langle \widehat{F}, \widehat{V} \rangle$, ϕ *– формула вида* $\eta_1 \wedge \boxed{u}\eta_2 \wedge \boxed{u}\eta_3 \wedge \ldots \wedge \boxed{u}\eta_l$, *где формулы* $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_l$ *не содержат модальность* $\boxed{u}$. *Тогда существует такая формула* ψ, *которую можно построить за полиномиальное от длины* ϕ *и мощности* $\widehat{F}$ *время, что выполнимость* ψ *в классе* $\mathcal{F}_{\boxed{u}\boxed{*}}$ *равносильна одновременному выполнению следующих условий*:

1) $\exists M = \langle F, V \rangle$, *где* $F \in \mathcal{F}_{\boxed{u}}$ *– корневая*;
2) $\exists W' \subseteq F\ M|_{W'} = \widehat{M}$, $F|_{W'}$ *– порожденная подшкала* F;
3) $\exists w \in F\ M, w \models \phi$.

Доказательство. Обозначим $p_1, p_2, \ldots, p_m$ – переменные формулы ϕ, n – размер $\widehat{F}$, а $g, v_1, v_2, \ldots, v_n$ – переменные, не участвующие в ϕ.

Построим формулу, которая выполнима тогда и только тогда, когда в шкале есть порожденная подшкала $\widehat{F}$. Обозначим за $\widehat{w}_1, \widehat{w}_2, \ldots, \widehat{w}_n$ миры $\widehat{F}$. Опишем требование $M|_{W'} = \widehat{M}$ с помощью формулы:

$$\psi_1 = \Diamond\!\!\!\!*\, g \wedge \boxed{u}(g \to \Box g).$$

Переменная g будет верна в тех мирах, которые образуют порожденную подшкалу $\widehat{F}$.

$$\psi_2 = \boxed{u}(\neg g \to (\neg v_1 \wedge \neg v_2 \wedge \ldots \wedge \neg v_n)) \wedge \boxed{u}(g \to ((v_1 \wedge \neg v_2 \wedge \ldots \wedge \neg v_n) \vee$$
$$\vee (\neg v_1 \wedge v_2 \wedge \neg v_3 \wedge \ldots \wedge \neg v_n) \vee \ldots \vee (\neg v_1 \wedge \neg v_2 \wedge \ldots \wedge \neg v_{n-1} \wedge v_n))) \wedge$$
$$\wedge \Diamond\!\!\!\!*\, v_1 \wedge \Diamond\!\!\!\!*\, v_2 \wedge \ldots \wedge \Diamond\!\!\!\!*\, v_n.$$

Переменные $v_1, v_2, \ldots, v_n$ кодируют миры, соответствующие мирам $\widehat{F}$ с теми же номерами.

$$\psi_3 = \boxed{u} \bigwedge_{i=1}^{n} \left(\bigwedge_{\widehat{w}_i \widehat{R} \widehat{w}_j} (v_i \to \Diamond v_j) \wedge \bigwedge_{\neg \widehat{w}_i \widehat{R} \widehat{w}_j} (v_i \to \Box \neg v_j) \right).$$

Формула ψ_3 описывает ребра графа $\widehat{F}$, гарантируя $F|_{W'} = \widehat{F}$.

$$\psi_4 = \boxed{u} \bigwedge_{i=1}^{n} \left(\bigwedge_{w_i \in \widehat{V}(p_k)} (v_i \to p_k) \wedge \bigwedge_{w_i \notin \widehat{V}(p_k)} (v_i \to \neg p_k) \right).$$

Формула ψ_4 описывает значения переменных $p_1, p_2, \ldots, p_k$ в требуемой подшкале.

Таким образом, формула $\psi_1 \wedge \psi_2 \wedge \psi_3 \wedge \psi_4$ верна в тех и только тех моделях, в которых найдется подмодель $\widehat{M}$ (строго доказано ниже). Тогда искомая формула ψ выглядит следуюшим образом:

$$\psi = \Diamond\eta_1 \wedge \bigwedge_{i=2}^{l} \boxed{u}\eta_i \wedge \psi_1 \wedge \psi_2 \wedge \psi_3 \wedge \psi_4.$$

Из определения ψ видно, что время ее построения на машине Тьюринга не превышает полинома от входных данных.

Пусть модель M удовлетворяет условиям 1–3 из формулировки леммы. Изменим значениями переменных $g, v_1, v_2, \ldots, v_n$ в модели M. Заметим, что, так как все эти переменные не участвуют в ϕ, то такое изменение не повлияет на условия 1–3.

1) g истинна в мирах W';
2) v_i истинна в i-м мире подшкалы $\widehat{F}$.

Покажем, что в этой измененной модели формула ψ будет истинна в корне шкалы F:

1) ψ_1 истинна, так как $\widehat{F}$ – порожденная подшкала и g истинна в точности на точках шкалы $\widehat{F}$.
2) ψ_2 истинна благодаря выбору оценки для v_i.
3) ψ_3 истинна, так как для $w_i, w_j \in \widehat{W}$ верно, что $M, w_i \models v_i$, и $M, w_i \models \Diamond v_j \Leftrightarrow w_i R w_j$.
4) ψ_4 истинна, так как $M|_{W'} = \widehat{M}$.
5) $\Diamond\eta_1$ и $\boxed{u}\eta_i$ при $i \geqslant 2$ истинны, так как $\exists w \in F : M, w \models \phi$.

Пусть теперь формула ψ выполнена в мире $\widetilde{w}$ модели $\widetilde{M'} = \langle \widetilde{F'}, \widetilde{V'} \rangle$, где $\widetilde{F'} \in \mathcal{F}_{\boxed{u}\boxed{*}}$. Заметим, что из того, что η_i не содержат модальности $\boxed{u}$, следует, что все модальности $\boxed{u}$ в формуле ψ стоят на верхнем уровне и связаны конъюнкцией, поэтому если $\boxed{u}\xi$ – подформула ψ, то $\widetilde{M'}, \widetilde{w} \models \boxed{u}\xi$. Таким образом, получаем, что ψ также выполнена в мире $\widetilde{w}$ модели $\widetilde{M'_{\widetilde{w}*}}$ (так же, как и выше, под этим обозначением понимаем сужение на миры, достижимые из $\widetilde{w}$). Обозначим $\widetilde{M} = \widetilde{M'_{\widetilde{w}*}}$, причем $\widetilde{M} = \langle \widetilde{F}, \widetilde{V} \rangle$, $\widetilde{F} = \langle \widetilde{W}, \{\widetilde{R}, \widetilde{R}_u, \widetilde{R}^*\} \rangle$.

Обозначим $\widetilde{W}_i = \{\widetilde{u} \in \widetilde{W} \mid \widetilde{M}, \widetilde{u} \models v_i\}$. Определим

$$\widetilde{W}_F = \bigcup_{i=1}^{n} \widetilde{W}_i, \qquad \widetilde{W}_m = \widetilde{W} \backslash \widetilde{W}_F.$$

Модель $\widetilde{M} = \langle \widetilde{F}, \widetilde{V} \rangle$ обладает следующими свойствами:

1) из истинности формулы ψ_2 следует, что все $\widetilde{W}_i \neq \varnothing$, $\widetilde{W}_i \cap \widetilde{W}_j = \varnothing$ при $i \neq j$, а также $\widetilde{W}_F$ – это в точности множество тех миров, в которых истинна g;
2) из истинности формулы ψ_1 следует, что шкала $\widetilde{F}|_{\widetilde{W}_F}$ является порожденной подшкалой $\widetilde{F}$;
3) по построению формулы ψ_3 для всех i, j выполнено:
   - если $\widehat{w}_i \widehat{R} \widehat{w}_j$, то $\forall \widetilde{u}_i \in \widetilde{W}_i \; \exists \widetilde{u}_j \in \widetilde{W}_j : \; \widetilde{u}_i \widetilde{R} \widetilde{u}_j$,
   - если $\neg \widehat{w}_i \widehat{R} \widehat{w}_j$, то $\forall \widetilde{u}_i \in \widetilde{W}_i \; \forall \widetilde{u}_j \in \widetilde{W}_j : \; \neg \widetilde{u}_i \widetilde{R} \widetilde{u}_j$;
4) если $\widetilde{u}_i \in \widetilde{W}_i$, то $\widetilde{M}, \widetilde{u}_i \models p_k \iff \widehat{M}, \widehat{w}_i \models p_k$.

Построим шкалу F. Множество миров W определим как множество классов эквивалентности $\widetilde{W} / \sim$, где

$$\widetilde{w}_1 \sim \widetilde{w}_2 \iff \widetilde{w}_1 = \widetilde{w}_2 \text{ или } \exists i\ \widetilde{w}_1, \widetilde{w}_2 \in \widetilde{W}_i.$$

Для $i \in \{1, \dots, n\}$ обозначим через w_i класс эквивалентности, соответствующий $\widetilde{W}_i$, через W_m – множество классов эквивалентности, соответствующих $\widetilde{W}_m$, т. е. $W_m = W \backslash \{w_1, \dots w_n\}$. Заметим, что элементы W_m однозначно соответствуют элементам $\widetilde{W}_m$. Если $u \in W_m$, будем обозначать соответствующий элемент $\widetilde{W}_m$ через $\widetilde{u}$. Определим отношение R следующим образом:

1) если $u, u' \in W_m$, то $uRu' \iff \widetilde{u}\widetilde{R}\widetilde{u}'$;
2) если $u \in W_m$, то $uRw_i \iff \exists \widetilde{u}_i \in \widetilde{W}_i\ \widetilde{u}\widetilde{R}\widetilde{u}_i$;
3) $w_iRw_j \iff \widehat{w}_i\widehat{R}\widehat{w}_j \iff \forall \widetilde{w}_i \in \widetilde{W}_i\ \exists \widetilde{w}_j \in \widetilde{W}_j\ \widetilde{w}_i\widetilde{R}\widetilde{w}_j$ (из свойства 3 модели $\widetilde{M}$).

Итого, $F = \langle W, \{R, R_u\}\rangle$, где $R_u = W \times W$. Таким образом, из определения R следует, что существует p-морфизм $f : \langle \widetilde{W}, \{\widetilde{R}, \widetilde{R}_u\}\rangle \twoheadrightarrow F$, определенный так:

- если $u \in W_m$, то $f(\widetilde{u}) = u$;
- если $\widetilde{w}_i \in \widetilde{W}_i$, то $f(\widetilde{w}_i) = w_i$.

Таким образом, из теоремы 23 следует, что $F \in \mathcal{F}_{\boxed{u}}$.

Определим оценку V на F для переменных $p_1, p_2, \dots, p_m$ следующим образом:

- $F, V, w_i \models p_k \iff \forall \widetilde{w}_i \in \widetilde{W}_i : \widetilde{M}, \widetilde{w}_i \models p_k \iff \widehat{M}, \widehat{w}_i \models p_k$;
- если $u \in W_m$, то $F, V, u \models p_k \iff \widetilde{M}, \widetilde{u} \models p_k$.

Докажем, что модель $M = \langle F, V\rangle$ удовлетворяет условию теоремы.

1) $F \in \mathcal{F}_{\boxed{u}}$ – доказано выше;
2) в качестве W' возьмем $\{w_1, w_2, \dots w_n\}$. Тогда из определения отношения R следует, что $w_iRw_j \iff \widehat{w}_i\widehat{R}\widehat{w}_j$, т. е. $F|_{W'} = \widehat{F}$. Из определения оценки V получаем, что

$$M, V, w_i \models p_k \iff \widehat{M}, \widehat{w}_i \models p_k;$$

   таким образом, $M|_{W'} = \widehat{M}$;
3) из определения оценки V p-морфизм f обладает следующим свойством:

$$\widetilde{M}, \widetilde{u} \models p_k \iff M, f(\widetilde{u}) \models p_k.$$

   Используя индукцию по построению формулы, получаем, что для любой формулы ξ, содержащей только переменные $p_1, p_2, \dots, p_m$, верно

$$\widetilde{M}, \widetilde{u} \models \xi \iff M, f(\widetilde{u}) \models \xi.$$

   Таким образом, по построению формулы ψ в некотором мире $\widetilde{w}_1$ модели $\widetilde{M}$ истинна η_1, а также во всех мирах $\widetilde{M}$ выполнены формулы η_i, при $i \in \{2, 3, \dots, l\}$.

Из этого следует, что

$$\widetilde{M}, f(\widetilde{u}) \models \eta_1 \wedge \bigwedge_{i=1}^{l} \boxed{u}\eta_i = \phi,$$

т. е. требуемое условие выполнено. □

Следствие 34. *Пусть* $\mathcal{F} = Fr_{fin}(\mathsf{L})$, $F^1, F^2 \in \mathcal{F}_{\boxed{u}\boxed{*}}$ *– некоторые шкалы,* $M^1 = \langle F^1, V^1\rangle$, $M^2 = \langle F^2, V^2\rangle$, ϕ *– формула вида* $\eta_1 \wedge \boxed{u}\eta_2 \wedge \boxed{u}\eta_3 \wedge \ldots \wedge \boxed{u}\eta_l$, *где* $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_l$ *имеют только модальность* $\Box$. *Тогда существует такая формула* ψ, *которую можно построить за полиномиальное время от суммы размеров* ϕ, F^1, F^2, *что выполнимость* ψ *в классе* $\mathcal{F}_{\boxed{u}\boxed{*}}$ *равносильна*

1) $\exists M = \langle F, V\rangle$, *где* $F \in \mathcal{F}_{\boxed{u}}$;
2) $\exists W^1 \subseteq F$ $M|_{W^1} = M^1$, $F|_{W^1}$ *– порожденная подшкала* F;
3) $\exists W^2 \subseteq F$ $M|_{W^2} = M^2$, $F|_{W^2}$ *– порожденная подшкала* F;
4) $W^1 \cap W^2 = \varnothing$;
5) $\exists w \in F$ $M, w \models \phi$.

Доказательство. Аналогично лемме 33 по модели M^1 построим формулы $\psi_1^1, \psi_2^1, \psi_3^1, \psi_4^1$, переменные обозначим как $g^1, v_1^1, v_2^1, \ldots, v_{n^1}^1$, а по модели M^2 – формулы $\psi_1^2, \psi_2^2, \psi_3^2, \psi_4^2$, соотвествующие переменные обозначим через $g^2, v_1^2, v_2^2, \ldots, v_{n^2}^2$.

Тогда искомой формулой будет

$$\psi = \Diamond\!\!\!\!\ast\;\eta_1 \wedge \bigwedge_{i=2}^{l} \boxed{u}\eta_i \wedge \psi_1^1 \wedge \psi_2^1 \wedge \psi_3^1 \wedge \psi_4^1 \wedge \psi_1^2 \wedge \psi_2^2 \wedge \psi_3^2 \wedge \psi_4^2.$$

Доказательство полностью повторяет доказательство леммы 33. □

Пусть A, B – множества формул. Дадим определения сводимостей $\leqslant_p$ и $\leqslant_{ctt}^{NP}$.

Определение 35. $A \leqslant_p B$, если существует полиномиально вычислимая f такая, что

$$\phi \in A \iff f(\phi) \in B.$$

Определение 36 (см. [3])**.** $A \leqslant_{ctt}^{NP} B$, если существует недетерменированная машина Тьюринга M такая, что $x \in A$ тогда и только тогда, когда на каком-то вычислении на входе x, M выводит $y_1\#y_2\#\ldots\#y_k$ и $\{y_1, y_2, \ldots, y_k\} \subseteq B$.

Научимся избавляться от модальностей $\boxed{u}$ и $\boxed{*}$. Для избавления от $\boxed{u}$ применим [3, теорема 4.1]. Из нее следуют следующие результаты:

Утверждение 37. *Пусть* L *– логика,* $\mathcal{F} = Fr_{fin}(\mathsf{L})$. *Тогда* $\mathcal{F}_{\boxed{u}\boxed{*}} - sat \leqslant_{ctt}^{NP} \mathcal{F}_{\boxed{*}}$.

Утверждение 38. *Пусть* L *– логика,* $\mathcal{F} = Fr_{fin}(\mathsf{L})$. *Тогда* $\mathcal{F}_{\boxed{u}} - sat \leqslant_{ctt}^{NP} \mathcal{F}_{\boxed{*}}$.

Далее, научимся избавляться от модальности $\boxed{*}$ в слабо транзитивных шкалах. Следующая лемма практически очевидна, так как R совпадает с R^* с точностью до рефлексивных петель, но для полноты ниже приведено ее доказательство.

Лемма 39. *Пусть* $\mathsf{L} \supseteq \mathsf{wK4}$, $\mathcal{F} = Fr_{fin}(\mathsf{L})$. *Тогда* $\mathcal{F}_{\boxed{*}} - sat \leqslant_p \mathcal{F} - sat$.

Доказательство. Пусть $\phi \in \mathcal{L}(R, R^*)$. Пусть $Sub(\phi)$ – множество всех подформул ϕ. Так как $\mathsf{L} \supseteq \mathsf{wK4}$, то для любой $F \in \mathcal{F}_{\boxed{*}}$ выполнено

$$\forall x, y \in F \; xR^*y \iff xRy \vee x = y.$$

Построим рекурсивное преобразование $f : \mathcal{L}(R, R^*) \to \mathcal{L}(R)$ по следующему правилу:

$$\begin{gathered} f(p) = p, \text{ где } p \in \mathcal{P}, \\ f(\psi \wedge \eta) = f(\psi) \wedge f(\eta), \\ f(\neg\psi) = \neg f(\psi), \\ f(\Box\psi) = \Box f(\psi), \\ f(\boxed{*}\psi) = \Box p_\psi \wedge p_\psi. \end{gathered}$$

Тогда

$$g(\phi) = f(\phi) \wedge \Box \bigwedge_{\boxed{*}\xi \in Sub(\phi)} (p_\xi \leftrightarrow f(\xi)) \wedge \bigwedge_{\boxed{*}\xi \in Sub(\phi)} (p_\xi \leftrightarrow f(\xi))$$

является искомым сведением. Функция g полиномиально вычислима, так как $|f(\phi)| \leqslant 2|\phi|$, а также $|Sub(\phi) \leqslant |\phi|$.

Если ϕ является $\mathcal{F}_{\boxed{u}}$-выполнимой, то $g(\phi)$ истинна в модели на той же шкале с оценкой V', так что $V'(p_\xi) = V(\xi)$, и $V'(p) = V(p)$ для остальных переменных.

Если $g(\phi)$ выполнима в модели $M = \langle F, V \rangle$ в мире w_r, то для $w \in F{\uparrow}w_r$ верно

$$M, w \models p_\xi \iff M, w \models \xi.$$

Из этого индукцией по построению формулы получим, что для $w \in F{\uparrow}w_r$ выполнено

$$M, w \models g(\phi) \iff M, w \models \phi,$$

что и требовалось. $\Box$

Из доказанных лемм вытекает следующий результат:

Теорема 40. *Пусть* $\mathsf{L} \supseteq \mathsf{wK4}$, $\mathcal{F} = Fr_{fin}(\mathsf{L})$ *и* $\mathcal{F} - sat \in \mathsf{PSPACE}$. *Тогда существует* PSPACE-*алгоритм, решающий следующую задачу: дана формула* ϕ *вида* $\eta_1 \wedge \boxed{u}\eta_2 \wedge \ldots \wedge \boxed{u}\eta_l$, *а также модели* M^1, M^2, *определить, существует ли такая модель* $M = \langle F, V \rangle$, *что*:

1) $F \in \mathcal{F}_{\boxed{u}}$;
2) $\exists W^1, W^2 \subset F : M|_{W^1} = M^1, M|_{W^2} = M^2$, *и* $W^1 \cap W^2 = \varnothing$;
3) ϕ *– истинна в некотором мире* M.

Доказательство. По следствию 34 построим формулу $\psi \in \mathcal{L}(R, R_u, R^*)$. Согласно утверждению 37 и лемме 39 получаем, что

$$\mathcal{F}_{\boxed{u}\boxed{*}} \leqslant^{NP}_{ctt} \mathcal{F}_{\boxed{*}} \leqslant_p \mathcal{F},$$

но так как $\leqslant^{NP}_{ctt}$ и $\leqslant_p$ сохраняют принадлежность PSPACE (см. [3]), и по условию $\mathcal{F} - sat \in$ PSPACE, получаем требуемое. $\square$

Замечание 41. Если одна (или обе) из моделей M_1 или M_2 равна $\varnothing$, то считаем, что во втором условии теоремы 40 убрано соответствующее условие.

Определение 42. Формулу ϕ, удовлетворяющую условию теоремы 40, будем называть $\mathcal{F}_{\boxed{u}}$*-выполнимой с подмоделями* M^1, M^2. В случае, если $M^2 = \varnothing$, не будем различать понятия $\mathcal{F}_{\boxed{u}}$-выполнимости с подмоделями M^1 и $\varnothing$, а также $\mathcal{F}$-выполнимости с подмоделями M^1 и M^1, т. е. под $\mathcal{F}$-выполнимостью с подмоделями M и M понимаем либо выполненность теоремы при $M^1 = M$ и $M^2 = M$, либо с $M^1 = M$, $M^2 = \varnothing$.

4. Основная теорема

Теорема 43. *Пусть* $\mathsf{L} \supseteq \mathsf{wK4}$, $\mathcal{F} = Fr_{fin}(\mathsf{L})$ *и* $\mathcal{F}-sat \in$ PSPACE. *Тогда* $\mathcal{F}^{AC}_{\boxed{u}}-sat \in$ PSPACE.

План доказательства следующий: будем проверять выполнимость формулы на классе вытянутых шкал. Количество основных подшкал такой шкалы может оказаться экспоненциальным. Для того чтобы выполнить требуемую проверку, будет использован метод, примененный в доказательстве теоремы Савича (см. [9, глава 4]).

Лемма 44. *Пусть* $L \supseteq \mathsf{wK4}$, ϕ *–* $\mathcal{F}_{\boxed{u}}$*-выполнима,* $|\phi| = n$. *Тогда существует шкала* $F \in \mathcal{F}_{\boxed{u}}$, *размеры каждого сгустка которой не превосходят* $4n + 1$, *такая, что* ϕ *выполнима в* F.

Доказательство. Рассмотрим $F = \langle W, \{R, R_u\}\rangle$ – наименьшую по количеству миров шкалу, в которой выполнена ϕ, $M = \langle F, V\rangle$ – соответствующая модель. Докажем, что она удовлетворяет условию леммы. Предположим, что это не так, и найдется сгусток с мирами $w_1, w_2, \ldots, w_m$, где $m \geqslant 4n+2$. Обозначим $W_c = \{w_1, w_2, \ldots, w_m\}$. Из того, что $\mathsf{L} \supseteq \mathsf{wK4}$, следует, что

$$\forall i \forall j\ (i \neq j \to w_i R w_j), \tag{1}$$

а также,

$$\text{если } w \in W \backslash W_c \text{ и } wRw_i,\ \text{ то } \forall j\ wRw_j. \tag{2}$$

Рассмотрим ξ – подформулу ϕ. Обозначим

$$W_\xi = \{w_i \in W_c \mid M, w_i \models \xi\}.$$

Среди миров W_ξ отметим произвольные $\min(2, |W_\xi|)$ миров. Аналогично поступим с мирами $W_c \backslash W_\xi$. Тогда для любой ξ мы отметим не более четырех миров. Проделав эту операцию для всех ξ получим, что отмечено не более $4n$ миров. Не умаляя общности, пусть это будут миры $w_1, w_2, \dots, w_{4n}$ (если было отмечено меньше $4n$ миров, то доотметим произвольные).

Докажем, что при удалении w_i из модели M, где $i > 4n$, истинность всех формул во всех мирах $W \backslash \{w_i\}$ не поменяется. Обозначим $M' = M|_{(W \backslash \{w_i\})}$. Предположим, что это не так, и значение некоторой формулы в каком-то мире поменялось. Из всех таких формул рассмотрим наименьшую по длине. Пусть это ϕ_0, истинность которой в мире w изменилась. По выбору ϕ_0, ни одна ее подформула не поменяла свое значение. Заметим, что ϕ_0 не могла иметь вид $\xi \wedge \eta$ или $\neg\xi$, так как в таком случае нашлась бы более короткая формула, значение которой изменилось. Таким образом, ϕ_0 имеет вид $\Box\psi$ или $\boxed{u}\psi$. Рассмотрим $\phi_0 = \Box\psi$, вариант $\boxed{u}\psi$ разбирается аналогично. Разберем два случая:

1) $M, w \models \Box\psi$, но $M', w \not\models \Box\psi$.
Из $M, w \models \Box\psi$ следует, что

$$\forall w' \in W \;\; wRw' \Rightarrow M, w' \models \psi.$$

Так как ψ – подформула ϕ_0, то

$$\forall w' \in W \backslash \{w_i\} \;\; wRw' \Rightarrow M', w' \models \psi.$$

Таким образом, $M', w \models \Box\psi$, что противоречит предположению.

2) $M, w \not\models \Box\psi$, но $M', w \models \Box\psi$.
Из $M', w \models \Box\psi$ следует, что

$$\forall w' \in W \backslash \{w_i\} \;\; wRw' \Rightarrow M', w' \models \psi.$$

Из $M, w \not\models \Box\psi$ следует, что

$$\exists w' \in W \;\; wRw' \wedge M, w' \not\models \psi.$$

Таким образом, из свойств (1) и (2) шкалы получаем, что $M, w_i \not\models \psi$, и для всех $u \in W_c$ таких, что $u \neq w_i$ и $u \neq w$, верно $M, w \models \psi$. Таким образом, по выбору отмеченных миров $w_1, w_2, \dots, w_{4n}$ получаем, что $w_i \in \{w_1, w_2, \dots, w_{4n}\}$, что противоречит выбору $i > 4n$. Таким образом, случай невозможен.

Итак, ни один из этих случаев невозможен, следовательно, требуемое свойство установлено.

Докажем теперь, что добавление рефлексивной петли к любому из миров w_i, где $i > 4n$, если ее там не было, также не меняет истинности ни одной из формул ни в одном мире. Пусть $F' = F \sqcup (w_i, w_i)$, $M' = \langle F', V \rangle$. Аналогично рассуждению выше, рассмотрим наименьшую формулу, которая поменяла свое значение. Пусть это формула ϕ_0, поменявшая свое значение в мире w. Также получаем, что $\phi_0 = \Box\psi$ или $\phi_0 = \boxed{u}\psi$, рассмотрим только первый вариант. Рассмотрим два случая:

1) $M, w \models \Box\psi$, но $M', w \not\models \Box\psi$.
Так как модель M' отличается от модели M только наличием рефлексивной петли (w_i, w_i), и согласно выбору ϕ_0 истинность ψ ни в одном из миров не поменялась, то $w = w_i$, и $M, w_i \not\models \psi$, и $\forall w_j \neq w_i\ M, w_j \models \psi$. Таким образом, w_i – отмеченная вершина, что противоречит выбору $i > 4n$.

2) $M, w \not\models \Box\psi$, но $M', w \models \Box\psi$.
Аналогично, получаем, что $w = w_i$. Тогда из $M', w \models \Box\psi$ следует, что
$$\forall w_j \neq w_i\ M, w_j \models \psi,$$
что противоречит $M, w \not\models \Box\psi$.

Итак, ни один из двух случаев не реализуется, следовательно, свойство установлено.

Перейдем к построению $\widehat{F}$, размер которой меньше размера F, и в которой выполнима ϕ. Пусть
$$\widehat{W} = W \backslash \{w_m\}, \quad \widehat{R} = (R \cap (\widehat{W} \times \widehat{W})) \cup (w_{m-1}, w_{m-1}), \quad \widehat{R}_u = \widehat{W} \times \widehat{W}, \quad \widehat{F} = \langle \widehat{W}, \{\widehat{R}, \widehat{R}_u\}\rangle.$$

Рассмотрим функцию $f : W \to \widehat{W}$ такую, что
$$f(w) = \begin{cases} w, \text{ если } w \neq w_m, \\ w_{m-1}, \text{ если } w = w_m. \end{cases}$$

Докажем, что она является p-морфизмом шкалы F на шкалу $\widehat{F}$. Сюръективность очевидна. Так как шкала F – слабо транзитивная, и w_{m-1} и w_m принадлежат одному сгустку, то выполнено
$$\forall w \notin \{w_{m-1}, w_m\}\ (wRw_{m-1} \iff wRw_m) \text{ и } (w_{m-1}Rw \iff w_mRw).$$

Также из определения $\widehat{R}$ следует, что если $w, w' \in W \backslash \{w_m\}$ и хотя бы один из миров w, w' не равен w_{m-1}, то
$$wRw' \iff w\widehat{R}w'.$$

Таким образом, достаточно проверить свойства p-морфизма только для $x, y \in \{w_{m-1}, w_m\}$. В этом случае свойства следуют из того, что $w_{m-1}Rw_m$, w_mRw_{m-1}, а также $w_{m-1}\widehat{R}w_{m-1}$.

Итак, $F \twoheadrightarrow \widehat{F}$. Тогда из теоремы 23 следует, что $\widehat{F} \in \mathcal{F}_{\boxed{u}}$. Определим оценку $\widehat{V}$ на $\widehat{F}$ следующим образом:
$$\widehat{V}(p) = V(p) \cap \widehat{W}, \text{ где } p \in \mathcal{P}.$$

Определим модель $\widehat{M} = \langle \widehat{F}, \widehat{V}\rangle$. Заметим, что $\widehat{M}$ получена из M следующим образом:

1) удаляем мир w_m;
2) добавляем рефлексивную петлю на мире w_{m-1}, если ее там не было.

Тогда, используя ранее доказанное, а также факт, что $m - 1 > 4n$ и $m > 4n$, получаем, что для всех $w \in W \backslash \{w_m\}$ и ξ – подформул ϕ верно

$$M, w \models \xi \iff \widehat{M}, w \models \xi.$$

Таким, образом, мы нашли шкалу $\widehat{F}$, размер которой меньше размера F, и в которой выполнена формула ϕ. Итак, наше изначальное предположение неверно, и все сгустки F имеют размер не более $4n + 1$. □

Замечание 45. Заметим, что в лемме 44 можно наложить условие вытянутости на шкалу. Для этого в доказательстве нужно рассмотреть наименьшую F среди вытянутых, а также заметить, что преобразование шкалы F в шкалу $\widehat{F}$ сохраняет вытянутость.

Определение 46. Обозначим $Cl(\phi)$ – множество всех подформул ϕ, замкнутое относительно взятия единичного отрицания, т.е. если $\xi \in Cl(\phi)$ и ξ не имеет вид $\neg\eta$, то $\neg\xi \in Cl(\phi)$.

Пусть $\phi \in \mathcal{L}(R, R_u)$ – некоторая формула. Обозначим

$$\Sigma_\phi = \{\xi \mid \boxed{u}\xi \in Cl(\phi)\}.$$

Пусть M – некоторая модель. Выберем некоторый мир $w \in W$ и определим

$$\Sigma_\phi^T(M) = \{\xi \in \Sigma_\phi \mid M, w \models \boxed{u}\xi\}.$$

Очевидно, что определение не зависит от выбора мира w, так как истинность формулы, начинающейся с $\boxed{u}$, не зависит от мира.

Также определим

$$\Sigma_\phi^F(M) = \{\xi \in \Sigma_\phi \mid M, w \not\models \boxed{u}\xi\} = \Sigma_\phi \backslash \Sigma_\phi^T(M).$$

Теорема 47. *Пусть* $\mathsf{L} \supseteq \mathsf{wK4}$, $\mathcal{F} = Fr_{fin}(\mathsf{L})$, $\phi \in \mathcal{L}(R, R_u)$. *Тогда* $\mathcal{F}_{\boxed{u}}^{AC}$*-выполнимость* ϕ *равносильна существованию модели* $M = \langle F, V \rangle$ *такой, что*

1) $F \in \mathcal{F}_{\boxed{u}}^{AC}$ *– вытянутая.*
2) *связующие сгустки* $\widehat{F}_1, \widehat{F}_2, \ldots, \widehat{F}_m$ *шкалы* F *имеют размер не более* $4n + 1$, *где* $n = |\phi|$.
3) *для всякой* $\xi \in \Sigma_\phi^F(M) \cup \{\neg\phi\}$ *найдутся* $i_\xi, w_\xi \in W_{i_\xi}$ *(здесь* $W_1, W_2, \ldots, W_n$ *– из определения вытянутой шкалы) такие, что*

$$M|_{W_{i_\xi}}, w_\xi \models \neg\xi.$$

4) *все i_ξ из предыдущего пункта можно выбрать различными.*

Доказательство. Доказательство импликации справа налево очевидно, так как

$$M|_{W_{i_{\neg\phi}}}, w_{\neg\phi} \models \neg\neg\phi,$$

и из этого

$$M, w_{\neg\phi} \models \phi,$$

следовательно, ϕ является $\mathcal{F}^{AC}_{\boxed{u}}$-выполнимой.

Докажем импликацию слева направо. Пусть $M'' = \langle F'', V''\rangle$ – модель, в которой выполнена ϕ, где $F'' \in \mathcal{F}^{AC}_{\boxed{u}}$. Воспользовавшись теоремой 31 и замечанием 32 к ней для шкалы F'' и $c = |\phi|$, найдем вытянутую шкалу F' и p-морфизм $f : F' \twoheadrightarrow F''$. Рассмотрим модель $M' = \langle F', V'\rangle$, где V' получен как прообраз V'' при действии f, а именно для каждой переменной p выполнено $V'(p) = f^{-1}(V''(p))$. Докажем, что для модели M выполнены условия 3) и 4) теоремы. Пункт 1 очевиден по построению.

Пусть $\xi \in \Sigma^F_\phi(M) \cup \{\neg\phi\}$. Тогда, по определению найдется $w'' \in F''$ такой, что

$$M'', w'' \models \neg\xi.$$

Рассмотрим некоторый прообраз $w' \in f^{-1}(w'')$. Пусть $w' \in W'_{j_\xi}$ (здесь $W'_1, w'_2, \ldots, W'_{n'}$ взяты из определения вытянутой шкалы). Тогда по построению модели M' выполнено

$$M', w' \models \neg\xi.$$

Согласно замечанию 32, получаем, что найдутся $i^1_\xi, i^2_\xi, \ldots, i^{|\phi|}_\xi$ такие, что $f(W'_{i^j_\xi}) = f(W'_{j_\xi})$. Тогда для каждого j найдется $w'_{i^j_\xi} \in W_{i^j_\xi}$, принадлежащий $f^{-1}(w'')$. Таким образом,

$$M', w'_{i^j_\xi} \models \neg\xi.$$

Заметим, что

$$\left|\Sigma^F_\phi(M) \cup \{\neg\phi\}\right| \leqslant |\Sigma_\phi| + 1 \leqslant |\phi|.$$

Из этого для каждого $\xi \in \Sigma^F_\phi(M) \cup \{\neg\phi\}$ можно выбрать i_ξ среди $i^1_\xi, i^2_\xi, \ldots, i^{|\phi|}_\xi$ так, чтобы все i_ξ были различны. Таким образом, для модели M выполнены условия 3) и 4) теоремы.

Построим модель M, воспользовавшись леммой 44. Тогда, воспользовавшись замечанием 45 и тем, что значения всех формул в модели M совпадают со значениями этих формул в соответствующих мирах M', получим, что M – искомая. □

Теперь перейдем к доказательству основной теоремы.

Доказательство теоремы 43. Пусть $\phi \in \mathcal{L}(R, R_u)$ – формула, $|\phi| = n$. Определим

$$\mathcal{M} = \{M = \langle F, V\rangle \mid |F| \leqslant 4n + 1, V(p) = \varnothing \text{ для всех } p \text{ не входящих в } \phi\},$$

т. е. $\mathcal{M}$ – множество моделей размера не более $4n+1$.

Пусть ϕ является $\mathcal{F}_{\boxed{u}}^{AC}$-выполнимой. Тогда рассмотрим модель $M = \langle F, V \rangle$ из теоремы 47, а также индексы i_ξ. Пусть $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_k$ – некоторая нумерация $\Sigma_\phi^F(M) \cup \{\phi\}$. Через $F_1, F_2, \ldots, F_l$ обозначим подшкалы из определения вытянутой шкалы, а связующие сгустки – через $\widehat{F}_1, \widehat{F}_2, \ldots, \widehat{F}_m$.

Обозначим M_j^1 и M_j^2 – связующие сгустки, соответствующие $F_{i_{\xi_j}}$. Если $F_{i_{\xi_j}}$ – висячая подшкала (см. определении 30), то считаем $M_j^1 = M_j^2$. Тогда, из теоремы 47 следует, что для всех j верно, что

$$\neg\xi_j \wedge \bigwedge_{\xi \in \Sigma_\phi^T(M)} \boxed{u}\xi$$

является $\mathcal{F}_{\boxed{u}}$-выполнимой с подмоделями M_j^1 и M_j^2.

Рассмотрим граф $G_{\Sigma_\phi^T(M)}$, вершинами которого будут служить элементы $\mathcal{M}$. Две вершины графа $G_{\Sigma_\phi^T(M)}$, т. е. модели M^1 и M^2, соединены, если формула

$$\bigwedge_{\xi \in \Sigma_\phi^T(M)} \boxed{u}\xi$$

является $\mathcal{F}_{\boxed{u}}$-выполнимой с подмоделями M^1 и M^2. Заметим, что так как во всех мирах модели M истинны формулы вида $\boxed{u}\xi$ для $\xi \in \Sigma_\phi^T(M)$, то для всех j между $M|_{\widehat{F}_j}$ и $M|_{\widehat{F}_{j+1}}$ в графе $G_{\Sigma_\phi^T(M)}$ есть путь. Таким образом, M_j^2 соединена ребром с M_{j+1}^1.

Итак, если ϕ является $\mathcal{F}_{\boxed{u}}$-выполнимой, то

1) Найдутся Σ^T, Σ^F такие, что
$$\Sigma^T \sqcup \Sigma^F = \Sigma_\phi,$$
$\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_k$ – некоторая нумерация $\Sigma^F \cup \{\neg\phi\}$.
2) Найдутся $M_1^1, M_1^2, M_2^1, M_2^2, \ldots, M_k^1, M_k^2 \in \mathcal{M}$ такие, что $\neg\xi_j \wedge \bigwedge_{\xi\in\Sigma^T} \boxed{u}\xi$ является $\mathcal{F}_{\boxed{u}}$-выполнимой с подмоделями M_j^1 и M_j^2.
3) В графе G_{Σ^T} при всех j есть путь между M_j^2 и M_{j+1}^1.

В обратную сторону, эти условия обеспечивают $\mathcal{F}_{\boxed{u}}^{AC}$-выполнимость ϕ, так как построенная по ним естественным образом модель удовлетворяет условию теоремы 47.

Построим недетерминированный алгоритм, работающий на полиномиальной памяти, проверяющий выполнение полученного нами условия. Сертификатом нашего алгоритма будем считать следующий кортеж:

$$\Sigma^T, \Sigma^F, \xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_k, M_1^1, M_1^2, M_2^1, M_2^2, \ldots, M_k^1, M_k^2,$$

где

$$\Sigma^T \sqcup \Sigma^F = \Sigma_\phi,$$
$$\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_k \text{ – некоторая нумерация } \Sigma^F \cup \{\neg\phi\},$$
$$M_1^1, M_1^2, M_2^1, M_2^2, \ldots, M_k^1, M_k^2 \in \mathcal{M}.$$

Через $\mathcal{P}_\phi$ обозначим множество переменных формулы ϕ. Оценим размер $\mathcal{M}$:

$$\begin{aligned}|\mathcal{M}| &\leqslant \sum_{i=1}^{4n+1} 2^{i^2} \cdot 2^{|\mathcal{P}|\cdot i} \leqslant 5n \cdot 2^{(5n)^2} \cdot 2^{|\mathcal{P}|\cdot 5n} \leqslant 5n \cdot 2^{(5n)^2} \cdot 2^{5n^2} \leqslant 5n \cdot 2^{30n^2} \\ &\leqslant 2^{5n} \cdot 2^{30n^2} \leqslant 2^{35n^2}.\end{aligned}$$

Введем преобразование формулы $\xi \to \xi'$, определенное рекурсивно по построению формулы:

$$\begin{aligned} p' &= p, \text{ где } p \in \mathcal{P}, \\ (\psi \wedge \eta)' &= \psi' \wedge \eta', \\ (\neg\psi)' &= \neg\psi', \\ (\Box\psi)' &= \Box\psi', \\ (\boxed{u}\psi)' &= \begin{cases} \top, \text{ если } \psi \in \Sigma^T, \\ \bot \text{ иначе.} \end{cases} \end{aligned}$$

Введем предикат $Conn(u, v, t)$, верный, если между вершинами u и v графа G_{Σ^T} есть путь длины не более 2^t. Его вычисление будем производить рекурсивно.

1) если $t = 0$, то $Conn(u, v, t) \iff u = v$ или u и v соединены ребром. Проверка наличия ребра осуществляется при помощи теоремы 40, примененной к формуле

$$\bigwedge_{\xi \in \Sigma^T} \boxed{u}\xi'.$$

2) если $t > 0$, то

$$Conn(u, v, t) = \bigvee_{w \in G} \left(Conn(u, w, t-1) \wedge Conn(w, v, t-1) \right).$$

При таком построении ξ' не содержит модальности $\boxed{u}$.

Так как модель M такая, что $\Sigma^T_\phi(M) = \Sigma^T$, а $\Sigma^F_\phi(M) = \Sigma^F$, то истинности формул ξ и ξ' равносильны.

Если t полиномиально зависит от n, то приведенный алгоритм требует полиномиальной памяти, так как глубина рекурсии составляет t, и на каждом шаге рекурсии вычисления выполняются на полиномиальной памяти.

Таким образом, для любых $u, v \in \mathcal{M}$ верно, что

$$Conn(u, v, 35n^2) = 1 \iff \text{между } u \text{ и } v \text{ есть путь в } G_{\Sigma^T}.$$

Таким образом, запустив вычисление $Conn$ для всех M^2_j и M^1_{j+1}, проверим условие 3.

Условие 2 проверяется при помощи запуска k раз алгоритма из теоремы 40, примененной к формулам вида

$$\neg\xi_j' \wedge \bigwedge_{\xi\in\Sigma^T} \boxed{u}\xi'.$$

Условие 1 проверяется очевидно.

Таким образом, построен NPSPACE алгоритм, и применение теоремы 29 завершает доказательство. □

5. Связь с задачами выводимости в логиках

Определение 48. Модальная логика L называется *финитно аппроксимируемой* (для краткости будем писать ФА), если $\mathsf{L} = Log(Fr_{fin}(\mathsf{L}))$.

Теорема 49. *Логики* $\mathsf{K4}, \mathsf{D4}, \mathsf{S4}$ *являются ФА и, более того, задача выполнимости в соответствующих классах конечных шкал является* PSPACE*-полной.*

Эта теорема содержит несколько классических результатов. Детали доказательства можно найти в [5].

Теорема 50. *Логика* wK4 *является ФА, а задача выполнимости в классе* $Fr_{fin}(\mathsf{wK4})$ *является* PSPACE*-полной.*

Для логики wK4 ФА была доказана в работе [7] с помощью фильтрации, а PSPACE-полнота задачи выполнимости для этой логики следует из теоремы в статье [4].

Теорема 51. *Если логика* $\mathsf{L} \in \{\mathsf{wK4}, \mathsf{K4}, \mathsf{D4}, \mathsf{S4}\}$*, то логики* L.U *и* L.UC *полны по Крипке и ФА.*

Доказательство. Все упомянутые логики каноничны, и все аксиомы связанные с универсальной модальностью тоже каноничны. Поэтому L.U – канонична и, значит, полна по Крипке.

Для доказательства ФА можно воспользоваться стандартным методом фильтрации (см. [5]). Дело в том, что универсальная модальность хорошо себя ведет с фильтрацией и все теоремы о фильтрации доказываются в присутствии универсальной модальности практически без изменений.

Для логики L.UC мы поступим аналогично [2]. Мы будем доказывать полноту и ФА логики L.UC одновременно, фильтруя конус канонической модели логики L.UC. Детали доказательства можно легко восстановить, так как оно такое же, как в [2]. □

Из теорем в этом разделе и теоремы 4 следует

Теорема 52. *Задачи принадлежности (выводимости) в логиках* wK4.UC*,* K4.UC*,* D4.UC*,* S4.UC *являются* PSPACE*-полными.*

6. Заключение

В этой работе впервые получено ограничение на вычислительную сложность класса модальных логик с аксиомой связности.

Для применения этого результата к соответствующей синтаксической задаче, т. е. к задаче проверки выводимости, достаточно полноты исследуемой логики по Крипке, а также наличия свойства финитной аппроксимируемости. В этом случае ϕ выводима тогда и только тогда, когда $\neg\phi$ не выполнима в соответствующем классе шкал.

В доказательстве результата существенно использовалась слабая транзитивность в двух местах:

1) В лемме 44 при доказательстве полиномиального (и даже линейного) ограничения на размер сгустков. В слабо транзитивном случае сгустки имеют очень простую структуру, что позволяет преобразовать их без влияния на истинность формулы. С другой стороны, такое ограничение требуется лишь для двух сгустков в шкале, что потенциально может ослабить требование слабой транзитивности.

2) В лемме 39 при замене модальности $\boxed{*}$ на $\Box$.

В связи с этим остается открытым вопрос о расширении класса логик, для которых верна теорема 43, а также о равенстве этого класса с классом всех логик, т. е. о существовании примера логики L, для которой $\mathsf{L.U}$-выполнимость лежит в PSPACE, а $\mathsf{L.UC}$-выполнимость – нет.

Список литературы

[1] V. Goranko, *Modal definability in enriched languages*, Notre Dame J. Formal Logic **31** (1), 81–105 (1990).
DOI: https://doi.org/10.1305/ndjfl/1093635335

[2] V. Shehtman, *“Everywhere” and “here”*, J. Appl. Non-Classical Logics **9** (2–3), 369–379 (2012).
DOI: https://doi.org/10.1080/11663081.1999.10510972

[3] E. Hemaspaandra, *The price of universality. Combining logics*, Notre Dame J. Formal Logic **37** (2), 174–203 (1996).
DOI: https://doi.org/10.1305/ndjfl/1040046086

[4] I. Shapirovsky, *Satisfiability problems on sums of Kripke frames*, ACM Trans. Comput. Log. **23** (3), art. 15 (2022).
DOI: https://doi.org/10.1145/3508068

[5] A. Chagrov, M. Zakharyaschev, *Modal Logic*, in: Oxford Logic Guides **35**, The Clarendon Press, Oxford University Press, New York, 1997.

[6] Л. Эсакиа, *Слабая транзитивность – реституция*, Логические исследования **8**, 244–255 (2001).
URL: https://logicalinvestigations.ru/article/view/186

[7] G. Bezhanishvili, L. Esakia, D. Gabelaia, *Spectral and T_0-spaces in d-semantics*, in: Lecture Notes in Comput. Sci. **6618**, Springer, Heidelberg, 16–29, 2011.
DOI: https://doi.org/10.1007/978-3-642-22303-7_2

[8] P. Blackburn, M. de Rijke, Y. Venema, *Modal Logic*, in: Cambridge Tracts in Theoretical Computer Science **53**, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2001.
DOI: https://doi.org/10.1017/CBO9781107050884

[9] S. Arora, B. Barak, *Computational complexity. A modern approach*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2009.
DOI: https://doi.org/10.1017/CBO9780511804090

Константин Максимович Мясников
Московский физико-технический институт,
Институтский переулок, д. 9, Долгопрудный, 141701, Россия,
e-mail: miasnikov.km@phystech.edu

Андрей Валерьевич Кудинов
Московский физико-технический институт,
Институтский переулок, д. 9, Долгопрудный, 141701, Россия,
e-mail: kudinov.andrey@gmail.com

VOLUME 3, ISSUE 2 UDC 510.643
PP. 58–84 (2025) MSC 03B45

The influence of connectivity axiom on complexity of modal logic

K.M. Myasnikov, A.V. Kudinov

Abstract. We prove that for weakly transitive modal logics equipped with the universal modality whose satisfiability problem is already decidable in PSPACE, adding the connectivity axiom does not increase the complexity. Moreover, we present an algorithm that solves the satisfiability task within the same complexity class.

Keywords: modal logic, algorithmic complexity, connectivity axiom, universal modality, weakly transitive logics, satisfiability problem.

DOI: 10.26907/2949-3919.2025.2.58-84

References

[1] V. Goranko, *Modal definability in enriched languages*, Notre Dame J. Formal Logic **31** (1), 81–105 (1990).
DOI: https://doi.org/10.1305/ndjfl/1093635335

[2] V. Shehtman, *"Everywhere" and "here"*, J. Appl. Non-Classical Logics **9** (2–3), 369–379 (2012).
DOI: https://doi.org/10.1080/11663081.1999.10510972

[3] E. Hemaspaandra, *The price of universality. Combining logics*, Notre Dame J. Formal Logic **37** (2), 174–203 (1996).
DOI: https://doi.org/10.1305/ndjfl/1040046086

[4] I. Shapirovsky, *Satisfiability problems on sums of Kripke frames*, ACM Trans. Comput. Log. **23** (3), art. 15 (2022).
DOI: https://doi.org/10.1145/3508068

[5] A. Chagrov, M. Zakharyaschev, *Modal Logic*, in: Oxford Logic Guides **35**, The Clarendon Press, Oxford University Press, New York, 1997.

[6] L. Esakia, *Weak transitivity – a restitution*, Logical Investigations **8**, 244–255, (2001) [in Russian].
URL: https://logicalinvestigations.ru/article/view/186

Received: 02 July 2024. Accepted: 11 February 2025. Published: 16 July 2025.

[7] G. Bezhanishvili, L. Esakia, D. Gabelaia, *Spectral and T_0-spaces in d-semantics*, in: Lecture Notes in Comput. Sci. **6618**, Springer, Heidelberg, 16–29, 2011.
DOI: https://doi.org/10.1007/978-3-642-22303-7_2

[8] P. Blackburn, M. de Rijke, Y. Venema, *Modal Logic*, in: Cambridge Tracts in Theoretical Computer Science **53**, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2001.
DOI: https://doi.org/10.1017/CBO9781107050884

[9] S. Arora, B. Barak, *Computational complexity. A modern approach*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2009.
DOI: https://doi.org/10.1017/CBO9780511804090

Konstantin Maksimovich Myasnikov
Moscow Institute of Physics and Technology,
9 Institutskii av., Dolgoprudny 141701, Russia,
e-mail: miasnikov.km@phystech.edu

Andrey Valerievich Kudinov
Moscow Institute of Physics and Technology,
9 Institutskii av., Dolgoprudny 141701, Russia,
e-mail: kudinov.andrey@gmail.com

Том 3, Выпуск 2
Стр. 85–135 (2025)

УДК 517.982, 517.983
MSC 28C20, 28D05, 37A05, 37K05

Формулы Фейнмана–Каца для решений эволюционных уравнений I. Обобщенные случайные процессы и семейства операторов

Ю.Н. Орлов, В.Ж. Сакбаев

Аннотация. Обобщенный случайный процесс со значениями в измеримом пространстве определяется как комплекснозначная конечная аддитивная цилиндрическая мера на пространстве траекторий со значениями в этом измеримом пространстве. Для получения представления решений эволюционных уравнений с помощью усреднения функционалов на пространстве траекторий обобщенного случайного процесса в нашей статье построено и исследовано биективное отображение пространства операторнозначных функций в множество комплекснозначных конечных аддитивных цилиндрических мер на пространстве траекторий. Получены предельные теоремы для обобщенных случайных процессов. Во второй части статьи будет рассмотрено применение построенного биективного отображения к заданию возмущенных полугрупп и эволюционных семейств операторов с помощью формулы Фейнмана–Каца.

Ключевые слова: случайный линейный оператор, случайный операторный процесс, конечно-аддитивная мера, слабая сходимость мер, центральная предельная теорема, марковские процессы, уравнение Колмогорова, формула Фейнмана–Каца.

DOI: 10.26907/2949-3919.2025.2.85-135

Введение

В статье приводится обзор по применению теории случайных процессов к эволюционным дифференциальным уравнения. Получены представления однопараметрических и двухпараметрических эволюционных семейств линейных операторов с помощью континуальных интегралов от функционалов на пространстве траекторий по комплекснозначным конечно-аддитивным мерам.

Предложен подход, основанный на расширении понятия случайного процесса со значениями в измеримом пространстве до цилиндрической комплекснозначной конечно-аддитивной меры на пространстве траекторий со значениями в измеримом пространстве.

Поступила: 23.10.2024. Принята: 02.05.2025. Опубликована: 16.07.2025.

Такое расширение понятия случайного процесса позволит применить метод континуального интегрирования Фейнмана–Каца для получения представлений произвольных однопараметрических полугрупп линейных операторов в гильбертовом пространстве с помощью цилиндрических мер типа меры Винера или псевдомеры Фейнмана.

Континуальное интегрирование используется [1, 2] при получении решения задачи Коши для возмущенного потенциалом уравнения диффузии. Построение на пространстве траекторий вероятностной меры, заданной на порожденной цилиндрическими множествами в пространстве траекторий сигма-алгебре, потребовало привлечения теоремы Колмогорова о согласованных распределениях [3] и конструкции Лебега продолжения меры [1].

Р. Фейнман предложил конструкцию континуального интегрирования для полугрупп, порождаемых уравнением Шредингера [4, 5], однако строгое математическое обоснование интегрирования по комплекснозначной конечно-аддитивной не обладающей ограниченной вариацией мере Фейнмана потребовало значительного развития математического аппарата [2, 6]. Мы предлагаем расширить применение формулы Фейнмана–Каца, распространив ее на возмущения не только полугрупп, порождаемых оператором Лапласа, но и произвольных сильно непрерывных полугрупп. Для этой цели нам потребуется заменить случайные процессы, соответствующие распределениям вероятностных мер, на процессы, соответствующие распределениям конечно-аддитивных комплекснозначных цилиндрических мер.

В работах Фейнмана предложено использовать комплекснозначные меры на пространстве траекторий для получения представлений решения уравнения Шредингера и его возмущений посредством потенциала. Отсутствие у рассмотренных Фейнманом мер на пространстве траекторий свойства счетной аддитивности и неограниченность их вариации стало существенной проблемой в развитии подхода, основанного на применении методов континуального интегрирования в квантовой механике ([2, 7]). В работе Э. Нельсона [6] с помощью теоремы Троттера об аппроксимации полугрупп итерациями операторнозначных функций было дано обоснование применения к описанию решения уравнения Шредингера подхода континуального интегрирования функционалов на пространстве траекторий в конфигурационном пространстве, определяемых действием в лагранжевой форме. В работах О.Г. Смолянова, Е.Т. Шавгулидзе [2,8] было дано описание пространства функций, интегрируемых по комплекснозначной конечно-аддитивной мере Фейнмана и развиты применения интегрирования по таким мерам к описанию решений задач Коши для уравнений квантовой механики и свойств оператора Шредингера. В некоторых случаях комплекснозначную конечно-аддитивную меру удается продолжить до счетно-аддитивной меры ограниченной вариации [9].

Введение комплекснозначных конечно-аддитивных мер с неограниченной вариацией позволило расширить область применимости методов континуального интегрирования с эволюционных уравнений, описывающих диффузионные процессы, на эволюционные уравнения, описывающие квантовую динамику [2]. Как показано в работах [10, 11], комплекснозначные цилиндрические меры на пространстве траекторий позволяют описать произвольную полугруппу, действующую в гильбертовом пространстве функций, квадратично интегрируемых по неотрицательной мере на том измеримом пространстве, в котором принимают значения траектории.

В рамках предложенного метода сопоставления обобщенного случайного процесса эволюционному семейству операторов исследована биекция между пространством заданных на вещественной полупрямой операторнозначных функций и множеством марковских стационарных цилиндрических мер на пространстве траекторий. На пространстве операторнозначных функций и пространстве цилиндрических мер введены топологии, обеспечивающие секвенциальную непрерывность биективного отображения и обратного к нему. Для случая процессов со значениями в конечномерном евклидовом пространстве решение этой задачи описывалось в [12]. Подобная схема была применена к случайным процессам со значениями в пространстве матриц [13, 14].

Каждому параболическому уравнению второго порядка может быть поставлено в соответствие стохастическое дифференциальное уравнение, решением которого является некоторый диффузионный процесс [3, 15]. Изучению дифференциальных уравнений в бесконечномерных пространствах с точки зрения теории вероятностей посвящены публикации [16–20]. При этом соответствующие переходные вероятности диффузионного процесса составляют ядро интегрального эволюционного оператора [2, 20, 21]. Так, например, построение эволюционных уравнений для математического ожидания функций от случайного блуждания часто используется для исследования уравнения Фоккера–Планка–Колмогорова (ФПК) в конечномерных пространствах [16, 22–24]. Математическими ожиданиями функционалов от марковских случайных процессов с субординацией и масштабированных гауссовских процессов задаются решения интегро-дифференциальных уравнений с дробными производными, описывающими аномальную диффузию [25, 26].

В теории случайных процессов используются различные определения сходимости. В работе Ю.В. Прохорова [27] сходимость последовательности случайных процессов определялась как слабая сходимость конечных борелевских мер в соответствующих функциональных пространствах. Помимо исследования слабой сходимости мер в полных метрических пространствах, в работе [27] были приведены также необходимые и достаточные условия компактности семейства мер. Систематическое изложение предельных теорем для случайных процессов и их применение в статистике содержится в [28]. Асимптотические задачи теории случайных сред рассмотрены в работе [29]. Функциональный подход к формулировке предельных теорем с уточнениями был освещен в статье [30].

В нашей статье устанавливаются предельные теоремы для случайных процессов, основанные на обобщении слабой сходимости мер. Сходимость по распределению композиций независимых операторов случайного сдвига определяется с помощью обобщенной слабой сходимости соответствующих мер. Слабая сходимость мер рассматривается как поточечная сходимость операторов свертки с мерой, действующих в пространстве непрерывных ограниченных функций, наделенном топологией поточечной сходимости [31, 32]. Обобщенная слабая сходимость мер задается аналогичным образом, однако соответствующие операторы свертки действуют теперь в некотором локально выпуклом пространстве функций. В случае гильбертова пространства квадратично интегрируемых функций приведен ряд примеров последовательности случайных преобразований [33, 34], для которых имеет место сходимость сверток с функциями из этого пространства.

Для широкого класса композиций случайных операторов обобщенная сходимость по распределению устанавливается с помощью теоремы Чернова об аппроксимации полугрупп [35, 36]. В частности, центральная предельная теорема для композиций операторов случайного сдвига может быть получена на основе теоремы Чернова [33, 37], при этом предельное распределение определяется через предельную полугруппу преобразований.

В работе рассмотрены случайные процессы, принимающие значения как в локально компактных топологических группах, к примеру, в пространстве линейных ограниченных операторов на конечномерном евклидовом пространстве [33], так и не локально компактных группах, например, в сепарабельном гильбертовом пространстве (см. [38,39]). Однако, при отказе от свойства локальной компактности возникает проблема с построением меры, продолжающей понятие объема в конечномерных пространствах [40]. По теореме Вейля [41, 42] не существует нетривиальной локально конечной, σ-конечной, счетно-аддитивной, борелевской левоинвариантной меры на топологической группе, не являющейся локально компактной. Жертвуя по крайней мере одним из перечисленных свойств можно получать аналоги меры Лебега в бесконечномерных пространствах. При работе с операторным аналогом слабой сходимости, предложенным в статье [33], потребуются именно трансляционно инвариантные меры, поскольку они гарантируют равномерную ограниченность семейства операторов сдвига аргумента на произвольный вектор.

Трансляционно инвариантная локально-конечная σ-конечная мера на гильбертовом пространстве построена в [43, 44] по схеме Жордана: сначала мера определяется на системе брусов, являющихся бесконечномерными аналогами прямоугольников. Как и в конечномерном случае, заданная на системе брусов неотрицательная функция множества аддитивна и инвариантна относительно сдвига, что позволило продолжить ее до трансляционно инвариантной меры, заданной на кольце, порожденном брусами.

Построение в бесконечномерном пространстве счетно-аддитивной трансляционно инвариантной меры сталкивается с проблемами, которые преодолеваются либо отказом от условия локальной конечности и σ-конечности ([45–48]), либо отказом от счетной аддитивности. Построенная в работах [43, 44] мера помимо того, что не является счетно-аддитивной, не определена на всех борелевских множествах, задана на специальном кольце. Ввиду этой проблемы будет предложен аппарат для исследования случайных процессов, применимый к измеримым пространствам с произвольным кольцом подмножеств.

В операторном подходе к слабой сходимости особая роль отводится теореме Чернова [36] об усреднении операторнозначных отображений. Продемонстрировано, что теорема Чернова не только представляет собой обобщенный аналог центральной предельной теоремы для сумм векторнозначных процессов, но и позволяет получить аппроксимации в слабом смысле случайного процесса, разрешающего уравнение ФПК. С помощью теоремы Чернова были получены предельные теоремы типа центральной предельной теоремы и закона больших чисел в статье [37] для последовательности композиций случайных матриц, а также продемонстрированы их приложения к теории систем линейных дифференциальных стохастических уравнений. Работа [49] посвящена предельным теоремам на алгебраических структурах. В [33] операторный аналог слабой сходимости мер был адаптирован для мер на пространствах операторов.

Среди работ, посвященных изучению случайных линейных операторов и характеристик связанных с ними распределений, отметим статью В.И. Оселедеца [50], где без ограничений на коммутативный случай рассматриваются случайные блуждания на локально компактной группе в приложении к эргодическим теоремам. Также выделим статью А.В. Скорохода [51], в которой сформулирован операторный аналог процесса с независимыми приращениями, а также общий метод для оценки поведения произведения одинаково распределенных независимых сомножителей. В работах [34, 37, 52] получен аналог закона больших чисел для композиции случайных линейных операторов, сформулированы достаточные условия его выполнения и приведены примеры его нарушения.

Настоящая статья представляет обзор, основанный на исследованиях авторов [10–13, 32, 33], в котором приводятся полные доказательства формулируемых утверждений.

Опишем структуру статьи. В разделе 1 предложены обобщенные определения случайных величин и случайных процессов. Случайные процессы в силу теоремы Колмогорова о согласованных распределениях представляются вероятностными мерами на пространстве траекторий. Определение случайного процесса в некотором конфигурационном пространстве расширено до цилиндрической комплекснозначной конечно-аддитивной меры, заданной на некоторой цилиндрической алгебре пространства траекторий со значениями в конфигурационном пространстве.

Раздел 2 посвящен построению соответствия между операторнозначными функциями, действующими в подходящем функциональном пространстве, и цилиндрическими мерами. Определена биекция пространства операторнозначных функций на множество цилиндрических мер. Рассмотрены связи между свойствами стационарности и марковости обобщенных случайных процессов и соответствующих им мер и полугрупповым свойством операторнозначных функций.

В разделе 3 исследована обобщенная сходимость по распределению как случайных величин. На пространстве операторнозначных функций и пространстве цилиндрических мер введены топологии, обеспечивающие секвенциальную непрерывность биективного отображения из раздела 2 и обратного к нему. Показано, что теорема Чернова играет роль предельной теоремы, описывающей сходимость по распределению последовательностей обобщенных случайных процессов к некоторому строго марковскому, стационарному обобщенному цилиндрическому процессу.

Применение рассмотренной в части I статьи биекции к получению представления формулами Фейнмана–Каца полугрупп и эволюционных семейств операторов, описывающих решений эволюционных уравнений, будет реализовано в части 2. Будут описаны пространства функций на множестве траекторий, интегрируемых по мерам из подходящего подпространства в пространстве цилиндрических мер. Посредством континуальных интегралов будут заданы решения линейных дифференциальных и дифференциально-разностных уравнений.

1. Случайные процессы и меры на пространстве траекторий

Введем вероятностное пространство $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ и дадим несколько определений. Через Ω обозначено некоторое множество, $\mathcal{F}$ является σ-алгеброй, а $\mathbb{P}$ – вероятностной мерой. Пусть E – некоторое множество и $\mathcal{R}$ – кольцо его подмножеств. Пусть $\mathcal{A}$ – σ-алгебра подмножеств E, порожденная кольцом $\mathcal{R}$. Рассмотрим измеримое пространство $(E, \mathcal{A})$.

Определение 1. *Случайной величиной* называется измеримое отображение ξ из вероятностного пространства $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ в измеримое пространство $(E, \mathcal{A})$, т. е. такое отображение ξ, что

$$\forall A \in \mathcal{A} : \ \xi^{-1}(A) \in \mathcal{F}.$$

Определение 2. *Распределением* случайной величины ξ называется конечно аддитивная мера μ_ξ на пространстве E, определяемая согласно

$$\mu_\xi(A) = \mathbb{P}(\xi^{-1}(A)), \quad A \in \mathcal{A}.$$

Определение 3. *Случайным процессом* (или *случайной функцией*) со значениями в измеримом пространстве $(E, \mathcal{A})$ называется семейство случайных величин $\{\xi(t, \bullet), t \in T\}$ со значениями в измеримом пространстве $(E, \mathcal{A})$ и определенных на одном и том же вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.

Аналогично тому, как мы перешли от описания случайных величин к порожденным ими распределениям, случайный процесс можно рассматривать с точки зрения его *конечномерных распределений* или как некоторую *меру*.

Пусть задан случайный процесс $\{\xi(t, \bullet),\ t \in T\}$. Рассмотрим произвольный конечный набор индексов $\{t_1, \ldots, t_n\}$, и построим для него наименьшую σ-алгебру $\mathcal{A}^n$, содержащее все множества вида $A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n$, где $A_k \in \mathcal{A}$, $k = 1, \ldots, n$.

Определение 4. Для всякого конечного набора временных индексов $\{t_1, \ldots, t_n\} \subset T$ *конечномерное распределение* $P_{t_1,\ldots,t_n}$ случайного процесса ξ определяется, как распределение случайного вектора $\vec{\xi}(\vec{t}, \bullet) = (\xi(t_1, \bullet), \xi(t_2, \bullet), \ldots, \xi(t_n, \bullet))$, т. е. мера на измеримом пространстве $(E^n, \mathcal{A}^n)$.

Корректность данного определения обусловлена тем, что для каждого $t \in T$ имеет место $\xi(t, \bullet) \in \mathcal{A}$, а значит, если $A_k \in \mathcal{A}$ при $k = 1, \ldots, n$, то выполняется

$$\vec{\xi}_{\vec{t}}^{-1}(A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n) = \bigcap_{k=1}^{n} \xi_{t_k}^{-1}(A_k) \in \mathcal{F}. \tag{1.1}$$

И поскольку операция взятия прообраза коммутирует со всеми теоретико множественными операциями, то условие (1.1) будет выполняться для любого множества, принадлежащего алгебре $\mathcal{A}^n$. При этом

$$P_{t_1,\dots,t_n}(A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n) = \mathbb{P}\left(\xi_{\vec{t}}^{-1}(A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n)\right).$$

По аддитивности можно продолжить $P_{t_1,\dots,t_n}$ на всю алгебру $\mathcal{A}^n$.

Лемма 5. *Случайный процесс $\xi(t,\bullet)$ в смысле определения 3 задан в том и только том случае, если для любого $N \in \mathbb{N}$, для произвольных $t_1,\dots,t_N \in T$ и произвольных $B_k \in \mathcal{A}$, где $k = 1,\dots,N$, имеет место включение*

$$\Theta_{B_1,\dots,B_N}^{t_1,\dots,t_N} \equiv \{\omega \in \Omega \mid \xi(t_k,\omega) \in B_k \subset E,\ k = 1,\dots,N\} \in \mathcal{F}.$$

Доказательство. Пусть заданы всевозможные $\Theta_{B_1,\dots,B_N}^{t_1,\dots,t_N}$ для $N \in \mathbb{N}$. Тогда, в частности, для любого $t \in T$ и для каждого $B \in \mathcal{A}$ имеем $\Theta_B^t \in \mathcal{F}$, а это и значит, что для всякого фиксированного значения параметра t отображение $\xi(t,\omega)$ есть случайная величина. Импликация в обратную сторону является следствием того, что операция взятия прообраза коммутирует с теоретико-множественными операциями, в частности, с пересечением, а алгебра (как семейство множеств) замкнута относительно операции конечного пересечения. □

Определение 6. *Траекторией случайного процесса* называется такая детерминированная функция

$$\xi_{\omega_0} : T \to E : \quad \xi_{\omega_0}(t) = \xi(t,\omega_0) \in E,$$

для произвольного $t \in T$ при некотором фиксированном $\omega_0 \in \Omega$.

Обозначим через $\mathcal{M}(T,E)$ множество всех возможных отображений, которые в момент времени $t \in T$ принимают значение во множестве E. В случае изучения случайных процессов со значениями в одном пространстве E, соответствующее пространство траекторий будем записывать как $\mathcal{M}(T,E)$.

Рассмотрим на пространстве $\mathcal{M}(T,E)$ так называемые *цилиндрические множества*, т. е. множества вида

$$\begin{gathered} C_{B_0,\dots,B_n}^{t_0,\dots,t_n} = \{\gamma \in \mathcal{M}(T,E) \mid \gamma(t_k) \in B_k,\ k = 0,\dots,n\}, \\ n \in \mathbb{N}_0, \quad 0 \leqslant t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n < +\infty, \quad B_k \in \mathcal{A}, \quad k = 1,\dots,n. \end{gathered} \tag{1.2}$$

Набор множеств $\vec{B} = (B_0,\dots,B_n)$ в выражении (1.2) называется *базой* цилиндрического множества, а набор чисел $\vec{t} = (t_0,\dots,t_n)$ – *временными индексами* цилиндрического множества. Совокупность всех цилиндрических множеств обозначим через $\mathcal{C}yl$. В этих обозначениях сформулируем и докажем следующее утверждение.

Лемма 7. *Множество $\mathcal{C}yl$ образует полуалгебру.*

Доказательство. Согласно определению полуагебры, необходимо проверить, что для произвольных цилиндрических множеств $C_{\vec{B}}^{\vec{t}}$ и $C_{\vec{A}}^{\vec{s}}$ выполняются условия

$$C_{\vec{B}}^{\vec{t}} \cap C_{\vec{A}}^{\vec{s}} \in \mathcal{C}yl, \tag{1.3}$$

$$C_{\vec{B}}^{\vec{t}} \setminus C_{\vec{A}}^{\vec{s}} = \bigsqcup_{k=1}^{K} C_{\vec{D}_k}^{\vec{\tau}_k}, \quad \forall k = 1, \ldots, K : C_{\vec{D}_k}^{\vec{\tau}_k} \in \mathcal{C}yl. \tag{1.4}$$

Сперва докажем, что имеет место (1.3). Отметим, что если $\vec{t}$ и $\vec{s}$ не совпадают, то каждое из множеств временных индексов можно дополнить до более широкого множества временных индексов $\vec{\tau}$, основываясь на свойстве

$$C_{B_0,\ldots,B_m,E_t,B_{m+1},\ldots,B_n}^{t_0,\ldots,t_m,\ t,\ t_{m+1},\ldots,t_n} = C_{B_0,\ldots,B_m,B_{m+1},\ldots,B_n}^{t_0,\ldots,t_m,\ t_{m+1},\ldots,t_n} = C_{\vec{B}}^{\vec{t}},$$

для произвольного $C_{\vec{B}}^{\vec{t}} \in \mathcal{C}yl$. Следовательно, без ограничения общности будем полагать, что $\vec{t} = \vec{s}$. Находим

$$C_{\vec{B}}^{\vec{t}} \cap C_{\vec{A}}^{\vec{s}} = C_{B_0\cap A_0,\ldots,B_n\cap A_n}^{t_0,\ldots,\ t_n} \in \mathcal{C}yl \;\Leftarrow\; B_k \cap A_k \in \mathcal{A}, \;\; k = 1, \ldots, n.$$

Докажем теперь, что справедливо условие (1.4). Пусть выполнено

$$\vec{t} = \{t_{k_1}, \ldots, t_{k_N}\} \cup \{t_{j_1}, \ldots, t_{j_M}\}, \qquad \vec{s} = \{s_{l_1}, \ldots, s_{l_H}\} \cup \{s_{i_1}, \ldots, s_{i_M}\},$$
$$\vec{t} \cap \vec{s} = \{t_{j_1}, \ldots, t_{j_M}\} = \{s_{i_1}, \ldots, s_{i_M}\}.$$

Обозначим через $\mathcal{D}$ множество всех неупорядоченных выборок без повторений из множества временных индексов, определяемых $\vec{s}$. Произвольную такую выборку будем записывать как $\vec{d} = (d_1, \ldots, d_p)$, причем $d_1 < d_2 < \cdots < d_p$. Тогда мы утверждаем, что

$$C_{\vec{B}}^{\vec{t}} \setminus C_{\vec{A}}^{\vec{s}} = \bigsqcup_{\vec{d}\in\mathcal{D}} C_{\vec{D}_{\vec{d}}}^{\vec{\tau}_{\vec{d}}}, \tag{1.5}$$

где

$$C_{\vec{D}_{\vec{d}}}^{\vec{\tau}_{\vec{d}}} = \left\{ \gamma \in \mathcal{M}(T, E) \;:\; \begin{cases} \gamma(t_{k_j}) \in B_{k_j},\ j = 1, \ldots, N, \\ \gamma(s_{l_j}) \in A_{l_j},\ s_{l_j} \in \vec{d}, \\ \gamma(s_{i_p}) \in A_{i_p} \cap B_{j_p},\ s_{i_p} = t_{j_p} \in \vec{d}, \\ \gamma(s_{l_j}) \in E \setminus A_{l_j},\ s_{l_j} \notin \vec{d}, \\ \gamma(s_{i_p}) \in B_{j_p} \setminus A_{i_p},\ s_{i_p} = t_{j_p} \notin \vec{d}. \end{cases} \right\}.$$

По построению все множества

$$\left\{ C_{\vec{D}_{\vec{d}}}^{x_0,\vec{\tau}_{\vec{d}}},\ \ \vec{d} \in \mathcal{D} \right\}$$

попарно не пересекаются. Действительно, пусть даны две выборки $\vec{d}_1$ и $\vec{d}_2$ из множества временных индексов. Тогда существует по крайней мере один временной индекс d', принадлежащий ровно одной выборке. Без ограничения общности будем считать, что $d' \in \vec{d}_1$. Если $d' \in \vec{t} \cap \vec{s}$, то для $\gamma \in C_{\vec{D}_{\vec{d}_1}}^{\vec{\tau}_{\vec{d}_1}}$ будет выполнено $\xi(d') \in A_{d'} \cap B_{d'}$, однако, для всякого $\xi \in C_{\vec{D}_{\vec{d}_2}}^{\vec{\tau}_{\vec{d}_2}}$ выполнено $\gamma(d') \notin A_{d'}$, значит рассматриваемые цилиндрические множества не пересекаются. Аналогично дело обстоит в случае, когда $d' \notin \vec{t} \cap \vec{s}$. Кроме того, для всякого $\gamma \in C_{\vec{B}}^{\vec{t}} \setminus C_{\vec{A}}^{\vec{s}}$ найдется соответствующий набор временных индексов $\vec{d} \subset \vec{s}$, по которым в точности имеет место принадлежность $A_t, (t \in \vec{d})$. Таким образом, равенство (1.5) доказано. $\square$

Расширим полуалгебру цилиндрических множеств до так называемой *цилиндрической алгебры* согласно общей конструкции кольца, порожденного полукольцом. Данную алгебру будем обозначать с помощью $\mathcal{A}_{\mathcal{C}yl}$. Комплекснозначные конечно-аддитивные меры, определенные на цилиндрической алгебре мы будем называть *цилиндрическими мерами*. Пространство цилиндрических мер обозначим символом $a(\mathcal{M}(T,E), \mathcal{A}_{\mathcal{C}yl}) = a(\mathcal{A}_{\mathcal{C}yl})$.

Лемма 8. *Существует взаимнооднозначное соответствие между случайными процессами* $\{\xi(t,\bullet),\ t \in T\}$ *со значениями в измеримом пространстве* $(E, \mathcal{A})$ *и цилиндрическими мерами из пространства* $a(\mathcal{M}(T,E), \mathcal{A}_{\mathcal{C}yl})$.

Доказательство. Для любого случайного процесса $\xi(t,\,\omega) : T \times \Omega \to E$ определим сначала значение меры μ_ξ на цилиндрических множествах согласно

$$\mu_\xi(C_{\vec{B}}^{\vec{t}}) = \mathbb{P}\left(\bigcap_{k=1}^{n} \xi_{t_k}^{-1}(B_k)\right),$$

где

$$n \in \mathbb{N}_0, \quad 0 \leqslant t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_n < +\infty, \quad B_k \in \mathcal{A},\ k = 1, \ldots, n.$$

Далее мера продолжается по аддитивности на всю алгебру $\mathcal{A}_{\mathcal{C}yl}$. Обратно, по значениям цилиндрической меры определяется семейство всех конечномерных распределений. $\square$

Чтобы получить описание полугрупп и других семейств операторов в пространстве функций, заданных на множестве E, с помощью случайных процессов как мер на пространстве траекторий дадим следующее

Определение 9. Обобщенной случайной величиной со значениями в пространстве E называется конечно-аддитивная комплекснозначная мера, заданная на некоторой алгебре подмножеств пространства E.

Определение 10. Обобщенным цилиндрическим случайным процессом со значениями в пространстве E (или цилиндрической мерой) называется конечно-аддитивная комплекснозначная мера, заданная на алгебре $\mathcal{A}_{\mathcal{C}yl}$ подмножеств пространства $\mathcal{M}(T,E)$.

Введенное определение позволяет каждой C_0-полугруппе операторов, действующих в пространстве $L_2(E)$, сопоставить обобщенный случайный процесс.

2. Цилиндрические меры и операторнозначные функции

2.1. Мера Фейнмана и формула Фейнмана–Каца. В лемме 8 было установлено, что с каждым случайным процессом в смысле определения 3 можно связать некоторую цилиндрическую меру на пространстве траекторий, т. е. обобщенный случайный процесс в смысле определения 10. Теперь построим соответствие между некоторым классом цилиндрических мер из $a(\mathcal{M}(T,E),\mathcal{A}_{Cyl})$, отвечающих E-значным случайным процессам, и множеством операторнозначных функций, действующих в подходящем функциональном пространстве. При этом предлагаемая нами конструкция является обобщением конструкции, предложенной Р.П. Фейнманом [4,5] и разработанной впоследствии Э. Нельсоном [6], О.Г. Смоляновым [2,53] и другими авторами.

Прежде чем приступать к описанию конструкции, напомним основные моменты связанные с мерой Фейнмана, а также получим формулу Фейнмана–Каца для уравнения Шредингера с ограниченным возмущением.

Теорема 11 ([1, VIII.31]). *Пусть $\boldsymbol{H}$ – генератор сильно непрерывной полугруппы в банаховом пространстве X, а оператор $\boldsymbol{V}$ – линейный ограниченный оператор в X. Тогда $\boldsymbol{H}+\boldsymbol{V}$ является генератором сильно непрерывной полугруппы и*

$$\lim_{n\to\infty}\sup_{t\in[0,T]}\left\|\left(e^{t(\boldsymbol{H}+\boldsymbol{V})}-\left(e^{\frac{t}{n}\boldsymbol{H}}e^{\frac{t}{n}\boldsymbol{V}}\right)^n\right)u\right\|_X=0,\quad \forall\, T>0,\ u\in X. \tag{2.1}$$

Рассмотрим формулу Фейнмана–Каца, полученную с помощью формулы Троттера [14]. Пусть $E=\mathbb{R}$ и $\mathcal{A}$ – σ-алгебра борелевских подмножеств $\mathbb{R}$. Пусть $X=C_b(\mathbb{R})$. Пусть $\mathbf{H}=\boldsymbol{\Delta}$ – оператор Лапласа и $\mathbf{V}$ – оператор умножения на непрерывную ограниченную функцию $f\in C_b(\mathbb{R})$. Тогда в силу теоремы Троттера для любого $u\in X$

$$e^{t(\mathbf{H}+\mathbf{V})}u(x)=\int\limits_{M([0,t],E)}\exp\left[\int\limits_{\gamma}f(\gamma(s))ds\right]u(\gamma(t))dP^x(\gamma),\quad v\in E. \tag{2.2}$$

Пусть $x\in E$. На пространстве траекторий $\mathcal{M}_x(\mathbb{R}_+,E)=\{\gamma\in\mathcal{M}(\mathbb{R}_+,E):\ \gamma(0)=x\}$, снабженном алгеброй цилиндрических подмножеств $\mathcal{A}_{Cyl}$, мера P^x определена равенством

$$\begin{aligned}\forall\, x\in E\quad & P^x(\{\gamma:\ \gamma(0)=x;\ \gamma(t\frac{j}{n})\in B_j,\ j=1,\dots,n\})\\ &=P^x\left(A^{0,\ \frac{1}{n}t,\dots,\frac{n-1}{n}t,\ t}_{\{x\},B_1,\dots,B_{n-1},B_n}\right)=\left(e^{\frac{t}{n}\Delta}\mathbf{P}_{B_1}e^{\frac{t}{n}\Delta}\cdots\mathbf{P}_{B_{n-1}}e^{\frac{t}{n}\Delta}\chi_{B_n}\right)(x).\end{aligned} \tag{2.3}$$

Следовательно, для каждого $B_0\in\mathcal{B}(\mathbb{R})$ $\forall\, n\in\mathbb{N},\ t>0,\ B_0,\dots,B_n\in\mathcal{B}(\mathbb{R})$ имеем

$$\int\limits_{B_0}P^x\left(A^{0,\ \frac{1}{n}t,\dots,\frac{n-1}{n}t,t}_{\{x\},B_1,\dots,B_{n-1},B_n}\right)d\lambda(x)=\left(\chi_{B_0},e^{\frac{t}{n}\Delta}\mathbf{P}_{B_1}\cdots\mathbf{P}_{B_{n-1}}e^{\frac{t}{n}\Delta}\chi_{B_n}\right). \tag{2.4}$$

Равенство (2.3) определяет на полуалгебре Cyl множеств пространства

$$\mathcal{M}_x(\mathbb{R}_+, E) = \{\gamma \in \mathcal{M}(\mathbb{R}_+, E) : \ \gamma(0) = x\},$$

образованной цилиндрическими множествами вида

$$A^{0,\ \frac{1}{n}t,\dots,\frac{n-1}{n}t,\ t}_{\{x\},B_1,\dots,B_{n-1},B_n}) = \left\{\gamma \in \mathcal{M}_x(\mathbb{R}_+, E) : \ \gamma\left(\frac{k}{n}t\right) \in B_k,\ k = 1,\dots,n\right\},\ B_k \in \mathcal{A},$$

функцию множества, которая неотрицательна, нормированна и счетно-аддитивна. Ее продолжение по схеме Лебега–Каратеодори на σ-алгебру, порожденную полуалгеброй Cyl, совпадает с мерой Винера [1]. В частности, носитель меры Винера сосредоточен на функциях из пространства $C([0,t], E)$, что обосновывает существование интеграла в показателе эспоненты в подынтегральном выражении в (2.2).

Рассмотрим получение формулы Фейнмана–Каца из теоремы Троттера для возмущения уравнения Шредингера свободной частицы ограниченным непрерывным исчезающим на бесконечности потенциалом. Пусть $E = \mathbb{R}^d$, $X = L_2(\mathbb{R}) \equiv H$. Зададим операторы $\mathbf{H} : D(\mathbf{H}) \to L_2(E)$ и $\mathbf{V} : D(\mathbf{V}) \to L_2(E)$, которые действуют как

$$\mathbf{H}u = i\boldsymbol{\Delta}u,\ u \in H; \quad \mathbf{V}u(x) = -if(x)u(x),\ x \in E, \quad f \in C^0_b(E),$$

причем

$$D(\mathbf{H}) \cap D(\mathbf{V}) = D(\mathbf{H}) = \{u \in L_2(E) \,|\, \Delta u \in L_2(E)\}.$$

Рассмотрим следующую задачу Коши для возмущенного гамильтониана:

$$\frac{\partial}{\partial t}u(x,t) = (\mathbf{H} + \mathbf{V})u(x,t), \quad u(x,0) = u_0(x) \in D(\mathbf{H}). \tag{2.5}$$

Явный вид решения задачи (2.5) в форме континуального интеграла может быть получен с помощью теоремы Троттера.

Поскольку $\mathbf{V} \in B(X)$, а оператор Лапласа Δ является самосопряженным в гильбертовом пространстве $X = L_2(E)$, то $e^{t(\mathbf{H}+\mathbf{V})}$ представляет собой корректно определенную сильно непрерывную полугруппу [35], разрешающую задачу Коши (2.5).

Пусть $\mathcal{R}_b$ – σ-кольцо ограниченных борелевских подмножеств пространства E и $\mathcal{A}_b$ – σ-алгебра, порожденная $\mathcal{R}_b$. Пусть Cyl_b – полуалгебра подмножеств в пространстве $\mathcal{M}(\mathbb{R}_+, E)$ цилиндрических множеств вида (1.2) при $\mathcal{A} = \mathcal{A}_b$. Пусть $\mathcal{A}_{Cyl_b}$ – алгебра подмножеств в пространстве $\mathcal{M}(\mathbb{R}_+, E)$, порожденная полуалгеброй Cyl_b.

Поскольку f ограничена и непрерывна на E, множество $f(E)$ является ограниченным промежутком. Значит, для всякого натурального номера $r \in \mathbb{N}$ найдется разбиение $\tau_r = \{\Delta^r_1, \Delta^r_2, \dots, \Delta^r_{m_r}\}$ промежутка $f(E)$ на промежутки с мелкостью разбиения $|\tau_r| = \max\limits_{k=1,\dots,m_r} \mathrm{diam}(\Delta^r_k) < \frac{1}{r}$. Веберем для каждого $k = 1,\dots,m_r$ некоторое значение V^r_k функции, принадлежащее элементу разбиения Δ^r_k. В силу условия $f \in C^0_b(E)$ множества

$B_k^r = f^{-1}(\Delta_k^r)$ борелевские для всех $k = 0, 1, \ldots, m_r$ образуют дизъюнктное разбиение пространства E, т. е. $\bigsqcup\limits_{i=0}^{m_r} B_i^r = E \Rightarrow \sum_{i=0}^{m_r} \mathbf{P}_{B_i^r} = \mathbf{I}$, где $\mathbf{P}_B$ – оператор умножения на индикаторную функцию χ_B борелевского множества B. При этом $B_k^r \in \mathcal{R}_b$ для всех $k = 1, \ldots, m_r$. По построению имеет место следующее соотношение

$$\left| f(x) - \sum_{k=1}^{m_r} V_k^r \chi_{B_k^r}(x) \right| < \frac{1}{r}, \quad \forall\, x \in E.$$

Для каждого $r \in \mathbb{N}$ введем оператор

$$\mathbf{V}_r u(x) = \sum_{k=1}^{m_r} (-i) V_k^r \chi_{B_k^r}(x) u(x), \quad x \in E,\ u \in \mathbb{L}_2(E),$$

и операторнозначные полугруппы

$$\mathbf{U}_{\mathbf{V}_r}(t) u = e^{t(\mathbf{H}+\mathbf{V}_r)} u, \quad \mathbf{U} u = e^{t\mathbf{H}} u, \quad u \in \mathbb{L}_2(E).$$

Следовательно, последовательность $\mathbf{V}_r$ сходится в сильной операторной топологии к оператору $\mathbf{V}$; достаточно применить теорему Лебега о мажорируемой сходимости. Далее, мы докажем три леммы, позволяющие перейти в формуле (2.1) от генераторов $\mathbf{V}$ к генераторам $\mathbf{V}_r$ и аппроксимировать разрешающую полугруппу задачи Коши (2.5) итерациями полугрупп $e^{t\mathbf{V}_r}$, $t \geq 0$, и $\mathbf{U}$.

Напомним некоторые свойства сходимости последовательности ограниченных операторов в сильной операторной топологии.

Лемма 12. *Пусть $(\boldsymbol{A}_k)_{k\in\mathbb{N}}$ и $(\boldsymbol{B}_k)_{k\in\mathbb{N}}$ – последовательности ограниченных линейных операторов на банаховом пространстве X, причем имеет место $\boldsymbol{A}_k \overset{\tau_{SOT}}{\to} \boldsymbol{A}$ при $k \to \infty$, а $\boldsymbol{B}_k \overset{\tau_{SOT}}{\to} \boldsymbol{B}$ при $k \to \infty$, где $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B} \in B(X)$. Тогда*

$$\boldsymbol{A}_k \circ \boldsymbol{B}_k \overset{\tau_{SOT}}{\to} \boldsymbol{A} \circ \boldsymbol{B}, \quad k \to \infty.$$

Следствие 13. *Пусть $M \in \mathbb{N}$, и для каждого $m = 1, \ldots, M$ последовательность ограниченных линейных операторов $(\boldsymbol{A}_k^m)_{k\in\mathbb{N}}$ сходится в сильной операторной топологии к ограниченному линейному оператору $\boldsymbol{A}^m$. Тогда последовательность линейных ограниченных операторов $(\boldsymbol{A}_k^1 \circ \boldsymbol{A}_k^2 \circ \ldots \circ \boldsymbol{A}_k^M)_{k\in\mathbb{N}}$ поточечно сходится к линейному ограниченному оператору $\boldsymbol{A}^1 \circ \boldsymbol{A}^2 \circ \ldots \circ \boldsymbol{A}^M$.*

Лемма 14. *Пусть $(\boldsymbol{A}_k)_{k\in\mathbb{N}}$ – последовательность ограниченных линейных операторов на банаховом пространстве X, причем $\boldsymbol{A}_k \overset{\tau_{SOT}}{\to} \boldsymbol{A}$ при $k \to \infty$, где $\boldsymbol{A} \in B(X)$. Тогда $(e^{\boldsymbol{A}_k})_{k\in\mathbb{N}}$ и $e^{\boldsymbol{A}}$ являются ограниченными линейными операторами в пространстве X и, кроме того, выполняется*

$$e^{\boldsymbol{A}_k} \overset{\tau_{SOT}}{\to} e^{\boldsymbol{A}}, \quad k \to \infty.$$

Доказательство. Ограниченность очевидна, ведь

$$\left\|e^{\mathbf{A}}\right\| \leqslant e^{\|\mathbf{A}\|} \;\Rightarrow\; e^{\mathbf{A}} \in B(X);$$

Имея в виду поточечную сходимость последовательности операторов $(\mathbf{A}_k)_{k\in\mathbb{N}}$, по теореме Банаха–Штейнгауза получаем равномерную ограниченность данной последовательности некоторой константой $C > 0$. Значит,

$$\begin{aligned}\left\|\left(e^{\mathbf{A}_k} - e^{\mathbf{A}}\right) u\right\| &\leqslant \left\|\sum_{n=0}^{N}\left(\frac{\mathbf{A}_k^n}{n!} - \frac{\mathbf{A}^n}{n!}\right) u\right\| + \left\|\sum_{n=N+1}^{\infty}\frac{\mathbf{A}_k^n}{n!}u\right\| + \left\|\sum_{n=N+1}^{\infty}\frac{\mathbf{A}^n}{n!}u\right\| \\ &\leqslant \sum_{n=0}^{N}\left\|\left(\frac{\mathbf{A}_k^n}{n!} - \frac{\mathbf{A}^n}{n!}\right) u\right\| + \sum_{n=N+1}^{\infty}\left(\frac{(\|\mathbf{A}_k\|^n + \|\mathbf{A}\|^n)\cdot\|u\|}{n!}\right) \\ &\leqslant \sum_{n=0}^{N}\left\|\left(\frac{\mathbf{A}_k^n}{n!} - \frac{\mathbf{A}^n}{n!}\right) u\right\| + \sum_{n=N+1}^{\infty}\left(\frac{(C^n + \|\mathbf{A}\|^n)\cdot\|u\|}{n!}\right). \end{aligned} \tag{2.6}$$

Второе слагаемое в последнем выражении (2.6) не зависит от k. Следовательно, в силу абсолютной сходимости ряда Тейлора функции экспоненты на всей вещественной прямой, для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $N = N(\varepsilon)$, что

$$\sum_{n=N+1}^{\infty}\left(\frac{(C^n + \|\mathbf{A}\|^n)\cdot\|u\|}{n!}\right) < \varepsilon.$$

Далее, каждое слагаемое из первой суммы стремится к нулю в силу следствия 13, а значит, существует такое $K = K(\varepsilon,\, N(\varepsilon))$, что для любого $k \geqslant K$ каждое из слагаемых меньше $\dfrac{\varepsilon}{N}$. Таким образом, для любого сколь угодно малого $\varepsilon > 0$ найдется номер $K \in \mathbb{N}$, начиная с которого, т. е. для любого $k \geqslant K$, будет выполнено

$$\left\|\left(e^{\mathbf{A}_k} - e^{\mathbf{A}}\right) u\right\| < 2\varepsilon,$$

что и требовалось доказать. □

Операторы $(\mathbf{V}_r)_{r\in\mathbb{N}}$ и $\mathbf{V}$ ограничены, причем

$$\|\mathbf{V}_r\| \leqslant \max_{k=1,\dots,m_r}|V_k^r|, \quad \|\mathbf{V}\| \leqslant \sup_{x\in E}|f(x)|.$$

Тогда в силу леммы 14 операторы $\left(e^{\mathbf{V}_r}\right)_{r\in\mathbb{N}}$ и $e^{\mathbf{V}}$ являются ограниченными и последовательность $\left(e^{\mathbf{V}_r}\right)_{r\in\mathbb{N}}$ сходится в сильной операторной топологии к $e^{\mathbf{V}}$. Введенные операторы $(\mathbf{V}_r)_{r\in\mathbb{N}}$ и сильно непрерывные полугруппы $\left(e^{t\mathbf{V}_r}\right)_{r\in\mathbb{N}}$ пригодятся при работе с аппроксимациями решения задачи Коши (2.5), также как и следующая

Лемма 15. *Пусть $(\boldsymbol{A}_k)_{k\in\mathbb{N}}$ – последовательность ограниченных линейных операторов на банаховом пространстве, причем $\boldsymbol{A}_k \overset{\tau_{SOT}}{\to} \boldsymbol{A}$, где $\boldsymbol{A} \in B(X)$. И пусть $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ такова, что*

$\|u_k - u\| \to 0$ *при* $k \to \infty$. *Тогда* $\boldsymbol{A}_k u_k \to \boldsymbol{A} u$ *по норме банахова пространства* X.

Доказательство. По теореме Банаха–Штейнгауза существует неотрицательная константа $C > 0$ такая, что $\sup_{k\in\mathbb{N}} \|\mathbf{A}_k\| < C$. Значит, справедлива следующая оценка:

$$\|\mathbf{A}_k u_k - \mathbf{A}u\| \leqslant \|\mathbf{A}_k u_k - \mathbf{A}_k u\| + \|\mathbf{A}_k u - \mathbf{A}u\| \leqslant C\|u_k - u\| + \|\mathbf{A}_k u - \mathbf{A}u\|,$$

из которой следует доказываемое утверждение. □

Применяя последовательно леммы 14 и 15, для произвольного $u \in L_2(E)$ получаем при любых $t \geq 0$, $n \in \mathbb{N}$ имеет место равенство

$$\mathbf{U}\left(\frac{t}{n}\right) e^{\frac{t}{n}\mathbf{V}} \ldots \mathbf{U}\left(\frac{t}{n}\right) e^{\frac{t}{n}\mathbf{V}} u = \lim_{r\to\infty} \mathbf{U}\left(\frac{t}{n}\right) e^{\frac{t}{n}\mathbf{V}_r} \ldots \mathbf{U}\left(\frac{t}{n}\right) e^{\frac{t}{n}\mathbf{V}_r} u,$$

где предел понимается в смысле L_2-нормы. Значит, согласно теореме 11 и леммам 14, 15, для каждого $u \in L_2(E)$ и любого $t \geq 0$ верно равенство:

$$\mathbf{U}_{\mathbf{V}} u = \lim_{n\to\infty} \lim_{r\to\infty} \mathbf{U}\left(\frac{t}{n}\right) e^{\frac{t}{n}\mathbf{V}_r} \ldots \mathbf{U}\left(\frac{t}{n}\right) e^{\frac{t}{n}\mathbf{V}_r} u. \tag{2.7}$$

Теперь мы “вооружились” всем необходимым для того, чтобы в некотором смысле “разнести” часть, соответствующую возмущению и часть, соответствующую свободной невозмущенной динамике. Условимся через $\sigma^n(m_r)$ обозначать совокупность всевозможных упорядоченных выборок с повторением длины n. Тогда согласно (2.7) при всех $t \geq 0$ и любых $u \in L_2(E)$ имеем

$$\begin{aligned}
\mathbf{U}_{\mathbf{V}}(t)u &= \lim_{n\to\infty} \lim_{r\to\infty} \mathbf{U}\left(\frac{t}{n}\right) e^{\frac{t}{n}\mathbf{V}_r} \ldots \mathbf{U}\left(\frac{t}{n}\right) e^{\frac{t}{n}\mathbf{V}_r} u \\
&= \lim_{n\to\infty} \lim_{r\to\infty} \sum_{\{j_0,\ldots,j_{n-1}\}\in\sigma^n(m_r)} \mathbf{U}\left(\frac{t}{n}\right) e^{\frac{t}{n}\mathbf{V}_r} \mathbf{P}_{B^r_{j_{n-1}}} \ldots \mathbf{P}_{B^r_{j_1}} \mathbf{U}\left(\frac{t}{n}\right) e^{\frac{t}{n}\mathbf{V}_r} \mathbf{P}_{B^r_{j_0}} u \\
&= \lim_{n\to\infty} \lim_{r\to\infty} \sum_{\{j_0,\ldots,j_{n-1}\}\in\sigma^n(m_r)} \mathbf{U}\left(\frac{t}{n}\right) e^{(-i)\frac{t}{n}V^r_{j_{n-1}}} \mathbf{P}_{B_{j_{n-1}}} \ldots \mathbf{P}_{B_{j_1}} \mathbf{U}\left(\frac{t}{n}\right) e^{(-i)\frac{t}{n}V^r_{j_0}} \mathbf{P}_{B_{j_0}} u \\
&= \lim_{n\to\infty} \lim_{r\to\infty} \sum_{\{j_0,\ldots,j_{n-1}\}\in\sigma^n(m_r)} e^{(-i)\frac{t}{n}\sum_{k=0}^{n-1} V^r_{j_k}} \mathbf{U}\left(\frac{t}{n}\right) \mathbf{P}_{B_{j_{n-1}}} \ldots \mathbf{P}_{B_{j_1}} \mathbf{U}\left(\frac{t}{n}\right) \mathbf{P}_{B_{j_0}} u.
\end{aligned} \tag{2.8}$$

В силу (2.8) для любой пары ограниченных борелевских множеств B_0 и B справедливо следующее равенство

$$\begin{aligned}
&(\chi_B,\, \mathbf{U}_{\mathbf{V}}(t)\chi_{B_0}) \\
&= \lim_{n\to\infty} \lim_{r\to\infty} \sum_{\{j_0,\ldots,j_{n-1}\}\in\sigma^n(m_r)} e^{(-i)\frac{t}{n}\sum_{k=0}^{n-1} V^r_{j_k}} \left(\chi_B,\, \mathbf{U}\left(\frac{t}{n}\right) \mathbf{P}_{B_{j_{n-1}}} \ldots \mathbf{P}_{B_{j_1}} \mathbf{U}\left(\frac{t}{n}\right) \mathbf{P}_{B_{j_0}} \chi_{B_0}\right)
\end{aligned}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\lim_{r\to\infty}\sum_{\{j_0,\dots,j_{n-1}\}\in\sigma^n(m_r)} e^{(-i)\frac{t}{n}\sum_{k=0}^{n-1}V_{j_k}^r}\,\mu_{\mathrm{U}}\left(C_{B_{j_0}\cap B_0,\,B_{j_1},\,\dots,\,B_{j_{n-1}},\,B}^{0,\quad\frac{t}{n},\,\dots,\,\frac{(n-1)t}{n},\quad t}\right). \quad (2.9)$$

Цилиндрическое множество в (2.9) из полуалгебры Cyl_b задается равенством

$$C_{B_{j_0}\cap B_0,\,B_{j_1},\,\dots,\,B_{j_{n-1}},\,B}^{0,\quad\frac{t}{n},\,\dots,\,\frac{(n-1)t}{n},\quad t}$$
$$= \left\{\gamma\in\mathcal{M}(T,\,E)\,|\,\gamma(t)\in B,\,\gamma\left(\frac{(n-1)t}{n}\right)\in B_{j_{n-1}},\dots,\gamma(0)\in B_{j_0}\cap B_0\right\},$$

а отображение $\mu_{\mathrm{U}}:\mathcal{A}_{\mathcal{C}yl_b}\to\mathbb{C}$ – комплекснозначная аддитивная функция множества, задаваемая на полуалгебре $\mathcal{C}yl_b$ посредством выражения

$$\mu_{\mathrm{U}}\left(C_{B_{j_0}\cap B_0,\,B_{j_1},\,\dots,\,B_{j_{n-1}},\,B}^{0,\quad\frac{t}{n},\,\dots,\,\frac{(n-1)t}{n},\quad t}\right) = \left(\chi_B,\,\mathbf{U}\left(\frac{t}{n}\right)\mathbf{P}_{B_{j_{n-1}}}\dots\mathbf{P}_{B_{j_1}}\mathbf{U}\left(\frac{t}{n}\right)\mathbf{P}_{B_{j_0}}\chi_{B_0}\right) \quad (2.10)$$

при условии $B_0, B\in\mathcal{R}_b$, есть мера Фейнмана. По аддитивности она может быть продолжена на всю цилиндрическую алгебру пространства траекторий. Корректность определения такой меры, в смысле ее свойства аддитивности, мы установим в разделе 2.3 в более общем случае. Предел при $r\to\infty$ фактически означает, что мелкость разбиения множества значений функции V стремится к нулю. Поскольку правомерность соотношения (2.9) обеспечивается выполнением условий теоремы Троттера, то для полученного предела мы можем ввести следующие обозначения интегрирования по конечно аддитивной мере, что и дает известную формулу Фейнмана–Каца:

$$(\chi_{B_n},\,\mathbf{U_V}(t)\chi_{B_0}) = \int\limits_{\mathcal{M}([0,t],E)}\overline{\chi}_B(\gamma(t))\;e^{\int\limits_0^t(-i)f(\gamma(s))\,\mathrm{d}s}\chi_{B_0}(\gamma(0))\,\mathrm{d}\mu_{\mathrm{U}}(\gamma). \quad (2.11)$$

Интегрирование в показателе экспоненты объясняется тем, что на каждой непрерывной траектории сумма в показателе экспоненты в формуле (2.9) доставляет в пределе интеграл Римана от непрерывной функции. Для произвольной траектории $\gamma\in\mathcal{M}([0,t],E)$ это не так и потому правая часть (2.11) является символом, обозначающим предел (2.9). Существование повторного предела (2.9) в случае выбора меры μ_F согласно (2.10) и функции $V\in C_b^0(E)$ гарантируется леммами 14, 15 и теоремой 11. Значит, приближение функции f ступенчатыми позволяет аппроксимировать действие операторной полугруппы $\mathbf{U_V}$ интегралами от линейных комбинаций индикаторных функций по мере (2.10).

Учитывая в (2.9) выражение для свободного пропагатора согласно [1]

$$\mathbf{U}(t)u(x) = \frac{1}{(4\pi it)^{\frac{d}{2}}}\int_E e^{\frac{i|x-y|^2}{4t}}u(y)\,\mathrm{d}y, \quad u(x)\in D(\mathbf{H}),$$

и полагая $x_n = x$, $u(x)\in D(\mathbf{H})$, нетрудно видеть, что имеет место предел, понимаемый в смысле L_2-нормы:

$$e^{t(\mathbf{H}+\mathbf{V})}u(x)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{ne^{\frac{3\pi}{2}}}{4\pi t}\right)^{\frac{dn}{2}}\int_E\cdots\int_E e^{\sum_{k=1}^n i\frac{t}{n}\left(\frac{|x_k-x_{k-1}|^2n^2}{4t^2}-f(x_{k-1})\right)}u(x_0)\,\mathrm{d}x_0\ldots\mathrm{d}x_{n-1}.$$

Это формула есть явное выражение для итераций в формуле Троттера. Можно при этом также задать значение меры Фейнмана на произвольном цилиндрическом множестве с $B_0,\ldots,B_{n-1},B\in\mathcal{R}_b$

$$\mu_{\mathrm{U}}\left(C^{0,\ \frac{t}{n},\ldots,\frac{(n-1)t}{n},\ t}_{B_{j_0}\cap B_0,\,B_{j_1},\ldots,B_{j_{n-1}},\,B}\right)=\left(\frac{ne^{\frac{3\pi}{2}}}{4\pi t}\right)^{\frac{dn}{2}}\int_B\int_{B_{j_{n-1}}}\cdots\int_{B_{j_0}}e^{\sum_{k=1}^n i\frac{|x_k-x_{k-1}|^2n}{4t}}\chi_{B_0}(x_0)\,\mathrm{d}x_0\ldots\mathrm{d}x_n.$$

Полученная мера Фейнмана имеет следующие примечательные свойства: она не является счетно-аддитивной и имеет неограниченную вариацию [2] в отличие, например, от меры Винера, которая представляет собой классическую счетно-аддитивную нормированную меру на пространстве траекторий. Мера Винера играет такую же роль для уравнения теплопроводности, что и полученная мера Фейнмана для уравнения Шредингера. А поскольку мы изучаем как классические случайные процессы, так и процессы, отвечающие квантовой динамике, мы расширили понятие случайного процесса в определении 10.

В данной статье предложено применение формул Фейнмана–Каца к возмущениям произвольных сильно непрерывных полугрупп, действующих в гильбертовом пространстве. Обобщение изложенных в разделе 2.1 результатов на случай произвольной полугруппы $\mathbf{U}(t),\ t\geq 0$, действующей в гильбертовом пространстве $H=L_2(E,\mathcal{A},\lambda,\mathbb{C})$, основано на интегрировании функционалов в формуле Фейнмана–Каца по мере $\mu_{\mathbf{U}}$, определенной на алгебре цилиндрических подмножеств $\mathcal{A}_{Cyl}(\mathcal{M}(\mathbb{R}_+,E))$ равенством

$$\mu_{\mathbf{U}}(C^{t_0,\ldots,t_m}_{B_0,\ldots,B_m})=\left(\chi_{B_m},\mathbf{U}(t_m-t_{m-1})\mathbf{P}_{B_{m-1}}\cdots\mathbf{P}_{B_1}\mathbf{U}(t_1-t_0)\chi_{B_0}\right). \tag{2.12}$$

В случае $\mathbf{U}=e^{\mathbf{\Delta}t}$, $t\geq 0$, равенство (2.12) связано с мерой Винера (2.3) равенством (2.4), а в случае $\mathbf{U}=e^{-i\mathbf{\Delta}t}$, $t\geq 0$, (2.12) задает меру Фейнмана (2.10).

В разделе 2.4 (см. теорему 29) построено биективное отображение, которое позволяет каждой сильно непрерывной полугруппе (а не только полугруппе, порожденной оператором Лапласа Δ) ставить в соответствие цилиндрическую меру, т. е. случайный процесс в смысле определения 10. Данный формализм позволит описать процессы, принимающие значения не только в конечномерных евклидовых пространствах, но и в топологических группах, не являющихся локально компактными ([13]). Отметим, что в бесконечномерном пространстве вопрос самосопряженности оператора Лапласа (что существенно для применения теоремы Троттера) составляет нетривиальную проблему [38, 54–57].

2.2. Кольца и функции на пространстве значений процесса. Будем полагать, что на пространстве E выделено некоторое кольцо его подмножеств $\mathcal{R}$. Минимальную алгебру, порожденную данным кольцом $\mathcal{R}$, будем обозначать с помощью $\mathcal{A}(\mathcal{R})$. Напомним, что $A \in \mathcal{A}(\mathcal{R})$ если и только если, либо $A \in \mathcal{R}$, либо $E \setminus A \in \mathcal{R}$. Также будем считать, что задана комплекснозначная конечно-аддитивная неотрицательная мера $\lambda : \mathcal{R} \to \mathbb{C}$, которая обладает свойством локальной конечности. Существование окрестности конечной меры λ для всякой точки топологического векторного пространства E необходимо для того, чтобы построить вспомогательное пространство квадратично интегрируемых по мере λ функций. Для этого рассмотрим сперва линейное пространство конечных линейных комбинаций характеристических функций множеств из кольца $\mathcal{R}$:

$$S(\mathcal{R}) = \left\{ \sum_{k=1}^{N} \alpha_k \chi_{B_k} \,|\, N \in \mathbb{N},\ B_1, \ldots, B_n \in \mathcal{R} \right\}.$$

На нем определим полуторалинейную форму согласно

$$(\chi_{B_0},\, \chi_{B_1}) \overset{\mathrm{def}}{=} \lambda(B_0 \cap B_1), \quad \forall\, B_0, B_1 \in \mathcal{R},$$
$$\left(\sum_{k=1}^{N} \alpha_k \chi_{B_k},\, \sum_{k=1}^{N'} \alpha'_k \chi_{B'_k} \right) \overset{\mathrm{def}}{=} \sum_{k=1}^{N} \sum_{l=1}^{N'} \overline{\alpha}_k \alpha'_k (\chi_{B_k},\, \chi_{B'_l}),$$
$$\forall\, (B_k)_{k=1}^{N},\, (B_l)_{l=1}^{N'} \subset \mathcal{R}, \quad \forall\, (\alpha_k)_{k=1}^{N},\, (\alpha_l)_{l=1}^{N'} \subset \mathbb{C}.$$

Функции $f, g \in S(\mathcal{R})$ назовем эквивалентными, если справедливо равенство $(f-g, f-g) = 0$. Факторизуя пространство $S(\mathcal{R})$ по данному отношению эквивалентности и затем пополняя его по норме, порожденной скалярным произведением, получаем гильбертово пространство $H = \mathbb{L}_2(E,\, \mathcal{R},\, \lambda,\, \mathbb{C})$, т. е. пространство квадратично интегрируемых по мере λ функций.

Далее, нам потребуется еще одно вспомогательное пространство – пространство линейных комбинаций над полем $\mathbb{C}$ характеристических функций попарно непересекающихся множеств из алгебры $\mathcal{A}(\mathcal{R})$:

$$S(\mathcal{A}(\mathcal{R})) = \left\{ \sum_{k=1}^{N} \alpha_k \chi_{B_k} \,|\, N \in \mathbb{N},\ B_1, \ldots,\, B_n \in \mathcal{A}(\mathcal{R}) : B_k \cap B_j = \varnothing,\ \ \forall\, k \neq j \right\}.$$

На этом пространстве введем полунорму

$$\|f\|_\infty = \sup\{c \in \mathbb{R} : \underline{\lambda}(f^{-1}(c)) > 0\}, \quad \underline{\lambda}(B) = \sup_{\substack{S \subset B \\ S \in \mathcal{R}}} \lambda(S). \tag{2.13}$$

Первые две аксиомы полунормы, очевидно, выполнены. Покажем, что полунорма (2.13) удовлетворяет неравенству треугольника. Пусть даны произвольные $f,\, g \in S(\mathcal{A}(\mathcal{R}))$:

$$f(x) = \sum_{k=1}^{N} \alpha_k \chi_{B_k}(x), \qquad g(x) = \sum_{l=1}^{M} \beta_l \chi_{A_l}(x).$$

Тогда

$$f(x) + g(x) = \sum_{k=1}^{N} \sum_{l=1}^{M} (\alpha_k + \beta_l) \chi_{B_k \cap A_l}(x).$$

Пусть $\|f\|_\infty = \alpha_{k_0}$, $\|g\|_\infty = \beta_{l_0}$. Тогда $\forall\, k \in \{1, \ldots, N\} : \alpha_k > \alpha_{k_0}$ имеет место $\underline{\lambda}(B_k) = 0$, аналогично $\forall l \in \{1, \ldots, M\} : \beta_l > \beta_{l_0}$ имеет место $\underline{\lambda}(A_l) = 0$. Следовательно, для таких $k \in 1, \ldots, m$ получаем $\underline{\lambda}(C) = 0$, если $C = B_k \cap C'$, для всех $C' \in \mathcal{A}(\mathcal{R})$. То же верно и для множеств A_l.

Значит, указанные номера k, l могут не учитываться при нахождении полунормы $\|f + g\|_\infty$. Поэтому $\|f + g\|_\infty \leqslant \alpha_{k_0} + \beta_{l_0} = \|g\|_\infty + \|f\|_\infty$. Равенство достигается в случае, если имеет место неравенство $\underline{\lambda}(A_{l_0} \cap B_{k_0}) > 0$.

Производя процедуру факторизации, получим нормированное пространство

$$S^\infty_{\mathcal{A}}(E, \mathcal{R}, \lambda, \mathbb{C}) \stackrel{\text{def}}{=} S(\mathcal{A}(\mathcal{R}))/\{f \in S(\mathcal{A}(\mathcal{R})) : \|f\|_\infty = 0\}.$$

Обозначим через $\mathbb{L}_\infty(E, \mathcal{R}, \lambda, \mathbb{C})$ пополнение по норме $\|\cdot\|_\infty$ введенного пространства $S^\infty_{\mathcal{A}}(E, \mathcal{R}, \lambda, \mathbb{C})$.

Лемма 16. *Пусть $f \in \mathbb{L}_\infty(E, \mathcal{R}, \lambda, \mathbb{C})$. Тогда оператор $\boldsymbol{M}_f$ умножения на функцию f корректно задан на пространстве H, причем справедливо неравенство*

$$\|\mathbf{M}_f u\|_H \leqslant \|f\|_{\mathbb{L}_\infty} \|u\|_H. \tag{2.14}$$

Доказательство. Возьмем $f \in S^\infty_{\mathcal{A}}(E, \mathcal{R}, \lambda, \mathbb{C})$, $u \in H$ и $u_n \in S(\mathcal{A}(\mathcal{R})) : \|u_n - u\| \to 0$. Тогда если

$$f(x) = \sum_{k=1}^{N} \alpha_k \chi_{B_k}(x), \quad u_n(x) = \sum_{k=1}^{M_n} \beta^n_k \chi_{A^n_k}(x), \ \ A^n_k \cap A^n_j = \varnothing, \ k \neq j,$$

то имеет место равенство

$$\|f(x)u(x)\|^2 = \left\| \sum_{k=1}^{N} \alpha_k \chi_{B_k}(x) u(x) \right\|^2 = \lim_{n \to \infty} \left\| \sum_{k=1}^{N} \alpha_k \chi_{B_k}(x) u_n(x) \right\|^2$$
$$= \lim_{n \to \infty} \left\| \sum_{k=1}^{N} \alpha_k \chi_{B_k}(x) \sum_{k=1}^{M_n} \beta^n_k \chi_{A^n_k}(x) \right\|^2 = \lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{N} \sum_{l=1}^{M_n} |\alpha_k|^2 \cdot |\beta^n_l|^2 \cdot \lambda_{A^n_l \cap B_k}.$$

Пусть теперь $\|f\|_\infty = \alpha_{k_0}$, тогда для любого $k \neq k_0$, либо $\alpha_k < \alpha_{k_0}$, либо $\underline{\lambda}(B_k) = 0$. Следовательно справедлива оценка

$$\|f(x)u(x)\|^2 \leqslant |\alpha_{k_0}|^2 \|u\|^2. \tag{2.15}$$

Если $f \in \mathbb{L}_\infty(E, \mathcal{R}, \lambda, \mathbb{C})$, то существует $\|\cdot\|_\infty$–фундаментальная последовательность $f_n \in S^\infty_{\mathcal{A}}(E, \mathcal{R}, \lambda, \mathbb{C})$ такая, что $\|f_n - f\|_\infty \to 0$ при $n \to \infty$. Из неравенства (2.15) легко заключаем, что последовательность $\mathbf{M}_{f_n}$ также будет фундаментальной в пространстве $B(H)$, снабженном операторной нормой. Так как пространство H полно, то и пространство $B(H)$ тоже является полным, а значит фундаментальная последовательность $\mathbf{M}_{f_n}$ будет сходится по норме пространства $B(H)$, причем ее пределом будет оператор $\mathbf{M}_f$. На основании этого факта уже легко получить оценку

$$\begin{aligned}\|\mathbf{M}_f u\| \leqslant \|(\mathbf{M}_{f_n} - \mathbf{M}_f)u\| + \|\mathbf{M}_{f_n}u\| &\leqslant \lim_{m\to\infty} \|\mathbf{M}_{f_n} - \mathbf{M}_{f_m}\| \cdot \|u\| + \|\mathbf{M}_{f_n}u\| \\ &\leqslant \lim_{m\to\infty} \|f_n - f_m\| \cdot \|u\| + \|f_n\|_\infty \|u\|.\end{aligned}$$

Осуществляя предельный переход $n,\, m \to \infty$, получаем требуемое неравенство (2.14). □

Введем пространство операторнозначных функций, которое будет нами использоваться для построения биективного отображения на пространстве цилиндрических мер. Обозначим символом $(\mathcal{M}(\mathbb{R}_+, B(H)),\, \tau)$ локально выпуклое пространство отображений положительной полуоси $[0,\, +\infty)$ в банахово пространство $B(H)$ линейных ограниченных операторов в H с топологией, определяемой следующим семейством функционалов:

$$\{\phi_{t,u,v} \mid t \in \mathbb{R}_+,\, u, v \in H\}, \qquad \phi_{t,u,v}(\mathbf{F}) = |(\mathbf{F}(t)u, v)|.$$

Однако, мы будем работать не со всем пространством $\mathcal{M}(\mathbb{R}_+, B(H))$, а только с его подпространством $\mathcal{M}_m(\mathbb{R}_+, B(H))$, состоящим из $B(H)$-значных функций на $\mathbb{R}_+ = [0, +\infty)$, значения которых в начальный момент времени принадлежат абелевой подалгебре $\mathcal{A}_m(H)$, содержащей линейные операторы вида $\mathbf{M}_f$, где $f \in \mathbb{L}_\infty(E,\, \mathcal{R},\, \lambda,\, \mathbb{C})$. О необходимости такого ограничения для задания меры по операторнозначной функции см. раздел 2.3.

Введем пространство мультипликативно ступенчатых операторнозначных функций $S_\infty(\mathbb{R}_+,\, \mathbb{L}_\infty(E))$, где введено обозначение $\mathbb{L}_\infty(E) = \mathbb{L}_\infty(E,\, \mathcal{R},\, \lambda,\, \mathbb{C})$. Операторнозначная функция $\mathbf{F}(t)$ принадлежит $S_\infty(\mathbb{R}_+,\, \mathbb{L}_\infty(E))$, если для каждого числа $T > 0$ существует такое конечное разбиение $[0,\, T] = \sqcup_{k=1}^K A_k$ отрезка $[0, T]$ на попарно непересекающиеся промежутки $A_1, \ldots, A_K$, что имеет место равенство

$$\mathbf{F}(t) = \sum_{k=1}^{K} \chi_{A_k}(t)\mathbf{M}_{f_k},$$

здесь $\mathbf{M}_{f_k}$ – оператор умножения на функцию f_k из пространства $\mathbb{L}_\infty(E,\, \mathcal{R},\, \lambda,\, \mathbb{C})$, т. е. $\mathbf{M}_{f_k}u(x) = f_k(x)u(x)$, где $f_k(x) \in \mathbb{L}_\infty(E,\, \mathcal{R},\, \lambda,\, \mathbb{C})$ при каждом $k \in \mathbb{N}$. Далее, пополняя пространство $S_\infty(\mathbb{R}_+,\, \mathbb{L}_\infty(E))$ по норме $\|\mathbf{F}(\cdot)\|_{\mathbb{L}_\infty(\mathbb{R}_+, \mathbb{L}_\infty(E))} = \sup_{s\in\mathbb{R}_+} ||\mathbf{F}(s)|_{\mathbb{L}_\infty(E, \mathcal{R}, \lambda, \mathbb{C})}|$, получаем банахово пространство $\mathbb{L}_\infty(\mathbb{R}_+,\, \mathbb{L}_\infty(E))$. Поскольку $f_k \in \mathbb{L}_\infty(E,\, \mathcal{R},\, \lambda,\, \mathbb{C})$ при каждом $k \in \overline{1, K}$, то для всякого $N \in \mathbb{N}$ найдется простая функция

$$f_k^N(x) = \sum_{m=1}^{m_N^k} \alpha_m^{N,k} \chi_{B_m^{N,k}}(x),\ x \in E, \quad \alpha_m^{N,k} \in \mathbb{C},\ B_m^{N,k} \in \mathcal{A}(\mathcal{R}),$$

такая, что выполняется неравенство

$$\|f_k - f_k^N\|_{\mathbb{L}_\infty(E)} \le \frac{1}{N}, \quad \forall\, k \in \overline{1,K}.$$

Для каждого $k \in \overline{1,K}$ введем последовательность линейных операторов $\mathbf{M}_{f_k^N}$, $N \in \mathbb{N}$. Тогда в силу леммы 16 для любого $k \in \overline{1,K}$ справедливо

$$\|\mathbf{M}_{f_k^N} u(x) - \mathbf{M}_{f_k} u(x)\|_H \le \|f_k(x) - f_N^k(x)\|_{\mathbb{L}_\infty(E)}\, \|u\|_H \to 0, \ \ N \to \infty.$$

Таким образом, справедлива

Лемма 17. *Пусть* $\mathbf{F} \in \mathbb{L}_\infty(\mathbb{R}_+, \mathbb{L}_\infty(E))$. *Тогда для любых* $T > 0$, $\epsilon > 0$ *существует разбиение отрезка* $[0,T]$ *на промежутки* $A_1, \ldots, A_m$ *и набор ступенчатых функций* $f_1, \ldots, f_m \in S^\infty_{\mathcal{A}}(E, \mathcal{R}, \lambda, \mathbb{C})$ *такие, что*

$$\sup_{t\in[0,T]} \|F(t) - \sum_{k=1}^m \chi_{A_k}(t) f_k\|_{\mathbb{L}_\infty(E,\mathcal{R},\lambda,\mathbb{C})} < \epsilon.$$

2.3. Построение меры на $\mathcal{A}_{\mathcal{C}yl}$ по оператор-функции. Построим биекцию между пространством $\mathcal{M}_m(\mathbb{R}_+, B(H))$ и пространством $a(\mathcal{M}(\mathbb{R}_+, E),\ \mathcal{A}_{\mathcal{C}yl})$ конечно-аддитивных комплекснозначных мер, заданных на измеримом пространстве $(\mathcal{M}(\mathbb{R}_+ E),\ \mathcal{A}_{\mathcal{C}yl})$. Определим отображение

$$\mathbf{\Lambda} : \mathcal{M}_m(\mathbb{R}_+, B(H)) \to a(\mathcal{A}_{\mathcal{C}yl}), \qquad \mathbf{\Lambda}[\mathbf{F}] = \mu^{\mathbf{F}}, \qquad \mathrm{Im}\,\mathbf{\Lambda} = a_{\mathbf{\Lambda}}(\mathcal{A}_{\mathcal{C}yl}). \tag{2.16}$$

Сначала определим значение меры $\mu_{\mathbf{F}}$ на цилиндрических множествах из полуалгебры $\mathcal{C}yl$, которые обладают базой, содержащей только множества из кольца $\mathcal{R}$, по следующей формуле

$$\begin{gathered} \mu^{\mathbf{F}}\left(C^{\vec{t}}_{\vec{B}}\right) = \left(\chi_{B_n}, \mathbf{F}(t_n - t_{n-1})\mathbf{P}_{B_{n-1}} \cdots \mathbf{P}_{B_1}\mathbf{F}(t_1 - t_0)\chi_{B_0}\right), \\ n \in \mathbb{N}, \quad B_i \in \mathcal{R}, \quad \forall\, i = 0, \ldots, n. \end{gathered} \tag{2.17}$$

Здесь действующий в H оператор вида $\mathbf{P}_B$ есть оператор умножения на индикаторную функцию множества B из кольца $\mathcal{R}$.

Для $n = 0$ и произвольного $t_0 \geqslant 0$, принимая во внимание, что

$$\mathbf{F}(0) \in \mathcal{A}_m : \ \mathbf{F}(0)(\bullet) = f(x)(\bullet),$$

где $f \in \mathbb{L}_\infty(E,\ \mathcal{R},\ \lambda,\ \mathbb{C})$, положим

$$\mu^{\mathbf{F}}(C^{t_0}_B) = \begin{cases} (\chi_B,\ \mathbf{F}(0)\chi_B) = \displaystyle\int_B f(x)\,\mathrm{d}\lambda(x), \quad B \in \mathcal{R}, \\ M_0 - \left(\chi_{E\setminus B},\ \mathbf{F}(0)\chi_{E\setminus B}\right) = M_0 - \displaystyle\int_{E\setminus B} f(x)\,\mathrm{d}\lambda(x), \quad B \in \mathcal{A}(\mathcal{R}),\ B \notin \mathcal{R}. \end{cases} \tag{2.18}$$

Заметим, что константа $M_0 = \mu^{\mathbf{F}}(\mathcal{M}(E))$ может быть выбрана произвольно подобно константе интегрирования при выборе потенциала. Константа M_0 не имеет значения для построения биекции, поскольку, как мы убедимся далее, для того, чтобы восстановить по мере из образа отображения $\mathbf{\Lambda}$ операторнозначную функцию, нам потребуются только значения меры на тех цилиндрических множествах из полуалгебры $\mathcal{C}yl$, база которых содержит только множества, принадлежащие кольцу $\mathcal{R}$.

Пусть $C_{\vec{B}}^{\vec{t}} \in \mathcal{C}yl$ и будем считать, что $m \in \mathbb{N}$ максимальный номер среди тех, которые соответствуют множествам в базе $\vec{B}$, не входящим в кольцо $\mathcal{R}$. Тогда значение меры $\mu_{\mathbf{F}}$ на цилиндрическом множестве $C_{\vec{B}}^{\vec{t}}$ удовлетворяет следующему равенству:

$$\mu^{\mathbf{F}}\left(C_{B_0,\ldots,B_{m-1},B_m,B_{m+1},\ldots,B_n}^{t_0,\ldots,t_{m-1},\;t_m,\;\;t_{m+1},\;\ldots,t_n}\right)$$
$$= \mu^{\mathbf{F}}\left(C_{B_0,\ldots,B_{m-1},B_{m+1},\ldots,B_n}^{t_0,\ldots,t_{m-1},\;t_{m+1},\;\ldots,t_n}\right) - \mu^{\mathbf{F}}\left(C_{B_0,\ldots,B_{m-1},E\setminus B_m,B_{m+1},\ldots,B_n}^{t_0,\ldots,t_{m-1},\;t_m,\;\;\;\;t_{m+1},\;\ldots,t_n}\right). \quad (2.19)$$

Таким образом, индуктивно разворачивая данную формулу, можно получить значение функции $\mu^{\mathbf{F}}$ на всех множествах из полукольца $\mathcal{C}yl$. Следующая лемма и ее следствие устанавливают, что данная функция действительно является цилиндрической мерой.

Лемма 18 ([10])**.** *Функция множества* $\mu^{\mathbf{F}}: \mathcal{C}yl \to \mathbb{C}$ *определяемая из* (2.17)–(2.19) *на полуалгебре* $\mathcal{C}yl$ *является аддитивной.*

Доказательство. Для любого $C_{\vec{B}}^{\vec{s}} \in \mathcal{C}yl$ рассмотрим его произвольное дизъюнктное разбиение на множества из полуалгебры. Докажем, что значение функции $\mu^{\mathbf{F}}$ на множестве $C_{\vec{B}}^{\vec{s}}$ равно сумме значений на элементах разбиения. Будем доказывать это в три этапа.

Докажем свойство для случая разбиения, состоящего только из двух непересекающихся множеств. Случай произвольного конечного разбиения сводится к случаю разбиения на два множества с помощью индукции.

I. Пусть при некотором $m \in \{0, 1, \ldots, n\}$ множество $C_{\vec{B}}^{\vec{s}}$ удовлетворяет условию $B_m = A_m \bigsqcup C_m$, где A_m, $C_m \in \mathcal{A}(\mathcal{R})$ и $A_m \cap C_m = \varnothing$. Докажем, что в этом случае имеет место

$$\mu^{\mathbf{F}}\left(C_{\ldots,\,A_m\sqcup C_m,\,\ldots}^{\ldots,\,s_m,\qquad\ldots}\right) = \mu^{\mathbf{F}}\left(C_{\ldots,\,A_m\,\ldots}^{\ldots,\,s_m,\ldots}\right) + \mu^{\mathbf{F}}\left(C_{\ldots,\,C_m,\,\ldots}^{\ldots,\,s_m,\,\ldots}\right). \quad (2.20)$$

Возможны несколько различных ситуаций.

1) Пусть база цилиндрического множества $C_{\vec{B}}^{\vec{s}}$ включает только множества, содержащиеся в кольце $\mathcal{R}$. Тогда равенство (2.20) для $n \geqslant 1$ непосредственно следует из (2.17) и того, что для непересекающихся множеств A_m и C_m выполняется $\mathbf{P}_{A_m\sqcup C_m} = \mathbf{P}_{A_m} + \mathbf{P}_{C_m}$. Если $n = 0$, тогда из (2.18) может быть получена цепочка равенств:

$$\mu^{\mathbf{F}}(C_{B_0}^{t_0}) = (\chi_{A_0\sqcup C_0}(x),\, \mathbf{F}(0)\chi_{A_0\sqcup C_0}(x)) = (\chi_{A_0}(x) + \chi_{C_0}(x),\, \mathbf{F}(0)(\chi_{A_0}(x) + \chi_{C_0}(x)))$$
$$= (\chi_{A_0}(x),\, \mathbf{F}(0)\chi_{A_0}(x)) + (\chi_{C_0}(x),\, \mathbf{F}(0)\chi_{C_0}(x)) + (\chi_{A_0}(x),\, \mathbf{F}(0)\chi_{C_0}(x)) + (\chi_{C_0}(x),\, \mathbf{F}(0)\chi_{A_0}(x))$$
$$= \mu^{\mathbf{F}}(C_{C_0}^{t_0}) + \mu^{\mathbf{F}}(C_{A_0}^{t_0}),$$

так как

$$(\chi_{C_0}(x),\, \mathbf{F}(0)\chi_{A_0}(x)) = (\chi_{A_0}(x),\, \mathbf{F}(0)\chi_{C_0}(x)) = \int\limits_{A_0 \cap C_0} f(x)\,\mathrm{d}\lambda(x) = 0.$$

Именно здесь для нас важно условие $\mathbf{F}(0) \in \mathcal{A}_m(H)$.

2) Будем полагать, что $B_m \in \mathcal{R}$, но в базе имеются множества, которые не принадлежат кольцу. В этом случае свойство аддитивности будем устанавливать индукционно по количеству таких множеств. Применим метод математической индукции. Пусть B_k для некоторого $k \in \{0, 1, \ldots n\}$, $k \neq m$, есть единственное множество в базе, дополнение которого принадлежит кольцу $\mathcal{R}$. Тогда при помощи (2.19) применим результаты первого пункта и снова воспользовавшись (2.19) установим справедливость (2.20).

Предположение индукции: пусть при некотором $k \in \mathbb{N}$: $2 \le k \le n-1$ равенство (2.20) имеет место для всех цилиндрических множеств, база которых содержит j множеств не принадлежащих кольцу $\mathcal{R}$, при $j = 1, \ldots, k-1$. Доказательство того, что свойство аддитивности выполняется и на цилиндрических множествах, база которых содержат ровно $j = k$ множеств не принадлежащих кольцу $\mathcal{R}$, производится аналогичным образом: применяем (2.19), для образовавшихся в результате этого множеств уже применимо предположение индукции, а далее группируем с учетом (2.19).

3) Теперь будем считать, что $B_m = A_m \bigsqcup C_m \notin \mathcal{R}$. Покажем, что ровно одно из множеств A_m и C_m содержится в кольце $\mathcal{R}$. Предположим противное. Тогда в соответствии с определением $\mathcal{A}(\mathcal{R})$ имеем $E \setminus A_m,\ E \setminus C_m \in \mathcal{R}$, и более того, $C_m \subset E \setminus A_m$ и $A_m \subset E \setminus C_m$, а значит выполнено

$$E = (E \setminus A_m) \cup (E \setminus C_m) = (E \setminus A_m) \cup ((E \setminus C_m) \setminus (E \setminus A_m)) \in \mathcal{R}.$$

Пришли к противоречию, что доказывает требуемое. Без ограничения общности будем считать,что $A_m \notin \mathcal{R}$. Этот случай также будем исследовать в несколько этапов.

3.1) Пусть $A_m \bigsqcup C_m = E$ и s_m находится среди временных индексов, соответствующих множествам из базы $\vec{B}$, которые не принадлежат кольцу $\mathcal{R}$. Тогда из (2.19) получаем

$$\mu^{\mathbf{F}}\left(C^{\ldots, s_{m-1}, s_m, s_{m+1}, \ldots}_{\ldots, B_{m-1}, A_m, B_{m+1}, \ldots}\right) = \mu^{\mathbf{F}}\left(C^{\ldots, s_{m-1}, s_{m+1}, \ldots}_{\ldots, B_{m-1}, B_{m+1}, \ldots}\right) - \mu^{\mathbf{F}}\left(C^{\ldots, s_{m-1}, s_m, s_{m+1}, \ldots}_{\ldots, B_{m-1}, C_m, B_{m+1}, \ldots}\right)$$
$$= \mu^{\mathbf{F}}\left(C^{\ldots, s_{m-1}, s_m, s_{m+1}, \ldots}_{\ldots, B_{m-1}\, E\ , B_{m+1}, \ldots}\right) - \mu^{\mathbf{F}}\left(C^{\ldots, s_{m-1}, s_m, s_{m+1}, \ldots}_{\ldots, B_{m-1}, C_m, B_{m+1}, \ldots}\right).$$

Откуда следует (2.20).

3.2) Положим теперь, что $A_m \bigsqcup C_m \neq E$ и s_m по-прежнему временной индекс, соответствующий множеству из базы $\vec{B}$, которое не содержится в кольце. Запишем теоретико-множественное соотношение

$$E = B_m \bigsqcup (E \setminus B_m) = A_m \bigsqcup \left((E \setminus B_m) \bigsqcup C_m\right), \quad (E \setminus B_m) \bigsqcup C_m \in \mathcal{R}.$$

Тогда на основе соотношения выше, равенства (2.19) и пункта 2), получаем выполнение условия аддитивности

$$\mu^{\mathbf{F}}\left(C^{\dots,s_{m-1},s_m,s_{m+1},\dots}_{\dots,B_{m-1},A_m,B_{m+1},\dots}\right)=\mu^{\mathbf{F}}\left(C^{\dots,s_{m-1},s_{m+1},\dots}_{\dots,B_{m-1},B_{m+1},\dots}\right)-\mu^{\mathbf{F}}\left(C^{\dots,s_{m-1},\qquad s_m\qquad,s_{m+1},\dots}_{\dots,B_{m-1},(E\setminus B_m)\bigsqcup C_m,B_{m+1},\dots}\right)$$
$$=\mu^{\mathbf{F}}\left(C^{\dots,s_{m-1},s_{m+1},\dots}_{\dots,B_{m-1},B_{m+1},\dots}\right)-\mu^{\mathbf{F}}\left(C^{\dots,s_{m-1},\quad s_m\quad,s_{m+1},\dots}_{\dots,B_{m-1},(E\setminus B_m),B_{m+1},\dots}\right)-\mu^{\mathbf{F}}\left(C^{\dots,s_{m-1},s_m,s_{m+1},\dots}_{\dots,B_{m-1},C_m,B_{m+1},\dots}\right)$$
$$=\mu^{\mathbf{F}}\left(C^{\dots,s_{m-1},s_m,s_{m+1},\dots}_{\dots,B_{m-1},B_m,B_{m+1},\dots}\right)-\mu^{\mathbf{F}}\left(C^{\dots,s_{m-1},s_m,s_{m+1},\dots}_{\dots,B_{m-1},C_m,B_{m+1},\dots}\right).$$

Таким образом, если при некотором $m\in\{0,1,\dots,n\}$ множество $C^{\vec{s}}_{\vec{B}}$ удовлетворяет условию $B_m=A_m\bigsqcup C_m$, где $A_m,C_m\in\mathcal{A}(\mathcal{R})$ и $A_m\cap C_m=\varnothing$, то выполняется (2.20).

II. На следующей стадии доказательства мы рассмотрим конкретный вид разбиения цилиндрического множества $C^{\vec{s}}_{\vec{B}}$. Будем полагать, что для каждого $j\in\{1,\dots,n\}$ имеет место

$$B_j=\bigsqcup_{k=1}^{w}A^j_k. \tag{2.21}$$

Обозначим через Σ совокупность всех возможных отображений

$$\sigma:\{1,\dots,n\}\to\{1,\dots,w\}.$$

Тогда всякое цилиндрическое множество, содержащееся в выбранном дизъюнктном разбиении, имеет следующий вид

$$C^{\vec{s}}_{\vec{D}_\sigma}=C^{s_1,\quad\dots,s_j,\quad\dots,s_n}_{A^1_{\sigma(1)},\dots,A^j_{\sigma(j)},\dots,A^n_{\sigma(n)}}. \tag{2.22}$$

Воспользуемся результатом пункта I для $m=1$, затем для $m=2$, и так далее до $m=n$. Получим, что

$$\mu^{\mathbf{F}}\left(C^{\vec{s}}_{\vec{B}}\right)=\mu^{\mathbf{F}}\left(\bigsqcup_{\sigma\in\Sigma}C^{\vec{s}}_{\vec{D}_\sigma}\right)=\sum_{\sigma\in\Sigma}\mu^{\mathbf{F}}\left(C^{\vec{s}}_{\vec{D}_\sigma}\right).$$

III. Для завершения доказательства остается показать, что если множество $C^{\vec{s}}_{\vec{B}}\in\mathcal{C}yl$ может быть представлено как объединение конечного числа попарно непересекающихся цилиндрических множеств $C^{\vec{\tau}_\alpha}_{\vec{A}_\alpha}\in\mathcal{C}yl$, где $\alpha=1,\dots,M$, то тогда имеет место равенство

$$\sum_{\alpha=1}^{M}\mu^{\mathbf{F}}\left(C^{\vec{\tau}_\alpha}_{\vec{A}_\alpha}\right)=\mu^{\mathbf{F}}\left(\bigsqcup_{\alpha=1}^{M}C^{\vec{\tau}_\alpha}_{\vec{A}_\alpha}\right)=\mu^{\mathbf{F}}(C^{\vec{s}}_{\vec{B}}).$$

Мы вправе ограничиться рассмотрением ситуации, когда $\vec{\tau}_\alpha=\vec{s}$ при всех $\alpha=1,\dots,M$. Воспользовавшись свойствами полуалгебры, построим разбиение аналогичное (2.21), (2.22), которое бы было согласовано с разбиением $C^{\vec{t}}_{\vec{B}}=\bigsqcup_{\alpha=1}^{M}C^{\vec{\tau}_\alpha}_{\vec{A}_\alpha}$, или иначе говоря, являлось бы его измельчением:

$$C^{\vec{\tau}_\alpha}_{\vec{A}_\alpha}=\bigsqcup_{\sigma\in\Sigma_\alpha}C^{\vec{\tau}_\alpha}_{\vec{D}_\sigma},\quad\forall\,\alpha=1,\dots,M,$$

Это утверждение также легко доказать индукцией по количеству временных компонент. Теперь воспользуемся доказанным в пункте II и получим требуемое

$$\mu^{\mathbf{F}}(C^{\vec{s}}_{\vec{B}}) = \sum_{\sigma\in\Sigma} \mu^{\mathbf{F}}\left(C^{\vec{s}}_{\vec{D}_\sigma}\right) = \sum_{\alpha=1}^{M}\sum_{\sigma\in\Sigma_\alpha} \mu^{\mathbf{F}}\left(C^{\vec{s}}_{\vec{D}_\sigma}\right) = \sum_{\alpha=1}^{M} \mu^{\mathbf{F}}\left(C^{\vec{\tau_\alpha}}_{\vec{A_\alpha}}\right). \qquad \square$$

Теорема 19. *Конечно-аддитивная функция множества $\mu^{\boldsymbol{F}}$ имеет единственное продолжение до конечно-аддитивной меры на алгебре $\mathcal{A}_{\mathcal{C}yl}$. Отображение* (2.16)

$$\mathbf{\Lambda} : \mathcal{M}_m(\mathbb{R}_+, B(H)) \to a(\mathcal{A}_{\mathcal{C}yl}),$$

определяемое условиями (2.17)–(2.19)*, инъективно.*

Доказательство. По стандартной процедуре продолжения конечно-аддитивной функции с полуалгебры на порожденную алгебру получаем, что при каждом $\mathbf{F} \in \mathcal{M}_m(\mathbb{R}_+, B(H))$ заданная условиями (2.17)–(2.19) аддитивная функция $\mu^{\mathbf{F}} :\ Cyl \to \mathbb{C}$ однозначно продолжается до комплекснозначной конечно-аддитивной меры $\mu^{\mathbf{F}} = \mathbf{\Lambda}(\mathbf{F}) \in a(\mathcal{A}_{Cyl})$.

Докажем инъективность отображения Λ. Пусть $\mathbf{F}_1(t) \neq \mathbf{F}_2(t)$ для некоторого $t \geq 0$. Тогда в силу того, что пространство $S(\mathcal{R})$ всюду плотно в пространстве H, получаем $\mathbf{F}_1(t)|_{S(\mathcal{R})} \neq \mathbf{F}_2(t)|_{S(\mathcal{R})}$. Поскольку всякий ограниченный оператор на гильбертовом пространстве однозначно определяется своей квадратичной формой, то получаем, что найдется $f \in S(\mathcal{R})$ такая, что $(f, \mathbf{F}_1(t)f) \neq (f, \mathbf{F}_2(t)f)$. А в силу того, что f представима в виде конечной линейной комбинации индикаторных функций множеств из кольца, получаем, что найдутся множества $B_1', B_2' \in \mathcal{R}$:

$$\mu^{\mathbf{F}_1}\left(C^{\,0,\,t}_{\,B_1',\,B_2'}\right) = (\chi_{B_2'},\, \mathbf{F}_1(t)\chi_{B_1'}) \neq (\chi_{B_2'},\, \mathbf{F}_2(t)\chi_{B_1'}) = \mu^{\mathbf{F}_2}\left(C^{\,0,\,t}_{\,B_1',\,B_2'}\right). \qquad \square$$

2.4. Построение оператор-функции по цилиндрической мере на $\mathcal{A}_{\mathcal{C}yl}$. Восстановим операторнозначную функцию по заданной мере $\mu \in a_{\mathbf{\Lambda}}(\mathcal{A}_{\mathcal{C}yl})$. Дадим некоторые определения, которые в дальнейшем сыграют ключевую роль.

Пусть $S(\mathcal{R})$ – пространство простых $\mathcal{R}$-измеримых функций $E \to \mathbb{C}$, являющихся линейными комбинациями индикаторных функций множеств из кольца $\mathcal{R}$. Для произвольного числа $n \in \mathbb{N}$, произвольного набора неотрицательных чисел $t_0, t_1, \ldots, t_n$ таких, что $t_0 \leq t_1 \leq \ldots \leq t_n$, и произвольного набора множеств $B_1, \ldots B_{n-1} \in \mathcal{A}(R)$ рассмотрим полуторалинейную форму $\beta^{t_0,t_1,\ldots,t_n}_{\mu;\, B_1,\ldots,B_{n-1}}$ на линейном пространстве $S(\mathcal{R})$, заданную на упорядоченной паре (χ_{B_0}, χ_{B_n}) индикаторных функций $B_0, B_n \in \mathcal{R}$ равенством

$$\beta^{t_0,t_1,\ldots,t_n}_{\mu;\ B_1,\ldots,B_{n-1}}(\chi_{B_0}, \chi_{B_n}) = \mu\left(C^{t_0,t_1,\ldots,t_n}_{B_0,B_1,\ldots,B_n}\right) \tag{2.23}$$

и продолженную на пространство $S(\mathcal{R})$ по условию полуторалинейности.

Заметим, что тогда из условия (2.23) при $n = 1$ и $t_1 = t_0$ следует, что при $n = 0$ для произвольного $t_0 > 0$ на линейном пространстве $S(\mathcal{R})$ полуторалинейная форма $\beta^{t_0}_{\mu}$

определена с помощью равенств

$$\beta_{\mu}^{t_0}(\chi_{B_0},\chi_{B_n}) = \mu\left(C^{t_0}_{B_0\bigcap B_1}\right), \quad B_0, B_1 \in \mathcal{R}. \tag{2.24}$$

Для непрерывного продолжения полуторалинейных форм с плотного в пространстве H подпространства $S(\mathcal{R})$ на все пространство H достаточно потребовать от меры μ обладания следующим свойством.

Определение 20. Цилиндрическую меру μ из $a(\mathcal{A}_{\mathcal{C}yl})$ назовем *непрерывной по базе*, если она удовлетворяет следующим условиям

$$\begin{gathered}\forall\, n\in\mathbb{N},\ \forall\, t_0\le\dots\le t_n\in\mathbb{R}_+,\ \ \exists\, M\in(0,+\infty):\quad \forall\, B_1,\dots,B_{n-1}\in\mathcal{A}(\mathcal{R}),\\ \sup_{u,v\in S(\mathcal{R}):\ \|u\|_H=\|v\|_H=1}\left|\beta^{t_0,t_1,\dots,t_n}_{\mu;\ B_1,\dots,B_{n-1}}(u,v)\right|\le M\,\|u\|_H\,\|v\|_H.\end{gathered} \tag{2.25}$$

Заметим, что из условия (2.25) при $n=1$ и $t_0=t_1$ следует, что для любого $t_0\ge 0$ существует число $M\in(0,+\infty)$ такое, что

$$\sup_{u,v\in S(\mathcal{R}):\ \|u\|_H=\|v\|_H=1}\left|\beta^{t_0}_{\mu}(u,v)\right|\le M\,\|u\|_H\,\|v\|_H.$$

Семейство непрерывных по базе цилиндрических мер, заданных на алгебре $\mathcal{A}_{\mathcal{C}yl}$, будем обозначать через $a^{Bc}(\mathcal{A}_{\mathcal{C}yl})$.

Определение 21. Мера $\mu\in a(\mathcal{A}_{\mathcal{C}yl})$ называется *стационарной*, если для всякого $\tau>0$ и любого $n\in\mathbb{N}$ для произвольных $0\le t_0\le\dots\le t_n$ и $B_0,B_1,\dots,B_n\in\mathcal{A}(\mathcal{R})$ имеет место равенство

$$\mu\left(C^{t_0,\dots,t_n}_{B_0,\dots,B_n}\right)=\mu\left(C^{t_0+\tau,\dots,t_n+\tau}_{B_0,\dots,B_n}\right).$$

Множество стационарных цилиндрических мер, заданных на алгебре $\mathcal{A}_{\mathcal{C}yl}$, обозначается символом $a^S(\mathcal{A}_{\mathcal{C}yl})$.

Замечание 22. Поясним предварительно: свойство непрерывности по базе цилиндрической меры позволяет получить ограниченную полуторалинейную форму в H, значения которой на индикаторных функциях суть значения цилиндрической меры на множествах из $\mathcal{C}yl$. По ограниченной полуторалинейной форме однозначно восстанавливается многопараметрическая операторнозначная функция. Далее, свойство стационарности предоставит возможность осуществить переход к однопараметрической оператор-функции.

Лемма 23. *Всякая мера $\mu\in\mathrm{Im}\boldsymbol{\Lambda}=a_{\boldsymbol{\Lambda}}(\mathcal{A}_{\mathcal{C}yl})$ является непрерывной по базе и стационарной, т. е.*

$$a_{\boldsymbol{\Lambda}}(\mathcal{A}_{\mathcal{C}yl})\subset a^{Bc}(\mathcal{A}_{\mathcal{C}yl})\bigcap a^S(\mathcal{A}_{\mathcal{C}yl})\equiv a^{Bc,S}(\mathcal{A}_{\mathcal{C}yl}).$$

Доказательство. Действительно, пусть $\mathbf{F}\in\mathcal{M}_m(\mathbb{R}_+,B(H))$ и $\mu^{\mathbf{F}}=\boldsymbol{\Lambda}(\mathbf{F})$. Тогда при $n=0$ для любого $t_0\ge 0$ в силу (2.18) имеем

$$\beta^{t_0}_{\mu^{\mathbf{F}}}(\chi_{B_0},\chi_{B_1})=\mu^{\mathbf{F}}\left(C^{t_0}_{D_0\bigcap B_1}\right)=\left(\chi_{B_0\bigcap B_1},\mathbf{F}(0)\chi_{B_0\bigcap B_1}\right)$$

согласно (2.24) при любых $B_0, B_1 \in \mathcal{R}$. Следовательно, форма $\beta^{t_0}_{\mu^{\mathbf{F}}}$ удовлетворяет условию (2.25). Поскольку нормы проекторов $\mathbf{P}_B$ не превосходят единицы, то для любых $B_1, \dots, B_{n-1} \in \mathcal{A}(\mathcal{R})$ и для произвольного набора временных индексов $0 \le t_0 < \dots < t_n$ выполняется следующее неравенство

$$\left|(\chi_{B_n}, \mathbf{F}(s_n - s_{n-1})\mathbf{P}_{B_{n-1}} \dots \mathbf{P}_{B_1}\mathbf{F}(s_1 - s_0)\chi_{B_0})\right| \\ \leqslant \prod_{k=1\dots n} \|\mathbf{F}(s_k - s_{k-1})\|_{B(H)} \sqrt{\lambda(B_0)\lambda(B_n)}. \quad (2.26)$$

Пусть $u = \sum\limits_{k=1}^{n} \delta_k \chi_{D_k}$, $v = \sum\limits_{k=1}^{n} \beta_k \chi_{B_k} \in S(\mathcal{R})$ при некоторых δ_j, $\beta_i \in \mathbb{C}$ и $D_j, B_i \in \mathcal{R}$. Тогда по определению продолжения функции (2.23) на пространство $S(\mathcal{R})$ по условию полуторалинейности справедливо равенство

$$\beta^{\,t_0,\dots,t_n}_{\mu;\,B_1,\dots,B_{n-1}}(u, v) = (u, \mathbf{F}(s_n - s_{n-1})\mathbf{P}_{B_{n-1}} \dots \mathbf{P}_{B_1}\mathbf{F}(s_1 - s_0)v)$$

и, следовательно, справедлива оценка

$$\left|(u, \mathbf{F}(s_n - s_{n-1})\mathbf{P}_{B_{n-1}} \dots \mathbf{P}_{B_1}\mathbf{F}(s_1 - s_0)v)\right| \leqslant \prod_{k=1\dots n} \|\mathbf{F}(s_k - s_{k-1})\|_{B(H)} \, \|u\|_H \, \|v\|_H, \quad (2.27)$$

доказывающая непрерывность по базе меры $\mu^{\mathbf{F}}$. Стационарность меры $\mu^{\mathbf{F}}$ следует из условий (2.17), (2.18). □

Теорема 24. *Мера* $\mu \in a^{Bc}(\mathcal{A}_{\mathcal{C}yl})$ *задает двухпараметрическое семейство ограниченных линейных операторов* $\mathbf{U}_\mu(t_1, t_2)$, $t_1, t_2 \ge 0$, *в пространстве* H.

Доказательство. Для произвольно зафиксированных $0 \le t_0, \dots, t_n$ и $B_1, \dots, B_{n-1} \in \mathcal{R}$ функционал (2.23) определяет ограниченную (2.25) полуторалинейную форму на пространстве $S(\mathcal{R})$, а значит может быть по непрерывности продолжен единственным образом до ограниченной полуторалинейной формы $\beta^{t_0,t_1,\dots,t_n}_{\mu;\;B_1,\dots,B_{n-1}}$ на всем H. Следовательно (см. [58]), с ограниченной полуторалинейной формой $\beta^{t_0,t_1,\dots,t_n}_{\mu;\;B_1,\dots,B_{n-1}}$ ассоциирован ограниченный линейный оператор $\mathbf{U}^{t_0,\,\dots,\,t_n}_{\mu;\;B_1,\,\dots,\,B_{n-1}}$, действующий в H, по формуле:

$$\left(g,\, \mathbf{U}^{t_0,\,\dots\,,t_n}_{\mu;\;B_1,\,\dots\,,B_{n-1}} f\right) = \beta^{t_0,\,t_1,\,\dots,\,t_n}_{\mu;\;B_1,\,\dots,\,B_{n-1}}(f,\, g), \quad f, g \in H.$$

При этом существует зависящая от выбранных $t_0 \le \dots \le t_n \in \mathbb{R}_+$ постоянная $M \in (0, +\infty)$ такая, что для любых $B_1, \dots, B_{n-1} \in \mathcal{A}(\mathcal{R})$ выполняется неравенство

$$\left\|\mathbf{U}^{t_0,\,\dots\,,t_n}_{\mu;\;B_1,\,\dots\,,B_{n-1}}\right\|_{B(H)} \le M.$$

В частности, для $n = 1$ мы получаем

$$\left(\chi_{B_1},\, \mathbf{U}^{t_0,t_1}_\mu \chi_{B_0}\right) = \beta^{t_0,t_1}_\mu(\chi_{B_0}, \chi_{B_1}) = \mu\left(C^{t_0,\,t_1}_{B_0,\,B_1}\right), \quad C^{t_0,\,t_1}_{B_0,\,B_1} \in \mathcal{C}yl. \quad (2.28)$$

Таким образом, можно построить двухпараметрическую операторнозначную функцию $\mathbf{U}_\mu : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \to B(H)$ при любых $t_0, t_1 \in \mathbb{R}_+ : \ t_0 < t_1$, которая в силу взаимно однозначного соответствия между ограниченными полуторалинейными формами в H и ограниченными линейными операторами из $B(H)$, а также ввиду всюду плотности пространства $S(\mathcal{R})$ в пространстве H, однозначно определяется равенством (2.28) по значениям

$$(\chi_{B_1}, \mathbf{U}_\mu(t_0,\, t_1)\chi_{B_0}) = \mu\left(C^{t_0,\, t_1}_{B_0,\, B_1}\right), \quad \forall\, B_0, B_1 \in \mathcal{R};\ \ t_0, t_1 \in \mathbb{R}_+,\ \ t_0 \le t_1. \tag{2.29}$$

□

Множества мер $a^S(\mathcal{A}_{\mathcal{C}yl})$ и $a^{Bc}(\mathcal{A}_{\mathcal{C}yl})$ являются, как нетрудно проверить, линейными подпространствами в пространстве мер $a(\mathcal{A}_{\mathcal{C}yl})$. Рассмотрим линейное пространство $a^{S,Bc}(\mathcal{A}_{Cyl}) = a^S(\mathcal{A}_{\mathcal{C}yl}) \cap a^{Bc}(\mathcal{A}_{\mathcal{C}yl})$.

Теорема 25. *Равенство*

$$\mathbf{V}(\mu) = \mathbf{F}_\mu, \quad \mu \in a^{S,Bc}(\mathcal{A}_{Cyl}),$$

где

$$\mathbf{F}_\mu(t) = \mathbf{U}_\mu(0,\, t), \quad t \ge 0, \tag{2.30}$$

задает на линейном пространстве $a^{S,Bc}(\mathcal{A}_{Cyl})$ *линейное отображение*

$$\mathbf{V}:\ a^{S,Bc}(\mathcal{A}_{Cyl}) \to \mathcal{M}_m(\mathbb{R}_+, B(H)).$$

Доказательство. В силу стационарности меры μ двухпараметрическое семейство ограниченных линейных операторов, заданное условием (2.29), удовлетворяет равенству

$$\mathbf{U}_\mu(0,\, t) = \mathbf{U}_\mu(\tau,\, t+\tau), \quad \tau, t \ge 0.$$

Следовательно, равенство (2.30) определяет операторнозначное отображение

$$\mathbf{F}_\mu \in \mathcal{M}(\mathbb{R}_+, B(H)).$$

Значение операторнозначного отображения при $t = 0$ в силу (2.30) и (2.29) обладает свойством

$$(\chi_{B_0}, \mathbf{F}_\mu(0)\chi_{B_1}) = \mu\left(C^{0,\,0}_{B_0, B_1}\right) = \mu\left(C^0_{B_0 \bigcap B_1}\right) = \left(\chi_{B_0 \bigcap B_1}, \mathbf{F}_\mu(0)\chi_{B_0 \bigcap B_1}\right). \tag{2.31}$$

Остается доказать, что заданный равенством (2.31) оператор $\mathbf{F}_\mu(0)$ самосопряжен и принадлежит алгебре $\mathcal{A}_m$.

В силу (2.31), $\mathbf{F}_\mu(0) \in B(H)$ и $(\mathbf{F}_\mu(0)\chi_{B_0'}, \chi_{B_0''}) = 0$ для любых $B_0', B_0'' \in \mathcal{R}$ таких, что $B_0' \bigcap B_0'' = \varnothing$. Тогда оператор $\mathbf{F}_\mu(0)$ симметричен на плотном в пространстве H подпространстве $S(\mathcal{R})$. Симметричный плотно определенный оператор $\mathbf{F}_\mu(0)$ ограничен и допускает продолжение по непрерывности на пространство H, которое является ограниченным самосопряженным оператором.

Далее, для всякой функции $u \in S(\mathcal{R})$ вида $u = \sum\limits_{k=1}^{n} \alpha_k \chi_{B_k}$ при некоторых $n \in \mathbb{N}$, $\alpha_j \in \mathbb{C}$, $B_j \in \mathcal{R}$ и для всякого множества $B \in \mathcal{R}$ из условия (2.31) получаем, что справедлива цепочка равенств

$$(u,\, \mathbf{F}_\mu(0)\mathbf{P}_B u) = \sum_{j,k=1}^{n} \alpha_k \bar{\alpha}_j \left(\chi_{B_k},\, \mathbf{F}_\mu(0)\chi_{B_j \cap B}\right) = \sum_{k=1}^{n} |\alpha_k|^2 \left(\chi_{B_k \cap B},\, \mathbf{F}_\mu(0)\chi_{B_k \cap B}\right)$$
$$= \sum_{k=1}^{n} |\alpha_k|^2 \left(\chi_{B_k \cap B},\, \mathbf{F}_\mu(0)\chi_{B_k}\right) = (\mathbf{P}_B u,\, \mathbf{F}_\mu(0)u) = (u,\, \mathbf{P}_B \mathbf{F}_\mu(0)u)\,.$$

Из равенства квадратичных форм операторов на всюду плотном подпространстве $S(\mathcal{R})$ следует их равенство на всем гильбертовом пространстве H:

$$\mathbf{F}_\mu(0)\mathbf{P}_B = \mathbf{P}_B\mathbf{F}_\mu(0) \quad \forall\, B \in \mathcal{R}.$$

Значит, оператор $\mathbf{F}^\mu(0)$ принадлежит коммутанту абелевой алгебры $\mathcal{A}_m(H)$, где $H = \mathbb{L}_2(E, \mathcal{R}, \lambda, \mathbb{C})$. Абелева алгебра операторов $\mathcal{A}_m(H)$ изоморфна алгебре $\mathbb{L}_\infty(E, \mathcal{R}, \lambda, \mathbb{C})$. Следовательно, она является алгеброй фон Неймана и совпадает со своим вторым коммутантом. А поскольку алгебра $\mathcal{A}_m(H)$ коммутативна, то ее коммутант совпадает с ее вторым коммутантом. Поэтому $\mathbf{F}^\mu(0) \in \mathcal{A}_m(H)$. □

Таким образом, по значениям цилиндрической меры $\mu \in a^{S,\,Bc}(\mathcal{A}_{Cyl})$ на двувременных и одновременных цилиндрах построена операторнозначная функция $\mathbf{F}_\mu \in \mathcal{M}_m(\mathbb{R}_+, B(H))$. Отображение $a^{S,\,Bc}(\mathcal{A}_{Cyl}) \to \mathcal{M}_m(\mathbb{R}_+, B(H))$ линейно, но не инъективно. Для получения инъективного отображения сузим область определения до класса мер, значения которых на произвольных цилиндрических множествах восстанавливаются по значениям на двувременных и одновременных цилиндрических множествах.

Определение 26. Непрерывную по базе меру μ из семейства $a^{Bc}((\mathcal{A}_{\mathcal{C}yl}))$ будем называть *марковской*, если

$$\begin{gathered} \mathbf{U}_{\mu;\, B_{m+1},\,\ldots,\,B_{n-1}}^{t_m,\,\ldots,\,t_{n-1},\,t_n}\, \mathbf{P}_{B_m} \mathbf{U}_{\mu;\, B_1,\,\ldots\, B_{m-1}}^{t_0,\,\ldots\, t_{m-1},\,t_m} = \mathbf{U}_{\mu;\, B_1,\,\ldots B_{n-1}}^{t_0,\,\ldots\, t_n}, \\ \forall\, t_0, \ldots, t_n :\; 0 \le t_0 < \ldots < t_m < \ldots\, t_n; \quad \forall\, B_1, \ldots, B_{n-1} \in \mathcal{R}. \end{gathered} \tag{2.32}$$

Если условие (2.32)) выполнено при всех $B_1, \ldots, B_{n-1} \in \mathcal{A}_{\mathcal{R}}$, то мера μ называется строго марковской.

Через $a^M((\mathcal{A}_{\mathcal{C}yl}))$ $(a^{M^*}((\mathcal{A}_{\mathcal{C}yl})))$ обозначим совокупность марковских (строго марковских) цилиндрических мер, заданных на цилиндрической алгебре $\mathcal{A}_{\mathcal{C}yl}$. В наших обозначениях имеем $a^{M^*}((\mathcal{A}_{\mathcal{C}yl})) \subset a^M((\mathcal{A}_{\mathcal{C}yl})) \subset a^{Bc}((\mathcal{A}_{\mathcal{C}yl}))$.

Замечание 27. Данное свойство позволяет получать значения многовременной операторнозначной функции $\mathbf{U}_{\mu;\, B_0,\,\ldots B_{n-1}}^{t_0,\,\ldots\, t_n}$ по значениям двувременных оператор-функций $\mathbf{U}_\mu(t_0, t_1)$,

$t_0, t_1 \in \mathbb{R}_+$. Например, значения меры на цилиндрах с трехвременными основаниями задаются равенством $\mathbf{U}_{\mu;\ B_1}^{t_0,t_1,t_2} = \mathbf{U}_{\mu}^{t_1,t_2}\,\mathbf{P}_{B_1}\,\mathbf{U}_{\mu}^{t_0,t_1}$ при любом $B_1 \in \mathcal{A}_R$. Продолжение меры на всю алгебру $\mathcal{A}_{Cyl}$ может быть проведено с применением индукциии.

Лемма 28. *Всякая мера из множества $a_{\mathbf{\Lambda}}(\mathcal{A}_{\mathcal{C}yl})$ является марковской.*

Доказательство. Если $\mu \in a_{\mathbf{\Lambda}}(\mathcal{A}_{\mathcal{C}yl})$, то существует функция $\mathbf{F} \in \mathcal{M}_m(\mathbb{R}_+, B(H))$ такая, что $\mu = \mathbf{\Lambda}(\mathbf{F}) \equiv \mu^{\mathbf{F}}$. Для произвольно зафиксированных $0 \le t_0, \dots, t_n$ и $B_1, \dots, B_{n-1} \in \mathcal{R}$ рассмотрим многопараметрическое отображение $\mathbf{U}_{\mu^{\mathbf{F}};\ B_0, \dots B_{n-1}}^{t_0, \dots t_n}$, порожденное цилиндрической мерой $\mu^{\mathbf{F}} \in a_{\mathbf{\Lambda}}(\mathcal{A}_{\mathcal{C}yl})$. Тогда для произвольных $B_0, B_n \in \mathcal{R}$ имеем

$$\left(\chi_{B_n},\, \mathbf{U}_{\mu^{\mathbf{F}};\ B_1, \dots, B_{n-1}}^{t_0, \dots, t_n}\chi_{B_0}\right) = \mu^{\mathbf{F}}\left(C_{\vec{B}}^{\vec{t}}\right) = (\chi_{B_n}, \mathbf{F}(t_n - t_{n-1})\dots \mathbf{P}_{B_1}\mathbf{F}(t_1 - t_0)\chi_{B_0})\,.$$

Полученное равенство имеет место для индикаторных функций произвольных множеств $B_0, B_n \in \mathcal{R}$. По линейности скалярного произведения в H можно заключить, что оно будет выполняться и для произвольных функций $f, g \in S(\mathcal{R})$. В виду того, что $S(\mathcal{R})$ всюду плотно в H получаем равенство

$$\begin{aligned}\mathbf{U}_{\mu^{\mathbf{F}};\ B_1, \dots, B_{n-1}}^{t_0, \dots, t_n} &= \left[\mathbf{F}(t_n - t_{n-1})\mathbf{P}_{B_{n-1}}\dots \mathbf{F}(t_{m+1} - t_m)\right]\mathbf{P}_{B_m}\left[\mathbf{F}(t_m - t_{m-1})\dots \mathbf{P}_{B_1}\mathbf{F}(t_1 - t_0)\right] \\ &= \mathbf{U}_{\mu^{\mathbf{F}};\, B_{m+1}, \dots,\, B_{n-1}}^{t_m, \dots, t_{n-1},\, t_n}\mathbf{P}_{B_m}\mathbf{U}_{\mu^{\mathbf{F}};\, B_1, \dots B_{m-1}}^{t_0, \dots t_{m-1},\, t_m}, \qquad (2.33)\end{aligned}$$

означающее выполнение условия марковости для меры $\mu^{\mathbf{F}}$. □

Исследуем отображение, обратное к инъективному отображению $\mathbf{\Lambda}$.

Теорема 29. *Образ $a_{\mathbf{\Lambda}}(\mathcal{C})$ отображения $\mathbf{\Lambda}$ совпадает с пространством $a^{Bc,S,M}(\mathcal{A}_{\mathcal{C}yl})$. Определенное равенством* (2.30) *отображение $\mathbf{V} : a^{Bc,S,M}(\mathcal{A}_{\mathcal{C}yl}) \to \mathcal{M}_m(\mathbb{R}_+, B(H))$ является обратным к биектиному отображению $\mathbf{\Lambda} : \mathcal{M}_m(\mathbb{R}_+, B(H)) \to a_{\mathbf{\Lambda}}(\mathcal{A}_{\mathcal{C}yl})$.*

Доказательство. Согласно леммам 23, 28 имеем $\mathrm{Im}\mathbf{\Lambda} = a_{\mathbf{\Lambda}}(\mathcal{A}_{\mathcal{C}yl}) \subset a^{Bc,S,M}(\mathcal{A}_{\mathcal{C}yl})$. Кроме того, из (2.33) и теоремы 25 следует, что если $\mu^{\mathbf{F}} \in \mathrm{Im}\mathbf{\Lambda}$, то $\mathbf{F}_{\mu^{\mathbf{F}}}(t) = \mathbf{F}(t)$, т. е.

$$\mathbf{V} \circ \mathbf{\Lambda} = \mathbf{I}\, :\, \mathcal{M}_m(\mathbb{R}_+, B(H)) \to \mathcal{M}_m(\mathbb{R}_+, B(H)).$$

Согласно теореме 25 имеет место вложение $\mathrm{Im}(\mathbf{V}) \subset \mathcal{M}_m(\mathbb{R}_+, B(H))$. Для некоторой меры $\mu \in a^{Bc,S,M}(\mathcal{A}_{\mathcal{C}yl})$ рассмотрим цилиндрическую меру $\mathbf{\Lambda} \circ \mathbf{V}(\mu) = \mu^{\mathbf{V}(\mu)}$. Нам нужно установить равенство мер μ и $\mu^{\mathbf{V}(\mu)}$. А так как обе меры обладают свойством марковости (2.32) (согласно лемме 28), достаточно установить равенство их значений на произвольном двувременном и одновременном цилиндрическом множестве из полукольца $\mathcal{C}yl$. Для любого двупараметрического $C_{B_0, B_1}^{t_0, t_1} \in \mathcal{C}yl$ и всякого одновременного $C_B^t \in \mathcal{C}yl$ при помощи (2.29), (2.30) и (2.31) имеем

$$\mu^{\mathbf{V}(\mu)}\left(C_{B_0, B_1}^{t_0, t_1}\right) = (\chi_{B_1},\, \mathbf{V}(\mu)[t_1]\chi_{B_0}) = \mu^{\mathbf{V}(\mu)}\left(C_{B_0, B_1}^{t_0, t_1}\right),$$

$$\mu^{\mathbf{V}(\mu)}\left(C_B^t\right) = (\chi_B,\, \mathbf{V}(\mu)\chi_B) = \mu\left(C_B^t\right).$$

Значит, $\mu = \mathbf{\Lambda}(\mathbf{V}(\mu))$ и $\mu \in a_{\mathbf{\Lambda}(\mathcal{A}_{\mathbf{Cyl}})}$, и поэтому $a_{\mathbf{\Lambda}}(\mathcal{A}_{\mathcal{C}yl}) = a^{Bc,S,M}(\mathcal{A}_{\mathcal{C}yl})$. □

Лемма 30. *Функция $\mathbf{F} \in \mathcal{M}_m$, удовлетворяющая условию $\mathbf{F}(0) = \mathbf{I}$, является однопараметрической полугруппой тогда и только тогда, когда мера $\mu^{\mathbf{F}} = \mathbf{\Lambda}(\mathbf{F})$ является строго марковской.*

Доказательство. Если функция $\mathbf{F}$ является однорараметрической полугруппой, то из (2.33) следует выполнение (2.32) при произвольных $B_1, \ldots, B_{n-1} \in \mathcal{A}_{\mathcal{R}}$. В обратную сторону утверждение леммы следует из (2.32) при $n = 2$, $m = 1$ и $B_1 = E$. □

3. Сходимость случайных процессов

3.1. Обобщенная слабая сходимость случайных векторов. Пусть E – векторное пространство, $\mathcal{R}$ – кольцо подмножеств, а $\mathcal{A}(\mathcal{R})$ – минимальная алгебра, порожденная кольцом $\mathcal{R}$. Будем рассматривать случайные величины, распределения которых суть конечно-аддитивные меры ограниченной вариации, определенные на данном кольце множеств $\mathcal{R}$. Банахово пространство таких мер договоримся обозначать через $ba(E, \mathcal{R})$. Нам потребуется усреднять операторы сдвига аргумента, заданные на подходящем функцональном пространстве. В качестве пространства функций бесконечномерного аргумента для представления алгебры операторов сдвига предлагается брать пространство функций, квадратично интегрируемых по некоторой неотрицательной конечно-аддитивной мере λ, заданной на кольце множеств $\mathcal{R}$. Тогда гарантировать равномерную ограничесть семейства операторов сдвига аргумента на вектор может тот факт, что функциональное пространство строится относительно трансляционно инвариантной меры:

$$\begin{aligned}\|\mathbf{S}_h f\|^2 &= \left\|\mathbf{S}_h\left(\sum_{k=1}^n \alpha_k \chi_{B_k}(x)\right)\right\|^2 = \sum_{k,\,j=1}^n \alpha_k \overline{\alpha}_j (\chi_{B_j+h}(x),\, \chi_{B_k+h}(x)) \\ &= \sum_{k,\,j=1}^n \alpha_k \overline{\alpha}_j \lambda(B_j \cap B_k) = \sum_{k=1}^n |\alpha_k|^2 \lambda(B_k) = \|f\|^2, \quad \forall\, f \in S(\mathcal{R}).\end{aligned}$$

Следовательно, чтобы применять операторный подход для анализа операторов сдвига на случайные векторы гильбертова пространства E, меру на E для построения пространства представления стоит выбрать трансляционно инвариантной. Выбор трансляционно инвариантной меры на пространстве E приводит к необходимости рассмотрения конечно-аддитивных мер, определенных на некотором кольце $\mathcal{R}$ подмножеств пространства E.

Пусть $\mathcal{X}$ – некоторое локально-выпуклое пространство $\mathcal{R}|\mathcal{B}(\mathbb{C})$-измеримых функций, инвариантное относительно оператора сдвига аргумента на произвольный вектор пространства E. Здесь $\mathcal{B}(\mathbb{C})$ – борелевская σ-алгебра множеств в $\mathbb{C}$.

Определение 31. *Оператором свертки с мерой* $\mu \in a(E, \mathcal{R})$ назовем линейный ограниченный оператор Φ_μ, действующий на пространстве $\mathcal{X}$ по формуле

$$\Phi_\mu u(x) = \int_E u(x-y)\,\mathrm{d}\mu(y) \quad \forall\, u \in \mathcal{X},\ \forall\, x \in E, \tag{3.1}$$

при условии, что зависящий от параметра интеграл (3.1) существует.

Замечание 32. Если μ представляет собой распределение случайной величины ξ, то оператор (3.1) есть ни что иное, как математическое ожидание оператора $S_\xi : \mathcal{X} \to \mathcal{X}$ сдвига на случайный вектор ξ (пространство $\mathcal{X}$ инвариантно относительно оператора сдвига аргумента на произвольный вектор пространства E). Для счетно-аддитивных мер и измеримых относительно соответствующих σ-алгебр функций это утверждение является следствием [17, теорема 3.6.1]. Распишем для случая конечно-аддитивных мер и ограниченных $\mathcal{R}|\mathcal{B}(\mathbb{C})$-измеримых функций из $\mathcal{X}$:

$$(\mathbb{E}\mathbf{S}_\xi)u(x) = \int\limits_\Omega u(x-\xi(\omega))\,\mathrm{d}\mathbb{P}(\omega) = \int_\Omega f\circ\xi(\omega)\,\mathrm{d}\mathbb{P}(\omega) = \lim_{|\tau|\to 0}\sum_{j=1}^N a_j\mathbb{P}\left((f\circ\xi)^{-1}(\Delta_j)\right).$$

Здесь

$$f\circ\xi(\Omega) = \bigsqcup_{j=1}^N \Delta_j, \quad a_j \in \Delta_j,\ j = 1,\ldots,N, \quad \tau = \{\Delta_1,\ldots,\Delta_N\}, \quad |\tau| = \max_{k=1,\ldots,N}\operatorname{diam}(\Delta_k),$$

$$(\mathbb{E}S_\xi)u(x) = \lim_{N\to\infty}\sum_{j=1}^N a_j\mathbb{P}\circ\xi^{-1}\left(f^{-1}(\Delta_j)\right) = \int_E u(x-y)\,\mathrm{d}\mu(y).$$

Если рассматриваемая функция неограничена, но измерима и интегрируема по указанной мере, то в качестве отрезка $[A, B]$ берем последовательность $[A_N, B_N]$ такую, что $A_N \to -\infty$ и $B_N \to +\infty$ при $N \to \infty$. Для каждого номера $N \in \mathbb{N}$ повторяем рассуждения и, затем, переходим к пределу, что обосновано в силу предположения об интегрируемости функции.

Обозначим согласно $\mathcal{L}(\mathcal{X})$ локально-выпуклое пространство линейных ограниченных операторов на $\mathcal{X}$, а через $ba_{\mathcal{X}}(E, \mathcal{R})$ – подпространство мер, для которых свертка с мерой функций из $\mathcal{X}$ определена. Если $ba_{\mathcal{X}}(E, \mathcal{R})$ непусто, то имеем отображение

$$\Psi :\ ba_{\mathcal{X}}(E, \mathcal{R}) \to \mathcal{L}(\mathcal{X}) :\ \Psi(\mu) = \Phi_\mu.$$

Определение 33. Последовательность мер $(\mu_n)_{n=1}^\infty \subset ba_{\mathcal{X}}(E, \mathcal{R})$ называется сходящейся $(\mathcal{L}(\mathcal{X}(E)), \tau)$-*слабо* к мере $\mu \in ba(E, \mathcal{R})$, если последовательность операторов $\Phi_{\mu_n} = \Psi(\mu_n)$, действующих в пространстве $\mathcal{X}(E)$ согласно (3.1), сходится в пространстве $\mathcal{L}(\mathcal{X}(E))$, снабженном некоторой топологией τ, к оператору $\Phi_\mu = \Psi(\mu)$.

Определение 34. Последовательность случайных величин (ξ_n) называется сходящейся

$(\mathcal{L}(\mathcal{X}(E)),\,\tau)$-*слабо по распределению* к случайной величине ξ, если последовательность мер $(\mu_n)_{n=1}^{\infty} \subset ba_{\mathcal{X}}(E,\,\mathcal{R})$, где

$$\mu_n(A) = \mathbb{P} \circ \xi_n^{-1}(A), \quad \forall\, A \in \mathcal{R},$$

сходится $(\mathcal{L}(\mathcal{X}(E)),\,\tau)$-*слабо* к мере μ, определяемой по формуле

$$\mu(A) = \mathbb{P} \circ \xi^{-1}(A), \quad \forall\, A \in \mathcal{R}.$$

В статье [33] теорема 2 показывает, что определение 33 является обобщением *слабой сходимости радоновых мер*, если в качестве $\mathcal{X}$ выбрать пространство непрерывных и ограниченных функций на метрическом пространстве E, снабженное топологией поточечной сходимости, а в качестве топологии на пространстве $\mathcal{L}(\mathcal{X})$ принять сильную операторную топологию τ_{SOT}.

Такое обобщение понятия слабой сходимости мер позволяет индуцировать топологии вида $\Psi^{-1}(\tau)$ на пространстве мер по топологии на пространстве операторов $\mathcal{L}(\mathcal{X})$. При этом классическая слабая топология на пространстве мер является частным случаем в общей схеме. К примеру, зафиксируем в качестве топологии на пространстве операторов $\mathcal{L}(\mathcal{X})$ сильную операторную топологию. Тогда, если топология на пространстве $\mathcal{X}$ определяется семейством полунорм $\{\phi_\alpha,\,\alpha \in \mathcal{I}\}$, то $\mathcal{X}$-слабая топология $\tau_{\mathcal{X}}^{w}$ на пространстве $ba_{\mathcal{X}}(E,\,\mathcal{R})$ задается семейством функционалов $\{\Phi_{\alpha,\,u},\,\alpha \in \mathcal{I},\,u \in \mathcal{X}\}$, действие которых для каждой меры $ba_{\mathcal{X}}(E,\,\mathcal{R})$ дается формулой

$$\Phi_{\alpha,\,u}(\mu) = \phi_\alpha\left(\int_E u(x-y)\,\mathrm{d}\mu(y)\right), \quad \alpha \in \mathcal{I},\ u \in \mathcal{X}.$$

Различные топологии на пространстве мер и взаимосвязи между ними были исследованы в работе [33].

Замечание 35. В последней статье приведен пример последовательности распределений на конечномерном евклидовом пространстве E, сходящихся $(\mathbb{L}_2(E),\,\tau_w)$-слабо, но не сходящихся $C_b(E)$-слабо.

3.2. Обобщенная слабая сходимость случайных процессов

Определение 36. Последовательность случайных процессов $\{\xi_n(t,\,\bullet),\ t \in T\}$, задаваемых согласно определению 10, сходится $(\mathcal{L}(\mathcal{X}_t(E_t)),\,\tau_t)$-*слабо поточечно*, если для любого временного индекса $t \in T$ имеет место $(\mathcal{L}(\mathcal{X}_t(E_t)),\,\tau_t)$-слабая сходимость по распределению последовательности $\xi_n(t)$ случайных величин к случайной величине $\xi(t)$.

Теорема Чернова позволяет исследование сходимости мер свести к вопросу о сходимости операторнозначных отображений

Теорема 37 ([36], Чернов)**.** *Пусть X – банахово, а $B(X)$ – снабженное операторной нормой банахово пространство линейных ограниченных операторов, действующих на X. Рассмотрим сильно непрерывную операторнозначную функцию $\boldsymbol{F}\colon [0,\ \infty) \to B(X)$, удовлетворяющую следующим условиям:*

- $\boldsymbol{F}(0) = \boldsymbol{I}$;
- *найдется такое $a \in \mathbb{R}$, что $\|\boldsymbol{F}(t)\|_{B(X)} \leqslant e^{at}$ при всех $t \geqslant 0$;*
- *существует линейный плотно определенный оператор $\boldsymbol{A} : D(\boldsymbol{A}) \to X$, для которого имеет место равенство $\boldsymbol{A} = \lim\limits_{t\to 0} \frac{\boldsymbol{F}(t)-\boldsymbol{I}}{t}$ в смысле сильной операторной топологии.*

Тогда, если оператор $\boldsymbol{A}$ замыкаем и его замыкание является генератором сильно непрерывной полугруппы $\boldsymbol{U}(t)$, $t \geqslant 0$, то для любого $f \in X$ и произвольного $T > 0$ имеет место

$$\lim_{n\to\infty} \left\{ \sup_{t\in[0,\,T]} \left\| \left(\left(\boldsymbol{F}\left(\frac{t}{n}\right)\right)^n - \boldsymbol{U}(t) \right) f \right\|_X \right\} = 0.$$

Пусть $\mathcal{X}$ – некоторое банахово пространство $\mathcal{R}$-измеримых функций, инвариантное относительно оператора сдвига аргумента на произвольный вектор пространства E.

Теорема 38. *Пусть $\xi(t,\bullet)_{t\geqslant 0}$ – случайный процесс в смысле определения 3, принимающий значения в некотором векторном пространстве E с кольцом $\mathcal{R}$; пусть также $\xi_n(t,\bullet)_{t\geqslant 0}$ – последовательность случайных процессов таких, что процессы независимы в совокупности и для любых $n \in \mathbb{N}$ и $t \geqslant 0$ имеет место*

$$\mathbb{P} \circ \xi^{-1}(A) = \mathbb{P} \circ \xi_n^{-1}(A), \quad \forall\, A \in \mathcal{A}(\mathcal{R}).$$

Пусть для каждого $t \geqslant 0$ отображение $u \to \mathbf{F}(t)u = \mathbb{E}(\mathbf{S}_{\xi(t)}u)$ является корректно определенным на пространстве $\mathcal{X}$. Если операторнозначная функция $\mathbf{F}(t)$, $t \geqslant 0$, удовлетворяет условиям теоремы Чернова, то последовательность случайных процессов

$$\left\{ \eta_n(t) = \xi_n\left(\frac{t}{n}\right) + \cdots + \xi_1\left(\frac{t}{n}\right),\ t \geqslant 0 \right\}$$

$(B(\mathcal{X}), \tau_{sot})$-слабо сходится по распределению к марковскому цилиндрическому случайному процессу, являющемуся образом полугруппы $\exp(\mathbf{F}'(0)t)$, $t \geqslant 0$, при отображении $\boldsymbol{\Lambda}$.

Доказательство. Для всякого $t \geqslant 0$ и для любого $f \in \mathcal{X}$ имеет место равенство

$$\mathbb{E}(\mathbf{S}_{\xi_n(t)} \circ \cdots \circ \mathbf{S}_{\xi_1(t)} f) = \mathbb{E}(f(x - \xi_1(t) - \cdots - \xi_n(t))) = \int_\Omega f(x - \xi_1(t,\,\omega) - \cdots - \xi_n(t,\,\omega))\, \mathrm{d}\mathbb{P}(\omega)$$
$$= \int\limits_{E\times\cdots\times E} f(x - y_1 \cdots - y_n)\, \mathrm{d}\mu_{1,\ldots,n}(\vec{y}) = \int\limits_{E\times\cdots\times E} g_{f,\,x}(y_1 + \cdots + y_n)\, \mathrm{d}\mu_{1,\ldots,n}(\vec{y}).$$

Поскольку интеграл определен корректно, то в случае ограниченной функции f интеграл можно выразить через предел интегральных сумм при измельчении множества значений

$$g_{f,x}(E) = \bigsqcup_{j=1}^{N} \Delta_j \subset \mathbb{C}, \quad a_j \in \Delta_j, \;\; j = 1, \dots, N,$$
$$\tau = \{\Delta_1, \dots, \Delta_N\}, \quad |\tau| = \max_{k=1\dots N} \operatorname{diam}(\Delta_k),$$

$$\mathbb{E}(\mathbf{S}_{\xi_n(t)} \circ \dots \circ \mathbf{S}_{\xi_1(t)} f) = \lim_{|\tau|\to 0} \sum_{k=1}^{N} a_k \mu_{1,\dots,n} \left\{ \vec{y} \in E \times \dots \times E \mid y_1 + \dots + y_n \in g_{f,x}^{-1}(\Delta_k) \right\}$$
$$= \lim_{|\tau|\to 0} \sum_{k=1}^{N} a_k \int_E \mathrm{d}\mu_1(y_1) \int_E \mathrm{d}\mu_2(y_2) \cdots \int_E \mathrm{d}\mu_n(y_n) \chi_{g_{f,x}^{-1}(\Delta_k) - y_1 - \dots - y_{n-1}}(y_n)$$
$$= \lim_{|\tau|\to 0} \sum_{k=1}^{N} a_k \int_E \mathrm{d}\mu_1(y_1) \int_E \mathrm{d}\mu_2(y_2) \cdots \int_E \mathrm{d}\mu_n(y_n) \chi_{g_{f,x}^{-1}(\Delta_k)}(y_1 + \dots + y_{n-1} + y_n)$$
$$= \int_E \mathrm{d}\mu_1(y_1) \int_E \mathrm{d}\mu_2(y_2) \cdots \int_E \mathrm{d}\mu_n(y_n) g_{f,x}(y_1 + \dots + y_{n-1} + y_n)$$
$$= \int_E \mathrm{d}\mu_1(y_1) \int_E \mathrm{d}\mu_2(y_2) \cdots \int_E \mathrm{d}\mu_n(y_n) f(x - y_1 - \dots - y_{n-1} - y_n)$$
$$= \mathbb{E}\mathbf{S}_{\xi_n(t)} \circ \dots \circ \mathbb{E}\mathbf{S}_{\xi_1(t)} f = (\mathbf{F}(t))^n f.$$

Подобно тому, как это оговаривалось в замечании 32, результат можно распространить на случай неограниченных измеримых функций, если интегралы выше для них корректно определены. Отметим, что для случая счетно-аддитивных борелевских нормированных мер этот результат можно найти в [59]. Поскольку в условиях теоремы мы предполагаем, что оператор $\mathbf{F}(t)$ удовлетворяет условиям теоремы Чернова, то, обозначив замыкание оператора $\mathbf{A}$, фигурирующего в теореме 37, через $\mathbf{F}'(0)$, получаем, что для любого $f \in \mathcal{X}$ и всякого $T > 0$:

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{t\in[0,T]} \left\| \mathbb{E}\left(\mathbf{S}_{\xi_n(\frac{t}{n}) + \dots + \xi_1(\frac{t}{n})} f \right) - \exp(\mathbf{F}'(0)t) f \right\|_{\mathcal{X}} = 0.$$

Последнее означает $(\mathcal{L}(\mathcal{X}),\ \tau_{SOT})$-слабую сходимость по распределению последовательности случайных процессов $\left\{ \eta_n(t) = \xi_n\left(\dfrac{t}{n}\right) + \dots + \xi_1\left(\dfrac{t}{n}\right),\ t \geqslant 0 \right\}$ к марковскому процессу $\{\eta(t),\ t \geqslant 0\}$, соответствующему полугруппе $\exp(\mathbf{F}'(0)t)$, $t \geqslant 0$, причем

$$\exp(\mathbf{F}'(0)t) f = \mathbb{E}(\mathbf{S}_{\eta(t)} f).$$

Последнее означает, что η является обобщенным цилиндрическим процессом, представимым комплекснозначной конечно-аддитивной мерой $\mu_\eta = \mathbf{\Lambda}(\exp(\mathbf{F}'(0)t))$ в соответствии с определением 10. При этом в силу теоремы 29 и леммы 30 процесс η обладает свойствами стационарности и строгой марковости. □

Замечание 39. Для последовательности композиций независимых случайных операторов сдвига на вектор евклидова пространства утверждение теоремы включает утверждение центральной предельной теоремы для сумм независимых случайных векторов, если в качестве пространства $X(E)$ выбрать пространство $C_b(E)$ с топологией поточечной сходимости [32, 33].

3.3. Цилиндрически поточечная сходимость случайных процессов.

Пусть $\{\xi(t,\bullet),\ t \in \mathbb{R}_+\}$ – обобщенный случайный процесс со значениями в пространстве E. При этом для всякого $t \geq 0$, $\xi(t)$ есть случайная величина со значением в E. Пусть ему соответствует цилиндрическая мера μ_ξ, заданная на цилиндрической алгебре $\mathcal{A}_{\mathcal{C}yl}$ пространства траекторий $\mathcal{M}(\mathbb{R}_+, E)$.

Определение 40 ([43, 44])**.** Последовательность обобщенных случайных векторнозначных процессов $\xi_n(t)$ сходится *цилиндрически поточечно* к обобщенному процессу $\xi(t)$, если для всякого цилиндрического множества $C^{\vec{t}}_{\vec{B}} \in \mathcal{C}yl$ имеет место

$$\lim_{n\to\infty} \mu_{\xi_n}\left(C^{\vec{t}}_{\vec{B}}\right) = \mu_\xi\left(C^{\vec{t}}_{\vec{B}}\right). \tag{3.2}$$

В силу свойства аддитивности цилиндрических мер сразу получаем, что из предельного соотношения (3.2) будет следовать аналогичное для любого множества, принадлежащего цилиндрической алгебре $\mathcal{A}_{\mathcal{C}yl}$. Отметим также, что

$$\mu_\xi\left(C^{\vec{t}}_{\vec{B}}\right) = \mathbb{P} \circ \vec{\xi}_{\vec{t}}^{\,-1}(B_1 \times B_2 \times \cdots \times B_n) = P_{t_1,\ldots,t_n}(B_1 \times B_2 \times \cdots \times B_n).$$

Таким образом, цилиндрически поточечная сходимость процесса эквивалентна поточечной сходимости конечномерных распределений на алгебрах $\mathcal{A}_{t_1,\ldots,t_n}$. Заметим, что даже для классических вероятностных борелевских мер на метрическом пространстве из слабой сходимости последовательности мер не следует сходимость их значений на всяком бэровском множестве, согласно [60, пример 8.1.4]. С другой стороны, по теореме Александрова [60] слабая сходимость последовательности вероятностных мер эквивалентна сходимости последовательности их значений на всяком борелевском множестве непрерывности, т. е. множестве с границей меры нуль. Так, с точки зрения классической теории вероятностей цилиндрически поточечная сходимость сильнее классической сходимости последовательности случайных процессов в смысле конечномерных распределений.

Теорема 41. *Пусть* $\{\mu_n\}: \mathbb{N} \to a^{Bc,S,M}(\mathcal{A}_{Cyl})$ *– последовательность обобщенных цилиндрических случайных процессов со значениями в измеримом пространстве* $(E, \mathcal{A}(\mathcal{R}))$*. Тогда из поточечной на алгебре* $\mathcal{A}_{\mathcal{C}yl}$ *сходимости последовательности* $\{\mu_n\}$ *к непрерывному по базе стационарному марковскому процессу* $\mu \in a^{Bc,S,M}(\mathcal{A}_{Cyl})$ *следует поточечная* *на полуоси* $\mathbb{R}_+$ *сходимость в слабой операторной топологии последовательность операторнозначных функций* $(\mathbf{V}(\mu_{\xi_n}))_{n=1}^{\infty}$ *к операторнозначной функции* $\mathbf{V}(\mu_\xi)$. *Если последовательность оператор-функций* $\{\mathbf{F}_k\} : \mathbb{N} \to \mathcal{M}_m(\mathbb{R}_+, B(H))$ *сходится к оператор-функции* $\mathbf{F} \in \mathcal{M}_m(\mathbb{R}_+, B(H))$ *в сильной операторной топологии поточечно на полуоси* $\mathbb{R}_+$, *то имеет место поточечная сходимость соответствующих им обобщенных цилиндрических процессов* $\{\mathbf{\Lambda}(\boldsymbol{F}_k)\}$ *на алгебре* $\mathcal{A}_{\mathcal{C}yl}$ *к обобщенному процессу* $\mathbf{\Lambda}(\boldsymbol{F})$.

Доказательство. Докажем, что из поточечной на $\mathcal{A}_{Cyl}$ сходимости последовательности $\{\mu_{\xi_n}\}: \ \mathbb{N} \to a^{Bc,S,M}(\mathcal{A}_{Cyl})$ к предельной мере μ_ξ следует сходимость в слабой операторной топологии последовательности $\{\mathbf{V}(\mu_{\xi_n})(t)\}$ к оператору $\mathbf{V}(\mu_\xi)(t)$ при каждом $t \geq 0$. Сходимость $\mathbf{V}(\mu_{\xi_n})$ к $\mathbf{V}(\mu_\xi)$ при $n \to \infty$ в слабой операторной топологии поточечно на полуоси $\mathbb{R}_+$ в силу всюду плотности множества $S(E, \mathcal{R}, \mathbb{C})$ в пространстве H равносильна тому, что

$$\lim_{k\to\infty} (\chi_{B_1}, \mathbf{V}(\mu_{\xi_k})[t]\, \chi_{B_0}) = (\chi_{B_1}, \mathbf{V}(\mu_\xi)[t]\, \chi_{B_0}) \quad \forall\, t \geqslant 0, \ \forall\, B_0\, B_1 \in \mathcal{R}.$$

В силу теоремы 29 и свойства стационарности (определение 21) рассматриваемых цилиндрических мер, это эквивалентно следующему:

$$\lim_{k\to\infty} \mu_{\xi_k}\left(C^{0,\ t}_{B_0,\, B_1}\right) = \mu\left(C^{0,\ t}_{B_0,\, B_1}\right), \quad \forall\, t \geqslant 0, \ \forall\, B_0, B_1 \in \mathcal{R}.$$

Последнее равенство следует из поточечной сходимости цилиндрических мер.

Докажем вторую часть утверждения. Пусть $\mathbf{F}_k(t)$ сходится в сильной операторной топологии к $\mathbf{F}(t)$ при каждом $t \geq 0$. Докажем, что тогда $\lim\limits_{k\to\infty} \mu^{\mathbf{F}_k}(C) = \mu^{\mathbf{F}}(C)$ при любых $C \in \mathcal{A}_{Cyl}$. Принимая во внимание аддитивность меры на алгебре $\mathcal{A}_{\mathcal{C}yl}$, а также соотношения (2.17) и (2.19), достаточно проверить утверждение для цилиндрических множеств с базой, включающей только множества из кольца $\mathcal{R}$. Напомним, что тогда значения цилиндрических мер определяются как

$$\mu^{\mathbf{F}_k}\left(C^{\vec{s}}_{\vec{B}}\right) = \left(\chi_{B_n}, \mathbf{F}_k(s_n - s_{n-1})\mathbf{P}_{B_{n-1}} \dots \mathbf{P}_{B_1}\mathbf{F}_k(s_1 - s_0)\chi_{B_0}\right),$$
$$n \in \mathbb{N}, \ \ B_i \in \mathcal{R}, \ \ \forall\, i = 0, \dots, n.$$

Значит, поточечная сходимость цилиндрических мер $\mu^{\mathbf{F}_k}$ к мере $\mu^{\mathbf{F}}$ следует из леммы 15 и следствия 13. □

3.4. Связь обобщенной слабой и поточечной сходимости. Установим связь между обобщенной слабой сходимостью векторнозначных и операторнозначных процессов с одной стороны, и цилиндрической поточечной сходимостью соответствующих им цилиндрических мер с другой. Пусть E – сепарабельное гильбертово пространство. Если E конечномерно, то мы фиксируем кольцо $\mathcal{R}_L$ измеримых по Лебегу ограниченных множеств, а также $\mathcal{A}(\mathcal{R}_L)$ минимальную алгебру, порожденную кольцом $\mathcal{R}_L$. В случае бесконечномерного пространства все менее тривиально, поскольку не существует меры Лебега, т. е. нетривиальной, счетно-аддитивной, σ-конечной, локально конечной и трансляционно инвариантной борелевской меры на бесконечномерных нормированных пространствах [41]. Однако, лишаясь одного из этих свойств, можно получить аналоги меры Лебега. Поскольку, как уже отмечалось ранее, нас интересуют трансляционно инвариантные и σ-конечные меры, необходимо отказаться от свойства счетной-аддитивности. Для того, чтобы в дальнейшем иметь возможность применять развиваемую теорию, рассмотрим конечно-аддитивную меру, удовлетворяющую заявленным требованиям. С подробным описанием ее построения и свойств можно ознакомиться в работах [34, 44]. Мы же сейчас дадим краткий обзор. Итак, пусть E – бесконечномерное сепарабельное гильбертово пространство.

Определение 42. *Брусом* в пространстве E назовем такое множество $\Pi \subset E$, что существует ортонормированный базис $\mathcal{E}$ в пространстве E, в котором координаты элементов множества Π удовлетворяют условию

$$\Pi = \{x \in E : (x,\, e_j) = x_j \in [a_j,\, b_j)\ \forall\, j \in \mathbb{N}\}, \quad -\infty < a_j < b_j < +\infty, \quad j \in \mathbb{N}.$$

Брус является непустым множеством в том и только в том случае, если $\sum\limits_{j=1}^{\infty} c_j^2 < +\infty$, где $c_j = \inf\limits_{x \in [a_j,\, b_j)} |x|,\ j \in \mathbb{N}$.

Определение 43. Брус называется *измеримым*, если он либо пустой, либо следующий ряд для него сходится:

$$\sum_{j=1}^{\infty} \max\{0,\, \ln(b_j - a_j)\}.$$

Фиксируем некоторый ОНБ $\mathcal{E}$ в пространстве E. Обозначим с помощью $\mathcal{K}_1(\mathcal{E})$ совокупность всех измеримых брусов, ребра которых сонаправлены векторам некоторого ортонормированного базиса $\mathcal{E}$ в пространстве E. Пусть $r_{\mathcal{E}}$ – кольцо подмножеств пространства E, порожденное семейством множеств $K_1(\mathcal{E})$.

Лемма 44 ([43, 44])**.** *Семейство $\mathcal{K}_1(\mathcal{E})$ не образует полукольца. Тем не менее, всякая теоретико множественная разность элементов множества $\mathcal{K}_1(\mathcal{E})$ может быть представлена в виде счетного объединения элементов из семейства $\mathcal{K}_1(\mathcal{E})$.*

Введем следующее семейство множеств

$$\mathcal{K}_2(\mathcal{E}) = \left\{ \Pi \setminus \bigcup_{k=1}^{n} \Pi_k \,\middle|\, \Pi,\, \Pi_1, \ldots \Pi_n \in \mathcal{K}_1(\mathcal{E}), \ \ n \in \mathbb{N} \right\}$$

и совокупность $\mathcal{K}_3(\mathcal{E})$ всех возможных конечных объединений множеств из $\mathcal{K}_2(\mathcal{E})$.

Лемма 45 ([43])**.** *Семейство $\mathcal{K}_3(\mathcal{E})$ является полукольцом, а семейство $\mathcal{K}_3(\mathcal{E})$ является кольцом для любого произвольно выбранного ортонормированного базиса $\mathcal{E}$, при этом $\mathcal{K}_3(\mathcal{E}) = r_{\mathcal{E}}$.*

Зададим аддитивную функцию множества $\lambda^1_{\mathcal{E}}$ на семействе $\mathcal{K}_1(\mathcal{E})$ согласно

$$\lambda^1_{\mathcal{E}}(\varnothing) = 0, \quad \lambda^1_{\mathcal{E}}(\Pi) = \exp\left(\sum_{j=1}^{\infty} \ln(b_j - a_j)\right). \tag{3.3}$$

Лемма 46 ([43]). *Функция множества $\lambda_{\mathcal{E}} : K_1(\mathcal{E}) \to [0, +\infty)$, определенная равенством* (3.3)*, является аддитивной на семействе $K_1(\mathcal{E})$, и инвариантной относительно сдвига на любой вектор пространства E.*

По аддитивности данная функция единственным образом может быть продолжена до конечно-аддитивной меры $\lambda^2_{\mathcal{E}}$ на кольце $\lambda^3_{\mathcal{E}} : \mathcal{K}_3(\mathcal{E}) \to \mathbb{C}$, причем $\lambda^3_{\mathcal{E}}|_{\mathcal{K}_1} = \lambda^1_{\mathcal{E}}$.

Определение 47. Множество $A \subset E$ назовем $\lambda_{\mathcal{E}}$-*измеримым*, если для всякого $\varepsilon > 0$ найдутся множества $A_1, A_2 \in \mathcal{K}_3(\mathcal{E})$, удовлетворяющие соотношениям

$$A_1 \subset A \subset A_2, \quad \lambda^3_{\mathcal{E}}(A_2 \setminus A_1) < \varepsilon.$$

Лемма 48 ([43]). *Семейство $\mathcal{K}(\mathcal{E})$, которое включает все $\lambda_{\mathcal{E}}$-измеримые множества, образует кольцо.*

Определим *внутреннюю меру* и *внешнюю меру* как функции, заданные на множестве 2^E, которые при любом $A \subset E$ удовлетворяют

$$\underline{\lambda}_{\mathcal{E}}(A) = \sup_{\substack{B \in \mathcal{K}_3(\mathcal{E}) \\ B \subset A}} \lambda^3_{\mathcal{E}}(B) \quad \text{и} \quad \overline{\lambda}_{\mathcal{E}}(A) = \inf_{\substack{B \in \mathcal{K}_3(\mathcal{E}) \\ A \subset B}} \lambda^3_{\mathcal{E}}(B).$$

Кроме того, для каждого $A \in \mathcal{K}(\mathcal{E})$ выполняется $\underline{\lambda}_{\mathcal{E}}(A) = \overline{\lambda}_{\mathcal{E}}(A)$. Распространим однозначно меру $\lambda_{\mathcal{E}}$ на все кольцо $\mathcal{K}(\mathcal{E})$ так, что $\lambda_{\mathcal{E}}(A) = \underline{\lambda}_{\mathcal{E}}(A) = \overline{\lambda}_{\mathcal{E}}(A)$.

Лемма 49 ([38]). *Пусть B_R – шар радиуса R в пространстве E.*

- *Если $R < \frac{1}{\sqrt{2}}$, то $\underline{\lambda}_{\mathcal{E}}(B_R) = \overline{\lambda}_{\mathcal{E}}(B_R) = \lambda_{\mathcal{E}}(B_R) = 0$;*
- *Если $R > \frac{1}{\sqrt{2}}$, то $\overline{\lambda}_{\mathcal{E}}(B_R) = +\infty$ и $\underline{\lambda}_{\mathcal{E}}(B_R) = 0$.*

Предложенная мера является неотрицательной, конечно-аддитивной, при этом не счетно-аддитивной, трансляционно инвариантной, локально конечной, σ-конечной и полной. Тем не менее, ввиду отсутствия свойства счетной аддитивности, ее продолжение по схеме Лебега–Каратеодори невозможно, поскольку верхняя мера Каратеодори обращается в нуль на всяком измеримом брусе [44]. Для данной меры корректно определено пространство $H = \mathbb{L}_2(E, \mathcal{K}_{\mathcal{E}, \lambda_{\mathcal{E}}}\mathbb{C})$ квадратично интегрируемых по мере $\lambda_{\mathcal{E}}$ функций [43].

Вернемся теперь к случайным процессам и сформулируем теорему, которая позволит установить связь между сходимостью цилиндрических мер и обобщенной слабой сходимостью, соответствующих им процессов.

Теорема 50. *Пусть последовательность E-значных случайных процессов $\{\xi_n(t),\, t \geqslant 0\}$ сходится $(B(H), \tau_{SOT})$-слабо поточечно к векторнозначному процессу $\{\xi(t),\, t \geqslant 0\}$. Тогда последовательность цилиндрических мер $(\mu_n = \mathbf{V}(\mathbf{F}_n))_{n=1}^{\infty}$, заданных на цилиндрической алгебре $\mathcal{A}_{\mathcal{C}yl}$ пространства траекторий $\mathcal{M}(\mathbb{R}_+,\, E)$, сходится поточечно к мере $\mu = \mathbf{V}(\mathbf{F})$, где*

$$\mathbf{F}_n(t)u(x) = \mathbb{E}\left(\boldsymbol{S}_{\xi_n(t)}u(x)\right), \quad \text{и} \quad \mathbf{F}(t)u(x) = \mathbb{E}\left(\boldsymbol{S}_{\xi(t)}u(x)\right)$$

для любого $t \geqslant 0$ и для всякой $u \in H$.

Доказательство. Сразу отметим, что в силу трансляционной инвариантности меры $\lambda_{\mathcal{E}}$ оператор-функции $\mathbf{F}_n(t)$ и $\mathbf{F}(t)$ корректно определены (семейство операторов сдвига равномерно ограничено, а меры, задающие распределения процессов, имеют ограниченные вариации). Из обобщенной $(B(H), \tau_{SOT})$-слабой сходимости имеем для произвольного $t \in \mathbb{R}_+$

$$\lim_{n\to\infty} \|\mathbb{E}(\mathbf{S}_{\xi_n(t)}u) - \mathbb{E}(\mathbf{S}_{\xi(t)}u)\|_H = 0.$$

Значит, $\mathbf{F}_n(t)$ сходится в сильной операторной топологии к оператору $\mathbf{F}(t)$. Но тогда по теореме 41 имеем поточечную на алгебре $\mathcal{A}_{\mathcal{C}yl}$ сходимость последовательности цилиндрических мер $(\mu_n = \mathbf{V}(\mathbf{F}_n))_{n=1}^{\infty}$ к мере $\mu = \mathbf{V}(\mathbf{F})$. □

3.5. К случайным блужданиям в гильбертовом пространстве. Пусть $\mathbf{D} \in B(E)$ – неотрицательный ядерный оператор с ортонормированным базисом собственных векторов $\mathcal{E}$. Любой оператор $\mathbf{D}$ указанного класса определяет центрированную счетную аддитивную гауссову меру $\nu_{\mathbf{D}}$ на пространстве E такую, что мера $\nu_{\mathbf{D}}$ имеет ковариационный оператор $\mathbf{D}$.

Оператор сдвига на вектор $h \in E$ определен на пространстве $\mathcal{H} = L_2(E, \mathcal{K}_{\mathcal{E}}, \lambda_{\mathcal{E}}, \mathbb{C})$ равенством

$$\mathbf{S}_h u(x) = u(x - h).$$

Для каждого $h \in H$ оператор $\mathbf{S}_h$ принадлежит банаховому пространству $B(\mathcal{H})$ действующих в пространстве H ограниченных линейных операторов, наделенному операторной нормой. При этом $\mathbf{S}_h$ является унитарным оператором в пространстве $\mathcal{H}$.

Пусть h – случайный вектор пространства E распределение которого задает мера ν. Тогда среднее значение $\mathbf{U} \in B(\mathcal{H})$ оператора случайного сдвига $\mathbf{S}_h$ задается интегралом Петтиса

$$\int\limits_E \mathbf{S}_h d\nu(h) = \mathbf{U} \quad \Leftrightarrow \quad (\mathbf{U}f, g) = \int\limits_E (\mathbf{S}_h f, g) d\nu(h)\ \forall f, g \in H.$$

Согласно [61], справедлива

Теорема 51. *Пусть $\mathbf{D} \in B(E)$ – неотрицательный ядерный оператор с ортонормированным базисом из собственных векторов $\mathcal{E}$. Тогда однопараметрическое семейство опе-*

раторов

$$\mathbf{U}_t = \int\limits_E \mathbf{S}_h d\nu_{t\mathbf{D}}(h),\ t \geq 0, \tag{3.4}$$

является однопараметрической полугруппой самосопряженных сжатий в пространстве $\mathcal{H}$. *Полугруппа* $\mathbf{U}_t$, $t \geq 0$, *сильно непрерывна тогда и только тогда, когда оператор* $\mathbf{D}^{\frac{1}{2}}$ *является ядерным.*

Следствие 52. *Пусть выполнены условия теоремы* 51. *Тогда генератор* $\mathbf{\Delta}$ *полугруппы* (3.4) *является неположительным оператором в пространстве* $\mathcal{H}$.

Согласно теореме 51 инвариантная мера дает возможность описать случайные блуждания в гильбертовом пространстве E посредством самосопряженного оператора Лапласа–Вольтерра $\mathbf{\Delta}$ в пространстве $L_2(E, \mathcal{R}_{\mathcal{E}}, \lambda_{\mathcal{E}}, \mathbb{C})$.

4. Заключение

Обобщенный случайный процесс отождествлен с цилиндрической мерой, заданной на цилиндрической алгебре подмножеств в пространстве траекторий. Получены предельные теоремы для обобщенных случайных процессов. Построено биективное соответствие между комплекснозначными конечно аддитивными мерами, заданными на цилиндрических алгебрах $\mathcal{A}_{\mathcal{C}yl}$, и операторнозначными функциями, действующими в подходящем функциональном пространстве. В части 2 с помощью построенной в настоящей статье биекции будут получены формулы Фейнмана–Каца для решений эволюционных уравнений с постоянными и переменными операторными коэффициентами.

Список литературы

[1] M. Reed, B. Simon, *Methods of modern mathematical physics.* II: *Fourier analysis, self-adjointness.* Academic Press, New York–London, 1975.

[2] О.Г. Смолянов, Е.Т. Шавгулидзе, *Континуальные интегралы*, URSS, M., 2015.

[3] А.Д. Вентцель, *Курс теории случайных процессов*, Наука. Физматлит, М., 1996.

[4] R.P. Feynman, *An operation calculus having applications in quantum electrodynamics*, Phys. Rev. (2), **84**, 108–128 (1951).
DOI: https://doi.org/10.1103/PhysRev.84.108

[5] R.P. Feynman, *Space-time approach to non-relativistic quantum mechanics*, Rev. Modern Physics **20**, 367–387 (1948).
DOI: https://doi.org/10.1103/RevModPhys.20.367

[6] E. Nelson, *Feynman integrals and the Schrodinger equation*, J. Mathematical Phys. **5** (3), 332–343 (1964).
DOI: https://doi.org/10.1063/1.1704124

[7] B. Simon, *Functional integration and quantum physics*, Academic Press, New York–London, 1979.

[8] Е.Т. Шавгулидзе, *Специальные самосопряженные расширения дифференциальных операторов Шредингера с помощью интегралов Фейнмана*, Докл. РАН **348** (6), 743–745 (1996).
URL: https://www.mathnet.ru/rus/dan4093

[9] В.П. Маслов, А.М. Чеботарев, *Определение континуального интеграла Фейнмана в P-представлении*, Докл. АН СССР **229** (1), 37–38 (1976).
URL: https://www.mathnet.ru/rus/dan40458

[10] Yu.N. Orlov, V.Z. Sakbaev, E.V. Shmidt, *Compositions of random processes in a Hilbert space and its limit distribution*, Lobachevskii J. Math. **44** (4), 1432–1447 (2023).
DOI: http://doi.org/10.1134/S1995080223040212

[11] Yu.N. Orlov, V.Z. Sakbaev, *Feynman–Kac formulas for difference-differential equations of retarded type*, Lobachevskii J. Math. **45** (6), 2567–2576 (2024).
DOI: https://doi.org/10.1134/S1995080224602790

[12] V.Zh. Sakbaev, N. Tsoy, *Analogue of Chernoff theorem for cylindrical pseudomeasures*, Lobachevskii J. Math. **41** (12), 2369–2382 (2020).
DOI: https://doi.org/10.1134/S1995080220120306

[13] V.Zh. Sakbaev, E.V. Shmidt, V. Shmidt, *Limit distribution for compositions of random operators*, Lobachevskii J. Math. **43** (7), 1740–1754 (2022).
DOI: https://doi.org/10.1134/S199508022210033X

[14] В.П. Маслов, *Комплексные марковские цепи и континуальный интеграл Фейнмана*, Наука, М., 1976.

[15] А.В. Булинский, А.Н. Ширяев, *Теория случайных процессов*, Физматлит, М., 2005.

[16] В.И. Богачев, Н.В. Крылов, М. Рёкнер, *Эллиптические и параболические уравнения для мер*, УМН **64** (6), 5–116 (2009).
DOI: https://doi.org/10.4213/rm9326

[17] В.И. Богачев, *Основы теории меры. Том* 1, Регулярная и хаотическая динамика, Москва–Ижевск, 2003.

[18] Ю.Л. Далецкий, С.В. Фомин, *Меры и дифференциальные уравнения в бесконечномерных пространствах*, Наука, М., 1983.

[19] L. Accardi, Y.G. Lu, I.V. Volovich, *Quantum theory and its stochastic limit*, Springer-Verlag, Berlin, 2002.
DOI: https://doi.org/10.1007/978-3-662-04929-7

[20] Ю.Н. Орлов, В.Ж. Сакбаев, О.Г. Смолянов, *Формулы Фейнмана для нелинейных эволюционных уравнений*, Доклады Академии Наук **477** (3), 271–275 (2017).

DOI: https://doi.org/10.7868/S0869565217330027

[21] T. Liggett, *Interacting particle systems*, Springer-Verlag, Berlin, 2005.
DOI: https://doi.org/10.1007/b138374

[22] А.Д. Вентцель, М.И. Фрейдлин, *Флуктуации в динамических системах под действием малых случайных возмущений*, Наука, М., 1979.

[23] Е.Б. Дынкин, *Марковские процессы*, Наука, М., 1963.

[24] J. Zinn-Justin, *Path integrals in quantum mechanics*, Oxford University Press, Oxford, 2010.
DOI: https://doi.org/10.1093/acprof:oso/9780198566748.001.0001

[25] C. Bender, Ya.A. Butko, *Stochastic solutions of generalized time-fractional evolution equations*, Fract. Calc. Appl. Anal. **25** (2), 488–519 (2022).
DOI: https://doi.org/10.1007/s13540-022-00025-3

[26] C. Bender, M. Bormann, Ya.A. Butko, *Subordination principle and Feynman–Kac formulae for generalized time-fractional evolution equations*, Fract. Calc. Appl. Anal. **25** (5), 1818–1836 (2022).
DOI: https://doi.org/10.1007/s13540-022-00082-8

[27] Ю.В. Прохоров, *Сходимость случайных процессов и предельные теоремы теории вероятностей*, Теория вероятн. и ее примен. **1** (3), 177–238 (1956).
URL: https://www.mathnet.ru/rus/tvp4997

[28] Ж. Жакод, А.Н. Ширяев, *Предельные теоремы для случайных процессов. Т.* 1–2, Физматлит, М. 1994.

[29] А.Д. Вентцель, С.А. Молчанов, В.Н. Тутубалин, *Асимптотические задачи теории вероятностей и теории случайных сред*, Теория вероятн. и ее примен. **35** (1), 27–34 (1990).
URL: https://www.mathnet.ru/rus/tvp903

[30] А.Д. Вентцель, *Уточнение функциональной центральной предельной теоремы для стационарных процессов*, Теория вероятн. и ее примен. **34** (3), 451–464 (1989).
URL: https://www.mathnet.ru/rus/tvp1295

[31] В. Феллер, *Введение в теорию вероятностей и ее приложения. Т.* II, Мир, М., 1984.

[32] Дж. Гоф, Ю.Н. Орлов, В.Ж. Сакбаев, О.Г. Смолянов, *Рандомизированное квантование гамильтоновых систем*, Докл. РАН. Матем., информ., проц. упр. **498**, 31–36 (2021).
DOI: https://doi.org/10.31857/S2686954321030085

[33] Yu.N. Orlov, V.Z. Sakbaev, E.V. Shmidt, *Operator approach to weak convergence of measures and limit theorems for random operators*, Lobachevskii J. Math. **42** (10), 2413–2426 (2021).

DOI: https://doi.org/10.1134/S1995080221100188

[34] V.Zh. Sakbaev, *Averaging of random flows of linear and nonlinear maps*, J. Phys.: Conf. Ser. **990**, art. 012012 (2018).
DOI: https://doi.org/10.1088/1742-6596/990/1/012012

[35] В.И. Богачев, О.Г. Смолянов, *Действительный и функциональный анализ: Университетский курс*, Регулярная и хаотическая динамика, Москва-Ижевск, 2009.

[36] P.R. Chernoff, *Note on product formulas for operator semigroups*, J. Functional Analysis **2** (2), 238–242 (1968).
DOI: https://doi.org/10.1016/0022-1236(68)90020-7

[37] M.A. Berger, *Central limit theorem for products of random matrices*, Trans. Amer. Math. Soc. **285** (2), 777–803 (1984).
DOI: https://doi.org/10.1090/S0002-9947-1984-0752503-3

[38] В.М. Бусовиков, В.Ж. Сакбаев, *Пространства Соболева функций на гильбертовом пространстве с трансляционно инвариантной мерой и аппроксимации полугрупп* Изв. РАН. Сер. матем. **84** (4), 79–109 (2020).
DOI: https://doi.org/10.4213/im8890

[39] В.Ж. Сакбаев, *Усреднение случайных блужданий и меры на гильбертовом пространстве, инвариантные относительно сдвигов*, ТМФ **191** (3), 473–502 (2017).
DOI: https://doi.org/10.4213/tmf9153

[40] В.И. Авербух, О.Г. Смолянов, С.В. Фомин, *Обобщенные функции и дифференциальные уравнения в линейных пространствах.* I. *Дифференцируемые меры*, Тр. ММО **24**, 133–174 (1971).
URL: https://www.mathnet.ru/rus/mmo249

[41] А. Вейль, *Интегрирование в топологических группах и его применение*, Изд-во иностранной литературы, М., 1950.

[42] А.М. Вершик, *Существует ли мера Лебега в бесконечномерном пространстве?*, Тр. МИАН **259**, 256–281 (2007).
URL: https://www.mathnet.ru/rus/tm579

[43] В.Ж. Сакбаев, *Случайные блуждания и меры на гильбертовом пространстве, инвариантные относительно сдвигов и поворотов*, Итоги науки и техн. Соврем. мат. и ее прил. Темат. обз. **140**, 88–118 (2017).
URL: https://www.mathnet.ru/rus/into237

[44] V.Zh. Sakbaev, *Flows in infinite-dimensional phase space equipped with a finitely-additive invariant measure*, Mathematics **11** (5), art. 1161 (2023).
DOI: https://doi.org/10.3390/math11051161

[45] R. Baker, *Lebesgue measure on* $\mathbb{R}^\infty$, Proc. Amer. Math. Soc. **113** (4), 1023–1029 (1991).
DOI: https://doi.org/10.1090/S0002-9939-1991-1062827-X

[46] R.L. Baker, *Lebesgue measure on $\mathbb{R}^{\infty}$. II*, Proc. Amer. Math. Soc. **132** (9), 2577–2591 (2004).
DOI: https://doi.org/10.1090/S0002-9939-04-07372-1

[47] T. Gill, A. Kirtadze, G. Pantsulaia, A. Plichko, *Existence and uniqueness of translation invariant measures in separable Banach spaces*, Funct. Approx. Comment. Math. **50** (2), 401–419 (2014).
DOI: http://doi.org/10.7169/facm/2014.50.2.12

[48] D.V. Zavadsky, *Инвариантные относительно сдвигов меры на пространствах последовательностей*, Тр. МФТИ **9** (4), 142–148 (2017).

[49] У. Гренандер, *Вероятности на алгебраических структурах*, Мир, М. 1966.

[50] В.И. Оселедец, *Марковские цепи, косые произведения и эргодические теоремы для "общих" динамических систем*, Теория вероятн. и ее примен. **10** (3), 551–557 (1965).
URL: https://www.mathnet.ru/rus/tvp554

[51] А.В. Скороход, *Произведения независимых случайных операторов*, УМН **38** (4), 255–280 (1983).
URL: https://www.mathnet.ru/rus/rm2956

[52] Ю.Н. Орлов, В.Ж. Сакбаев, О.Г. Смолянов, *Формулы Фейнмана и закон больших чисел для случайных однопараметрических полугрупп*, Тр. МИАН **306**, 210–226 (2019).
DOI: https://doi.org/10.4213/tm4003

[53] O.G. Smolyanov, A.G. Tokarev, A. Truman, *Hamiltonian Feynman path integrals via the Chernoff formula*, J. Math. Phys. **43** (10), 5161–5171 (2002).
DOI: https://doi.org/10.1063/1.1500422

[54] H.H. Kuo, N. Obata, K. Saito, *Diagonalization of the Lévy Laplacian and related stable processes*, Infin. Dimens. Anal. Quantum Probab. Relat. Top. **5** (3), 317–331 (2002).
DOI: https://doi.org/10.1142/S0219025702000882

[55] I.D. Remizov, *Quasi-Feynman formulas – a method of obtaining the evolution operator for the Schrödinger equation*, J. Funct. Anal. **270** (12), 4540–4557 (2016).
DOI: https://doi.org/10.1016/j.jfa.2015.11.017

[56] B.O. Volkov, *Levy Laplacian on manifold and Yang-Mills heat flow*, Lobachevskii J. Math. **40** (10), 1619–1630 (2019).
DOI: https://doi.org/10.1134/S1995080219100305

[57] B.O. Volkov, *Lévy Laplacians and instantons on manifolds*, Infin. Dimens. Anal. Quantum Probab. Relat. Top. **23** (2), art. 2050008 (2020).
DOI: https://doi.org/10.1142/S0219025720500083

[58] Т. Като, *Теория возмущений линейных операторов*, Мир, М., 1972.

[59] П. Биллингсли, *Сходимость вероятностных мер*, Наука, М., 1977.

[60] В.И. Богачев, *Основы теории меры. Том* 2, Регулярная и хаотическая динамика, Москва–Ижевск, 2003.

[61] Д.В. Завадский, В.Ж. Сакбаев, *Диффузия на гильбертовом пространстве, снабженном трансляционно и ротационно инвариантной мерой*, Тр. МИАН **306**, 112–130 (2019).
DOI: https://doi.org/10.4213/tm3999

Юрий Николаевич Орлов
Институт Прикладной Математики им. М.В. Келдыша РАН,
Миусская пл., д. 4, г. Москва, 125047, Россия,
e-mail: ov3159f@yandex.ru

Всеволод Жанович Сакбаев
Институт Прикладной Математики им. М.В. Келдыша РАН,
Миусская пл., д. 4, г. Москва, 125047, Россия,
e-mail: fumi2003@mail.ru

Volume 3, Issue 2 UDC 517.982, 517.983
pp. 85–135 (2025) MSC 28C20, 28D05, 37A05, 37K05

Feynman–Kac formulas for solutions of evolution equations. Part I. Generalized random processes and operator families

Yu.N. Orlov, V.Zh. Sakbaev

Abstract. A generalized random process with values in a measurable space is defined as a complex-valued finite additive cylindrical measure on the space of trajectories with values in the measurable space. Using this extension of the concept of a random process, we aim to obtain a representation of solutions to the evolutionary equation by averaging functionals on the space of trajectories of a random process. For this purpose, a bijective mapping of the space of operator valued functions into a set of complex valued finite additive cylindrical measures on the trajectory space is constructed and investigated. Limit theorems for generalized random processes are obtained. In the second part of the survey, the application of the constructed bijective mapping to the obtaining of perturbed semigroups and evolutionary families of operators in the form of Feynman–Kac formulas will be considered.

Keywords: random linear operator, random operator valued process, finitely additive measure, weak convergence of measures, central limit theorem, Markov process, Kolmogorov equation, Feynman–Kac formula.

DOI: 10.26907/2949-3919.2025.2.85-135

References

[1] M. Reed, B. Simon, *Methods of modern mathematical physics.* II: *Fourier analysis, self-adjointness*, Academic Press, New York–London, 1975.

[2] O.G. Smolyanov, E.T. Shavgulidze, *Continual integrals*, URSS, M., 2015 [in Russian].

[3] A.D. Venttsel', *Course of random prosesses theory*, Nauka. Fizmatlit, M., 1996 [in Russian].

[4] R.P. Feynman, *An operation calculus having applications in quantum electrodynamics*, Phys. Rev. (2), **84**, 108–128 (1951).
DOI: https://doi.org/10.1103/PhysRev.84.108

[5] R.P. Feynman, *Space-time approach to non-relativistic quantum mechanics*, Rev. Modern Physics **20**, 367–387 (1948).
DOI: https://doi.org/10.1103/RevModPhys.20.367

Received: 23 October 2024. Accepted: 02 May 2025. Published: 16 July 2025.

[6] E. Nelson, *Feynman integrals and the Schrodinger equation*, J. Mathematical Phys. **5** (3), 332–343 (1964).
DOI: https://doi.org/10.1063/1.1704124

[7] B. Simon, *Functional integration and quantum physics*, Academic Press, New York–London, 1979.

[8] E.T. Shavgulidze, *Special selfadjoint extensions of Schrödinger differential operators by means of Feynman integrals*, Dokl. Akad. Nauk 348 (6), 743–745 (1996) [in Russian].
URL: https://www.mathnet.ru/rus/dan4093

[9] V.P. Maslov, A.M. Chebotarev, *The definition of Feynman's functional integral in the P-representation*, Dokl. Akad. Nauk SSSR **229** (1), 37–38 (1976).
URL: https://www.mathnet.ru/rus/dan40458

[10] Yu.N. Orlov, V.Z. Sakbaev, E.V. Shmidt, *Compositions of random processes in a Hilbert space and its limit distribution*, Lobachevskii J. Math. **44** (4), 1432–1447 (2023).
DOI: http://doi.org/10.1134/S1995080223040212

[11] Yu.N. Orlov, V.Z. Sakbaev, *Feynman–Kac formulas for difference-differential equations of retarded type*, Lobachevskii J. Math. **45** (6), 2567–2576 (2024).
DOI: https://doi.org/10.1134/S1995080224602790

[12] V.Zh. Sakbaev, N. Tsoy, *Analogue of Chernoff theorem for cylindrical pseudomeasures*, Lobachevskii J. Math. **41** (12), 2369–2382 (2020).
DOI: https://doi.org/10.1134/S1995080220120306

[13] V.Zh. Sakbaev, E.V. Shmidt, V. Shmidt, *Limit distribution for compositions of random operators*, Lobachevskii J. Math. **43** (7), 1740–1754 (2022).
DOI: https://doi.org/10.1134/S199508022210033X

[14] V.P. Maslov, *Complex Markov chains and continual Feynman integral*, Nauka, M., 1976 [in Russian].

[15] A.V. Bulinskii, A.N. Shiryaev, *Random processes theory*, Fizmatlit, M., 2005.

[16] V.I. Bogachev, N.V. Krylov, M. Röckner, *Elliptic and parabolic equations for measures*, Russian Math. Surveys **64** (6), 973–1078 (2009).
DOI: https://doi.org/10.1070/RM2009v064n06ABEH004652

[17] V.I. Bogachev, *Measure theory. Vol.* I, Springer-Verlag, Berlin, 2007.
DOI: https://doi.org/10.1007/978-3-540-34514-5

[18] Yu.L. Daletskii, S.V. Fomin, *Measures and differential equations in infinite-dimensional space*, Kluwer Academic Publishers Group, Dordrecht, 1991.

[19] L. Accardi, Y.G. Lu, I.V. Volovich, *Quantum theory and its stochastic limit*, Springer-Verlag, Berlin, 2002.
DOI: https://doi.org/10.1007/978-3-662-04929-7

[20] Yu.N. Orlov, V.Zh. Sakbaev, O.G. Smolyanov, *Feynman formulas for nonlinear evolution equations*, Dokl. Math. **96** (3), 574–577 (2017).
DOI: https://doi.org/10.1134/S1064562417060126

[21] T. Liggett, *Interacting particle systems*, Springer-Verlag, Berlin, 2005.
DOI: https://doi.org/10.1007/b138374

[22] A.D. Venttsel', M.I. Freidlin, *Fluctuations in dynamical systems subject to small random perturbations*, Nauka, M., 1979 [in Russian].

[23] E.B. Dynkin, *Markov processes. Vols.* I, II, Springer-Verlag, Berlin, 1965.
DOI: https://doi.org/10.1007/978-3-662-00031-1
DOI: https://doi.org/10.1007/978-3-662-25360-1

[24] J. Zinn-Justin, *Path integrals in quantum mechanics*, Oxford University Press, Oxford, 2010.
DOI: https://doi.org/10.1093/acprof:oso/9780198566748.001.0001

[25] C. Bender, Ya.A. Butko, *Stochastic solutions of generalized time-fractional evolution equations*, Fract. Calc. Appl. Anal. **25** (2), 488–519 (2022).
DOI: https://doi.org/10.1007/s13540-022-00025-3

[26] C. Bender, M. Bormann, Ya.A. Butko, *Subordination principle and Feynman–Kac formulae for generalized time-fractional evolution equations*, Fract. Calc. Appl. Anal. **25** (5), 1818–1836 (2022).
DOI: https://doi.org/10.1007/s13540-022-00082-8

[27] Yu.V. Prokhorov, *Convergence of random processes and limit theorems in probability theory*, Theory Probab. Appl. **1** (2), 157–214 (1956).
DOI: https://doi.org/10.1137/1101016

[28] J. Jacod, A.N. Shiryaev, *Limit theorems for stochastic processes*, Springer-Verlag, Berlin, 2003.
DOI: https://doi.org/10.1007/978-3-662-05265-5

[29] S.A. Molchanov, V.N. Tutubalin, A.D. Ventzel', *Asymptotic problems in probability theory and the theory of random media*, Theory Probab. Appl. **35** (1), 87–93 (1990).
DOI: https://doi.org/10.1137/1135008

[30] A.D. Venttsel', *Refinement of the central limit theorem for stationary processes*, Theory Probab. Appl. **34** (3), 402–415 (1989).
DOI: https://doi.org/10.1137/1134049

[31] W. Feller, *An introduction to probability theory and its applications. Vol.* II, John Wiley & Sons, New York-London-Sydney, 1971.

[32] J. Gough, Yu.N. Orlov, V.Z. Sakbaev, O.G. Smolyanov, *Random quantization of Hamiltonian systems*, Dokl. Math. **103** (3), 122–126 (2021).
DOI: https://doi.org/10.1134/S106456242103008X

[33] Yu.N. Orlov, V.Z. Sakbaev, E.V. Shmidt, *Operator approach to weak convergence of measures and limit theorems for random operators*, Lobachevskii J. Math. **42** (10), 2413–2426 (2021).
DOI: https://doi.org/10.1134/S1995080221100188

[34] V.Zh. Sakbaev, *Averaging of random flows of linear and nonlinear maps*, J. Phys.: Conf. Ser. **990**, art. 012012 (2018).
DOI: https://doi.org/10.1088/1742-6596/990/1/012012

[35] V.I. Bogachev, O.G. Smolyanov, *Real and functional analysis*, Springer, Cham, 2020.
DOI: https://doi.org/10.1007/978-3-030-38219-3

[36] P.R. Chernoff, *Note on product formulas for operator semigroups*, J. Functional Analysis **2** (2), 238–242 (1968).
DOI: https://doi.org/10.1016/0022-1236(68)90020-7

[37] M.A. Berger, *Central limit theorem for products of random matrices*, Trans. Amer. Math. Soc. **285** (2), 777–803 (1984).
DOI: https://doi.org/10.1090/S0002-9947-1984-0752503-3

[38] V.M. Busovikov, V.Zh. Sakbaev, *Sobolev spaces of functions on Hilbert space endowed with shift-invariant measures and approximations of semigroups*, Izv. Math. **84** (4), 694–721 (2020).
DOI: https://doi.org/10.1070/IM8890

[39] V.Zh. Sakbaev, *Averaging of random walks and shift-invariant measures on Hilbert space*, Theoret. and Math. Phys. **191** (3), 886–909 (2017).
DOI: https://doi.org/10.1134/S0040577917060083

[40] V.I. Averbukh, O.G. Smolyanov, S.V. Fomin, *Generalized functions and differential equations in linear spaces.* I. *Differentiable measures*, Tr. Mosk. Mat. Obs. **24**, 133–174 (1971) [in Russian].
URL: https://www.mathnet.ru/rus/mmo249

[41] A. Weil, *L'intégration dans les groupes topologiques et ses applications*, Hermann, Paris, 1940 [in French].

[42] A.M. Vershik, *Does there exist a Lebesgue measure in the infinite-dimensional space?*, Proc. Steklov Inst. Math. **259**, 248–272 (2007).
DOI: https://doi.org/10.1134/S0081543807040153

[43] V.Zh. Sakbaev, *Random walks and measures on Hilbert space that are invariant with respect to shifts and rotations*, J. Math. Sci. **241** (4), 469–500 (2019).
DOI: https://doi.org/10.1007/s10958-019-04438-z

[44] V.Zh. Sakbaev, *Flows in infinite-dimensional phase space equipped with a finitely-additive invariant measure*, Mathematics **11** (5), art. 1161 (2023).
DOI: https://doi.org/10.3390/math11051161

[45] R. Baker, *Lebesgue measure on* $\mathbb{R}^\infty$, Proc. Amer. Math. Soc. **113**(4), 1023–1029 (1991).
DOI: https://doi.org/10.1090/S0002-9939-1991-1062827-X

[46] R.L. Baker, *Lebesgue measure on* $\mathbb{R}^\infty$*.* II, Proc. Amer. Math. Soc. **132** (9), 2577–2591 (2004).
DOI: https://doi.org/10.1090/S0002-9939-04-07372-1

[47] T. Gill, A. Kirtadze, G. Pantsulaia, A. Plichko, *Existence and uniqueness of translation invariant measures in separable Banach spaces*, Funct. Approx. Comment. Math. **50** (2), 401–419 (2014).
DOI: http://doi.org/10.7169/facm/2014.50.2.12

[48] D.V. Zavadsky, *Shift-invariant measures on sequence spaces*, Proc. MIPT **9** (4), 142–148 (2017) [in Russian].

[49] U. Grenander, *Probabilities on algebraic structures*, John Wiley & Sons, New York-London, 1968.

[50] V.I. Oseledets, *Markov chains, skew products and ergodic theorems for "general" dynamic systems*, Theory Probab. Appl. **10** (3), 499–504 (1965).
DOI: https://doi.org/10.1137/1110062

[51] A.V. Skorokhod, *Products of independent random operators*, Russ. Math. Surv. **38** (4), 291–318 (1983).
DOI: https://doi.org/10.1070/RM1983v038n04ABEH004213

[52] Yu.N. Orlov, V.Zh. Sakbaev, O.G. Smolyanov, *Feynman formulas and the law of large numbers for random one-parameter semigroups*, Proc. Steklov Inst. Math. **306**, 196–211 (2019).
DOI: https://doi.org/10.1134/S0081543819050171

[53] O.G. Smolyanov, A.G. Tokarev, A. Truman, *Hamiltonian Feynman path integrals via the Chernoff formula*, J. Math. Phys. **43** (10), 5161–5171 (2002).
DOI: https://doi.org/10.1063/1.1500422

[54] H.H. Kuo, N. Obata, K. Saito, *Diagonalization of the Lévy Laplacian and related stable processes*, Infin. Dimens. Anal. Quantum Probab. Relat. Top. **5** (3), 317–331 (2002).
DOI: https://doi.org/10.1142/S0219025702000882

[55] I.D. Remizov, *Quasi-Feynman formulas – a method of obtaining the evolution operator for the Schrödinger equation*, J. Funct. Anal. **270** (12), 4540–4557 (2016).
DOI: https://doi.org/10.1016/j.jfa.2015.11.017

[56] B.O. Volkov, *Levy Laplacian on manifold and Yang-Mills heat flow*, Lobachevskii J. Math. **40** (10), 1619–1630 (2019).
DOI: https://doi.org/10.1134/S1995080219100305

[57] B.O. Volkov, *Lévy Laplacians and instantons on manifolds*, Infin. Dimens. Anal. Quantum Probab. Relat. Top. **23** (2), art. 2050008 (2020).

DOI: https://doi.org/10.1142/S0219025720500083

[58] T. Kato, *Perturbation theory for linear operators*, Grundlehren Math. Wiss. **132**, Springer-Verlag, Berlin-New York, 1976.

[59] P. Billingsley, *Convergence of probability measures*, John Wiley & Sons, Inc., New York, 1999.

[60] V.I. Bogachev, *Measure theory. Vol.* II, Springer-Verlag, Berlin, 2007.
DOI: https://doi.org/10.1007/978-3-540-34514-5

[61] V.Zh. Sakbaev, D.V. Zavadskii, *Diffusion on a Hilbert space equipped with a shift- and rotation-invariant measure*, Proc. Steklov Inst. Math. **306** (1), 102–119 (2019).
DOI: https://doi.org/10.1134/S0081543819050109

Yuri Nikolaevich Orlov
Keldysh Institute of Applied Mathematics (Russian Academy of Sciences),
4 Miysskaya sq., Moscow 125047, Russia,
e-mail: ov3159f@yandex.ru

Vsevolod Zhanovich Sakbaev
Keldysh Institute of Applied Mathematics (Russian Academy of Sciences),
4 Miysskaya sq., Moscow 125047, Russia,
e-mail: fumi2003@mail.ru

Том 3, Выпуск 2 УДК 514.7
Стр. 136–144 (2025) MSC 53C24, 53A05

Зависят ли свойства плоской замкнутой кривой от выбора точки начала ее обхода?

И.Х. Сабитов

Аннотация. Доказывается, что выбор точки начала обхода замкнутой кривой на плоскости влияет на свойства ее внешней геометрии.

Ключевые слова: замкнутая плоская кривая, обход, влияние выбора его начала.

DOI: 10.26907/2949-3919.2025.2.136-144

1. Пример с кардиоидой

Когда обсуждается вопрос об использовании замкнутой кривой в каком-нибудь рассуждении, обычно не задумываясь берут какую-нибудь подходящую ее параметризацию с согласованной по задаче ориентацией и начинают вычисления с удобной для расчетов точки. При этом, как правило, не учитывают, не влияет ли выбор точки начала обхода кривой на свойства кривой. Мы покажем, что если кривую рассматривать в функции ее натурального параметра, то изменение начальной точки обхода кривой влияет как на локальные, так и на глобальные геометрические характеристики кривой, за исключением случаев окружности. Другими словами, выбор точки начала обхода замкнутой кривой не изменяет ее внутреннюю геометрию, но изменяет ее внешнюю геометрию.

Рассмотрим сначала пример кардиоиды с параметрическим уравнением

$$x = a\sin\varphi(1-\cos\varphi), \quad y = -a\cos\varphi(1-\cos\varphi), \quad 0 \le \varphi \le 2\pi,$$

где числовой параметр $a > 0$. Мы выбрали этот пример, потому что для него легко перейти от углового параметра φ к натуральному параметру s:

$$s = 8a\sin^2\frac{\varphi}{4}, \quad 0 \le s \le 8a. \tag{1}$$

Далее, из (1) имеем

$$\varphi = 4\arcsin\sqrt{\frac{s}{8a}}, \quad \sin\varphi = \frac{(4a-s)\sqrt{s(8a-s)}}{8a^2}, \quad \cos\varphi = 1 - \frac{s(8a-s)}{8a^2}.$$

Поступила: 31.03.2025. Принята: 02.07.2025. Опубликована: 16.07.2025.

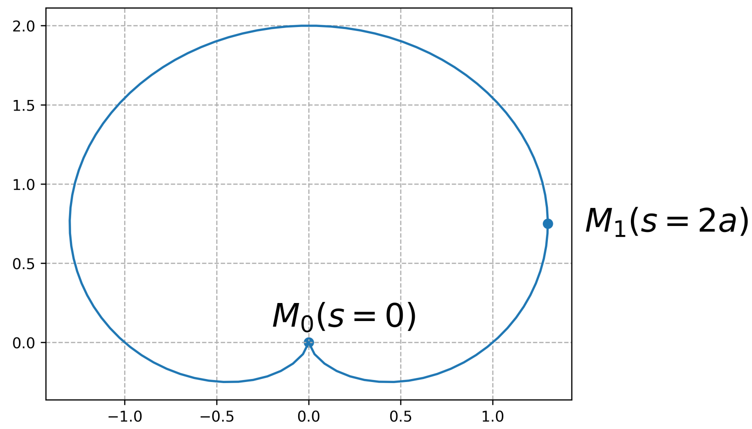

Рис. 1

На основании этих равенств легко находим значения $x(s), y(s)$ и их производных:

$$x(s) = (4a-s)\frac{\left(\sqrt{s(8a-s)}\right)^3}{64a^3}, \qquad y(s) = \frac{[s(8a-s)-8a^2]s(8a-s)}{64a^3}$$

$$x'(s) = \frac{(12a^2-8as+s^2)\sqrt{s(8a-s)}}{16a^3}, \tag{2}$$

$$y'(s) = -\frac{(4a-s)(s^2-8as+4a^2)}{16a^3}. \tag{3}$$

Из (2) и (3) выводим, что выполнено нужное для натуральной параметризации равенство

$$(x')^2(s) + (y')^2(s) = 1. \tag{4}$$

Пусть начало обхода кардиоиды в точке $M_0(0,0)$ при значении $s=0$ и возвращаемся в ту же точку при значении $s=8a$. Считаем, что функции $x(s), y(s)$ продолжаются по периодичности с периодом $T=8a$ на все значения s.

Сдвинем начало отсчета в точку $M_1\left(\frac{3\sqrt{3}a}{4}, \frac{3a}{4}\right)$ со значением $s=2a$. Радиус-вектор кривой с началом в новой точке обозначим как $\mathbf{r}^*(s)$. Натуральный аргумент s у кривой $\mathbf{r}^*(s)$ по-прежнему будет изменяться от 0 до $8a$. Новую кривую (см. рис 2) получаем как образ отображения отрезка $[0,8a]$ в R^2 со значениями координат $x^*(s), y^*(s)$. Имеем:

$$x^*(s) = \frac{(2a-s)[(s+2a)(6a-s)]^{3/2}}{64a^3}, \quad 0 \le s \le 6a$$

$$\frac{(10a-s)[(s-6a)(14a-s)]^{3/2}}{64a^3}, \quad 6a \le s \le 8a,$$

$$y^*(s) = \frac{(s+2a)(6a-s)[(s+2a)(6a-s)-8a^2]}{64a^3}, \quad 0 \le s \le 6a,$$

$$\frac{(s-6a)(14a-s)[(s-6a)(14a-s)-8a^2]}{64^3}, \quad 6a \le s \le 8a.$$

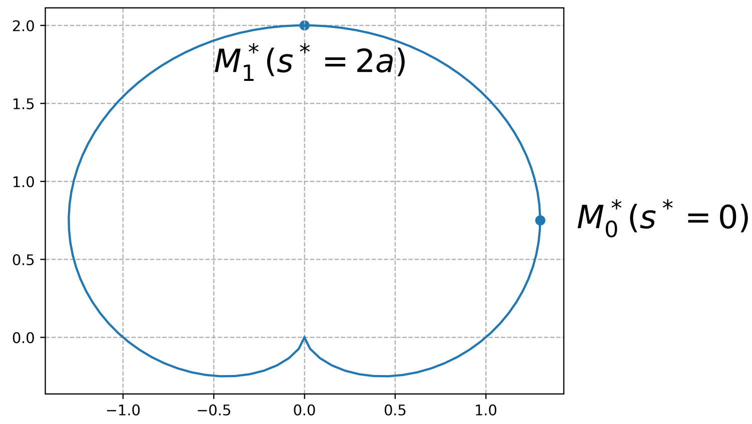

Рис. 2

Переименуем теперь M_1 в M_0^* с начальным значением параметра $s = 0$, как и положено в начале обхода. Тогда значению длины дуги, равной $2a$, при новом обходе будет соответствовать точка M_1^* с координатами $(x = 0, y = 2)$. Если новое положение кардиоиды получается из исходного ее положения просто движением, тогда по *определению движения* все расстояния на плоскости должны оставаться без изменения. Расстояние на плоскости между точками M_0 и M_1 равно $\frac{3}{2}a$, а расстояние между их образами M_0^* и M_1^* равно $\frac{\sqrt{13}}{2}a$.

Итак, по внутренней геометрии (т. е., по кривой) расстояния в парах (M_0, M_1) и (M_0^*, M_1^*) оба равны $2a$, а пространственные расстояния в них разные. Очевидно, равенство внутренних расстояний остается верным для всех пар точек, значит, перенос начальной точки отсчета приводит к появлению *нового* представления кардиоиды с координатами (x^*, y^*), нетривиально изометричного исходному ее изображению как образа, в обоих случаях, одного и того же отрезка $[0, 8a]$. Как множества точек в R^2, эти множества абсолютно идентичны, но как отображения они различны и их связывает нетривиальная изометрия между ними по равенству параметра s. Если изменение начала обхода кривой происходит непрерывно, то соответствующая деформация кривой будет нетривиальным *изгибанием* кривой, при котором дуги непрерывно переходят в дуги с теми же длинами, но с разными по длине хордами.

2. Основная теорема

То, что это так для всех кривых, кроме случая окружности, подтверждается следующей теоремой.

Теорема 1. *Для того, чтобы у замкнутой C^1-гладкой кривой равные по длине дуги имели равные по длине хорды, необходимо и достаточно, чтобы кривая была окружностью.*

Доказательство. Достаточность условия очевидна, проверим его необходимость. Пусть на кривой с натуральным уравнением $\mathbf{r} = \mathbf{r}(s)$ выделена некоторая дуга длины $\Delta s > 0$. Тогда расстояние на плоскости между концевыми точками $\mathbf{r}(s)$ и $\mathbf{r}(s+\Delta s)$ этой дуги равно

$$\sqrt{(\mathbf{r}(s+\Delta s) - \mathbf{r}(s))^2}$$

и оно при любом s зависит только от Δs. Обозначим эту зависимость как $f(\Delta s) > 0$. Тогда

$$(\mathbf{r}(s+\Delta s) - \mathbf{r}(s))^2 = f^2(\Delta s). \tag{5}$$

Обозначим для краткости Δs как t. Из уравнения (5) при $s = 0$ имеем

$$f^2(t) = (\mathbf{r}(t) - \mathbf{r}(0))^2,$$

так что уравнение (5) с учетом периодичности координат точек замкнутой кривой при всех t и s представится в виде

$$(\mathbf{r}(s+t) - \mathbf{r}(s))^2 = (\mathbf{r}(t) - \mathbf{r}(0))^2.$$

Продифференцируем это равенство по s. Получим

$$(\mathbf{r}(s+t) - \mathbf{r}(s)) \cdot (\mathbf{r}(s+t))'_s - \mathbf{r}'_s(s)) = 0.$$

Пусть длина замкнутой кривой равна $2L$. Выберем значение t для данного s, $0 < s < 2L$, таким, чтобы $s + t = 2L$. Тогда $\mathbf{r}(s+t) = \mathbf{r}(0)$ и мы при любом s имеем равенство

$$(\mathbf{r}(s) - \mathbf{r}(0)) \cdot (\mathbf{r}'(s) - \mathbf{r}'(0)) = 0. \tag{6}$$

Окружность $C : x^2 + y^2 = R^2$ с радиусом $R = \dfrac{L}{\pi}$ удовлетворяет равенству (6). Покажем, что любую другую C^1-гладкую кривую с той же длиной $2L$ и с тем же условием (6) можно движением совместить с окружностью $C : x = R\cos\dfrac{s}{R}$, $y = R\sin\dfrac{s}{R}$. Рассматриваемую кривую $\mathbf{r}(s) = (x(s), y(s))$ переносом можно расположить так, чтобы в данной системе координат ее точка со значением $s = 0$ имела за счет переноса координаты $(R, 0)$, а с использованием поворота вокруг этой точки добъемся, чтобы единичная касательная к кривой шла по вектору $(0, 1)$. Тогда

$$\mathbf{r}(0) = (R, 0), \quad \mathbf{r}'(0) = (0, 1) \tag{7}$$

и из (6) получаем равенство

$$(x(s) - R)\, x'(s) = y(s)\,(1 - y'(s)). \tag{8}$$

Возведем (8) в квадрат и учитывая (4), приходим к уравнению

$$(x-R)^2 = \frac{(1-y'(s))\,y^2}{1+y'(s)}, \tag{9}$$

Отсюда находим, что $y'(s)$ выражается через $x(s)$ и $y(s)$:

$$y'(s) = \frac{y^2-(x-R)^2}{y^2+(x-R)^2}. \tag{10}$$

Следовательно, существует вторая производная $y''(s)$ и для нее с учетом формул (8) и (9) имеем равенство

$$y''(s) = \frac{(y')^2(s)-1}{y(s)}. \tag{11}$$

Дальше можно поступить так: по начальным условиям (7) непосредственно находим, что функция $y = R\sin\dfrac{s}{R}$ удовлетворяет уравнению (11) или решаем это уравнение[1] с условиями (7) и находим его единственное решение $y = R\sin\dfrac{s}{R}$ и тем самым получаем доказательство теоремы. □

3. Перенос начала обхода и бесконечно малые изгибания кривой

Рассмотрим случай малого изменения точки начала обхода, т. е. кривую

$$\mathbf{r}(s+\varepsilon) = \mathbf{r}(s) + \varepsilon\mathbf{r}'(s) + o(\varepsilon).$$

Сначала сделаем важное замечание о структуре уравнения, описывающего б. м. (бесконечно малые) изгибания первого и более высоких порядков. В его обычной записи, по аналогии с записью для б. м. изгибаний поверхностей (см., например, [2, с. 101]), переход от исходного радиус-вектора $\mathbf{r}(s)$ к деформированному вектору $\mathbf{r}^*(s)$ должен быть вида

$$\mathbf{r}^*(s) = \mathbf{r}(s) + \varepsilon\mathbf{z}_1(s) + \varepsilon^2\mathbf{z}_2(s) + \ldots + \varepsilon^n\mathbf{z}_n + o(\varepsilon^n) \tag{12}$$

(мы не пишем в слагаемых числовой коэффициент 2, чтобы не усложнять толкование параметра ε). Изменение начала отсчета не изменяет само множество точек на кривой, поэтому мы хотим узнать, какое влияние оказывает на взаимосвязь между внутренней и внешней геометрией кривой перенос точки начала отсчета длины кривой.

По правилу действий с размерностными физическими и геометрическими величинами, над которыми проводятся операции сложения и вычитания, все они должны иметь одинаковую качественную и количественную размерность[2], а при их умножении должна

[1]Впрочем, в книге [1] в пункте (6.110) дано готовое его решение.

[2]Имеется в виду, что нельзя складывать, например, значение массы со значением времени и численные значения метров с численными значениями сантиметров.

появиться величина, размерность которой представляется как произведение размерностей сомножителей. С другой стороны, в теории б. м. изгибаний есть общепринятое понимание вектора поля б. м. изгибания 1-го порядка как мгновенной *скорости* изменения координат кривой или поверхности (см. работы [3, с. 308], [2, с. 101]), поэтому размерность поля $\mathbf{z}_1$ естественно толковать как $\dfrac{\text{cm}}{\text{sec}}$, а тогда параметр ε должен считаться временем и его размерность будет обозначаться sec, если размерность координат радиус-вектора $\mathbf{r}^*$ считается в сантиметрах. Далее, время мы стандартно будем обозначать символом t, а размерность скорости представляется как $\dfrac{\text{cm}}{\text{sec}}$.

Теорема 2. *Для C^2-гладкой кривой перенос точки начала отсчета ее длины приводит в общем случае к появлению ее нетривиального бесконечно малого изгибания. В случае окружности перенос начала обхода равносилен ее тривиальному б. м. изгибанию.*

Доказательство. Вектор б. м. изгибания обычно толкуется как скорость изменения радиус-вектора кривой (см. [3, с. 308]) и в соответствии с этим считаем, что положение новой начальной точки $\mathbf{r}(s+\Delta s)$ связано с полем $\mathbf{z}_1$ следующей частью формулы Тейлора

$$\mathbf{r}^*(s) = \mathbf{r}(s+\Delta s) = \mathbf{r}(s) + \mathbf{r}'(s)\Delta s + \frac{1}{2}\,\mathbf{r}''(s)\,(\Delta s)^2 + o(\Delta s)^2.$$

Тогда в соответствии с общетеоретическим представлением (12) имеем, что

$$\mathbf{z}_1(s) = \frac{1}{t}\,\mathbf{r}'(s)\,\Delta s$$

и размерность $\mathbf{z}_1$ будет $\dfrac{\text{cm}}{\text{sec}}$, как и положено для скорости.

Так как $\mathbf{r}'(s)$ единичный вектор, то $\mathbf{r}'^2(s) \equiv 1$, и дифференцированием получаем равенство $\mathbf{r}'(s)\,\mathbf{r}''(s) = 0$, что и дает нужное для поля б. м. изгибания $\mathbf{z}_1(s)$ уравнение

$$d\mathbf{r}\cdot d\mathbf{z}_1 = 0. \tag{13}$$

В случае окружности с уравнением

$$x(s) = R\cos\frac{s}{R}, \quad y(s) = R\sin\frac{s}{R}$$

имеем, что

$$t\,\mathbf{z}_1(s) = \Big(-\sin\frac{s}{R}, \cos\frac{s}{R}\Big)\,\Delta s = \frac{1}{R}\,(-y(s), x(s))\,\Delta s, \tag{14}$$

т. е. соответствующая часть деформации (12) имеет вид

$$\mathbf{r}^*(s) = (x(s), y(s)) + \frac{1}{R}\,(-y(s), x(s))\,\Delta s + o(\Delta s). \tag{15}$$

Покажем, что это б. м. изгибание является тривиальным, т. е., начальной скоростью некоторого движения. Пусть перенос точки начала отсчета длины является бесконечно малым движением. Всякое движение на плоскости является трехпараметрическим преобразованием, состоящим из некоторого вектора $\mathbf{a}\,t$, и вращения вокруг начала координат с ортогональной матрицей

$$\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}.$$

Обозначим эту матрицу как $A(t)$. В начальный момент $t = 0$ матрица A равна единичной матрице $E(2 \times 2)$. Пусть скорость вращения определяется производной $\alpha'(t) = \omega$. Тогда вычисляя $A'(t)$ в начальный момент, получаем, что эта производная равна умноженной на α' матрице

$$\begin{pmatrix} -\sin\alpha & -\cos\alpha \\ \cos\alpha & -\sin\alpha \end{pmatrix}$$

Если кривая задана радиус-вектором $\mathbf{r}(s)$, то по ходу применения к ней гладкого движения матрица $A(t)$ изменяется, что приводит к равенству вида

$$A(t) = E + tA_1 + o(t), \tag{16}$$

где $A_1 = A'(0)$.

Так как для ортогональных матриц обратная матрица совпадает с транспонированной матрицей A^T, то умножением равенства (13) на $A^T = E + tA_1^T + o(t)$ приходим к соотношению

$$E = E + t\,(A_1 + A_1^T) + o(t).$$

Следовательно, матрица A_1 является кососимметрической вида

$$\begin{pmatrix} 0 & -\omega \\ \omega & 0 \end{pmatrix}$$

с постоянной $\omega = \alpha'(0)$, и действие матрицы $A(t)$ из (16) на $\mathbf{r}(s)$ дает следующее тривиальное изменение радиус-вектора

$$\mathbf{r}^*(s) = \mathbf{r}(s + \Delta s) = \mathbf{r}(s) + t\,A_1\,\mathbf{r}(s) + o(t).$$

Начальная скорость такого движения складывается из постоянного вектора $\mathbf{a}$ с размерностью $\dfrac{\mathrm{cm}}{\mathrm{sec}}$ и вектора $A_1\mathbf{r}(s) = \omega(-y(s), x(s))$, где ω – постоянная с размерностью $\dfrac{\mathrm{rad}}{\mathrm{sec}}$, что дает изменение длины дуги на окружности на величину $\Delta s = \omega R$. Видим, что приведенное выше в (15) б. м. изгибание окружности совпадает с полученным сейчас тривиальным. Теорема 2 доказана. $\square$

Влияние изменения начала отсчета длины кривой можно увидеть из следующего мысленного эксперимента. Пусть из некоторой точки кривой послан сигнал, идущий по кривой. После прохождения по кривой некоторого расстояния, из точки кривой, куда дошел сигнал, посылается по хорде в точку отправления сообщение о прибытии посланного сигнала. Теорема говорит, что если кривая не была дугой окружности, то сигналы, посланные из разных точек, но идущие сначала вдоль кривой на одинаковые расстояния, придут в точку отправления за разное время. Интересно было бы узнать, как изменяется в зависимости от характеристик кривой время прихода сигнала в исходную точку при данной длине пути по кривой, в частности, когда оно будет наименьшим или наибольшим.

Список литературы

[1] Э. Камке, *Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям*, Изд-во Иностранной литературы, М., 1950.

[2] Н.В. Ефимов, *Качественные вопросы теории деформаций поверхностей*, УМН **3** (2), 47–158 (1948).
URL: https://www.mathnet.ru/rus/rm8695

[3] А.Д. Александров, *О бесконечно малых изгибаниях нерегулярных поверхностей*, Матем. сб. **1** (3), 307–322 (1936).
URL: https://www.mathnet.ru/rus/sm5391

Иджад Хакович Сабитов
Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова,
механико-математический факультет,
Ленинские горы, д. 1, Москва, 119991, Россия,
e-mail: isabitov@mail.ru

Volume 3, Issue 2 UDC 514.7
pp. 136–144 (2025) MSC 53C24, 53A05

Does the properties of a closed plane curve depend on the choice of its initial point of rounding?

I.Kh. Sabitov

Abstract. We prove that the choice of an initial point of rounding of a closed plane curve influences its exterior geometry.

Keywords: closed plane curve, rounding, influence of the choice of its initial point.

DOI: 10.26907/2949-3919.2025.2.136-144

References

[1] E. Kamke, *Differentialgleichungen Lösungsmethoden und Lösungen.* I, B.G. Teubner, Stuttgart, 1977 [in German].

[2] N.V. Efimov, *Qualitative problems of the theory of deformation of surfaces*, Russ. Math. Surv. **3** (2), 47–158 (1948) [in Russian].
URL: https://www.mathnet.ru/rus/rm8695

[3] A.D. Aleksandrov, *On infinitesimal bendings of surfaces*, Sb. Math. **1** (3), 307–322 (1936) [in Russian].
URL: https://www.mathnet.ru/rus/sm5391

Idzhad Khakovich Sabitov
Moscow State University,
Faculty of Mechanics and Mathematics,
1 Leninskie Gory, Moscow, 119991, Russia,
e-mail: isabitov@mail.ru

Received: 31 March 2025. Accepted: 02 July 2025. Published: 16 July 2025.

Календарь конференций (август 2025 г. – октябрь 2025 г.)

Август 2025 г.

- **Летняя математическая школа “Алгебра и геометрия”**
  г. Суздаль, Россия, 2–7 августа 2025 г.
  Сайт: **http://www.bogomolov-lab.ru/SHKOLA2025**
  Регистрация завершена.

- **V Конференция математических центров России**
  Сибирский федеральный университет, г. Красноярск, Россия, 11–16 августа 2025 г.
  Сайт: **https://kmc.sfu-kras.ru/conf2025**
  Регистрация завершена.

- **Десятая международная конференция по дифференциальным и функционально-дифференциальным уравнениям (DFDE–2025)**
  Российский университет дружбы народов им. Патриса Лумумбы, г. Москва, Россия, 17–24 августа 2025 г.
  Сайт: **https://dfde.mi-ras.ru/**
  Регистрация завершена.

- **Теория функций, её приложения и смежные вопросы**
  Институт математики и механики им. Н.И. Лобачевского, Казанский (Приволжский) федеральный университет, г. Казань, Россия, 23–28 августа 2025 г.
  Сайт: **https://kpfu.ru/math/conference/tf2025**
  Регистрация завершена.

- **Международная научная конференция «Современные методы и проблемы теории операторов и гармонического анализа и их приложения – 2025 (OTHA–2025)»**
  г. Ростов-на-Дону, Россия, 24–29 августа 2025 г.
  Сайт: **https://otha.sfedu.ru/conf2025/**
  Срок регистрации – **до 05 августа 2025 г.**

- **X Всероссийская конференция, посвященная 125-летию со дня рождения академика Михаила Алексеевича Лаврентьева “Лаврентьевские чтения по математике, механике и физике”**
  г. Новосибирск, Россия, 25–29 августа 2025 г.
  Сайт: **https://conf.nsc.ru/lavr125/ru**
  Регистрация завершена.

- **Сибирская летняя математическая школа "Текущие достижения в геометрии"**
  Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН, г. Новосибирск, Россия, 25–29 августа 2025 г.
  Сайт: **http://old.math.nsc.ru/conference/ageom/2025**
  Регистрация завершена.

Сентябрь 2025 г.

- **Конференция, посвященная 85-летию Санкт-Петербургского отделения Математического института им. В.А. Стеклова РАН**
  Набережная реки Фонтанки, 27, г. Санкт-Петербург, Россия, 2–6 сентября 2025 г.
  Сайт: **https://www.mathnet.ru/rus/conf2576**

- **Всероссийская конференция «Теоретическая и прикладная математика, включая аттестацию кадров высшей квалификации»**
  г. Петропавловск-Камчатский, Россия, 15–20 сентября 2025 г.
  Сайт: **https://kamchatgtu.ru/конференция-теоретическая-и-приклад/**
  Регистрация завершена.

- **"Вавиловские чтения 2025"**
  Международный математический институт им. Л. Эйлера, Песочная набережная, 10, г. Санкт-Петербург, Россия, 17–19 сентября 2025 г.
  Сайт: **https://www.mathnet.ru/rus/conf2575**

- **Фундаментальные и прикладные проблемы математики и информатики**
  ФГБОУ ВО "Дагестанский государственный университет", г. Махачкала, Россия, 17–20 сентября 2025 г.
  Сайт: **https://www.mathnet.ru/rus/conf2567**
  Срок регистрации – **до 20 августа 2025 г.**

- **Международная конференция «Молодежная школа-конференция института Эйлера по алгебре и алгебраической геометрии»**
  14 линия В.О., дом 29, г. Санкт-Петербург, Россия, 22–26 сентября 2025 г.
  Сайт: **https://www.mathnet.ru/rus/conf2572**

- **Международная конференция «Избранные вопросы теории функций» посвящённая 80-летию со дня рождения Евгения Михайловича Никишина (1945–1986)**
  Московский Государственный Университет им. М.В. Ломоносова; Математический институт им. В.А. Стеклова РАН, Москва., г. Москва, Россия, 29–30 сентября 2025 г.
  Сайт: **https://www.mathnet.ru/rus/conf2604**

- **Полиномиальная компьютерная алгебра 2025**
  Международный математический институт им. Л. Эйлера, Песочная набережная, 10, г. Санкт-Петербург, Песочная набережная, 10, Россия, 29 сентября–4 октября 2025 г.
  Сайт: **https://www.mathnet.ru/rus/conf2574**

- **Конференция “Квантовая оптика и смежные вопросы 2025”**
  Онлайн, Россия, 29 сентября–5 октября 2025 г.
  Сайт: **https://sites.google.com/view/qoart/2025**
  Регистрация продолжается.

Октябрь 2025 г.

- **Международная научная конференция “Уфимская осенняя математическая школа”**
  Уфимский университет науки и технологий, г. Уфа, Россия, 1–5 октября 2025 г.
  Сайт: **https://www.conf-bashedu-fmit.ru/**
  Срок регистрации – **до 10 сентября 2025 г.**

- **Модели квантовой теории поля**
  Международный математический институт им. Л. Эйлера, Песочная набережная, 10, г. Санкт-Петербург, Россия, 6–10 октября 2025 г.
  Сайт: **https://indico.jinr.ru/event/5203/overview**
  Срок регистрации – **до 05 сентября 2025 г.**

- **Интегрируемые системы и квантовая теория** Санкт-Петербургский государственный университет, г. Санкт-Петербург, Россия, 6–11 октября 2025 г.
  Сайт: **https://isqt.tilda.ws/**
  Регистрация завершена.

- **Омская конференция по геометрии и ее приложениям**
  Омский научный центр, г. Омск, Россия, 13–16 октября 2025 г.
  Сайт: **https://geomconf2025.oscsbras.ru/**
  Срок регистрации – **до 30 августа 2025 г.**

- **Международная конференция по комплексному анализу памяти А.А. Гончара и А.Г. Витушкина**
  МИАН, конференц-зал, 9 этаж, г. Москва, Россия, 27–29 октября 2025 г.
  Сайт: **https://www.mathnet.ru/conf2603**