

МАТЕМАТИКА И ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ КОМПЬЮТЕРНЫЕ НАУКИ

Издается с 2023 года
Выходит 4 раза в год
ISSN 2949-3919

Том 3
Выпуск 3



Казань
2025

МАТЕМАТИКА И ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ КОМПЬЮТЕРНЫЕ НАУКИ

Издается с 2023 года

Выходит 4 раза в год

ISSN 2949-3919

Том 3

Выпуск 3

Специальный выпуск трудов

Математической конференции к 90-летию М.В. Долова
«Дифференциальные уравнения, динамические системы
и их приложения»,

19–20 февраля 2025 г., Нижний Новгород,

Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского

Казань

2025

Учредитель: ФГАОУ ВО КИФУ
Адрес редакции: 420008, Республика Татарстан,
г. Казань, Казанский федеральный университет,
Институт математики и механики, ул. Кремлевская,
д. 35, комн. 501.
Тел. +7 843 233-70-60
E-mail: mathematics.tcs@gmail.com
URL: <https://mathtcs.ru/>

Издается с 2023 года.
Выходит 4 раза в год.
ISSN 2949-3919
Регистрационный номер СМИ: Эл № ФС77-84704

Сетевое издание «Математика и теоретические компьютерные науки» основано в 2023 году Научно-образовательным математическим центром Приволжского федерального округа (НОМЦ ПФО). Его учредителем является ФГАОУ ВО «Казанский (Приволжский) федеральный университет». Издание ориентировано на публикацию научных статей по следующим направлениям фундаментальной и прикладной

математики, теоретической информатики и компьютерных наук:

- вещественный, комплексный и функциональный анализ;
- дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление;
- математическая физика;
- геометрия и топология;
- теория вероятностей и математическая статистика;
- математическая логика, алгебра и теория чисел;
- вычислительная математика;
- теория вычислимости и сложности вычислений;
- дискретная математика и математическая кибернетика;
- теоретическая информатика;
- математические методы в искусственном интеллекте.

Также принимаются к печати обзоры, научно-популярные статьи, статьи о математической жизни. Все статьи проходят процедуру рецензирования. Все опубликованные статьи находятся в открытом доступе. Языки журнала – русский и английский.

Главный редактор

Арсланов М.М. (Россия, г. Казань)

Заместители главного редактора

Бикчентаев А.М. (Россия, г. Казань)

Файзрахманов М.Х. (Россия, г. Казань)

Ответственный секретарь

Тапкин Д.Т. (Россия, г. Казань)

Редакционная коллегия

Аблаев Ф.М. (Россия, г. Казань)

Абызов А.Н. (Россия, г. Казань)

Авхадиев Ф.Г. (Россия, г. Казань)

Амосов Г.Г. (Россия, г. Москва)

Асташкин С.В. (Россия, г. Самара)

Баженов Н.А. (Россия, г. Новосибирск)

Герман О.Н. (Россия, г. Москва)

Данчев П.В. (Болгария, г. София)

Демиденко Г.В. (Россия, г. Новосибирск)

Ефремова Л.С. (Россия, г. Нижний Новгород)

Касымов Н.Х. (Узбекистан, г. Ташкент)

Каюмов И.Р. (Россия, г. Казань)

Морозов А.С. (Россия, г. Новосибирск)

Мусин И.Х. (Россия, г. Уфа)

Насыров С.Р. (Россия, г. Казань)

Попов А.А. (Россия, г. Казань)

Туганбаев А.А. (Россия, г. Москва)

Турилова Е.А. (Россия, г. Казань)

Фоменко А.Т. (Россия, г. Москва)

Швидефски М.В. (Россия, г. Новосибирск)

СОДЕРЖАНИЕ

Ефремова Л.С. К 90-летию М.В. Долова	4
Морозов А.Д., Морозов К.Е. М.В. Долов и шестнадцатая проблема Гильберта	10
Гуревич Е.Я. О топологической классификации потоков с гетероклиническими кривыми на четырехмерных многообразиях	20
Дедаев Р.А., Жукова Н.И., Имаев Р.Р. Аттракторы групп гомеоморфизмов на многообразиях с краем	43
Ефремова Л.С., Шалагин М.А. Об асимптотическом поведении траекторий косых произведений с замкнутым множеством периодических точек	58
Мартынов Т.Д., Починка О.В., Чилина Е.Е. Классификация меняющих ориентацию периодических гомеоморфизмов двумерного тора	87
Махрова Е.Н. О минимальных множествах непрерывных отображений на одномерных континуумах	110

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ЖИЗНЬ

XVII Международная Казанская школа-конференция “Теория функций, ее приложения и смежные вопросы”. По результатам проведения конференции	136
Календарь конференций (ноябрь 2025 г. – январь 2026 г.)	138

К 90-летию М.В. Долова

Л.С. Ефремова

Аннотация. Статья содержит краткую биографию профессора М.В. Долова, описание его основных научных достижений и краткое описание статей, вошедших в специальные выпуски журнала “Математика и теоретические компьютерные науки”, посвященные проведенной в Нижегородском государственном университете конференции к 90-летию М.В. Долова.

Ключевые слова: Михаил Васильевич Долов.

Михаил Васильевич Долов – выдающийся специалист в области качественной (топологической) и аналитической теории дифференциальных уравнений. В 2024 году исполнилось 90 лет со дня его рождения, а в феврале 2025 года в Институте информационных технологий, математики и механики, образовавшемся в 2015 году при слиянии механико-математического факультета и факультета вычислительной математики и кибернетики Нижегородского государственного университета, прошла конференция, посвященная этой юбилейной дате.



Михаил Васильевич родился 5 ноября 1934 года в селе Михайловка Арзамасского района Горьковского края (сейчас это территория Нижегородской области) в крестьянской семье, вырастившей 11 детей.

Видя интерес Михаила к учебе, после 8-го класса отец отправил его учиться в Арзамас. В 1953 году Михаил Васильевич окончил с отличием Арзамасский учительский институт по специальности “Физика и математика”. После работы учителем математики и службы в армии в 1957 году М.В. Долов поступил в Горьковский (ныне Нижегородский) государственный университет на физико-математический факультет (в 1959 году факультет разделился на физический и механико-математический). В 1962 году М.В. Долов с отличием окончил механико-математический факультет университета, связав всю свою дальнейшую деятельность с этим факультетом.

С 1962 по 1964 год Михаил Васильевич – ассистент кафедры математического анализа и дифференциальных уравнений механико-математического факультета, в 1964–1967 гг. – аспирант той же кафедры (научный руководитель профессор Н.Ф. Отроков). В 1967 году

М.В. Долов успешно защищает кандидатскую диссертацию “Некоторые методы исследования предельных циклов”. С 1971 года он – доцент механико-математического факультета Горьковского университета, с 1972 по 1979 год работает на кафедре математической физики, а с 1979 по 1989 – на кафедре теории функций (до 1985 года – в должности доцента). В 1984 году М.В. Долов успешно защищает докторскую диссертацию “Канонические интегралы и предельные циклы”.

В 1985–1989 гг. Михаил Васильевич заведует кафедрой теории функций (ученое звание профессора присвоено в 1987 году), а в период с 1989 г. по 2000 г. – кафедрой дифференциальных уравнений и математического анализа механико-математического факультета; с 2000-го и до 2015 года работает в должности профессора той же кафедры.

М.В. Долов – автор более 150 научных работ, математик широкого кругозора, его основные научные интересы лежат на стыке качественной (топологической) и аналитической теории дифференциальных уравнений. Он развил теорию канонических и квазиканонических многозначных интегралов для автономных систем дифференциальных уравнений, важную часть которой составляет теория интегралов Дарбу, в настоящее время получившая дальнейшее обобщение и развитие в теории неавтономных дифференциальных уравнений и дифференциальных уравнений в частных производных.

Теория многозначных интегралов доказала свою эффективность при качественном исследовании автономных динамических систем. В частности, она применяется при решении вопросов существования предельных и особых циклов, различения простых и кратных предельных циклов дифференциальных уравнений.

С использованием теории канонических интегралов М.В. Долов решил проблему Н.П. Еругина о существовании двумерных полиномиальных динамических систем, имеющих центр и предельные циклы.

Первые интегралы Дарбу использовались К.С. Сибирским и его учениками при решении локальной задачи различения центра и фокуса в случае чисто мнимых корней характеристического уравнения, соответствующего состоянию равновесия. В начале 70-х годов XX века К.С. Сибирский высказал гипотезу о всюду плотности множества двумерных автономных полиномиальных систем с чисто мнимыми корнями характеристического уравнения, интегрируемых по Дарбу, в множестве всех систем, имеющих простое состояние равновесия типа центр. Изучив влияние топологических и аналитических свойств инвариантных кривых двумерной автономной полиномиальной системы на свойство интегрируемости по Дарбу, М.В. Долов опроверг гипотезу К.С. Сибирского.

М.В. Доловым получены результаты, относящиеся к 16-й проблеме Гильберта. Эти исследования, во многом, связаны со статьей другого выдающегося нижегородского математика Н.Н. Баутина [1]. В этой статье указано полиномиальное векторное поле степени n , для которого только овалы алгебраической M -кривой степени n (т. е. алгебраической кривой степени n с максимальным числом овалов) являются предельными циклами. Однако указанная работа Н.Н. Баутина содержала пробелы, которые были устранены в статьях М.В. Долова.

Научное наследие М.В. Долова включает и статьи по исследованию бифуркаций рождения предельных циклов из кратного фокуса, кратного предельного цикла и петли сепаратрисы простого седла для некоторых автономных алгебраических систем дифференциальных уравнений на плоскости; рассмотрению вопросов о числе и степени M -кривых, определяющих предельные циклы; по изучению полиномиальных векторных полей с линейными частными интегралами (подробное изложение результатов, составляющих основное научное наследие М.В. Долова, приведено в [2]). Наиболее полный библиографический список его основных (но не всех) научных работ содержится в [2, 3].

Михаил Васильевич был прекрасным человеком, который удивительным образом сочетал в себе строгость, честность и высокую требовательность с неизменной доброжелательностью и готовностью всегда прийти на помощь. Тысячи бывших студентов с искренним восхищением вспоминают его блестящие лекции по различным общим и специальным курсам. Девять его аспирантов защитили кандидатские диссертации, и большинство из них связали свою деятельность с высшим образованием.

В третий и четвертый выпуски третьего тома журнала “Математика и теоретические компьютерные науки”, посвященные конференции к 90-летию М.В. Долова, вошли статьи, подготовленные его учениками, коллегами и участниками его семинаров.

Третий выпуск содержит исследовательские статьи по различным аспектам топологической теории динамических систем, а четвертый – исследовательские статьи по топологической динамике отображений некоторых разветвленных континуумов и приложениям теории динамических систем и дифференциальных уравнений к различным задачам физики.

Так, статья А.Д. Морозова и К.Е. Морозова “М.В. Долов и шестнадцатая проблема Гильберта”, посвящена анализу результатов М.В. Долова и других представителей Нижегородской математической школы, связанных с шестнадцатой проблемой Гильберта.

В статье Е.Я. Гуревич “О топологической классификации потоков с гетероклиническими кривыми на четырехмерных многообразиях”, дана топологическая классификация гладких структурно устойчивых потоков на четырехмерных замкнутых многообразиях, неблуждающее множество которых удовлетворяет некоторым дополнительным условиям, а блуждающее множество содержит изолированные траектории, соединяющие седловые состояния равновесия (т. е. гетероклинические траектории).

Статья Р.А. Дедаева, Н.И. Жуковой и Р.Р. Имаева “Аттракторы групп гомеоморфизмов на многообразиях с краем” посвящена изучению влияния непустого края n -мерного топологического многообразия на структуру глобальных аттракторов группы гомеоморфизмов этого многообразия.

В статье Л.С. Ефремовой и М.А. Шалагина “Об асимптотическом поведении траекторий косых произведений с замкнутым множеством периодических точек”, дано описание неблуждающего множества косых произведений типа 2^∞ с замкнутым множеством периодических точек, заданных на многомерных клетках; приведен оригинальный пример простейшего отображения с замкнутым множеством периодических точек, заданного

на клетке произвольной конечной размерности и имеющего одномерный нехаотический аттрактор.

В статье Т.Д. Мартынова, О.В. Починки и Е.Е. Чилиной “Классификация меняющих ориентацию периодических гомеоморфизмов двумерного тора”, найдены все характеристики (т. е. конечные наборы данных, полностью описывающие классы топологической сопряженности периодических гомеоморфизмов ориентируемых компактных поверхностей) меняющих ориентацию периодических гомеоморфизмов двумерного тора.

В статье Е.Н. Махровой “О минимальных множествах непрерывных отображений на одномерных континуумах”, изучается взаимосвязь свойств отображений конечных деревьев и дендритов на минимальных множествах со свойствами отображения счетчика (“adding machine”).

Четвертый выпуск третьего тома журнала является продолжением выпуска 3 и включает в себя одну статью по динамике непрерывных отображений дендритов и три статьи по различным аспектам приложений общей теории динамических систем к физическим задачам.

Так, в статье С.С. Бельмесовой и Л.С. Ефремовой “О топологической сопряженности квадратичных отображений в неограниченных областях”, устанавливается взаимная топологическая сопряженность известных в математической литературе, но трудно поддающихся изучению квадратичных эндоморфизмов плоскости. Полученные здесь результаты о блуждающих траекториях дают ответ на вопрос тридцатилетней давности о поведении коэффициентов прохождения и отражения плоской волны с заданным импульсом в поле одномерной квазикристаллической решетки.

Статья А.В. Калинина и А.А. Тюхтиной “Характеризация источников, локализованных в пространстве квазистационарных электромагнитных полей”, посвящена изучению некоторых систем линейных дифференциальных уравнений в частных производных, возникающих при моделировании стационарных и квазистационарных электромагнитных явлений, и аспектам применения полученных результатов к соответствующим обратным задачам (о восстановлении источников по результатам граничных наблюдений магнитных и электрических полей).

В статье Е.Н. Махровой “Топологическая энтропия, подкова и минимальные множества непрерывных отображений дендритов” доказано, что положительность топологической энтропии непрерывного отображения дендрита со счетным множеством концевых точек эквивалентна существованию дуговой подковы у некоторой итерации рассматриваемого отображения. При этом установлено, что ключевую роль в исследовании энтропийных аспектов динамики такого рода отображений играют бесконечные минимальные множества.

В статье В.Ж. Сакбаева “Продолжения фазовых траекторий и расширения дифференциальных операторов”, рассматриваются продолжения совокупности фазовых траекторий некоторых векторных полей на графах или плоских областях. Этим продолжениям сопоставляется самосопряженное расширение дифференциального оператора, заданного

на гладких финитных функциях, определенных на графе или плоской области. Дается описание самосопряженных расширений дифференциального оператора, ассоциированных как с детерминированными продолжениями траекторий, так и со стохастическими их продолжениями через границу фазового пространства.

Список литературы

- [1] Н.Н. Баутин, *Оценка числа алгебраических предельных циклов системы $\dot{x} = P(x, y)$, $\dot{y} = Q(x, y)$ с алгебраическими правыми частями*, Дифференц. уравнения **16** (2), 362 (1980).
URL: <https://www.mathnet.ru/rus/de3931>
- [2] Е.В. Круглов, *Алгебраические дифференциальные уравнения с заданными интегралами. Обзор результатов, полученных М.В. Доловым*, Математика в высшем образовании **22**, 91–106 (2024).
- [3] Н.И. Авдонин, А.А. Алексеев, Е.В. Круглов, *70 лет Михаилу Васильевичу Долову*, Вестник Нижегородского университета им. Н.И. Лобачевского, сер. Матем. (1), 172–179 (2005).

Людмила Сергеевна Ефремова

Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского,
пр-т Гагарина, д. 23, г. Нижний Новгород, 603022, Россия,

Московский физико-технический институт (университет),

Институтский переулок, д. 9, г. Долгопрудный, Московская область, 141701, Россия,

e-mail: ludmila.efremova@itmm.unn.ru

To the 90th anniversary of M.V. Dolov

L.S. Efremova

Abstract. The article contains a brief biography of Professor M.V. Dolov, a description of his main scientific achievements and a brief description of articles included into the Special Issues of the Journal “Mathematics and Theoretical Computer Science”, dedicated to the conference “To the 90th anniversary of M.V. Dolov” held at Nizhny Novgorod State University.

Keywords: Mikhail Vasil’evich Dolov.

References

- [1] N.N. Bautin, *Estimation of the number of algebraic limit cycles of a system $\dot{x} = P(x, y)$, $\dot{y} = Q(x, y)$ with algebraic right-hand sides*, Differential Equations **16** (2), 362 (1980) [in Russian].
URL: <https://www.mathnet.ru/rus/de3931>
- [2] E.V. Kruglov, *Algebraic differential equations with given integrals. Review of the results obtained by M.V. Dolov*, Mathematics in Higher education **22**, 91–106 (2024) [in Russian].
- [3] N.I. Avdonin, A.A. Alekseev, E.V. Kruglov, *70 years of Mikhail Vasilyevich Dolov*, Bull. Lobachevsky Nizhny Novgorod Univ., ser. Math. (1), 172–179 (2005) [in Russian].

Lyudmila Sergeevna Efremova

Lobachevsky State University of Nizhny Novgorod,
23 Gagarin ave., Nizhny Novgorod 603022, Russia,

Moscow Institute of Physics and Technology,
9 Institutskii alley, Dolgoprudny, Moscow Region, 141701, Russia,
e-mail: ludmila.efremova@itmm.unn.ru

М.В. Долов и шестнадцатая проблема Гильберта

А.Д. Морозов, К.Е. Морозов

Аннотация. 5 ноября 2024 года исполнилось 90 лет со дня рождения выдающегося ученого и замечательного человека Михаила Васильевича Долова. Это краткое сообщение посвящено данному событию и содержит обзор некоторых результатов М.В. Долова и других сотрудников Нижегородского государственного университета по второй части шестнадцатой проблемы Гильберта.

Ключевые слова: Долов, шестнадцатая проблема, Гильберт, предельные циклы, полиномиальные векторные поля.

DOI: 10.26907/2949-3919.2025.3.10-19

В 1900 году Д. Гильберт сформулировал список из 23 важнейших нерешённых математических проблем. Шестнадцатая проблема Гильберта называлась “Проблема топологии алгебраических кривых и поверхностей” и, по существу, разделялась на две проблемы в разных областях математики:

- 1) исследование взаимного расположения овалов вещественных алгебраических кривых и полостей алгебраических поверхностей (алгебраическая часть);
- 2) получение верхней оценки на число предельных циклов полиномиального векторного поля и исследование их взаимного расположения (дифференциальная часть).

Полностью шестнадцатая проблема Гильберта не решена до сих пор. При этом, следует отметить, что нижегородские (горьковские) математики активно занимались исследованием как первой, так и второй части, и получили по обоим направлениям фундаментальные результаты. Исследования, касающиеся первой “алгебраической” части, в основном принадлежат научной школе Д.А. Гудкова. Описание результатов по этой теме, а также некоторые малоизвестные факты об истории их открытия можно найти в обзоре [1]. В данной заметке мы подробнее остановимся на результатах нижегородских математиков, касающихся второй “дифференциальной” части шестнадцатой проблемы Гильберта. Отметим прежде, что задаче оценки числа предельных циклов алгебраических дифференциальных уравнений посвящены многочисленные исследования и в данной работе мы не ставим целью сколько-нибудь полный их обзор.

Благодарности. Работа поддержана Минобрнауки РФ, соглашение FSWR-2020-0036.

© 2025 А.Д. Морозов, К.Е. Морозов

Поступила: 12.06.2025. Принята: 09.09.2025. Опубликовано: 16.10.2025.

Итак, рассмотрим вещественную систему на плоскости

$$\dot{x} = P(x, y), \quad \dot{y} = Q(x, y), \quad (1)$$

где P и Q суть полиномы степени n . Изучение предельных циклов полиномиальных векторных полей вида (1) берёт своё начало от классических трудов Г. Дарбу, А. Пуанкаре, Н.П. Еругина. В 1923 году А. Дюлак доказал, что число предельных циклов у системы (1) конечно [2]. Однако, в 1980-х годах Ю.С. Ильяшенко нашел в доказательстве А. Дюлака значительный пробел, связанный с существованием плоских возмущений [3]. Этот пробел был устранен Ю.С. Ильяшенко [4] и независимо Ж. Экалем [5].

Среди исследований, устанавливающих связь между первой и второй частями шестнадцатой проблемы Гильберта, отметим следующую теорему выдающегося нижегородского математика Н.Н. Баутина [6].

Теорема 1. *Существуют системы вида (1), где P и Q – целые рациональные функции степени n , имеющие для произвольного $n \geq 2$ число алгебраических предельных циклов, равное максимальному числу овалов алгебраической кривой порядка n , т. е. $1 + \frac{(n-1)(n-2)}{2}$ для четного n и $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$ для нечетного n .*

Активно занимался проблемой существования и устойчивости предельных циклов Н.Ф. Отроков – ученик создателя всемирно известной “горьковской” научной школы по нелинейным колебаниям академика А.А. Андропова. Так, исследуя вопрос о наибольшем числе предельных циклов, рождающихся в окрестности фокуса, он доказал, что существуют системы, имеющие $\frac{n^2 + 5n - 20 + (-1)^n 6}{2}$ циклов, где $n \geq 6$ – степень полиномов P и Q (см. [7], также [8]). Кроме того, Н.Ф. Отроков получил критерий отсутствия в системе (1) кратных предельных циклов¹. В 1964 году в аспирантуру к Н.Ф. Отрокову поступил талантливый ассистент Горьковского государственного университета Михаил Васильевич Долов, который также занялся исследованием проблемы предельных циклов и вскоре получил значимые результаты. Уже в 1967 году М.В. Долов защитил кандидатскую диссертацию “Некоторые методы исследования предельных циклов” [10] и в 1971 году перешел на должность доцента. В 1984 году М.В. Долов защитил докторскую диссертацию “Канонические интегралы и предельные циклы” [11], а в 1985 году возглавил кафедру теории функций, а затем, в 1989 году, – кафедру дифференциальных уравнений и математического анализа. Этой кафедрой он руководил до 2000 года, после чего до 2014 года работал на ней в должности профессора. Значительная часть научных работ М.В. Долова, содержащая его основные результаты, опубликована в журнале “Дифференциальные уравнения” и посвящена проблеме оценки числа алгебраических предельных циклов. Так, в работах [12–16] изучались системы вида (1), где P и Q – взаимно простые вещественные полиномы, допускающие первые интегралы Дарбу (либо обобщенные интегралы Дарбу).

¹Подробнее о результатах Н.Ф. Отрокова, касающихся предельных циклов, см. обзор [9].

Все такие системы имеют рациональный интегрирующий множитель. В работах [17, 18] исследовались системы с интегрирующим множителем типа Дарбу. В общем случае эти множители будут многозначными функциями. М.В. Доловым и С.А. Чистяковой было доказано, что существуют системы вида (1) с интегрирующими множителями Дарбу и предельными циклами, причем такая возможность реализуется, в частности, в случаях, когда число сомножителей в интегрирующем множителе не менее двух [18].

Проблемой предельных циклов занимались также коллеги и ученики М.В. Долова, некоторые ссылки на их работы приведены в списке литературы. Отметим здесь статью М.В. Долова и В.В. Косарева [16], где с помощью интегралов Дарбу показано, что либо все фазовые кривые системы (1) алгебраические, либо число различных неприводимых алгебраических частных интегралов $\Phi(x, y)$, включая полиномы с комплексными коэффициентами, не более $\frac{n^2 + 3n - 2}{2}$, причем при $n = 2$ оценка точная. Такая оценка для вещественных алгебраических инвариантных кривых найдена в работе Т.А. Дружковой [19].

В 2001 году М.В. Долов доказал теорему о предельных циклах систем, интегрируемых по Дарбу, которую он считал одним из основных своих результатов. Приведём её формулировку. Обозначим через s число различных неприводимых над полем комплексных чисел алгебраических кривых $P_j(x, y) = 0$, определяющих вещественные предельные циклы системы (1). Известно, что $s \leq \frac{n^2 + n}{2}$. Будем говорить, что система (1) интегрируема по Дарбу, если она допускает первый интеграл Дарбу

$$F \equiv \Phi_1^{\beta_1} \cdots \Phi_k^{\beta_k} = C, \quad (2)$$

где Φ_1, \dots, Φ_k – многочлены (в общем случае, комплексные) вещественных переменных x, y . Считаем, что в (2) все полиномы Φ неприводимы над полем комплексных чисел и попарно взаимно просты. Справедлива следующая

Теорема 2 ([20]).

I. Если система (1) имеет предельные циклы и интегрируема по Дарбу, то:

- 1) $1 \leq s \leq \frac{n^2 + n - 2}{2}$;
- 2) все полиномы $P_j(x, y) = 0$, $j = 1, \dots, s$ вещественные и входят в аналитическое выражение $F = \Phi_1^{\beta_1} \cdots \Phi_k^{\beta_k} = C$ (интеграл Дарбу);
- 3) у системы (1) нет других предельных циклов, отличных от $P_j(x, y) = 0$, $j = 1, \dots, s$;
- 4) характеристический показатель любого цикла отличен от нуля;
- 5) функция $F(x, y)$ многозначна в окрестности любого предельного цикла;
- 6) любой другой первый интеграл Дарбу $F(x, y) = C$ имеет вид $F_1 = KF^\lambda$, где K и λ в общем случае комплексные.

II. Если $s = \frac{n^2 + n}{2}$, то система (1):

- 1) не имеет других предельных циклов кроме $P_j(x, y) = 0$, $j = 1, \dots, s$;

- 2) неинтегрируема по Дарбу;
- 3) допускает вещественный интегрирующий множитель Дарбу $\mu = P_1^{-b_1} \dots P_s^{-b_s}$, где величина b_j равна порядку кратности предельного цикла, определяемого уравнением $P_j(x, y) = 0$.

Кроме того, М.В. Долов нашел и устранил пробел в доказательстве теоремы Н.Н. Баутина о числе алгебраических предельных циклов полиномиальной системы вида (1) (см. [21], также [22]). Отметим также решение М.В. Доловым проблемы Н.П. Еругина о существовании полиномиальных векторных полей с центром и предельными циклами [23]. Более полный обзор результатов М.В. Долова по исследованию алгебраических систем с интегралами Дарбу и интегралами типа Дарбу можно найти в статье [24].

Коллегами М.В. Долова, с которыми он работал на кафедре дифференциальных уравнений и математического анализа Нижегородского университета, были получены важные результаты по так называемой “ослабленной” шестнадцатой проблеме Гильберта, касающейся оценки числа предельных циклов для полиномиальных векторных полей, близких к гамильтоновым

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \frac{\partial H(x, y)}{\partial y} + \varepsilon g(x, y) \\ \dot{y} &= -\frac{\partial H(x, y)}{\partial x} + \varepsilon f(x, y).\end{aligned}\tag{3}$$

Здесь H – многочлен степени m , а g и f – многочлены степени n , ε – малый параметр. Предполагается, что система (3) при $\varepsilon = 0$ имеет ячейку, заполненную замкнутыми фазовыми кривыми, а возмущение неконсервативно (т. е. $g_x + f_y \neq 0$). В 1984 году А.Н. Варченко доказал, что при малых $\varepsilon \neq 0$ число предельных циклов M в индивидуальной ячейке конечно, но не дал оценки этого числа [25]. Отметим, что задача о предельных циклах в системах вида (3) приводит к изучению нулей некоторой функции, которую иногда называют порождающей функцией Пуанкаре–Понтрягина (см. подробности, например, в монографии [26]). В настоящее время оценки на число предельных циклов M получены лишь для частных случаев. Приведём некоторые результаты, полученные А. Д. Морозовым [27].

Теорема 3.

- 1) Для уравнения

$$\ddot{x} - a_{20}x^2 + 1 = \varepsilon \sum_{j=1}^J \sum_{n=0}^N a_{nj}x^n y^j$$

справедлива оценка $M < N + J + C$, $C = \text{const} > 1$.

- 2) Для уравнения

$$\ddot{x} + \alpha x + \beta x^3 = \varepsilon \sum_{j=1}^J \sum_{n=0}^N a_{nj}x^n y^j, \quad \alpha\beta \neq 0,$$

справедлива оценка $M < \left\lfloor \frac{N}{2} \right\rfloor + J + 1$.

3) Для уравнения

$$\ddot{x} + \sin x = \varepsilon \sum_{n=0}^N \sum_{j=1}^J (a_{nj} \cos nx + b_{nj} \sin nx) x^j, \quad N \geq J,$$

справедлива оценка $M^{\text{osc}} \leq N + \left\lceil \frac{J-1}{2} \right\rceil$, $M^{\text{rot}} \leq N + \left\lceil \frac{J}{2} \right\rceil$, где M^{osc} – число предельных циклов первого рода (не охватывающих фазовых цилиндр), M^{rot} – число предельных циклов второго рода (охватывающих фазовый цилиндр). При $J = 1$ оценка точная.

Отметим, что для случая 1) в 1988 году Г.С. Петров улучшил оценку: $M < N + J$ [28]. Доказательство случая 3) основано на следующей теореме [27], которая также представляет самостоятельный интерес.

Теорема 4. Существует такое достаточно малое $\varepsilon_*(n) > 0$, что при любых $|\varepsilon| \in (0, \varepsilon_*)$ у уравнения $\ddot{x} + \sin x = \varepsilon \dot{x} \cos nx$, $n \in \mathbb{N}$, в области колебательных движений имеется точно $n - 1$ грубых предельных циклов (первого рода). В области вращательных движений предельные циклы (второго рода) отсутствуют.

Список литературы

- [1] Г.М. Полотовский, В.В. Морозов, Д.А. Гудков и первая часть 16-й проблемы Гильберта, Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки **154** (2), 31–43 (2012).
URL: <https://www.mathnet.ru/rus/uzku1116>
- [2] H. Dulac, *Sur les cycles limits*, Bull. Soc. Math. France **51**, 45–188 (1923) [in French].
DOI: <https://doi.org/10.24033/bsmf.1031>
- [3] Ю.С. Ильяшенко, Мемуар Дюлака “О предельных циклах” и смежные вопросы локальной теории дифференциальных уравнений, УМН **40** (6), 41–78 (1985).
URL: <https://www.mathnet.ru/rus/rm2786>
- [4] Ю.С. Ильяшенко, Теоремы конечности для предельных циклов, УМН **45** (2), 143–200 (1990).
URL: <https://www.mathnet.ru/rus/rm4718>
- [5] J. Écalle, *Introduction aux fonctions analysables et preuve constructive de la conjecture de Dulac*, Hermann, Paris, 1992 [in French].
- [6] Н.Н. Баутин, Оценка числа алгебраических предельных циклов системы $\dot{x} = P(x, y)$, $\dot{y} = Q(x, y)$ с алгебраическими правыми частями, Дифференц. уравнения **16** (2), 362 (1980).
URL: <https://www.mathnet.ru/rus/de3931>

-
- [7] Н.Ф. Отроков, *О числе предельных циклов в окрестности фокуса*, ДАН СССР **43** (4), 102–105 (1944).
- [8] Н.Ф. Отроков, *О числе предельных циклов дифференциального уравнения в окрестности особой точки*, Матем. сб. **76** (1), 127–144 (1954).
URL: <https://www.mathnet.ru/sm5240>
- [9] М.В. Долов, *Проблема конечности числа предельных циклов полиномиального векторного поля на плоскости и работы Н.Ф. Отрокова*, Вестник ННГУ, сер. Матем. (1), 146–154 (2003).
URL: <http://www.vestnik.unn.ru/ru/nomera?anum=1416>
- [10] М.В. Долов, *Некоторые методы исследования предельных циклов*, дисс. ... канд. физ.-матем. наук, Горький, 1967.
- [11] М.В. Долов, *Канонические интегралы и предельные циклы*, дисс. ... д-ра физ.-матем. наук, Горький, 1983.
- [12] М.В. Долов, *Предельные циклы и алгебраические интегралы в случае центра*, Дифференц. уравнения **11** (11), 1935–1941 (1975).
URL: <https://www.mathnet.ru/rus/de2593>
- [13] М.В. Долов, *Канонический интеграл в окрестности фокуса*, Дифференц. уравнения **12** (11), 1946–1953 (1976).
URL: <https://www.mathnet.ru/rus/de2905>
- [14] М.В. Долов, *Предельные циклы и интегралы Дарбу в случае узла*, Дифференц. уравнения **13** (3), 406–415 (1977).
URL: <https://www.mathnet.ru/rus/de3009>
- [15] М.В. Долов, *Интегралы Дарбу в случае фокуса*, Дифференц. уравнения **14** (7), 1173–1178 (1978).
URL: <https://www.mathnet.ru/rus/de3431>
- [16] М.В. Долов, В.В. Косарев, *Интегралы Дарбу и аналитическая структура решений дифференциальных уравнений*, Дифференц. уравнения **19** (4), 697–700 (1983).
URL: <https://www.mathnet.ru/rus/de4830>
- [17] М.В. Долов, *Интегрирующий множитель в окрестности узла*, Дифференц. уравнения **33** (2), 158–160 (1997).
URL: <https://www.mathnet.ru/rus/de9187>
- [18] М.В. Долов, С.А. Чистякова, *Алгебраические дифференциальные уравнения с интегрирующим множителем типа Дарбу*, Дифференц. уравнения **33** (5), 618–622 (1997).
URL: <https://www.mathnet.ru/rus/de9260>
- [19] Т.А. Дружкова, *Об одном дифференциальном уравнении с алгебраическими интегралами*, Дифференц. уравнения **11** (2), 262–267 (1975).
URL: <https://www.mathnet.ru/rus/de2383>

- [20] М.В. Долов, *Об алгебраических предельных циклах полиномиальных векторных полей на плоскости*, Дифференц. уравнения **37** (9), 1155–1160 (2001).
URL: <https://www.mathnet.ru/rus/de10442>
- [21] М.В. Долов, *Теорема Баутина о числе алгебраических предельных циклов полиномиальных векторных полей*, Вестник ННГУ (4), 259–262 (2014).
URL: <http://www.vestnik.unn.ru/ru/nomera?anum=8807>
- [22] М.В. Долов, *О числе алгебраических инвариантных кривых полиномиальных векторных полей*, Дифференц. уравнения **40** (6), 838–839 (2004).
URL: <https://www.mathnet.ru/rus/de11093>
- [23] М.В. Долов, *О предельных циклах в случае центра*, Дифференц. уравнения **8** (9), 1691–1692 (1972).
URL: <https://www.mathnet.ru/rus/de1673>
- [24] Е.В. Круглов, *Алгебраические дифференциальные уравнения с заданными интегралами. Обзор результатов, полученных М.В. Доловым*, Матем. в высшем обр. **22**, 91–106 (2024).
URL: <https://elibrary.ru/item.asp?id=80428850>
- [25] А.Н. Варченко, *Оценка числа нулей Абелева интеграла, зависящего от параметра, и предельные циклы*, Функц. анализ и его прил. **18** (2), 14–25 (1984).
URL: <https://www.mathnet.ru/rus/faa1444>
- [26] А.Д. Морозов, *Резонансы, циклы и хаос в квазиконсервативных системах*, Регулярная и хаотическая динамика, Москва–Ижевск, 2005.
- [27] А.Д. Морозов, Е.Л. Федоров, *К исследованию уравнений с одной степенью свободы, близких к нелинейным интегрируемым*, Дифференц. уравнения **19** (9), 1511–1516 (1983).
URL: <https://www.mathnet.ru/rus/de4943>
- [28] Г.С. Петров, *Чебышевское свойство эллиптических интегралов*, Функц. анализ и его прил. **22** (1), 83–84 (1988).
URL: <https://www.mathnet.ru/rus/faa1097>

Альберт Дмитриевич Морозов

Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского,
пр-т Гагарина, д. 23, г. Нижний Новгород, 603022, Россия,
e-mail: morozov@mm.unn.ru

Кирилл Евгеньевич Морозов

Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского,
пр-т Гагарина, д. 23, г. Нижний Новгород, 603022, Россия,
e-mail: kirill.morozov@itmm.unn.ru

M.V. Dolov and the sixteenth Hilbert problem

A.D. Morozov, K.E. Morozov

Abstract. The 5th of November 2024 marked the 90th anniversary of the birth of an outstanding scientist and a remarkable person Mikhail Vasilievich Dolov. This short essay is dedicated to this event and contains an overview of some results of M.V. Dolov and other researchers at Nizhny Novgorod State University on the second part of the sixteenth Hilbert problem.

Keywords: Dolov, the sixteenth problem, Hilbert, limit cycles, polynomial vector fields.

DOI: 10.26907/2949-3919.2025.3.10-19

References

- [1] G.M. Polotovskiy, V.V. Morozov, D.A. Gudkov and the first part of the 16th Hilbert problem, *Uchenye Zapiski Kazanskogo Universiteta. Seriya Fiziko-Matematicheskie Nauki* **154** (2), 31–43 (2012) [in Russian].
URL: <https://www.mathnet.ru/rus/uzku1116>
- [2] H. Dulac, *Sur les cycles limites*, Bull. Soc. Math. France **51**, 45–188 (1923) [in French].
DOI: <https://doi.org/10.24033/bsmf.1031>
- [3] Yu.S. Ilyashenko, *Dulac's memoir "On limit cycles" and related problems of the local theory of differential equations*, Russian Math. Surveys **40** (6), 1–49 (1985).
DOI: <https://doi.org/10.1070/RM1985v040n06ABEH003701>
- [4] Yu.S. Ilyashenko, *Finiteness theorems for limit cycles*, Russian Math. Surveys **45** (2), 129–203 (1990).
DOI: <https://doi.org/10.1070/RM1990v045n02ABEH002335>
- [5] J. Écalle, *Introduction aux fonctions analysables et preuve constructive de la conjecture de Dulac*, Hermann, Paris, 1992 [in French].
- [6] N.N. Bautin, *Estimation of the number of algebraic limit cycles of the system $\dot{x} = P(x, y)$, $\dot{y} = Q(x, y)$ with algebraic right-hand sides*, Differ. Uravn. **16** (2), 362 (1980) [in Russian].
URL: <https://www.mathnet.ru/rus/de3931>

Acknowledgements. The work is supported by Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation, agreement FSWR-2020-0036.

Received: 12 June 2025. Accepted: 09 September 2025. Published: 16 October 2025.

-
- [7] N.F. Otrokov, *On the number of limit circles in the neighborhood of a focus*, Dokl. Akad. Nauk USSR **43** (4), 102–105 (1944) [in Russian].
- [8] N.F. Otrokov, *On the number of limit cycles of a differential equation in the neighborhood of a singular point*, Sb. Math. **76** (1), 127–144 (1954) [in Russian].
URL: <https://www.mathnet.ru/sm5240>
- [9] M.V. Dolov, *On the problem of the finiteness of limit cycles of polynomial vector field and N.F. Otrokov works*, Vestnik NNGU, ser. Math. (1), 146–154 (2003) [in Russian].
URL: <http://www.vestnik.unn.ru/ru/nomera?anum=1416>
- [10] M.V. Dolov, *On some methods of limit cycles research*, diss. ... cand. phys.-math, Gorkii, 1967.
- [11] M.V. Dolov, *On canonical integrals and limit circles*, diss. ... dr. phys.-math, Gorkii, 1983.
- [12] M.V. Dolov, *Limit cycles and algebraic integrals in the case of a center*, Differ. Uravn. **11** (11), 1935–1941 (1975) [in Russian].
URL: <https://www.mathnet.ru/rus/de2593>
- [13] M.V. Dolov, *The canonical integral in the neighborhood of a focus*, Differ. Uravn. **12** (11), 1946–1953 (1976) [in Russian].
URL: <https://www.mathnet.ru/rus/de2905>
- [14] M.V. Dolov, *Limit cycles and Darboux integrals in the case of a node*, Differ. Uravn. **13** (3), 406–415 (1977) [in Russian].
URL: <https://www.mathnet.ru/rus/de3009>
- [15] M.V. Dolov, *Darboux integrals in the case of a focus*, Differ. Uravn. **14** (7), 1173–1178 (1978).
URL: <https://www.mathnet.ru/rus/de3431>
- [16] M.V. Dolov, V.V. Kosarev, *Darboux integrals and the analytic structure of solutions of differential equations*, Differ. Uravn. **19** (4), 697–700 (1983).
URL: <https://www.mathnet.ru/rus/de4830>
- [17] M.V. Dolov, *An integrating factor in a neighborhood of a node*, Differential Equations **33** (2), 158–160 (1997).
- [18] M.V. Dolov, S.A. Chistyakova, *Algebraic differential equations with an integrating factor of Darboux type*, Differential Equations **33** (5), 621–625 (1997).
- [19] T.A. Druzhkova, *A certain differential equation with algebraic integrals*, Differ. Uravn. **11** (2), 262–267 (1975) [in Russian].
URL: <https://www.mathnet.ru/rus/de2383>
- [20] M.V. Dolov, *Algebraical limit cycles of polynomial vector fields on the plane*, Differential Equations **37** (9), 1211–1216 (2001).
DOI: <https://doi.org/10.1023/A:1012582809822>

- [21] M.V. Dolov, *Bautin's theorem on a number of algebraical limit cycles of polynomial vector fields*, Vestnik NNGU (4), 259–262 (2014) [in Russian].
URL: <http://www.vestnik.unn.ru/ru/nomera?anum=8807>
- [22] M.V. Dolov, *On the number of algebraic invariant curves of polynomial vector fields*, Differential Equations **40** (6), 896–897 (2004).
DOI: <https://doi.org/10.1023/B:DIEQ.0000046867.17535.71>
- [23] M.V. Dolov, *Limit cycles in the case of the center*, Differ. Uravn. **8** (9), 1691–1692 (1972) [in Russian].
URL: <https://www.mathnet.ru/rus/de1673>
- [24] E.V. Kruglov, *Algebraic differential equations with given integrals. Review of the results obtained by M.V. Dolov*, Matem. v vysh. obr. **22**, 91–106 (2024) [in Russian].
URL: <https://elibrary.ru/item.asp?id=80428850>
- [25] A.N. Varchenko, *Estimate of the number of zeros of an abelian integral depending on a parameter and limit cycles*, Funct. Anal. Appl. **18**(2), 98–108 (1984).
DOI: <https://doi.org/10.1007/BF01077820>
- [26] A.D. Morozov, *Quasi-conservative systems. Cycles, resonances and chaos*, World Scientific Publishing Co., Inc., River Edge, NJ, 1998.
DOI: <https://doi.org/10.1142/3238>
- [27] A.D. Morozov, E.L. Fedorov, *On the investigation of equations with one degree of freedom, close to nonlinear integrable ones*, Differ. Uravn. **19** (9), 1511–1516 (1983) [in Russian].
URL: <https://www.mathnet.ru/rus/de4943>
- [28] G.S. Petrov, *The Chebyshev property of elliptic integrals*, Funct. Anal. Appl. **22** (1), 72–73 (1988).
DOI: <https://doi.org/10.1007/BF01077734>

Albert Dmitrievich Morozov

Lobachevsky State University of Nizhny Novgorod,
23 Gagarin ave., Nizhny Novgorod 603022, Russia,
E-mail: morozov@mm.unn.ru

Kirill Evgenevich Morozov

Lobachevsky State University of Nizhny Novgorod,
23 Gagarin ave., Nizhny Novgorod 603022, Russia,
E-mail: kirill.morozov@itmm.unn.ru

О топологической классификации потоков с гетероклиническими кривыми на четырехмерных многообразиях

Е.Я. Гуревич

Аннотация. Получена топологическая классификация гладких структурно устойчивых потоков на четырехмерных замкнутых многообразиях, блуждающее множество которых содержит изолированные траектории, соединяющие седловые состояния равновесия (гетероклинические кривые). Из соображений размерности гетероклинические кривые таких потоков принадлежат пересечению инвариантных многообразий седел соседних индексов Морса. Мы предполагаем, что неблуждающее множество рассматриваемых потоков состоит в точности из одного источника, одного стока и произвольного числа седел, размерность неустойчивых многообразий которых равна 1 и 2. В работе получены необходимые и достаточные условия топологической эквивалентности таких потоков и предъявлен алгоритм реализации представителя каждого класса топологической эквивалентности. В частности, показано, что в рассматриваемом классе потоков на сфере S^4 существует ровно один класс топологической эквивалентности потоков с единственной гетероклинической кривой и счетное множество топологически неэквивалентных потоков с тремя гетероклиническими кривыми. Последний результат контрастирует с трехмерной ситуацией, где для аналогичного класса потоков существует лишь конечное число классов эквивалентности для каждого числа гетероклинических кривых.

Ключевые слова: гетероклиническая кривая, градиентно-подобный поток, полярный поток, топологическая классификация, диаграмма Кирби.

DOI: 10.26907/2949-3919.2025.3.20-42

Введение

Напомним, что состояние равновесия p гладкого потока $f^t : M^n \rightarrow M^n$ называется *гиперболическим*, если матрица Якоби $J_p = \left(\frac{\partial F}{\partial x} \right) \Big|_p$ поля скоростей $F = \partial f^t(x)/\partial t|_{t=0}$ в точке p не имеет собственных значений с нулевой действительной частью. Множества

$$W_p^s = \left\{ x \in M^n : \lim_{t \rightarrow +\infty} f^t(x) = p \right\}, \quad W_p^u = \left\{ x \in M^n : \lim_{t \rightarrow +\infty} f^{-t}(x) = p \right\}$$

Благодарности. Работа выполнена при поддержке РНФ (грант № 23-71-30008).

называются *устойчивым* и *неустойчивым* инвариантными многообразиями состояния равновесия p , соответственно. Число i_p , равное размерности $\dim W_p^u$ неустойчивого многообразия W_p^u , называется *индексом Морса точки p* . Состояние равновесия с индексом Морса, равным 0 (n) называется *стоком* (*источником*, соответственно), состояние равновесия с индексом Морса, принадлежащим интервалу $(0, n)$, называется *седловым* или *седлом*. Непустое трансверсальное пересечение инвариантных многообразий $W_p^u \cap W_q^s$ седловых состояний равновесия p, q называется *гетероклиническим*. Если пересечение $W_p^u \cap W_q^s$ одномерно, то каждую компоненту связности этого пересечения будем называть *гетероклинической кривой*.

Гладкий поток f^t , заданный на гладком замкнутом многообразии M^n размерности $n \geq 1$, называется *поток Морса–Смейла*, если его неблуждающее множество Ω_{f^t} состоит из конечного числа гиперболических состояний равновесия и замкнутых траекторий, а устойчивые и неустойчивые многообразия различных состояний равновесия и замкнутых траекторий либо не пересекаются, либо пересекаются трансверсально. Поток Морса–Смейла без замкнутых траекторий называется *градиентно-подобным*. Градиентно-подобный поток, неблуждающее множество которого содержит ровно один источник и один сток (при произвольном числе седел) называется *полярным*.

Потоки f^t, f'^t , заданные на многообразии M^n , называются *топологически эквивалентными*, если существует гомеоморфизм $h : M^n \rightarrow M^n$, переводящий траектории потока f^t в траектории потока f'^t с сохранением ориентации на траекториях, определяемых полем скоростей. Задача о топологической классификации градиентно-подобных потоков и потоков Морса–Смейла имеет долгую и богатую историю, берущую начало в классических работах А.А. Андропова, Л.С. Понтрягина, Е.А. Леонтович и А.Г. Майера (см. обзор [1] и книги [2, 3]). Для потоков Морса–Смейла с двумерным и градиентно-подобных потоков с трехмерным несущим многообразием эта проблема решена полностью. В случае несущих многообразий размерности 4 и выше наиболее законченные результаты получены для градиентно-подобных потоков без гетероклинических пересечений в работах [4–8]. В нашей работе проблема топологической классификации решается для класса полярных потоков на четырехмерных замкнутых многообразиях с непустым множеством гетероклинических кривых. Как и в работах [7, 8], проблема топологической классификации таких потоков сводится к проблеме классификации узлов и зацеплений. Перейдем к точным формулировкам результатов.

Для градиентно-подобного потока $f^t : M^4 \rightarrow M^4$ будем обозначать через $\Omega_{f^t}^i$ множество всех его состояний равновесия, индекс Морса которых равен $i \in \{0, 1, \dots, 4\}$ и через $|\Omega_{f^t}^i|$ мощность множества $\Omega_{f^t}^i$. Обозначим за $G(M^4)$ класс полярных потоков с непустыми множествами $\Omega_{f^t}^1, \Omega_{f^t}^2$ и пустым множеством $\Omega_{f^t}^3$. Будем обозначать $\omega, \alpha, \sigma_1, \sigma_2$ сток, источник и седловые состояния равновесия потока f^t такие, что $\sigma_i \in \Omega_{f^t}^i$. Всюду ниже $\text{cl } X$ обозначает замыкание множества X .

Теорема 1. Пусть $f^t \in G(M^4)$. Тогда

- 1) M^4 односвязно;

- 2) M^4 гомеоморфно сфере S^4 тогда и только тогда, когда $|\Omega_{ft}^2| = |\Omega_{ft}^1|$;
- 3) для любых состояний равновесия σ_1, σ_2 имеют место равенства $W_{\sigma_1}^u \cap W_{\sigma_2}^s = \emptyset$ и $\text{cl } W_{\sigma_1}^u = W_{\sigma_1}^u \cup \omega$, $\text{cl } W_{\sigma_2}^s = W_{\sigma_2}^s \cup \alpha$;
- 4) устойчивое многообразие любого седла $\sigma_1 \in \Omega_{ft}^1$ содержит по крайней мере одну гетероклиническую кривую;
- 5) если M^4 гомеоморфно сфере, то неустойчивое многообразие любого седла $\sigma_2 \in \Omega_{ft}^2$ содержит по крайней мере одну гетероклиническую кривую.

В силу результатов М.Х. Фридмана [9], односвязное гладкое замкнутое многообразие M^4 размерности четыре определяется с точностью до гомеоморфизма своей *формой пересечения* – симметричной билинейной формой $Q_{M^4} : H_2(M^4, \mathbb{Z}) \times H_2(M^4, \mathbb{Z}) \rightarrow \mathbb{Z}$, ставящей в соответствие каждой паре классов $(a, b) \in H_2(M^4, \mathbb{Z})$ их гомологический индекс пересечения (см. определение в [10, §5.3]). Ниже в предложении 2 устанавливается, что матрица формы пересечения в некотором базисе определяется следами двумерных сепаратрис седловых состояний равновесия потока $f^t \in G(M^4)$ на секущей трехмерной сфере $S_\alpha \subset W_\alpha^u$.

В силу [11, 12] для любого градиентно-подобного потока существует *самоиндексирующаяся энергетическая функция* – функция Морса φ , строго убывающая вдоль траекторий потока, отличных от состояний равновесия, и имеющая критическую точку в каждом состоянии равновесия p , причем индекс точки p как критической точки энергетической функции совпадает с индексом Морса i_p и со значением функции $\varphi(p)$ в этой точке. Пусть $\varphi : M^4 \rightarrow [0, 4]$ – энергетическая функция для потока $f^t \in G(M^4)$. Положим

$$S_\alpha = \varphi^{-1}(3, 5), \quad \Sigma_{ft} = \varphi^{-1}(1, 5).$$

Из свойств функции Морса следует, что S_α является гладко вложенной трехмерной сферой, а Σ_{ft} – гладко вложенным многообразием, гомеоморфным связной сумме $|\Omega_{ft}^1|$ копий прямых произведений $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1$ двумерной сферы и окружности. С каждым седловым состоянием равновесия $\sigma_2 \in \Omega_{ft}^2$ свяжем две пары гладко вложенных простых замкнутых кривых (узлов) $\lambda_{\sigma_2}^s, \tilde{\lambda}_{\sigma_2}^s \subset S_\alpha$ и $\lambda_{\sigma_2}^u, \tilde{\lambda}_{\sigma_2}^u \subset \Sigma_{ft}$ следующим образом. Положим

$$\lambda_{\sigma_2}^s = W_{\sigma_2}^s \cap S_\alpha, \quad \lambda_{\sigma_2}^u = W_{\sigma_2}^u \cap \Sigma_{ft}$$

и

$$L^s = \bigcup_{\sigma_2 \in \Omega_{ft}^2} \lambda_{\sigma_2}^s, \quad L_{ft}^u = \bigcup_{\sigma_2 \in \Omega_{ft}^2} \lambda_{\sigma_2}^u.$$

Поток f^t индуцирует диффеоморфизм

$$\eta : S_\alpha \setminus L^s \rightarrow \Sigma_{ft} \setminus L_{ft}^u,$$

ставящий в соответствие каждой точке $x \in S_\alpha \setminus L^s$ точку пересечения ее траектории

с множеством Σ_{ft} .

Пусть $\{N_{\sigma_2}^s\}, \{N_{\sigma_2}^u\}$ – попарно непересекающиеся трубчатые окрестности узлов из L^s, L_{ft}^u в S_α, Σ_{ft} , соответственно. Обозначим через $\mu_{\sigma_2}^s \subset \partial N_{\sigma_2}^s$ ($\mu_{\sigma_2}^u \subset \partial N_{\sigma_2}^u$) узел, ограничивающий двумерный диск, пересекающий узел $\lambda_{\sigma_2}^s$ ($\lambda_{\sigma_2}^u$) в единственной точке, и положим

$$\tilde{\lambda}_{\sigma_2}^s = \eta^{-1}(\mu_{\sigma_2}^u), \quad \tilde{\lambda}_{\sigma_2}^u = \eta(\mu_{\sigma_2}^s), \quad \tilde{L}^s = \bigcup_{\sigma_2 \in \Omega_{ft}^2} \tilde{\lambda}_{\sigma_2}^s, \quad \tilde{L}_{ft}^u = \bigcup_{\sigma_2 \in \Omega_{ft}^2} \tilde{\lambda}_{\sigma_2}^u.$$

Будем называть наборы $\{L^s, \tilde{L}^s\}, \{L_{ft}^u, \tilde{L}_{ft}^u\}$ *дуальными оснащенными зацеплениями*, связанными с множеством Ω_{ft}^2 .

Для каждой пары непересекающихся узлов $\lambda, \tilde{\lambda} \in S^3$ обозначим через $\text{lk}(\lambda, \tilde{\lambda})$ коэффициент зацепления этих узлов (см. точное определение в разделе 1.1). Оснащенному зацеплению $\{L^s, \tilde{L}^s\}$ поставим в соответствие матрицу коэффициентов зацепления A_{ft} – симметричную целочисленную матрицу с элементами $a_{i,j} = \text{lk}(\lambda_{\sigma_2^i}, \lambda_{\sigma_2^j})$ при $i \neq j$, и $a_{i,i} = \text{lk}(\lambda_{\sigma_2^i}, \tilde{\lambda}_{\sigma_2^i})$, $i, j \in \{1, \dots, |\Omega_{ft}^2|\}$. Аналогично [8, теорема 3] доказывается следующий результат.

Предложение 2. Матрица A_{ft} задает форму пересечения несущего многообразия потока $f^t \in G(M^4)$.

Из определения топологической эквивалентности потоков и предложения 2 непосредственно следует, что многообразие Σ_{ft} , класс сопряженности матрицы A_{ft} , каждое из дуальных оснащенных зацеплений $\{L^s, \tilde{L}^s\}, \{L_{ft}^u, \tilde{L}_{ft}^u\}$ являются топологическими инвариантами потока f^t . Однако, эти инварианты не полны, так как не учитывают топологию вложения трехмерных сепаратрис и число гетероклинических траекторий. Для того, чтобы получить полный топологический инвариант, удобный для решения проблемы реализации классов топологической эквивалентности, положим

$$\mathcal{L}_{ft}^s = \Sigma_{ft} \cap (\bigcup_{\sigma_1 \in \Omega_{ft}^1} W_{\sigma_1}^s)$$

и введем следующие определения.

Определение 3. Набор $K_{ft} = \{\Sigma_{ft}, \mathcal{L}_{ft}^s, L_{ft}^u, \tilde{L}_{ft}^u\}$ называется схемой потока f^t , многообразие Σ_{ft} называется характеристической секущей.

Определение 4. Схемы $K_{ft}, K_{f't}$ потоков $f^t, f'^t \in G(M^4)$ называются эквивалентными, если существует гомеоморфизм $h : \Sigma_{ft} \rightarrow \Sigma_{f't}$ такой, что $h(L_{ft}^u) = L_{f't}^u$, $h(\mathcal{L}_{ft}^s) = \mathcal{L}_{f't}^s$ и $h(\tilde{\lambda}_{\sigma_2}^u) = \tilde{\lambda}_{\sigma_2'}^u$ для любой пары $\lambda_{\sigma_2}^u \in L_{ft}^u$, $\lambda_{\sigma_2'}^u = h(\lambda_{\sigma_2}^u)$.

Основной результат работы заключается в следующей теореме, доказанной в разделе 3.

Теорема 5. Потоки $f^t, f'^t \in G(M^4)$ топологически эквивалентны тогда и только тогда, когда эквивалентны соответствующие им схемы $K_{ft}, K_{f't}$.

В разделе 4 вводится определение допустимой абстрактной схемы и доказывается следующая

Теорема 6. *Для любой допустимой абстрактной схемы K существует поток $f^t \in G(M^4)$, схема K_{f^t} которого эквивалентна K .*

В разделе 5 рассматривается подкласс $G_0 \subset G(M^4)$ потоков такой, что для любого f^t множество седловых состояний равновесия состоит ровно из двух точек (в силу теоремы 1 несущее многообразие такого потока есть сфера S^4), и доказывается следующая

Теорема 7. *Число гетероклинических кривых потока $f^t \in G_0$ нечетно. Если потоки $f^t, f'^t \in G_0$ имеют ровно по одной гетероклинической кривой, то они топологически эквивалентны. Для каждого числа $k \geq 3$ класс G_0 содержит счетное множество топологически неэквивалентных потоков ровно с k гетероклиническими кривыми.*

1. Вспомогательные утверждения

1.1. Узлы, зацепления и перестройки ДЭНА. Пусть X, Y – трансверсально пересекающиеся гладкие замкнутые подмногообразия гладкого многообразия M такие, что $\dim X + \dim Y = \dim M$. Тогда $X \cap Y$ состоит из конечного числа точек. Пусть e_x и e_y – ориентирующие касательные реперы к X, Y в точке $p \in X \cap Y$. Поставим в соответствие точке p число j_p , равное $+1$, если репер $e_m = (e_x, e_y)$ является ориентирующим для несущего многообразия M в точке p , и равное -1 в противном случае. Сумма чисел j_p по всем точкам, принадлежащим $X \cap Y$, называется *индексом пересечения* многообразий X, Y .

Всюду ниже, если не оговорено противное, n -шаром называется многообразие B^n , гомеоморфное единичному шару

$$\mathbb{B}^n = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| \leq 1\},$$

и $(n-1)$ -сферой S^{n-1} – многообразие, гомеоморфное границе $\partial\mathbb{B}^n$ шара \mathbb{B}^n . Напомним, что *полноторием* называется многообразие P , гомеоморфное прямому произведению $\mathbb{P} = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{B}^2$. Простая замкнутая кривая $\mu \subset \partial\mathbb{P}$, гомотопная в \mathbb{P} кривой $\{x\} \times \mathbb{B}^2$, называется *меридианом* полнотория \mathbb{P} , а кривая $\nu \subset \mathbb{P}$, индекс пересечения которой с меридианом μ равен ± 1 , называется *параллелью* полнотория \mathbb{P} .

Напомним, что m -компонентным зацеплением на сфере \mathbb{S}^3 называется топологически вложенное в него дизъюнктное объединение m окружностей. Зацепление, состоящее из единственной компоненты, называется *узлом*. Далее в работе дизъюнктное объединение m окружностей, топологически вложенное в произвольное компактное ориентируемое трехмерное многообразие M^3 , также называется зацеплением при $m > 1$ и узлом при $m = 1$. Следуя [13], будем называть зацепления $L, L' \subset M^3$ *эквивалентными*, если существует гомеоморфизм $h : M^3 \rightarrow M^3$ такой, что $h(L) = L'$.

Всюду ниже, если не оговорено противное, рассматриваются гладко вложенные узлы и зацепления. Для любого гладкого узла $\lambda \subset M^3$ определена его трубчатая окрестность

$P_\lambda \subset M^3$, являющаяся образом гладкого вложения стандартного полнотория \mathbb{P} . Будем обозначать за μ_λ гладкий узел, являющийся меридианом полнотория P_λ . Некоторую фиксированную параллель ν полнотория P_λ будем называть *оснащением* узла λ .

Пусть $\psi : \partial\mathbb{P} \rightarrow \partial P_\lambda$ – гомеоморфизм, переводящий меридиан полнотория \mathbb{P} в узел $\gamma \subset \partial P_\lambda$. Говорят, что многообразии

$$M_{\lambda,\gamma}^3 = (M^3 \setminus \text{int } P_\lambda) \cup_\psi \mathbb{P}$$

получено из M^3 *перестройкой* (или *хирургической операцией*) Дэна вдоль узла λ . Топология полученного такой перестройкой многообразия однозначно (с точностью до гомеоморфизма) определяется узлами λ, γ , т. е. не зависит от выбора трубчатой окрестности Π_λ и образа параллели полнотория \mathbb{P} (см., например, [14, теорема 15.3]). Перестройка Дэна, при которой меридиан полнотория Π приклеивается к меридиану μ_λ , называется *тривиальной*, поскольку в этом случае $M_{\lambda,\tilde{\lambda}}^3$ диффеоморфно исходному многообразию M^3 . В противном случае перестройка Дэна называется *нетривиальной*. Аналогично определяется перестройка Дэна вдоль зацепления.

Утверждение 8 ([15, теоремы 2, 3]). *Многообразие $M_{\lambda,\tilde{\lambda}}^3$, полученное нетривиальной перестройкой Дэна вдоль нетривиального узла $\lambda \subset \mathbb{S}^3$, не гомеоморфно ни сфере \mathbb{S}^3 ни прямому произведению $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1$.*

Более точно, перестройка Дэна определяется отношением $r = q/p$, называемым *коэффициентом перестройки*, где p, q – взаимно простые целые числа, определяющие гомологический класс γ : $[\gamma] = p[\nu] + q[\mu_\lambda]$. Строго говоря, число r зависит еще от выбора параллели ν . В случае, когда перестраиваемое многообразие M^3 является сферой, существует канонический способ выбора параллели ν , и, таким образом, коэффициент хирургии можно определить однозначно. Для описания этого способа напомним определение коэффициента зацепления двух узлов $\lambda, \lambda' \in \mathbb{S}^3$.

Диаграммой зацепления $L \subset S^3$ называется набор замкнутых кривых, являющийся его проекцией на плоскость, удовлетворяющих следующим условиям:

- 1) ни в какую точку плоскости не проектируется более двух точек зацепления и множество *перекрестков* – точек диаграммы, в которые проектируется две точки зацепления, – конечно;
- 2) проекция касательной к зацеплению в каждой точке является прямой; при этом проекции касательных к точкам, соответствующих одному перекрестку, не совпадают.

Возможные типы перекрестков изображены на рис 1. Зацепление называется *тривиальным*, если его диаграмма состоит из конечного числа попарно непересекающихся окружностей. Тривиальное зацепление, состоящее из единственной компоненты, называется *тривиальным узлом*. Узел, не являющийся тривиальным, называется *нетривиальным*.

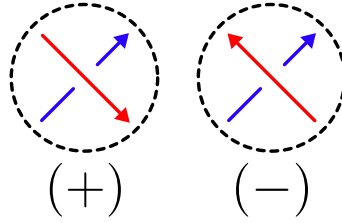


Рис. 1. Типы перекрестков

Для зацепления L , состоящего из двух ориентированных узлов λ, λ' , рассмотрим его диаграмму, образы узлов на которой также будем обозначать через λ, λ' . Каждому перекрестку, где кривая λ' проходит над кривой λ , припишем значение ± 1 в соответствии с рис. 1. Число, равное сумме всех этих значений, называется *коэффициентом зацепления* узлов λ, λ' в \mathbb{S}^3 и обозначается $\text{lk}(\lambda, \lambda')$. Если узел $\lambda' \subset \Pi_\lambda$ является параллелью полнотория Π_λ и ориентирован сонаправленно с λ , то коэффициент зацепления $\text{lk}(\lambda, \lambda')$ можно интерпретировать как число оборотов узла λ' вокруг меридиана μ_λ ; он является изотопическим инвариантом пары λ, λ' и меняет знак на противоположный, если меняется ориентация λ или \mathbb{S}^3 (см., например, [14, теорема 15.3]).

Везде далее мы полагаем, что на границе трубчатой окрестности P_λ узла $\lambda \in \mathbb{S}^3$ фиксирована *каноническая параллель* ν_λ , сонаправленная с узлом λ и такая, что $\text{lk}(\lambda, \nu_\lambda) = 0$.

1.2. РАЗЛОЖЕНИЕ НА РУЧКИ ЧЕТЫРЕХМЕРНЫХ МНОГООБРАЗИЙ. Напомним, что *ручкой размерности n индекса i* (или *i -ручкой*) называется прямое произведение

$$H_i^n = \mathbb{B}^i \times \mathbb{B}^{n-i}.$$

При этом первый шар называется *осевым*, второй – *секущим*. Край ручки естественным образом предствляется в виде объединения двух подмножеств

$$\Pi_1 = \partial\mathbb{B}^i \times \mathbb{B}^{n-i}, \quad \Pi_2 = \mathbb{B}^i \times \partial\mathbb{B}^{n-i}$$

с общей границей. Множество Π_1 называется *подошвой ручки*. Сферы $\partial\mathbb{B}^i \times \{O\}$, $\{O\} \times \partial\mathbb{B}^{n-i}$ называются *подошвенной и секущей сферами* соответственно.

Пусть X – n -мерное компактное многообразие с краем и $\psi : \Pi_1 \rightarrow \partial X$ – гладкое вложение. Говорят, что многообразие $Y = X \cup_\psi H_i^n$ получено *приклеиванием ручки H_i^n* к многообразию X . Связное многообразие с краем, полученное приклейкой $g \geq 0$ ручек индекса 1 к шару \mathbb{B}^n , называется *$(n, 1)$ -ручечным телом рода g* . Граница $(n, 1)$ -ручечного тела рода $g > 0$ гомеоморфна связной сумме прямых произведений $\mathbb{S}^{n-1} \times \mathbb{S}^1$ и неориентируемых локально-тривиальных \mathbb{S}^{n-1} -расслоений над окружностью (см., например, [8, предложение 6]).

Представление многообразия в виде объединения ручек называется его *разбиением на ручки*. Из [16, теорема 12.1] следует, что если многообразие M^n допускает разложение на ручки, то оно также допускает *полярное разложение на ручки*, содержащее

ровно по одной ручке индексов 0 и n . Опишем некоторые свойства полярного разложения на ручки ориентируемого четырехмерного многообразия M^4 с k_i ручками индекса $i \in \{1, 2, 3\}$. В силу [17, лемма 6.1] можно считать, что в его разложении на ручки все ручки индексов $i > 0$ приклеиваются к краю 0-ручки H_0^4 в порядке возрастания индексов. Будем обозначать через Q_i подмногообразие M^4 , образованное объединением ручек индексов от нуля до $i \in \{1, 2, 3, 4\}$ (таким образом $Q_4 = M^4$). Так как многообразие M^4 ориентируемо, то Q_1 является $(4, 1)$ -ручечным телом рода k_1 с ориентируемой границей (см., например, [8, лемма 3]). Следовательно, ∂Q_1 гомеоморфно сумме сферы \mathbb{S}^3 и k_1 копий $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1$. Граница 2-ручки H_2^4 является трехмерной сферой, множества Π_1, Π_2 – полноториями с общим краем, подошвенная и секущая сферы ручки H_2^4 – это окружности, являющиеся средними линиями полноториев Π_1 и Π_2 соответственно. Тогда множество Q_2 является многообразием с краем ∂Q_2 , полученным из ∂Q_1 перестройкой Дэна с целым коэффициентом вдоль оснащенного зацепления $\{L, \tilde{L}\}$, составленного из подошвенных сфер 2-ручек и меридианов полноториев Π_2 . Из [18] следует, что топология многообразия M^4 не зависит от способа приклеивания 3-ручек. Совокупность следов подошвенных сфер 1- и 2-ручек на сфере $\mathbb{S}^3 = \partial H_0^4$, оснащенная информацией о приклеивающих отображениях, называется *диаграммой Кирби многообразия M^4* . Диаграмма Кирби введена в [19, 20], где проблема топологической классификации многообразий размерности 3 и 4 сведена к проблеме классификации диаграмм Кирби.

2. Структура несущего многообразия и вложение сепаратрис седловых состояний равновесия потоков $f^t \in G(M^4)$

В силу [21, теорема 2.3] асимптотическое поведение траекторий потока определяется следующим утверждением.

Утверждение 9. Пусть f^t – градиентно-подобный поток на замкнутом многообразии M^n , $n \geq 1$. Тогда

- 1) $M^n = \bigcup_{p \in \Omega_{f^t}} W_p^s = \bigcup_{p \in \Omega_{f^t}} W_p^u$;
- 2) для любой точки $p \in \Omega_{f^t}$ многообразие W_p^u является гладким подмногообразием многообразия M^n ;
- 3) для любой точки $p \in \Omega_{f^t}$ и любой компоненты связности l_p^u множества $W_p^u \setminus p$ верно равенство $\text{cl } l_p^u \setminus (l_p^u \cup p) = \bigcup_{q \in \Omega_{f^t}: W_q^s \cap l_p^u \neq \emptyset} W_q^u$.

Так как потоки f^t, f^{-t} являются градиентно-подобными одновременно, то утверждение 9 остается верным после формальной замены всех символов u на s и s на u .

2.1. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. Пусть $f^t \in G(M^4)$ и $\varphi : M^4 \rightarrow \mathbb{R}$ – его энергетическая функция. Тогда $\psi = 4 - \varphi$ – энергетическая функция для f^{-t} . Из условий, определяющий класс $G(M^4)$ и свойств энергетической функции следует, что ψ не имеет

критических точек индекса 1. В [22, следствие 10.1.8, с. 225] показано, что если M^n неодносвязно, то любая функция Морса на M^n имеет критическую точку индекса 1. Отсюда следует, что M^4 односвязно, что доказывает первое утверждение теоремы 1.

Пусть β_i обозначает i -тое число Бетти многообразия M^4 . Так как M^4 односвязно, то $\beta_0 = 1$, $\beta_1 = 0$. Из двойственности Пуанкаре следует, что $\beta_4 = \beta_0 = 1$, $\beta_3 = \beta_1 = 0$. В силу равенства Морса (см [16, §5]) имеем

$$\sum_{i=0}^4 (-1)^i |\Omega_{ft}^i| = \beta_0 - \beta_1 + \beta_2 - \beta_3 + \beta_4.$$

Из определения класса $G(M^4)$ следует, что $|\Omega_{ft}^0| = |\Omega_{ft}^4| = 1$, $|\Omega_{ft}^3| = 0$. Тогда

$$\beta_2 = |\Omega_{ft}^2| - |\Omega_{ft}^1|.$$

Если M^4 гомеоморфно сфере S^4 , то $\beta_2 = 0$ и, следовательно, $|\Omega_{ft}^1| = |\Omega_{ft}^2|$. Если $|\Omega_{ft}^1| = |\Omega_{ft}^2|$, то $\beta_2 = 0$, следовательно, многообразие M^4 является односвязной гомологической сферой. Из [9, теорема 1.6] следует, что M^4 гомеоморфно сфере S^4 . Таким образом, доказано второе утверждение теоремы 1.

Отметим, что в силу трансверсальности пересечения из $W_p^u \cap W_q^s \neq \emptyset$ следует, что $\dim W_p^u > \dim W_q^s$. Действительно,

$$\dim(W_p^u \cap W_q^s) = \dim W_p^u + \dim W_q^s - 4 = \dim W_p^u + (4 - \dim W_q^u) - 4 = \dim W_p^u - \dim W_q^u.$$

Тогда если $W_p^u \cap W_q^s \neq \emptyset$, то $\dim(W_p^u \cap W_q^s) \geq 0$, откуда $\dim W_p^u \geq \dim W_q^u$. Но так как многообразия W_p^u , W_q^s инвариантны, то с каждой точкой пересечения x каждое из них содержит орбиту точки x . Следовательно, $\dim(W_p^u \cap W_q^s) > 0$, что дает $\dim W_p^u > \dim W_q^u$. Так как $1 = W_{\sigma_1}^u < W_{\sigma_2}^u = 2$ для любых седел $\sigma_1 \in \Omega_{ft}^1$, $\sigma_2 \in \Omega_{ft}^2$, то $W_{\sigma_1}^u \cap W_{\sigma_2}^s = \emptyset$. Оставшиеся утверждения п. 3 теоремы 1 следуют из утверждения 9.

Докажем, что для любой точки σ_1 существует точка σ_2 такая, что $W_{\sigma_1}^s \cap W_{\sigma_2}^u \neq \emptyset$. Предположим противное. Тогда из утверждения 9 следует, что $\text{cl } W_{\sigma_1}^s = W_{\sigma_2}^s \cup \alpha$. Следовательно, $\text{cl } W_{\sigma_1}^s$ является топологической трехмерной сферой. Из односвязности многообразия M^4 следует, что любая трехмерная сфера делит его на две компоненты связности (см. [5, предложение 6]). Так как $W_{\sigma_1}^s$ локально делит $W_{\sigma_1}^u$, то неустойчивые сепаратрисы седла σ_1 лежат в разных компонентах связности многообразия $M^4 \setminus \text{cl } W_{\sigma_1}^s$. Но тогда, в силу утверждения 9, каждая из этих компонент содержит стоковую точку, что противоречит полярности потока f^t . Таким образом, доказано утверждение 4 теоремы 1.

Пусть M^4 гомеоморфно сфере. Покажем, что для любого состояния равновесия $\sigma_2 \in \Omega_{ft}^2$ существует состояние равновесия σ_1 такое, что $W_{\sigma_2}^u \cap W_{\sigma_1}^s \neq \emptyset$. Предположим противное: пусть $\sigma_2 \in \Omega_{ft}^2$ такое состояние равновесия, что $W_{\sigma_2}^u \cap W_{\sigma_1}^s = \emptyset$ для любого $\sigma_1 \in \Omega_{ft}^1$. Тогда в силу тех же аргументов, что и выше, множества $\text{cl } W_{\sigma_2}^u$, $\text{cl } W_{\sigma_2}^s$ являются двумер-

ными топологическими сферами, гладко вложенными всюду, кроме, возможно, точек ω, α . Так как M^4 гомеоморфно сфере, двумерные сферы $\text{cl } W_{\sigma_2}^u, \text{cl } W_{\sigma_2}^s$ гомологичны нулю. Эти сферы имеют единственную точку пересечения σ_2 , следовательно, их индекс пересечения равен 1 или -1 (в зависимости от выбора ориентации). Но в силу [23, теорема I §70] индекс пересечения гомологичных нулю сфер равен нулю. Полученное противоречие доказывает последнее утверждение теоремы 1.

Сферой с k дырами будем называть компактное многообразие, полученное из стандартной сферы \mathbb{S}^3 удалением внутренностей k попарно непересекающихся гладко вложенных в \mathbb{S}^3 трехмерных шаров.

Аналогично [6, лемма 2] доказывается следующая

Лемма 10. Пусть $K_{f^t} = \{\Sigma_{f^t}, \mathcal{L}_{f^t}^s, L_{f^t}^u, \tilde{L}_{f^t}^u\}$ – схема потока $f^t \in G(M^4)$ (см. определение 3). Тогда

- 1) характеристическая секущая гомеоморфна связной сумме $|\Omega_{f^t}^1|$ копий прямого произведения $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1$;
- 2) каждая компонента связности $\ell_{\sigma_1}^s(\lambda_{\sigma_2}^u)$ множества $\mathcal{L}_{f^t}^s(L_{f^t}^u)$ является гладко вложенной в Σ_{f^t} двумерной сферой (окружностью);
- 3) существует набор N попарно непересекающихся компактных трубчатых окрестностей сфер из $\mathcal{L}_{f^t}^s$ такой, что $\Sigma_{f^t} \setminus \text{int } N$ гомеоморфно сфере с $2|\Omega_{f^t}^1|$ дырами;
- 4) каждый узел из $L_{f^t}^u$ гомотопически нетривиален в Σ_{f^t} .

Из условия трансверсальности непосредственно следует, что пересечение $\mathcal{L}_{f^t}^s \cap L_{f^t}^u$ состоит из конечного множества точек.

3. Необходимые и достаточные условия топологической эквивалентности потоков из класса $G(M^4)$

В этом разделе излагается доказательство теоремы 5. Необходимость ее условий непосредственно следует из определения топологической эквивалентности потоков. Докажем достаточность. Пусть схемы $K_{f^t}, K_{f'^t}$ потоков $f^t, f'^t \in G(M^4)$ эквивалентны в смысле определения 4. Докажем, что потоки f^t, f'^t топологически эквивалентны. Для удобства разобьем доказательство на шаги. Везде ниже $\sigma_i \in \Omega_{f^t}^i, \sigma'_i \in \Omega_{f'^t}^i, i \in \{1, 2\}$ обозначает такую пару седел, что $h(W_{\sigma_1}^s \cap \Sigma_{f^t}) = W_{\sigma'_1}^s \cap \Sigma_{f'^t}, h(W_{\sigma_2}^u \cap \Sigma_{f^t}) = W_{\sigma'_2}^u \cap \Sigma_{f'^t}$, где $h : \Sigma_{f^t} \rightarrow \Sigma_{f'^t}$ – гомеоморфизм, описанный в определении 4.

Шаг 1. Выбор компактных канонических окрестностей седловых состояний равновесия, пересекающихся с секущей Σ_{f^t} по трубчатым окрестностям компонент связности множеств $\mathcal{L}_{f^t}^s, L_{f^t}^u$.

Пусть $N_{\sigma_1}^s(N_{\sigma_2}^u)$ обозначает трубчатую окрестность сферы $\ell_{\sigma_1}^s$ (узла $\lambda_{\sigma_2}^u$) в Σ_{f^t} , т. е. образ гладкого вложения кольца $\mathbb{S}^2 \times [-1, 1]$ (полнотория $\mathbb{B}^2 \times \mathbb{S}^1$) в Σ_{f^t} , при котором множество $\mathbb{S}^2 \times \{0\}$ ($\{O\} \times \mathbb{S}^1$) отображается в $\ell_{\sigma_1}^s$ ($\lambda_{\sigma_2}^u$). Обозначим через $\{D_z^u, z \in \ell_{\sigma_1}^s\}$,

$\{D_w^s, w \in \lambda_{\sigma_2}^u\}$ множества слоев расслоения окрестностей $N_{\sigma_1}^s, N_{\sigma_2}^u$ на одномерные (двумерные) диски, трансверсальные к $\ell_{\sigma_1}^s, \lambda_{f^t}^u$, соответственно. Из трансверсальности пересечения и единственности трубчатой окрестности с точностью до объемлющей изотопии следует, что если $\ell_{\sigma_1}^s \cap \lambda_{\sigma_2}^u \neq \emptyset$, то не уменьшая общности можно считать, что каждая компонента пересечения $N_{\sigma_1}^s \cap \lambda_{\sigma_2}^u$ ($\ell_{\sigma_1}^s \cap N_{\sigma_2}^u$) является слоем слоения $\{D_z^u\}$ (соответственно, $\{D_w^s\}$).

Классическая λ -лемма (см. [24], лемма 7.1 и замечание на с. 117) позволяет определить для каждого седлового состояния равновесия σ_i компактную каноническую окрестность V_{σ_i} и непрерывные отображения $\pi_{\sigma_i, u} : V_{\sigma_i} \rightarrow W_{\sigma_i}^u, \pi_{\sigma_i, s} : V_{\sigma_i} \rightarrow W_{\sigma_i}^s$ со следующими свойствами.

- 1) $\partial V_{\sigma_2} \cap \Sigma_{f^t} = N_{\sigma_2}^s, \partial V_{\sigma_1} \cap \Sigma_{f^t} = N_{\sigma_1}^u$;
- 2) для любых точек $x \in V_{\sigma_i} \cap W_{\sigma_i}^u, y \in V_{\sigma_i} \cap W_{\sigma_i}^s$ множества $B_{\sigma_i, x}^s = \pi_{\sigma_i, u}^{-1}(x), B_{\sigma_i, y}^u = \pi_{\sigma_i, s}^{-1}(y)$ являются гладко вложенными компактными шарами размерности $4 - i, i$, соответственно, пересекающимися трансверсально;
- 3) $B_{\sigma_i, \sigma_i}^s \subset W_{\sigma_i}^s, B_{\sigma_i, \sigma_i}^u \subset W_{\sigma_i}^u$;
- 4) $f^t(B_{\sigma_i, x}^s) \subset B_{\sigma_i, f^t(x)}^s, f^t(B_{\sigma_i, y}^u) \supset B_{\sigma_i, f^t(y)}^u$;
- 5) если $x \in \lambda_{\sigma_2}^u$, то $B_{\sigma_2, x}^s \cap \Sigma_{f^t} = D_x^s$;
- 6) если $y \in \ell_{\sigma_1}^s$, то $B_{\sigma_1, y}^u \cap \Sigma_{f^t} = D_y^u$.

Будем называть окрестность V_{σ_i} *канонической компактной окрестностью седлового состояния равновесия σ_i* . Отображения $\pi_{\sigma_i, u}, \pi_{\sigma_i, s}$ определяют в окрестности V_{σ_i} структуру прямого произведения $\mathbb{B}^i \times \mathbb{B}^{4-i}, i \in \{1, 2\}$. Положим $N_{\sigma_1}^s = \partial V_{\sigma_1} \setminus \text{int } N_{\sigma_1}^u, N_{\sigma_2}^u = \partial V_{\sigma_2} \setminus \text{int } N_{\sigma_2}^s$.

Аналогично [8, предложение 2] секущие трехмерные сферы в окрестностях источников и стоковых состояний равновесия модифицируются таким образом, чтобы все компоненты множеств $\{N_{\sigma_1}^s\} (\{N_{\sigma_2}^u\})$ принадлежали одной и той же секущей сфере. Каждая секущая сфера в окрестности источника (стока) ограничивает шар, который можно интерпретировать как ручку индекса 4 (0, соответственно). Таким образом, справедливо следующее

Предложение 11. *Многообразие M^4 допускает разбиение на ручки, в котором ручками индексов 1 и 2 являются канонические окрестности седловых состояний равновесия.*

Отметим, что из описанной конструкции следует, что множества $N_{\sigma_2}^s \subset S_\alpha$ и $N_{\sigma_2}^u \subset \Sigma_{f^t}$ являются полноториями, и для любых точек $x \in W_{\sigma_2}^u \cap V_{\sigma_2}, y \in W_{\sigma_2}^s \cap V_{\sigma_2}$ простые замкнутые кривые $\tilde{\lambda}_{\sigma_2}^s = \partial B_{\sigma_2, x}^s, \tilde{\lambda}_{\sigma_2}^u = \partial B_{\sigma_2, y}^u$ являются меридианами полноториев $N_{\sigma_2}^s, N_{\sigma_2}^u$ и оснащениями узлов $\lambda_{\sigma_2}^s, \lambda_{\sigma_2}^u$, соответственно.

Шаг 2. *Построение гомеоморфизма $\chi_{\sigma_2, \sigma'_2}$, сопрягающего ограничения потоков f^t, f^{f^t} на канонические окрестности седловых состояний равновесия индекса 2.*

Канонические окрестности, проекции и другие объекты для седлового состояния равновесия σ'_i потока f^{f^t} , аналогичные построенным на шаге 1 для потока f^t , будем обозначать за $V_{\sigma'_i}, \pi_{\sigma'_i, u} : V_{\sigma'_i} \rightarrow W_{\sigma'_i}^u, \pi_{\sigma'_i, s} : V_{\sigma'_i} \rightarrow W_{\sigma'_i}^s$ и т.д. Построим гомеоморфизм $\chi_{\sigma_2, \sigma'_2} : V_{\sigma_2} \rightarrow V_{\sigma'_2}$ со следующими свойствами:

- 1) $\chi_{\sigma_2, \sigma'_2} f^t = f'^t \chi_{\sigma_2, \sigma'_2}$ для всех t , при которых определены правая и левая часть равенства;
- 2) $\chi_{\sigma_2, \sigma'_2}(\lambda_{\sigma_2}^u \cap \ell_{\sigma_1}^s) = \lambda_{\sigma'_2}^u \cap \ell_{\sigma'_1}^s$ для всех σ_1 таких, что $\lambda_{\sigma_2}^u \cap \ell_{\sigma_1}^s \neq \emptyset$;
- 3) $\chi_{\sigma_2, \sigma'_2}$ отображает меридианы полноториев $N_{\sigma_2}^s, N_{\sigma_2}^u$ в меридианы полноториев $N_{\sigma'_2}^s, N_{\sigma'_2}^u$.

Из определения эквивалентности схем следует, что существует сохраняющий ориентацию гомеоморфизм $g^u : \partial B_{\sigma_2, \sigma_2}^u \rightarrow \partial B_{\sigma'_2, \sigma'_2}^u$ такой, что $g^u(\partial B_{\sigma_2, \sigma_2}^u \cap \ell_{\sigma_1}^s) = \partial B_{\sigma'_2, \sigma'_2}^u \cap \ell_{\sigma'_1}^s$ для всех σ_1 таких, что $\lambda_{\sigma_2}^u \cap \ell_{\sigma_1}^s \neq \emptyset$. Каждой точке $x \in B_{\sigma_2, \sigma_2}^u$ поставим в соответствие время $t_x \in \mathbb{R}$ такое, что $f^{t_x}(x) \in \partial B_{\sigma_2, \sigma_2}^u$. Определим гомеоморфизм $h^u : B_{\sigma_2, \sigma_2}^u \rightarrow B_{\sigma'_2, \sigma'_2}^u$, положив

$$h^u(x) = \begin{cases} f'^{-t_x}(g^u(f^{t_x}(x))), & x \in B_{\sigma_2, \sigma_2}^u \setminus \sigma_2, \\ \sigma'_2, & x = \sigma_2. \end{cases}$$

Аналогично определим гомеоморфизм $h^s : B_{\sigma_2, \sigma_2}^s \rightarrow B_{\sigma'_2, \sigma'_2}^s$ такой, что

$$h^s f^t|_{B_{\sigma_2, \sigma_2}^s} = f'^t h^s|_{B_{\sigma_2, \sigma_2}^s}.$$

Тогда искомый гомеоморфизм $\chi_{\sigma_2, \sigma'_2}$ определяется соотношением

$$\chi_{\sigma_2, \sigma'_2}(z) = \pi_{\sigma'_2, u}^{-1}(h^u(\pi_{\sigma_2, u}(z))) \cap \pi_{\sigma'_2, s}^{-1}(h^s(\pi_{\sigma_2, s}(z))), \quad z \in V_{\sigma_2}.$$

Шаг 4. Построение гомеоморфизма $\chi : \Sigma_{f^t} \rightarrow \Sigma_{f'^t}$, согласованного с локальными сопрягающими гомеоморфизмами в канонических окрестностях седловых состояний равновесия.

Пусть $N_{\sigma'_1}^s, N_{\sigma'_2}^u \subset \Sigma_{f'^t}$ – трубчатые окрестности сферы $\ell_{\sigma'_1}^s$ и узла $\lambda_{\sigma'_2}^u$, имеющие те же свойства, что и окрестности $N_{\sigma_1}^s, N_{\sigma_2}^u \subset \Sigma_{f^t}$, определенные на шаге 1. Множества $\tilde{N}_{\sigma'_1}^s = h(N_{\sigma_1}^s)$, $\tilde{N}_{\sigma'_2}^u = h(N_{\sigma_2}^u)$ являются локально плоскими вложениями компактов в Σ_{f^t} . В силу результатов Бинга и Мойса, см. [25, теорема 8], любое компактное локально плоско вложенное подмножество замкнутого трехмерного многообразия является подполиэдром, поэтому для любых $\sigma'_1 \in \Omega_{f'^t}^1$, $\sigma'_2 \in \Omega_{f'^t}^2$ сфера $\ell_{\sigma'_1}^s$, узел $\lambda_{\sigma'_2}^u$ и множества $\tilde{N}_{\sigma'_1}^s, N_{\sigma'_1}^s, \tilde{N}_{\sigma'_2}^u, N_{\sigma'_2}^u$ являются подполиэдрами многообразия $\Sigma_{f'^t}$. Более того, пары $\tilde{N}_{\sigma'_1}^s, N_{\sigma'_1}^s$ и $\tilde{N}_{\sigma'_2}^u, N_{\sigma'_2}^u$ являются регулярными (в терминологии [17]) кусочно-линейными окрестностями сферы $\ell_{\sigma'_1}^s$ и узла $\lambda_{\sigma'_2}^u$, соответственно. Из [17, гл. 3, теорема 3.24] следует, что существует изотопия $H_t : \Sigma_{f^t} \rightarrow \Sigma_{f'^t}$ с компактным носителем, такая, что:

- 1) $H_0(x) = x$ для любого $x \in \Sigma_{f^t}$;
- 2) $H_1(\tilde{N}_{\sigma'_1}^s) = N_{\sigma'_1}^s$;
- 3) $H_t(x) = x$ для любого $x \in \mathcal{L}_{f'^t}^s \cup L_{f'^t}^u$ и для любого $t \in [0, 1]$.

Положим $g = H_1 h$. Гомеоморфизм $g : \Sigma_{f^t} \rightarrow \Sigma_{f'^t}$ гомеоморфно отображает $\mathcal{L}_{f^t}^s$ в $\mathcal{L}_{f'^t}^s$, $L_{f^t}^u$ в $L_{f'^t}^u$, $\bigcup_{\sigma_1 \in \Omega_{f^t}^1} N_{\sigma_1}^s$ в $\bigcup_{\sigma'_1 \in \Omega_{f'^t}^1} N_{\sigma'_1}^s$, $\bigcup_{\sigma_2 \in \Omega_{f^t}^2} N_{\sigma_2}^u$ в $\bigcup_{\sigma'_2 \in \Omega_{f'^t}^2} N_{\sigma'_2}^u$ и отображает каждый узел $\tilde{\lambda}_{\sigma_1}^u \subset \tilde{L}_{f^t}^u$

в узел, гомотопический эквивалентный в полнотории $N_{\sigma'_2}^u$ узлу $\tilde{\lambda}_{\sigma'_1}^u \subset \tilde{L}_{f't}^u$.

Пусть $\hat{N}_{\sigma'_2}^u \subset \Sigma_{f't}$ – замкнутая трубчатая окрестность узла $\lambda_{\sigma'_2}^u$, не пересекающаяся с полноториями $\bigcup_{q' \in \Omega_{f't}^2 \setminus \sigma'_2} N_{q'}^u$ и такая, что $N_{\sigma'_2}^u \subset \text{int } \hat{N}_{\sigma'_2}^u$. В силу [17, следствие 3.18] многообразие $\hat{N}_{\sigma'_2}^u \setminus \text{int } N_{\sigma'_2}^u$ гомеоморфно прямому произведению $T^2 \times [0, 1]$ тора T^2 на отрезок. Не уменьшая общности будем считать, что пересечение этого многообразия с множеством $\mathcal{L}_{f't}^s$ и каждым двумерным слоем, составляющим слоение каждой окрестности $N_{\sigma'_1}^s$ такой, что $N_{\sigma'_1}^s \cap N_{\sigma'_2}^u \neq \emptyset$, составлено из одномерных слоев расслоения, заданного структурой прямого произведений (в качестве такой окрестности можно взять пересечение подходящей итерации окрестности $V_{\sigma'_2}$ с $\Sigma_{f't}$). Положим $\eta_{\sigma'_2} = \chi_{\sigma_2, \sigma'_2} g^{-1}|_{\tilde{N}_{\sigma'_2}^u}$. Из свойств гомеоморфизмов g и $\chi_{\sigma_2, \sigma'_2}$ следует, что гомеоморфизм $\eta_{\sigma'_2} : N_{\sigma'_2}^u \rightarrow N_{\sigma'_2}^u$ изотопен тождественному. Тогда гомеоморфизм $\eta_{\sigma'_2}$ продолжается по одномерным слоям прямого произведения до гомеоморфизма $\hat{\eta}_{\sigma'_2} : \hat{N}_{\sigma'_2}^u \rightarrow \hat{N}_{\sigma'_2}^u$, тождественного на $\partial \hat{N}_{\sigma'_2}^u$ и такого, что $\hat{\eta}_{\sigma'_2}(\mathcal{L}_{f't}^s \cap \tilde{N}_{\sigma'_2}^u) = \mathcal{L}_{f't}^s \cap \hat{N}_{\sigma'_2}^u$, $\hat{\eta}_{\sigma'_2}(N_{\sigma'_1}^s \cap \tilde{N}_{\sigma'_2}^u) = N_{\sigma'_1}^s \cap \hat{N}_{\sigma'_2}^u$. В свою очередь, гомеоморфизм $\hat{\eta}_{\sigma'_2}$ продолжается до гомеоморфизма $\theta_{\sigma'_2} : \Sigma_{f't} \rightarrow \Sigma_{f't}$, тождественного вне $\hat{N}_{\sigma'_2}^u$. Обозначим через

$$\theta_2 : \Sigma_{f't} \rightarrow \Sigma_{f't} \rightarrow \Sigma_{f't} \rightarrow \Sigma_{f't}$$

гомеоморфизм, являющийся суперпозицией гомеоморфизмов $\theta_{\sigma'_2}$, построенных для каждого седла $\sigma'_2 \in \Omega_{f't}^2$.

Аналогично построению гомеоморфизма $\chi_{\sigma_2, \sigma'_2}$ строится гомеоморфизм $\chi_{\sigma_1, \sigma'_1} : V_{\sigma_1} \rightarrow V_{\sigma'_1}$ такой, что:

- 1) $\chi_{\sigma_1, \sigma'_1} f^t = f'^t \chi_{\sigma_2, \sigma'_2}$ для всех t , при которых правая и левая части равенства определены;
- 2) $\chi_{\sigma_1, \sigma'_1}|_{N_{\sigma_1}^s \cap g^{-1}(\hat{N}_{\sigma'_2}^u)} = g \theta_2|_{V_{\sigma_1} \cap g^{-1}(\hat{N}_{\sigma'_2}^u)}$ для всех σ_2 таких, что $\lambda_{\sigma_2}^u \cap \ell_{\sigma_1}^s \neq \emptyset$.

Пусть $\hat{N}_{\sigma'_1}^s$ – замкнутая трубчатая окрестность сферы $\ell_{\sigma'_1}^s$, не пересекающаяся с множеством $\bigcup_{q' \in \Omega_{f't}^1 \setminus \sigma'_1} N_{q'}^s$ и такая, что $N_{\sigma'_1}^u \subset \text{int } \hat{N}_{\sigma'_1}^u$. Каждая компонента связности B множества

$$\hat{N}_{\sigma'_1}^s \setminus \left(\text{int } N_{\sigma'_1}^s \cup \bigcup_{\sigma'_2 : \lambda_{\sigma'_2}^u \cap \ell_{\sigma'_1}^s \neq \emptyset} \text{int } N_{\sigma'_2}^u \right)$$

является замкнутым компактным шаром. В силу теоремы Александера любой гомеоморфизм, заданный на границе шара, продолжается до гомеоморфизма всего шара. Поэтому гомеоморфизмы $\hat{\eta}_{\sigma_2}|_{\partial B}$ и $\chi_{\sigma_1, \sigma'_1} g^{-1}|_{\partial B}$ продолжаются до гомеоморфизма шара B , тождественного на $\partial \hat{N}_{\sigma'_1}^s \cap \partial B$. Таким образом строится гомеоморфизм $\theta : \Sigma_{f't} \rightarrow \Sigma_{f't}$ со следующими свойствами:

- 1) $\theta(x) = x$, если x лежит в дополнении до объединения окрестностей $\{\hat{N}_{\sigma'_1}^s\}$ и $\{\hat{N}_{\sigma'_2}^u\}$;
- 2) $\theta|_{N_{\sigma'_1}^s} = \chi_{\sigma_1, \sigma'_1} g^{-1}|_{N_{\sigma'_1}^s}$;

$$3) \theta|_{N_{\sigma'_2}^u} = \chi_{\sigma_2, \sigma'_2} g^{-1}|_{N_{\sigma'_2}^u}.$$

Наконец, искомый гомеоморфизм $\chi : \Sigma_{f^t} \rightarrow \Sigma_{f^{t'}}$ определяется формулой $\chi = \theta g$.

Шаг 4. Построение гомеоморфизма $G : M^4 \rightarrow M^4$, сопрягающего потоки $f^t, f^{t'}$.

Каждой точке $z \in M^4 \setminus \Omega_{f^t}$ поставим в соответствие время $t_z \in \mathbb{R}$ такое, что имеет место включение $f^{t_z}(z) \subset \Sigma_{f^t} \cup \left(\bigcup_{p \in \Omega_{f^t}^2} V_p \right)$ и положим

$$G(z) = \begin{cases} f'^{-t_z}(\chi(f^{t_z}(z))), & f^{t_z}(z) \in \Sigma_{f^t}; \\ f'^{-t_z}(h_{\sigma_i, \sigma'_i}(f^{t_z}(z))), & f^{t_z}(z) \in V_{\sigma_i}, i \in \{1, 2\}. \end{cases} \quad (1)$$

Формула (1) определяет непрерывную биекцию на множестве $M^4 \setminus \Omega_{f^t}$, единственным непрерывным образом продолжающуюся на Ω_{f^t} до искомого гомеоморфизма.

4. Реализация классов топологической эквивалентности

Пусть Σ_k – связная сумма $k > 0$ копий $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1$, \mathcal{L}^s – набор из k попарно непересекающихся гладко вложенных в Σ_k двумерных сфер, \mathcal{N} – совокупность их попарно непересекающихся открытых трубчатых окрестностей, и $\{L^u, \tilde{L}^u\} \subset \Sigma_k$ – гладкое оснащенное m -компонентное зацепление, $m \geq k$.

Определение 12. Набор $K = \{\Sigma_k, \mathcal{L}^s, L^u, \tilde{L}^u\}$ будем называть абстрактной допустимой схемой, если выполняются следующие условия:

- 1) $\Sigma_k \setminus \mathcal{N}$ гомеоморфно трехмерной сфере с $2k$ дырами;
- 2) для каждой сферы $\ell^s \in \mathcal{L}^s$ существует по крайней мере один узел $\lambda^u \in L^u$ такой, что $\ell^s \cap \lambda^u \neq \emptyset$;
- 3) любое непустое перечение $\ell^s \cap \lambda^u$ трансверсально;
- 4) многообразие, полученное из Σ_k перестройкой Дэна вдоль $\{L^u, \tilde{L}^u\}$, диффеоморфно сфере \mathbb{S}^3 .

Из предложения 11 и леммы 10 непосредственно следует, что схема K_{f^t} любого потока $f^t \in G(M^4)$ является допустимой.

Докажем теорему 6. Пусть K – допустимая абстрактная схема. Построим поток $f^t \in G(M^4)$, схема K_{f^t} которого эквивалентна K . Напомним, что $H_i^4 = \mathbb{B}^i \times \mathbb{B}^{4-i}$ обозначает четырехмерную ручку индекса $i \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$ (см. предложение 11). Определим на H_i^4 векторное поле системой уравнений

$$\dot{x} = x, \quad \dot{y} = -y,$$

где $x \in \mathbb{B}^i, y \in \mathbb{B}^{4-i}$. Приклеим к 0-ручке H_0^4 k копий 1-ручек H_1^4 при помощи диффеоморфизма, обеспечивающего гладкую склейку векторных полей. В результате получим ручечное тело Q рода k и гладкий поток f_1^t на Q , траектории которого трансверсальны краю ∂Q ,

а неблуждающее множество состоит из $(k+1)$ гиперболических состояний равновесия: одного стока и k седел с индексом Морса, равным единице. Край ∂Q диффеоморфен Σ_k при помощи диффеоморфизма $\psi : \Sigma_k \rightarrow \partial Q$, переводящего сферы из множества \mathcal{L}^s в сферы, образованные пересечением устойчивых многообразий седловых состояний равновесия потока f_1^t с ∂Q . Будем обозначать образ оснащенного зацепления $\{L^u, \tilde{L}^u\}$ относительно ψ теми же символами, что и оригиналы. Приклеим к многообразию Q ручки индекса 2 по зацеплению $\{L^u, \tilde{L}^u\}$ при помощи диффеоморфизма, обеспечивающую гладкую склейку векторных полей. В результате получим многообразие R с краем, диффеоморфным \mathbb{S}^3 . Это позволяет приклеить к многообразию R ручку H_4^4 . В результате получим замкнутое многообразие M^4 и гладкое векторное поле на нем, индуцирующее искомым поток.

5. Потоки из класса $G(M^4)$ с двумя седлами

В этом разделе мы рассматриваем подкласс $G_0 \subset G(M^4)$ потоков такой, что для любого f^t множество седловых состояний равновесия состоит ровно из двух точек. В силу теоремы 1 несущее многообразие такого потока есть сфера S^4 .

Лемма 13. Пусть $K_{f^t} = \{\Sigma_{f^t}, \ell_{\sigma_1}^s, \lambda_{\sigma_2}^u, \tilde{\lambda}_{\sigma_2}^u\}$ – схема потока $f^t \in G_0$. Тогда

- 1) существует гомеоморфизм $h : \Sigma_{f^t} \rightarrow \mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1$ такой, что $h(\lambda_{\sigma_2}^u) = \{x_1\} \times S^1$, $h(\tilde{\lambda}_{\sigma_2}^u) = \{x_2\} \times \mathbb{S}^1$, где $x_1, x_2 \in \mathbb{S}^2$;
- 2) индекс пересечения сферы $\ell_{\sigma_1}^s$ и узла $\lambda_{\sigma_2}^u$ равен ± 1 ;
- 3) если пересечение $\ell_{\sigma_1}^s \cap \lambda_{\sigma_2}^u$ состоит из единственной точки, то существует гомеоморфизм h , удовлетворяющий условиям п. 1 и такой, что $h(\ell_{\sigma_1}^s) = S^2 \times \{y\}$, $y \in S^1$.

Доказательство. Из свойств энергетической функции потока f^t непосредственно следует, что Σ_{f^t} диффеоморфно $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1$. Из леммы 10 следует, что $\ell_{\sigma_1}^s = W_{\sigma_1}^s \cap \Sigma_{f^t}$, $\lambda_{\sigma_2}^u = W_{\sigma_2}^u \cap \Sigma_{f^t}$ являются гладко вложенными в Σ_{f^t} двумерной сферой и окружностью соответственно, причем $\ell_{\sigma_1}^s$ не делит Σ_{f^t} . Докажем, что существует гомеоморфизм $h : \Sigma_{f^t} \rightarrow \mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1$, удовлетворяющий заключению леммы. Из предложения 11 следует, что Σ_{f^t} является краем многообразия $V_\alpha \cup V_{\sigma_2}$, полученного приклейкой канонической окрестности V_{σ_2} седла σ_2 к шару $B_\alpha \subset W_\alpha^u$, ограниченному сферой S_α , секущей к траекториям потока f^t . Каноническая окрестность V_{σ_2} является 2-ручкой, при этом приклейка 2-ручки производится вдоль узла $\lambda^s = W_{\sigma_2}^s \cap S_\alpha$, и пересечение $V_{\sigma_2} \cap S_\alpha$ является компактной трубчатой окрестностью этого узла. Следовательно, Σ_{f^t} является результатом нетривиальной перестройки Дэна сферы S_α вдоль узла λ^s (см. раздел 1.2). В силу утверждения 8 этот узел тривиален. Из тривиальности узла следует, что $S_\alpha \setminus \text{int } V_{\sigma_2}$ является полноторием. Многообразия $S_\alpha \setminus \text{int } V_{\sigma_2}$, $\Sigma_{f^t} \setminus \text{int } V_{\sigma_2}$ диффеоморфны посредством диффеоморфизма η , ставящего каждой точке $z \in S_\alpha \setminus \text{int } V_{\sigma_2}$ точку пересечения ее траектории с Σ_{f^t} . Следовательно, множество $Q = \Sigma_{f^t} \setminus \text{int } V_{\sigma_2}$ является полноторием. В силу определения канонической окрестности множество $P = \Sigma_{f^t} \cap V_{\sigma_2}$ тоже является полноторием. Существует только один способ

получить $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1$ склейкой двух полноториев, при этом способе склеивающий гомеоморфизм переводит меридиан первого полнотория в меридиан второго. Следовательно, меридианы полноториев P, Q совпадают, а оснащение $\tilde{\lambda}_{\sigma_2}^u$ узла $\lambda_{\sigma_2}^u$ является параллелью полнотория P . Пусть $x_1 \in \mathbb{S}^2$, $D \in \mathbb{S}^2$ – диск, содержащий точку x_1 внутри, $x_2 \in \partial D$ и $P_0 = D \times \mathbb{S}^1$, $Q_0 = (\mathbb{S}^2 \setminus \text{int } D) \times \mathbb{S}^1$. Тогда существует гомеоморфизм $h_0 : P \rightarrow P_0$ такой, что $h_0(\Lambda_{ft}^u) = x_1 \times \mathbb{S}^1$, $h_0(\tilde{\Lambda}_{ft}^u) = x_2 \times \mathbb{S}^1$. Так как h_0 является гомеоморфизмом полноториев, то он переводит меридиан полнотория P в меридиан полнотория P_0 . Отсюда следует, что гомеоморфизм $h_0|_{\partial P} = h_0|_{\partial Q}$ продолжается до гомеоморфизма $h_1 : Q \rightarrow Q_0$ такого, что $h_1|_{\partial Q} = h_0|_{\partial Q}$ (см., например, [13, гл. 2, §5, упр. 5]). Тогда гомеоморфизм $h : \Sigma_{ft} \rightarrow \mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1$, заданный формулой

$$h(x) = \begin{cases} h_0(x), & x \in P \\ h_1(x), & x \in Q, \end{cases}$$

является искомым.

Так как сфера $h(\ell_{\sigma_1}^s)$ не делит $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1$, то она гомологична сфере $\mathbb{S}^2 \times \{y\}$, $y \in \mathbb{S}^1$. Так как индекс пересечения является гомологическим инвариантом, то индекс пересечения сферы $h(\ell_{\sigma_1}^s)$ и узла $h(\lambda_{\sigma_2}^u)$ равен ± 1 . Следовательно, такой же индекс пересечения имеют и многообразия $\ell_{\sigma_1}^s, \lambda_{\sigma_2}^u$.

Если пересечение $\ell_{\sigma_1}^s \cap \lambda_{\sigma_2}^u$ состоит из единственной точки, то пересечение $\ell_{\sigma_1}^s \cap P$ является меридианным диском полнотория P и существует гомеоморфизм $h_0 : P \rightarrow P_0$ со свойствами, определенными выше, и такой, что $h_0(\ell_{\sigma_1}^s \cap P) = D$. Тогда его продолжение h_1 можно выбрать так, чтобы $h_1(\ell_{\sigma_1}^s \cap P_1) = \mathbb{S}^2 \setminus \text{int } D$, что доказывает последнее утверждение леммы. \square

5.1. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 7. В силу утверждения 2 леммы 13 индекс пересечения многообразий $\ell_{\sigma_1}^s, \lambda_{\sigma_2}^u$ равен единице. Отсюда следует, что пересечение $\ell_{\sigma_1}^s \cap \lambda_{\sigma_2}^u$ состоит из нечетного числа точек. Каждая точка этого пересечения порождает гетероклиническую кривую, что доказывает нечетность числа гетероклинических кривых любого потока $f^t \in G_0$. Пусть $f^t, f'^t \in G_0$ – потоки с единственной гетероклинической кривой. Из пп. 1, 3 леммы 13 следует, что схемы этих потоков эквивалентны. В силу теоремы 5 потоки f^t, f'^t топологически эквивалентны.

В верхней части рис. 2 приведены три случая взаимного расположения гомотопически нетривиальной двумерной сферы ℓ и тривиального узла $\lambda_{3,0}, \lambda_{3,1}, \lambda_{3,2}$ в $\Sigma_1 = \mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1$, трансверсально пересекающихся в трех точках. Чтобы получить $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1$, нужно считать, что граничные сферы изображенного на рисунке шарового слоя (он выделен серым цветом) склеены по гомотетии. Серия изображенных на рисунке узлов естественным образом продолжается до счетной серии ручных узлов $\{\lambda_{3,i}\}$. В силу теоремы 6, сферу ℓ и каждый из узлов $\lambda_{3,i}$ можно реализовать как следы устойчивой трехмерной и неустойчивой двумерной сепаратрис седловых состояний равновесия на характеристической секущей потока $f_{3,i}^t \in G_0$, имеющего 3 гетероклинические кривые. Покажем, что такие потоки попарно топологически неэквивалентны. Для этого в силу теоремы 5 достаточно доказать,

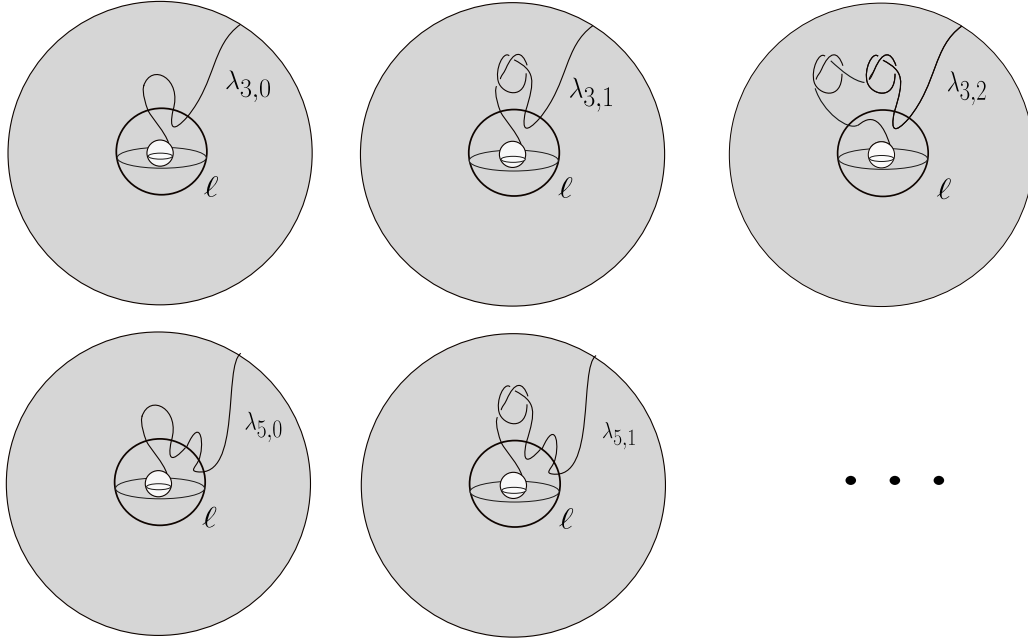


Рис. 2. Нетривиальная сфера ℓ и тривиальный узел $\lambda_{k,i}$ в $\Sigma_1 = \mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1$

что не существует гомеоморфизма $h : \Sigma_1 \rightarrow \Sigma_1$ такого, что $h(\ell) = \ell$, $h(\lambda_{3,i}) = \lambda_{3,j}$ для $i \neq j$. Предположим противное.

Пусть N_ℓ, P_i – компактные трубчатые окрестности сферы ℓ и узла $\lambda_{3,i}$ в Σ , соответственно. Так как сфера ℓ не делит Σ_1 , то найдется компактная дуга $b_{3,i} \subset \lambda_{3,i}$, концы которой лежат на разных компонентах связности края кольца N_ℓ . Пусть $C_b \subset P_i$ – компонента связности множества $P_i \setminus \ell$, содержащая дугу $b_{3,i}$. Множество $B = \Sigma_1 \setminus (\text{int } N_\ell \cup \text{int } C_b)$ гомеоморфно шару \mathbb{B}^3 . Обозначим через $l_{i,1}, l_{i,2}$ компоненты связности множества $B \cap \lambda_{3,i}$ (см. рис 3, на котором проиллюстрированы случаи $i \in \{0, 1\}$). Концы каждой из дуг $l_{i,1}, l_{i,2}$ принадлежат границе ∂B шара B . Соединим концевые точки из дуг $l_{i,j}$ дугой $e_{i,j} \subset \partial B$ такой, что $e_{i,1} \cap e_{i,2} = \emptyset$. Положим $k_{i,j} = l_{i,j} \cup e_{i,j}$. Приклеим к шару B шар \mathbb{B}^3 , отождествив произвольным образом граничные сферы ∂B и \mathbb{S}^2 . В результате получим сферу S^3 и зацепление $L_{3,i} = \{k_{i,1}, k_{i,2}\}$. По построению для каждого i по крайней мере один из узлов, скажем, $k_{i,2}$, является тривиальным, и существует трехмерный шар $D \subset S^3$ такой, что $k_{i,2} \subset \text{int } D$, $k_{i,1} \cap D = \emptyset$. Из существования гомеоморфизма $h : \Sigma_1 \rightarrow \Sigma_1$ следует существование гомеоморфизма $H : S^3 \rightarrow S^3$ такого, что $h(k_{i,1}) = k_{j,1}$ для $i \neq j$. Но узел $k_{i,1}$ является связной суммой тривиального узла и i копий трилистника. Все такие узлы попарно неэквивалентны. Полученное противоречие доказывает, что потоки $f_{3,i}^t, f_{3,j}^t$ топологически неэквивалентны.

В нижней части рис. 2 показано, как серия узлов $\lambda_{3,i}$ модифицируется в серию узлов $\lambda_{k,i}$, каждый из которых имеет заданное нечетное число k пересечений со сферой ℓ . Аргументы, аналогичные изложенным выше, доказывают существование счетного множества топологически неэквивалентных потоков из класса G_0 с заданным числом k гетероклинических пересечений. Таким образом, теорема 7 доказана.

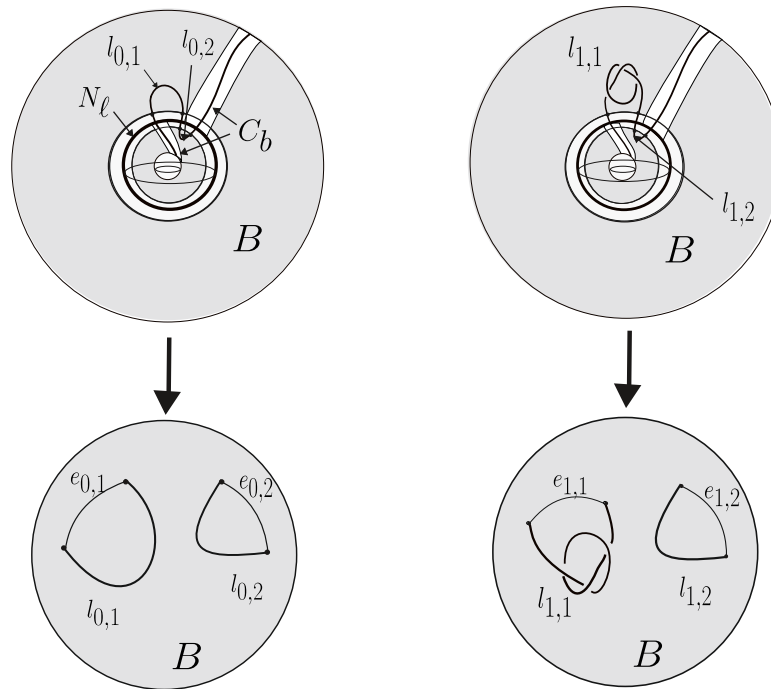


Рис. 3. Шар $B = \Sigma \setminus (\text{int } N_\ell \cup \text{int } C_b)$ и дуги $l_{i,j}, e_{i,j} \subset B$ для $i \in \{0, 1\}, j \in \{1, 2\}$

Список литературы

- [1] В.З. Гринес, Е.Я. Гуревич, Е.В. Жужома, О.В. Починка, *Классификация систем Морса–Смейла и топологическая структура несущих многообразий*, УМН **74** (1), 41–116 (2019).
DOI: <https://doi.org/10.4213/rm9855>
- [2] V.Z. Grines, T.V. Medvedev, O.V. Pochinka, *Dynamical systems on 2- and 3-manifolds*, Springer, Switzerland, 2016.
DOI: <https://doi.org/10.1007/978-3-319-44847-3>
- [3] В.З. Гринес, Е.Я. Гуревич, *Проблемы топологической классификации многомерных систем Морса–Смейла*, Ижевский ин-т комп. иссл., Ижевск, 2022.
URL: <https://publications.hse.ru/books/804652432>
- [4] Е.В. Жужома, В.С. Медведев, *Непрерывные потоки Морса–Смейла с тремя состояниями равновесия*, Матем. сб. **207** (5), 69–92 (2016).
DOI: <https://doi.org/10.4213/sm8565>
- [5] В.З. Гринес, Е.Я. Гуревич, *О классификации потоков Морса–Смейла на проективно-подобных многообразиях*, Изв. РАН. Сер. матем. **86** (5), 43–72 (2022).
DOI: <https://doi.org/10.4213/im9197>
- [6] В.З. Гринес, Е.Я. Гуревич, *Комбинаторный инвариант градиентно-подобных потоков на связной сумме $\mathbb{S}^{n-1} \times \mathbb{S}^1$* , Матем. сб. **214** (5), 97–127 (2023).
DOI: <https://doi.org/10.4213/sm9761>

-
- [7] Е.Я. Гуревич, И.А. Сараев, *Диаграмма Кирби полярных потоков на четырехмерных многообразиях*, Матем. заметки **116** (1), 44–66 (2024).
DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm14151>
- [8] E.Ya. Gurevich, I.A. Saraev, *Topological classification of polar flows on four-dimensional manifolds*, Regul. Chaotic Dyn. **30** (2), 254–278 (2025).
DOI: <https://doi.org/10.1134/S1560354725020054>
- [9] M.H. Freedman, *The topology of four-dimensional manifolds*, J. Differential Geometry **17** (3), 357–453 (1982).
DOI: <https://doi.org/10.4310/jdg/1214437136>
- [10] В.В. Прасолов, *Элементы теории гомологий*, МЦНМО, М., 2006.
- [11] S. Smale, *On gradient dynamical systems*, Ann. Math. **74** (1), 199–206 (1961).
URL: <https://doi.org/10.2307/1970311>
- [12] K.R. Meyer, *Energy functions for Morse Smale systems*, Amer. J. Math. **90**, 1031–1040 (1968).
DOI: <https://doi.org/10.2307/2373287>
- [13] D. Rolfsen, *Knots and links*, Mathematics Lecture Series **7**, Publish or Perish, Inc., Houston, TX, 1990.
- [14] В.В. Прасолов, А.Б. Сосинский, *Узлы, зацепления, косы и трехмерные многообразия*, МЦНМО, М., 1997.
- [15] C. McA. Gordon, J. Luecke, *Knots are determined by their complements*, J. AMS **2** (2), 371–415 (1989).
DOI: <https://doi.org/10.2307/1990979>
- [16] M. Morse, *The existence of polar non-degenerate functions on differentiable manifolds*, Ann. Math. **71** (2), 352–383 (1960).
DOI: <https://doi.org/10.2307/1970086>
- [17] К. Рурк, Б. Сандерсон, *Введение в кусочно-линейную топологию*, Мир, М., 1974.
- [18] F. Laudenbach, V. Poénaru, *A note on 4-dimensional handlebodies*, Bull. Soc. Math. France **100**, 337–344 (1972).
DOI: <https://doi.org/10.24033/bsmf.1741>
- [19] R. Kirby, *A calculus for framed links in S^3* , Invent. Math. **45** (1), 35–56 (1978).
DOI: <https://doi.org/10.1007/BF01406222>
- [20] E.C. de Sá, *A link calculus for 4-manifolds*, in: *Topology of low-dimensional manifolds*, Springer, Berlin, Heidelberg, 16–30 (1979).
DOI: <https://doi.org/10.1007/BFb0063185>
- [21] С. Смейл, *Дифференцируемые динамические системы*, УМН **25** (1), 113–185 (1970).
URL: <https://www.mathnet.ru/rus/rm5295>

- [22] R.S. Palais, Ch.-L. Terng, *Critical point theory and submanifold geometry*, Springer-Verlag, Berlin, 1988.
DOI: <https://doi.org/10.1007/BFb0087442>
- [23] H. Seifert, W. Threlfall, *Seifert and Threlfall: a textbook of topology*, Academic Press, New York-London, 1980.
- [24] Ж. Палис, В. Ди Мелу, *Геометрическая теория динамических систем*, Мир, М., 1986.
- [25] R.H. Bing, *Locally tame sets are tame*, Ann. Math. **59** (1), 145–158 (1954).
DOI: <https://doi.org/10.2307/1969836>

Гуревич Елена Яковлевна

Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики»,
ул. Большая Печерская, д. 25/12, г. Нижний Новгород, 603155, Россия,
e-mail: egurevich@hse.ru

On topological classification of flows with heteroclinic curves on four-dimensional manifolds

E.Ya. Gurevich

Abstract. We obtain a topological classification of smooth structurally stable flows on four-dimensional closed manifolds whose wandering set contains isolated trajectories connecting saddle equilibria (heteroclinic curves). For dimensional reasons, heteroclinic curves of such flows belong to the intersection of invariant manifolds of saddles of neighboring Morse indices. We assume that the non-wandering set of the flows under consideration consists of exactly one source, one sink, and an arbitrary number of saddles, the dimension of whose unstable manifolds is equal to 1 and 2. We obtain necessary and sufficient conditions for the topological equivalence of such flows and present an algorithm for realizing a representative in each class of topological equivalence. In particular, we show that in the considered class of flows on the sphere S^4 there exists exactly one class of topological equivalence of flows with a single heteroclinic curve and a countable set of topologically nonequivalent flows with three heteroclinic curves. The latter result contrasts with the three-dimensional situation, where for a similar class of flows there are only finitely many equivalence classes for each number of heteroclinic curves.

Keywords: heteroclinic curve, gradient-like flow, polar flow, topological classification, Kirby diagram.

DOI: 10.26907/2949-3919.2025.3.20-42

References

- [1] V.Z. Grines, E.Ya. Gurevich, E.V. Zhuzhoma, O.V. Pochinka, *Classification of Morse–Smale systems and topological structure of the underlying manifolds*, Russian Math. Surveys **74** (1), 37–110 (2019).
DOI: <https://doi.org/10.1070/RM9855>
- [2] V.Z. Grines, T.V. Medvedev, O.V. Pochinka, *Dynamical systems on 2- and 3-manifolds*, Springer, Switzerland, 2016.
DOI: <https://doi.org/10.1007/978-3-319-44847-3>

Acknowledgements. Research is partially support by RSF (grant No 23-71-30008).

Received: 24 June 2025. Accepted: 09 September 2025. Published: 16 October 2025.

-
- [3] V.Z. Grines, E.Ya. Gurevich, *Problems of topological classification of multidimensional Morse–Smale systems*, Izhevsk Institute of Computer Research, Izhevsk, 2022 [in Russian]. URL: <https://publications.hse.ru/books/804652432>
- [4] E.V. Zhuzhoma, V.S. Medvedev, *Continuous Morse–Smale flows with three equilibrium positions*, Sb. Math. **207** (5), 702–723 (2016). DOI: <https://doi.org/10.1070/SM8565>
- [5] V.Z. Grines, E.Ya. Gurevich, *On classification of Morse–Smale flows on projective-like manifolds*, Izv. Math. **86** (5), 876–902 (2022). DOI: <https://doi.org/10.4213/im9197e>
- [6] V.Z. Grines, E.Ya. Gurevich, *A combinatorial invariant of gradient-like flows on a connected sum of $S^{n-1} \times S^1$* , Sb. Math. **214** (5) (2023), 703–731 (2023). DOI: <https://doi.org/10.4213/sm9761e>
- [7] E.Ya. Gurevich, I.A. Saraev, *Kirby diagram of polar flows on four-dimensional manifolds*, Math. Notes **116** (1), 40–57 (2024). DOI: <https://doi.org/10.1134/S0001434624070046>
- [8] E.Ya. Gurevich, I.A. Saraev, *Topological classification of polar flows on four-dimensional manifolds*, Regul. Chaotic Dyn. **30** (2), 254–278 (2025). DOI: <https://doi.org/10.1134/S1560354725020054>
- [9] M.H. Freedman, *The topology of four-dimensional manifolds*, J. Differential Geometry **17** (3), 357–453 (1982). DOI: <https://doi.org/10.4310/jdg/1214437136>
- [10] V.V. Prasolov, *Elements of homology theory*, AMS, Providence, RI, 2007.
- [11] S. Smale, *On gradient dynamical systems*, Ann. Math. **74** (1), 199–206 (1961). URL: <https://doi.org/10.2307/1970311>
- [12] K.R. Meyer, *Energy functions for Morse Smale systems*, Amer. J. Math. **90**, 1031–1040 (1968). DOI: <https://doi.org/10.2307/2373287>
- [13] D. Rolfsen, *Knots and links*, Mathematics Lecture Series **7**, Publish or Perish, Inc., Houston, TX, 1990.
- [14] V.V. Prasolov, A.B. Sosinsky, *Knots, links, braids and 3-manifolds. An introduction to the new invariants in low-dimensional topology*, AMS, Providence, RI, 1997. DOI: <https://doi.org/10.1090/mmono/154>
- [15] C.McA. Gordon, J. Luecke, *Knots are determined by their complements*, J. AMS **2** (2), 371–415 (1989). DOI: <https://doi.org/10.2307/1990979>

-
- [16] M. Morse, *The existence of polar non-degenerate functions on differentiable manifolds*, Ann. Math. **71** (2), 352–383 (1960).
DOI: <https://doi.org/10.2307/1970086>
- [17] K. Rourke, B. Sanderson, *Introduction to piecewise linear topology*, Springer-Verlag, New York, 1972.
DOI: <https://doi.org/10.1007/978-3-642-81735-9>
- [18] F. Laudenbach, V. Poénaru, *A note on 4-dimensional handlebodies*, Bull. Soc. Math. France **100**, 337–344 (1972).
DOI: <https://doi.org/10.24033/bsmf.1741>
- [19] R. Kirby, *A calculus for framed links in S^3* , Invent. Math. **45** (1), 35–56 (1978).
DOI: <https://doi.org/10.1007/BF01406222>
- [20] E.C. de Sá, *A link calculus for 4-manifolds*, in: *Topology of low-dimensional manifolds*, Springer, Berlin, Heidelberg, 16–30 (1979).
DOI: <https://doi.org/10.1007/BFb0063185>
- [21] S. Smale, *Differentiable dynamical systems*, Bull. AMS **73** (6), 747–817 (1967).
DOI: <https://doi.org/10.1090/S0002-9904-1967-11798-1>
- [22] R.S. Palais, Ch.-L. Terng, *Critical point theory and submanifold geometry*, Springer-Verlag, Berlin, 1988.
DOI: <https://doi.org/10.1007/BFb0087442>
- [23] H. Seifert, W. Threlfall, *Seifert and Threlfall: a textbook of topology*, Academic Press, New York-London, 1980.
- [24] J. Palis Jr., W. De Melo, *Geometric theory of dynamical systems. An introduction*, Springer-Verlag, New York-Berlin, 1982
DOI: <https://doi.org/10.1007/978-1-4612-5703-5>
- [25] R.H. Bing, *Locally tame sets are tame*, Ann. Math. **59** (1), 145–158 (1954).
DOI: <https://doi.org/10.2307/1969836>

Elena Yakovlevna Gurevich

HSE University,

25/12 Bolshaya Pecherskaya str., Nizhny Novgorod 603155, Russia,

e-mail: egurevich@hse.ru

Аттракторы групп гомеоморфизмов на многообразиях с краем

Р.А. Дедаев, Н.И. Жукова, Р.Р. Имаев

Аннотация. Пусть G – группа гомеоморфизмов n -мерного топологического многообразия M с непустым краем ∂M . Целью работы является изучение влияния непустого края многообразия M на структуру глобальных аттракторов группы гомеоморфизмов G . Наш основной результат состоит в доказательстве того, что любой глобальный аттрактор A группы гомеоморфизмов G на многообразии M с непустым краем ∂M либо принадлежит краю и может быть как собственным подмножеством края, так и совпадать с краем, либо равен объединению края с глобальным аттрактором группы, индуцированной на внутренности многообразия M . Показано, что этим свойством неглобальные аттракторы, вообще говоря, не обладают. Построены примеры, иллюстрирующие содержание работы, включая пример с двумя различными глобальными аттракторами.

Ключевые слова: аттрактор, глобальный аттрактор, минимальное множество, группа гомеоморфизмов, многообразие с краем.

DOI: 10.26907/2949-3919.2025.3.43-57

Введение

В настоящее время известно мало работ, посвященных проблеме взаимосвязи между топологией и геометрией динамических систем и других объектов на многообразии M и на его крае. Прежде всего, это работы Г.Каца [1], Х.Фрерихса [2, 3]. В [1] Г.Кац отвечает на вопрос, как восстановить векторное поле Рибба, соответствующее контактной структуре, на всем многообразии по известным данным на крае этого многообразия. В [2], в частности, разрабатывается общий принцип деформации семейства римановых метрик на гладких многообразиях с некомпактным краем, сохраняющей некоторые оценки скалярной кривизны, и подчеркивается, что эти исследования представляют интерес в дифференциальной геометрии. В [3] исследуется количественная устойчивость функционала типа Ямабе на компактных многообразиях с краем, введенного Х.Эскобаром [4]. В результате, проблема сведена к аналогичному вопросу для эффективного функционала на крае многообразия.

Благодарности. Исследование осуществлено в рамках Программы фундаментальных исследований НИУ ВШЭ.

Нам не известны работы, в которых исследовалось бы влияние края многообразия M на структуру аттракторов групп гомеоморфизмов этого многообразия. Основная цель данной работы – заполнить этот пробел.

Компактность аттракторов и многообразий M нами не предполагается. Ограничения на размерность и связность многообразия M не накладываются.

Пусть G – группа гомеоморфизмов многообразия M . Множество $G.x = \{g.x \mid g \in G\}$ называется *орбитой* точки $x \in M$. Для любого $B \subset M$ будем использовать обозначение $G.B = \{G.x \mid x \in B\}$. Подмножество $B \subset M$ называется *инвариантным*, если $G.B = B$.

Напомним, что непустое замкнутое инвариантное подмножество \mathcal{M} топологического многообразия M называется *минимальным множеством* группы гомеоморфизмов G , действующей на M , если орбита любой точки x из \mathcal{M} всюду плотна в \mathcal{M} .

Мы используем следующее общее определение аттрактора из работы [5].

Определение 1. Пусть G – группа гомеоморфизмов, действующая на топологическом многообразии M . Собственное замкнутое инвариантное подмножество $\mathcal{A} \subset M$ называется *аттрактором* группы гомеоморфизмов G , если существует инвариантная окрестность \mathcal{U} подмножества \mathcal{A} , обладающая следующим свойством: для любой точки $x \in \mathcal{U} \setminus \mathcal{A}$ замыкание $\overline{G.x}$ орбиты $G.x$ содержит \mathcal{A} , т. е.

$$\mathcal{A} \subset \overline{G.x} \quad \forall x \in \mathcal{U} \setminus \mathcal{A}.$$

Окрестность \mathcal{U} называется *бассейном* аттрактора \mathcal{A} и обозначается через $\text{Attr}(\mathcal{A})$. Если $\text{Attr}(\mathcal{A}) = M$, то \mathcal{A} называется *глобальным* аттрактором.

Прежде всего, мы решаем проблему единственности глобального аттрактора для группы гомеоморфизмов топологического многообразия и доказываем следующее утверждение:

Теорема 2. Пусть G – группа гомеоморфизмов топологического многообразия M с краем ∂M , возможно, пустым. Предположим, что существуют два глобальных аттрактора \mathcal{A}_1 и \mathcal{A}_2 группы G . Тогда:

- 1) выполняется по крайней мере одно из включений: $\mathcal{A}_1 \subset \mathcal{A}_2$ или $\mathcal{A}_2 \subset \mathcal{A}_1$;
- 2) существование двух различных глобальных аттрактора \mathcal{A}_1 и \mathcal{A}_2 группы гомеоморфизмов G , удовлетворяющих включению $\mathcal{A}_1 \subset \mathcal{A}_2$, реализуется;
- 3) если \mathcal{A}_1 и \mathcal{A}_2 являются минимальными множествами, то $\mathcal{A}_1 = \mathcal{A}_2$, причем других минимальных множеств не существует.

Замечание 3. П. 3 теоремы 2 также известен для полугрупп из [6, теорема 2.1].

В примере 8 нами построена группа гомеоморфизмов G на многообразии M , имеющая два различных глобальных аттрактора \mathcal{A}_1 и \mathcal{A}_2 , удовлетворяющих включению $\mathcal{A}_1 \subset \mathcal{A}_2$.

Следующая теорема является основным результатом данной работы.

Теорема 4. Пусть G – группа гомеоморфизмов топологического многообразия M с непустым краем ∂M . Если существует глобальный аттрактор \mathcal{A} группы G , то:

- либо $\mathcal{A} \subset \partial M$ и является глобальным аттрактором группы $G|_{\partial M}$, индуцированной на крае ∂M многообразия M ;
- либо \mathcal{A} совпадает с краем $\mathcal{A} = \partial M$;
- либо $\mathcal{A} = \partial M \sqcup \mathcal{A}^0$, где \mathcal{A}^0 – глобальный аттрактор группы $G^0 := G|_{M^0}$, индуцированной на внутренности M^0 многообразия M ,

причем все три случая реализуются.

Следствие 5. Пусть G – группа гомеоморфизмов топологического многообразия M с непустым краем ∂M . Не существует глобальных аттракторов группы гомеоморфизмов G вида $\mathcal{A} = \mathcal{A}^1 \sqcup \mathcal{A}^0$, где \mathcal{A}^1 и \mathcal{A}^0 – глобальные аттракторы групп $G|_{\partial M}$ и G^0 , индуцированных на топологических многообразиях ∂M и M^0 соответственно.

Как подчеркивал Д.В. Аносов [7], минимальные множества являются основными объектами изучения в топологической динамике. Следующая теорема уточняет структуру аттракторов, являющихся минимальными множествами.

Теорема 6. Пусть G – группа гомеоморфизмов топологического многообразия M с непустым краем ∂M . Если существует глобальный аттрактор \mathcal{A} группы G , являющийся минимальным множеством, то он принадлежит краю и либо является собственным подмножеством края, либо совпадает с краем, причем обе возможности реализуются.

ПРЕДПОЛОЖЕНИЯ. Все окрестности предполагаются открытыми.

ОБОЗНАЧЕНИЯ. Через \overline{A} обозначается топологическое замыкание множества A . Символ \cong обозначает изоморфизм объектов в соответствующей категории. Через \mathbb{N} обозначается множество натуральных чисел, а через \mathbb{Z} – множество целых чисел.

1. Доказательство теоремы 2

Пусть G – группа гомеоморфизмов топологического многообразия M с краем ∂M , возможно пустым.

Докажем утверждение 1). Предположим противное: пусть существуют два глобальных аттрактора \mathcal{A}_1 и \mathcal{A}_2 группы G такие, что $\mathcal{A}_1 \not\subset \mathcal{A}_2$ и $\mathcal{A}_2 \not\subset \mathcal{A}_1$. Отсюда вытекает существование точки $x \in \mathcal{A}_1 \setminus \mathcal{A}_2$. Согласно определению глобального аттрактора \mathcal{A}_2 , это влечет включение $\mathcal{A}_2 \subset \overline{G.x}$. Так как $x \in \mathcal{A}_1$, то, в силу инвариантности и замкнутости подмножества \mathcal{A}_1 , выполняется включение $\overline{G.x} \subset \mathcal{A}_1$. Следовательно, получаем $\mathcal{A}_2 \subset \mathcal{A}_1$, что противоречит предположению. Таким образом, утверждение 1) доказано.

Утверждение 2) следует из примера 8.

Покажем теперь справедливость утверждения 3). Пусть минимальные множества \mathcal{A}_1 и \mathcal{A}_2 – глобальные аттракторы группы гомеоморфизмов G многообразия M . Согласно доказанному утверждению 1), выполняется по крайней мере одно из включений: $\mathcal{A}_1 \subset \mathcal{A}_2$ или $\mathcal{A}_2 \subset \mathcal{A}_1$.

Предположим, что $\mathcal{A}_1 \subset \mathcal{A}_2$. Так как $\mathcal{A}_1 \neq \emptyset$, то существует точка $x \in \mathcal{A}_1 \subset \mathcal{A}_2$. Поскольку \mathcal{A}_1 – минимальное множество, то $\overline{G.x} = \mathcal{A}_1$. Так как \mathcal{A}_2 – минимальное множество, то $\overline{G.x} = \mathcal{A}_2$. Следовательно, $\mathcal{A}_1 = \mathcal{A}_2$.

В случае $\mathcal{A}_2 \subset \mathcal{A}_1$ доказательство аналогично.

Таким образом, глобальные аттракторы \mathcal{A}_1 и \mathcal{A}_2 совпадают.

Покажем, что не существует минимальных множеств \mathcal{M} , отличных от \mathcal{A}_1 . Возможны только два следующих случая:

Случай 1: существует минимальное множество \mathcal{M} , для которого $\mathcal{M} \cap \mathcal{A}_1 \neq \emptyset$. В этом случае существует точка $x \in \mathcal{M}$, принадлежащая $\mathcal{M} \cap \mathcal{A}_1$. Поскольку \mathcal{M} и \mathcal{A}_1 – минимальные множества, мы получаем, что $\mathcal{M} = \overline{G.x}$ и $\mathcal{A}_1 = \overline{G.x}$. Следовательно, $\mathcal{A}_1 = \mathcal{M}$.

Случай 2: существует минимальное множество \mathcal{M} , для которого $\mathcal{M} \cap \mathcal{A}_1 = \emptyset$. В этом случае найдется точка $x \in \mathcal{M} \setminus \mathcal{A}_1$. Поскольку \mathcal{M} – минимальное множество, то $\mathcal{M} = \overline{G.x}$. Из определения глобального аттрактора \mathcal{A}_1 вытекает включение

$$\mathcal{A}_1 \subset \overline{G.x} = \mathcal{M},$$

что противоречит предположению *случая 2*. Следовательно, реализуется только *случай 1*, и $\mathcal{A}_1 = \mathcal{M}$.

Таким образом, для группы гомеоморфизмов G многообразия M не существует минимальных множеств, отличных от \mathcal{A}_1 . Утверждение 3) доказано. \square

2. Доказательство теорем 4 и 6

2.1. ЛЕММА О НЕПУСТОМ ПЕРЕСЕЧЕНИИ ГЛОБАЛЬНОГО АТТРАКТОРА С КРАЕМ

Лемма 7. Пусть G – группа гомеоморфизмов топологического многообразия M с непустым краем ∂M . Если существует глобальный аттрактор \mathcal{A} группы G , то $\mathcal{A} \cap \partial M \neq \emptyset$.

Доказательство. Предположим противное: пусть существует группа гомеоморфизмов G топологического многообразия M с краем $\partial M \neq \emptyset$, имеющая глобальный аттрактор \mathcal{A} такой, что $\mathcal{A} \cap \partial M = \emptyset$. Пусть b – произвольная точка края. Согласно определению глобального аттрактора, выполняется включение:

$$\mathcal{A} \subset \overline{G.b} \implies a \in \overline{G.b} \quad \forall a \in \mathcal{A}.$$

Так как внутренность M^0 многообразия M – открытая окрестность произвольной точки $a \in \mathcal{A}$, причем $a \in \overline{G.b}$, то необходимо, чтобы $G.b \cap M^0 \neq \emptyset$. В силу инвариантности края

и внутренности многообразия при гомеоморфизмах,

$$G.\partial M = \partial M \quad \text{и} \quad G.M^0 = M^0.$$

Следовательно, $G.b \subset M^0$ и $G.b \subset \partial M$, т.е. $G.b \subset \partial M \cap M^0 \neq \emptyset$, что противоречит равенству $\partial M \cap M^0 = \emptyset$.

Таким образом, наше предположение неверно, и $\mathcal{A} \cap \partial M \neq \emptyset$. \square

2.2. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 4. Пусть G – группа гомеоморфизмов топологического многообразия M с непустым краем ∂M и \mathcal{A} – глобальный аттрактор группы G .

Возможны два следующих случая:

Случай 1: $\mathcal{A} \subset \partial M$. Тогда утверждение теоремы 4 выполнено.

Случай 2: \mathcal{A} не является подмножеством края ∂M . Тогда $\mathcal{A} \subset M^0 \sqcup \partial M$, причем $\mathcal{A} \cap M^0 \neq \emptyset$. Согласно лемме 7, $\mathcal{A} \cap \partial M \neq \emptyset$. Если существует точка $b \in \partial M \setminus \mathcal{A}$, то, по определению глобального аттрактора, выполняется включение $\mathcal{A} \subset \overline{G.b}$, поэтому в силу инвариантности края

$$\mathcal{A} \subset \overline{G.b} \subset \partial M,$$

что невозможно в рассматриваемом случае. Таким образом, выполняется включение

$$\partial M \subset \mathcal{A}.$$

Введем обозначение $\mathcal{A}^0 := \mathcal{A} \cap M^0$. Заметим, что $\mathcal{A}^0 \neq M^0$, ведь в противном случае $\mathcal{A} = M$, что исключается определением аттрактора. Кроме того, \mathcal{A}^0 – непустое замкнутое инвариантное подмножество в M^0 . Пусть x – произвольная точка из $M^0 \setminus \mathcal{A}^0$, тогда $x \in M \setminus \mathcal{A}$. Согласно определению глобального аттрактора \mathcal{A} , выполняется включение $\mathcal{A} \subset \overline{G.x}$, следовательно,

$$\mathcal{A}^0 \subset \overline{G.x} \quad \forall x \in M^0 \setminus \mathcal{A}^0.$$

Это означает, что \mathcal{A}^0 – глобальный аттрактор группы $G^0 = G|_{M^0}$, индуцированной на внутренности M^0 многообразия M .

Примеры показывают, что глобальный аттрактор \mathcal{A} группы гомеоморфизмов G на многообразии с непустым краем может быть как собственным подмножеством края и глобальным аттрактором группы $G|_{\partial M}$, индуцированной на крае ∂M многообразия M (пример 10), так и совпадать с краем $\mathcal{A} = \partial M$ (примеры 9 и 11). Пример 12 демонстрирует случай, когда глобальный аттрактор $\mathcal{A} = \partial M \sqcup \mathcal{A}^0$, где \mathcal{A}^0 – глобальный аттрактор группы G^0 , индуцированной на внутренности M^0 многообразия M .

Таким образом, теорема 4 доказана. \square

2.3. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 6. Пусть G – группа гомеоморфизмов топологического многообразия M с непустым краем ∂M . Предположим, что существует глобальный аттрактор \mathcal{A} группы G , являющийся минимальным множеством. Тогда по лемме 7 существует точка $b \in \mathcal{A} \cap \partial M$. В силу инвариантности края относительно группы G получаем, что $G.b \subset \partial M$. Замкнутость края влечет включение $\overline{G.b} \subset \partial M$.

Так как \mathcal{A} – минимальное множество, то $\mathcal{A} = \overline{G.b} \subset \partial M$.

В примере 8 представлена группа диффеоморфизмов G многообразия $M = \mathbb{R}_+^2$ с непустым краем ∂M , имеющая одноточечный глобальный аттрактор \mathcal{A} , являющийся минимальным множеством. При этом \mathcal{A} – глобальный аттрактор группы $G|_{\partial M}$, индуцированной на крае ∂M многообразия M .

В примере 9 указана группа гомеоморфизмов G многообразия M с непустым краем ∂M , имеющая глобальный аттрактор $\mathcal{A} = \partial M$, являющийся минимальным множеством.

Это завершает доказательство теоремы 6. \square

3. Примеры

Пример 8. Определим группу диффеоморфизмов полуплоскости $M = \mathbb{R}_+^2$, имеющую два различных глобальных аттрактора.

Произвольная точка $z \in \mathbb{R}_+^2$ представима в виде $z = (x, y)$, где $x \in \mathbb{R}^1$, $y \in \mathbb{R}_+^1$. Пусть $G = \langle g, s, h, k \rangle$, где $g.z := 5 \cdot z$, $s.z := \sqrt{3} \cdot z$, $h.z := (2 \cdot x, y)$ и $k.z := (-x, y)$ для любой точки $z = (x, y) \in \mathbb{R}_+^2$. Заметим, что группа $G \cong \mathbb{Z}^3 \times \mathbb{Z}_2$ изоморфна абелевой подгруппе общей линейной группы $GL(2, \mathbb{R})$.

Пусть $O = (0, 0)$ – начало координат в \mathbb{R}_+^2 . Подчеркнем, что O – неподвижная точка группы G . Так как замыкание $\overline{G.z}$ орбиты $G.z$ любой точки $z \in \mathbb{R}_+^2 \setminus \{O\}$ содержит $\{O\}$, то $\mathcal{A}_1 = \{O\}$ – глобальный аттрактор группы G , являющийся минимальным множеством.

Введем обозначение $Oy_+ := Oy \cap \mathbb{R}_+^2$, т.е. $Oy_+ = \{z = (0, y) \mid y \geq 0\}$. Применяя [8, лемма 4], нетрудно показать, что для любой точки $v \in Ox \setminus O$ замыкание $\overline{G.v}$ орбиты $G.v$ совпадает с осью координат Ox , а замыкание $\overline{G.w}$ орбиты $G.w$ любой точки $w \in Oy_+ \setminus O$ совпадает с Oy_+ . Используя инвариантность относительно G замыкания любой орбиты, мы получаем, что $Ox \cup Oy_+$ – собственное замкнутое инвариантное подмножество в \mathbb{R}_+^2 . Замыкание орбиты одной из точек $v \in \mathbb{R}_+^2 \setminus (Ox \cup Oy_+)$ изображено на рис. 1. Учитывая структуру этого замыкания, имеем включение:

$$Ox \cup Oy_+ \subset \overline{G.v} \quad \forall v \in \mathbb{R}_+^2 \setminus (Ox \cup Oy_+).$$

Следовательно, подмножество $\mathcal{A}_2 = Ox \cup Oy_+$ – глобальный аттрактор группы гомеоморфизмов G . Заметим, что \mathcal{A}_2 не является минимальным множеством. Можно представить \mathcal{A}_2 в виде:

$$\mathcal{A}_2 = \partial M \sqcup \mathcal{A}^0,$$

где $\mathcal{A}^0 = \{(x, y) \in \mathbb{R}_+^2 \mid x = 0, y > 0\}$ – глобальный аттрактор группы $G|_{M^0}$, индуцирован-

ной на внутренности $M^0 = \{(x, y) \in \mathbb{R}_+^2 \mid y > 0\}$ многообразия $M = \mathbb{R}_+^2$, что согласуется с теоремой 4.

Таким образом, группа гомеоморфизмов G многообразия M имеет два различных глобальных аттрактора \mathcal{A}_1 и \mathcal{A}_2 , удовлетворяющих включению: $\mathcal{A}_1 \subset \mathcal{A}_2$.

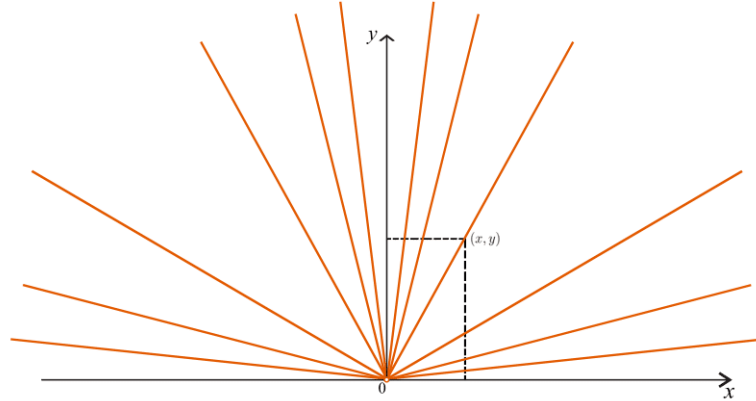


Рис. 1. Замыкание орбиты точки $(x, y) \in \mathbb{R}_+^2 \setminus (Ox \cup Oy_+)$

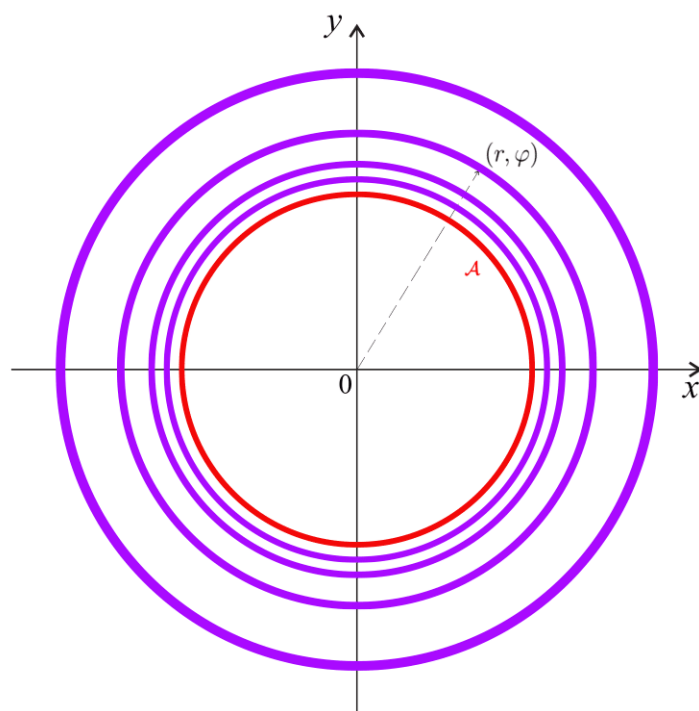
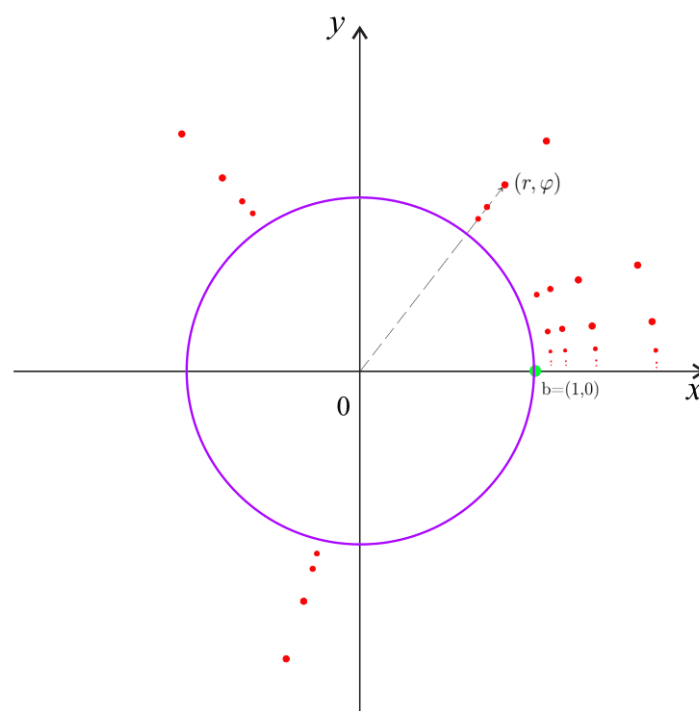
Пример 9. Рассмотрим топологическое многообразие $M = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \geq 1\}$ с краем $\partial M = \mathbb{S}^1 = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 = 1\}$. Перейдем к полярной системе координат (ρ, φ) . Пусть $g(\rho, \varphi) := (\frac{\rho-1}{2} + 1, \varphi)$, $f(\rho, \varphi) := (\rho, \varphi + 1)$. Подчеркнем, что f и g – гомеоморфизмы. Обозначим через $G = \langle f, g \rangle$ группу гомеоморфизмов с образующими f и g .

Заметим, что $g^n(\rho, \varphi) = (\frac{\rho-1}{2^n} + 1, \varphi)$, где $n \in \mathbb{N}$, причем $g^n(\rho, \varphi) \rightarrow (1, \varphi)$ при $n \rightarrow +\infty$ для любой точки $(\rho, \varphi) \in M$. Так как орбита $G.(1, \varphi)$ всюду плотна в $\partial M = \mathbb{S}^1$, то замыкание орбиты любой точки (ρ, φ) содержит край многообразия ∂M (см. рис. 2). Таким образом, $\mathcal{A} = \partial M$ – глобальный аттрактор, являющийся минимальным множеством, группы G .

Пример 10. Пусть $M = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \geq 1\}$ – 2-мерное топологическое многообразие с краем $\partial M = \mathbb{S}^1$, $G = \langle f, g \rangle$ – группа гомеоморфизмов с образующими f и g , заданных формулами: $g(\rho, \varphi) := (\frac{\rho-1}{2} + 1, \varphi)$, $f(\rho, \varphi) := (\rho, \frac{\varphi}{2})$, где (ρ, φ) – полярные координаты.

Аналогично примеру 9, мы получаем, что $g^n(\rho, \varphi) \rightarrow (1, \varphi)$ при $n \rightarrow +\infty$ для любой точки $(\rho, \varphi) \in M$. Заметим, что $f^n(\rho, \varphi) = (\rho, \frac{\varphi}{2^n})$. Тогда $f^n(\rho, \varphi) \rightarrow (\rho, 0)$ при $n \rightarrow +\infty$ для любой точки $(\rho, \varphi) \in M$. Подчеркнем, что $b = (1, 0)$ – неподвижная точка группы G , причем замыкание любой орбиты содержит b .

Таким образом, $\mathcal{A} = \{b\}$ – глобальный аттрактор группы гомеоморфизмов G , являющийся минимальным множеством. Кроме того, \mathcal{A} – глобальный аттрактор группы $G|_{\partial M}$, индуцированной на крае ∂M многообразия M (см. рис. 3).

Рис. 2. \mathcal{A} – глобальный аттрактор группы G Рис. 3. $\mathcal{A} = \{b\}$ – глобальный аттрактор группы G

Пример 11. Рассмотрим слоение Роба (M, F) в кольце $M \cong [0, 1] \times S^1$ (см., например, [9, пример В, с. 124]). Край ∂M многообразия M состоит из двух компонент связности $\partial M = \mathbb{S}_{(1)}^1 \sqcup \mathbb{S}_{(2)}^1$. Поскольку существует непрерывная ориентация слоев этого слоения, то можно определить непрерывное действие группы $G = \mathbb{R}^1$ на M , т.е. непрерывный поток, траектории которого образуют 1-мерное слоение (M, F) (см. рис. 4).

Группа G многообразия M имеет глобальный аттрактор $\mathcal{A} = \partial M$, не являющийся минимальным множеством.

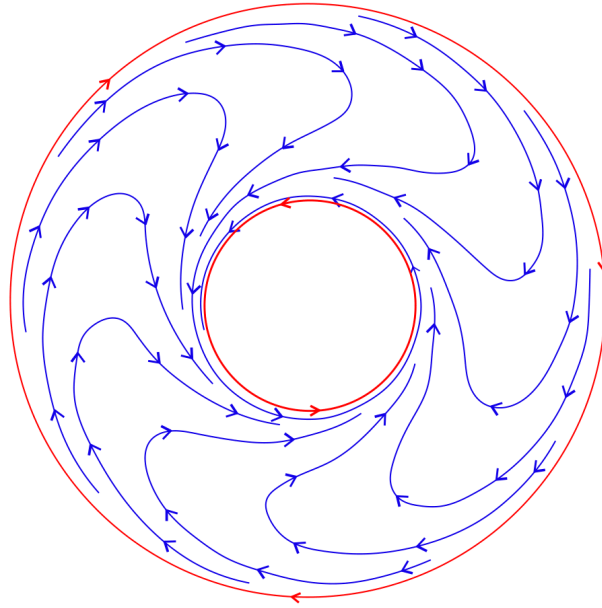


Рис. 4. Слоение Роба в кольце

Пример 12. Рассмотрим систему обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \dot{x} = -2x - y + \frac{1}{2}x(x^2 + y^2), \\ \dot{y} = -2y + x + \frac{1}{2}y(x^2 + y^2), \end{cases} \quad (1)$$

где $x = x(t)$, $y = y(t)$, $t \in \mathbb{R}$. Пусть $S = \{f^t \mid t \in \mathbb{R}\}$ – 1-параметрическая группа преобразований, где f^t переводит точку (x, y) фазового пространства в решение $(x(t), y(t))$ системы (1) с начальным условием $(x(0), y(0)) = (x, y)$.

Перейдем к координатам (ρ, φ) , где $\rho = x^2 + y^2$ – квадрат полярного радиуса, а φ – полярный угол. В координатах (ρ, φ) система (1) принимает вид:

$$\begin{cases} \dot{\rho} = \rho(\rho - 4), \\ \dot{\varphi} = 1. \end{cases} \quad (2)$$

Рассмотрим три случая:

- 1) При начальных условиях (ρ_0, φ_0) , где $0 < \rho_0 < 4$, производная $\dot{\rho}$ меньше нуля, следовательно, $\sqrt{\rho(t)}$ – расстояние от точки $(\rho(t), \varphi(t))$ до начала координат стремится к нулю при $t \rightarrow +\infty$.
- 2) При начальных условиях (ρ_0, φ_0) , где $\rho_0 > 4$, производная $\dot{\rho}$ больше нуля, следовательно, $\sqrt{\rho(t)} \rightarrow +\infty$ при $t \rightarrow +\infty$.
- 3) При начальных условиях (ρ_0, φ_0) , где $\rho_0 = 4$, производная $\dot{\rho}$ равна нулю, поэтому траектория совпадает с окружностью $\mathbb{S}_4^1 = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 = 4\}$.

Заметим, что $\mathcal{A}_1 = \{(0, 0)\}$ и $\mathcal{A}_2 = \mathbb{S}_4^1$ – собственные замкнутые инвариантные подмножества. Замыкание $\overline{S.v}$ орбиты $S.v$ любой точки $v \in \mathcal{U}_1 = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 < 4\}$ содержит подмножество \mathcal{A}_1 , а замыкание $\overline{S.u}$ орбиты $S.u$ любой точки $u \in \mathcal{U}_2 = \mathbb{R}^2 \setminus (0, 0)$ содержит \mathcal{A}_2 . Таким образом, группа S имеет два неглобальных аттрактора \mathcal{A}_1 и \mathcal{A}_2 , которые являются минимальными множествами, с бассейнами \mathcal{U}_1 и \mathcal{U}_2 соответственно (см. рис. 5). Заметим, что теорема 4, вообще говоря, не верна для неглобальных аттракторов.

Рассмотрим топологическое многообразие $M = \overline{\mathbb{D}^2} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 4\}$ с краем $\partial M = \mathbb{S}_4^1$. Так как M инвариантно относительно группы S , то на M индуцируется 1-параметрическая группа диффеоморфизмов $G = S|_M = \{f^t|_M \mid t \in \mathbb{R}\}$. Группа G на многообразии M имеет глобальный аттрактор $\mathcal{A} = \partial M \sqcup \mathcal{A}^0 = \partial M \sqcup \{(0, 0)\}$. Также отметим, что $\mathcal{A}^0 = \{(0, 0)\}$ – глобальный аттрактор группы G^0 , индуцированной на внутренности M^0 многообразия M (см. рис. 5).

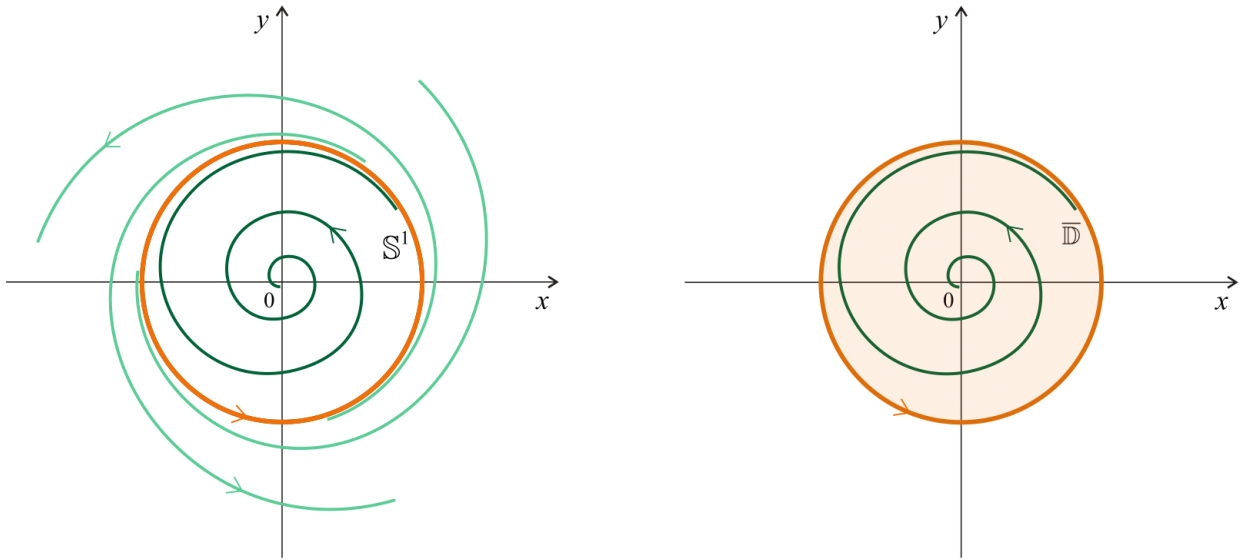


Рис. 5. Фазовые портреты динамической системы и индуцированной динамической системы соответственно

Пример 13. Рассмотрим функции $f : (-1, 1) \rightarrow \mathbb{R}$, где $f(x) := e^{\frac{x^2}{1-x^2}}$, и $g : (1, 3) \rightarrow \mathbb{R}$, где $g(x) := e^{\frac{(x-2)^2}{1-(x-2)^2}}$.

Рассмотрим $M = [-1, 3] \times \mathbb{R}$ – 2-мерное топологическое многообразие с краем. Пусть $F = \{L_\alpha, L_\beta, L^*, L^{**}, L^{***} \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$, где

$$\begin{aligned} L_\alpha &= \{(x, f(x) + \alpha) \in M \mid -1 < x < 1\}, \\ L_\beta &= \{(x, g(x) + \beta) \in M \mid 1 < x < 3\}, \\ L^* &= \{(x, y) \in M \mid x = -1, y \in \mathbb{R}\}, \\ L^{**} &= \{(x, y) \in M \mid x = 1, y \in \mathbb{R}\}, \\ L^{***} &= \{(x, y) \in M \mid x = 3, y \in \mathbb{R}\}. \end{aligned}$$

Тогда (M, F) – слоение коразмерности 1.

Заметим, что можно определить действие группы $G = \mathbb{R}^1$ на M , т.е. непрерывный поток, траектории которого образуют 1-мерное слоение (M, F) .

Введем отношение эквивалентности на M : $(x_1, y_1) \sim (x_2, y_2) \iff x_1 = x_2$, и существует $n \in \mathbb{Z}$ такое, что $y_1 = y_2 + n$. Возьмем $[-1, 3] \times [0, 1]$ за фундаментальную область. Склеивая $A = \{(x, y) \mid y = 0, x \in [-1, 3]\}$ с $B = \{(x, y) \mid y = 1, x \in [-1, 3]\}$ по гомеоморфизму $\varphi : A \rightarrow B$, где $\varphi((x, y)) = (x, 1) \forall (x, y) \in A$, получим фактор-многообразие Q , гомеоморфное цилиндру $[-1, 3] \times \mathbb{S}^1$. Далее без ограничений общности будем считать, что $Q = [-1, 3] \times \mathbb{S}^1$. Слои слоения (M, F) посредством фактор-отображения задают 1-мерное слоение (Q, F^*) . Поскольку существует непрерывная ориентация слоев слоения (Q, F^*) , то на Q можно определить непрерывный поток H , траектории которого образуют это слоение (см. рис. 6).

Заметим, что $\mathcal{A}_1 = \{-1\} \times \mathbb{S}^1$, $\mathcal{A}_2 = \{1\} \times \mathbb{S}^1$, $\mathcal{A}_3 = \{3\} \times \mathbb{S}^1$ – собственные инвариантные замкнутые подмножества Q . Замыкание $\overline{H.v}$ орбиты $H.v$ каждой точки $v \in \mathcal{U}_1 = [-1, 1) \times \mathbb{S}^1$ содержит \mathcal{A}_1 . Аналогично, замыкания $\overline{H.u}$ и $\overline{H.m}$ орбит $H.u$ и $H.m$ произвольных точек $u \in \mathcal{U}_2 = (-1, 3) \times \mathbb{S}^1$ и $m \in \mathcal{U}_3 = (1, 3] \times \mathbb{S}^1$ содержат \mathcal{A}_2 и \mathcal{A}_3 соответственно. Таким образом, подмножества $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \mathcal{A}_3$ – неглобальные аттракторы группы H . Это еще один пример, показывающий, что утверждение теоремы 4 для неглобальных аттракторов не выполняется.

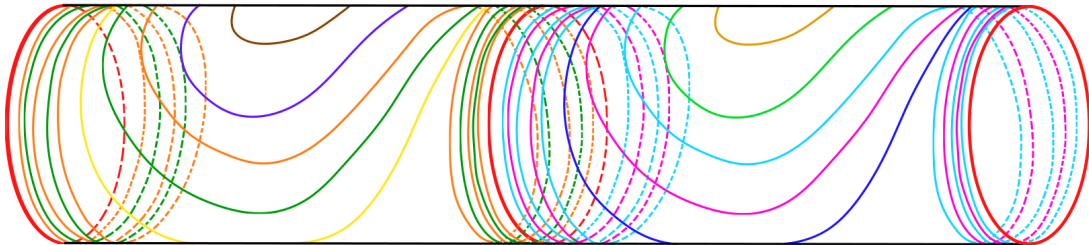


Рис. 6. 1-мерное слоение многообразия Q

Список литературы

- [1] G. Katz, *Recovering contact forms from boundary data*, arXiv:2309.14604v5 (2025).
URL: <https://arxiv.org/abs/2309.14604>
- [2] H. Frerichs, *Scalar curvature deformations with non-compact boundaries*, arXiv:2403.03941v2 (2025).
URL: <https://arxiv.org/abs/2403.03941>
- [3] B. Bourquez, R. Caju, H. Van Den Bosch, *Quantitative stability for Yamabe minimizers on manifolds with boundary*, arXiv:2503.09801v1 (2025).
URL: <https://arxiv.org/abs/2503.09801>
- [4] J.F. Escobar, *Conformal deformation of a Riemannian metric to a scalar flat metric with constant mean curvature on the boundary*, Ann. Math. **136** (1), 1–50 (1992).
URL: <https://doi.org/10.2307/2946545>
- [5] R.A. Dedaev, N.I. Zhukova, *Existence of attractors of foliations, pseudogroups and groups of transformations*, Russ. J. Nonlinear Dyn. **21** (1), 85–102 (2025).
URL: <https://doi.org/10.20537/nd250205>
- [6] А.В. Багаев, Аттракторы полугрупп, порожденных конечным семейством сжимающих преобразований полного метрического пространства, Журнал СВМО **26** (4), 359–375 (2024).
URL: <https://www.mathnet.ru/rus/svmo893>
- [7] Д.В. Аносов, *Минимальное множество*, Математическая энциклопедия, Т. 3, Сов. энц., М., 690–691 (1982).
- [8] Н.И. Жукова, *Минимальные множества картановых слоений*, Тр. МИАН **256**, 115–147 (2007).
URL: <https://www.mathnet.ru/rus/tm459>
- [9] I. Tamura, *Topology of foliations: an introduction*, Transl. Math. Monogr. **97**, AMS, Providence, R.I., 1992.

Роман Александрович Дедаев

Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики»,
ул. Большая Печерская, д. 25/12, г. Нижний Новгород, 603155, Россия,
e-mail: dedaevroman@gmail.com

Нина Ивановна Жукова

Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики»,
ул. Большая Печерская, д. 25/12, г. Нижний Новгород, 603155, Россия,
e-mail: nina.i.zhukova@yandex.ru

Роман Русланович Имаев

Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики»,
ул. Большая Печерская, д. 25/12, г. Нижний Новгород, 603155, Россия,
e-mail: rrimaev@edu.hse.ru

Attractors of homeomorphism groups on manifolds with boundary

R.A. Dedaev, N.I. Zhukova, R.R. Imaev

Abstract. Let G be the group of homeomorphisms of an n -dimensional topological manifold M with a nonempty boundary ∂M . The aim of this work is to study the effect of the nonempty boundary of the manifold M on the structure of global attractors of the homeomorphism group G . Our main result is the proof that any global attractor \mathcal{A} of the homeomorphism group G on a manifold M with a nonempty boundary ∂M either belongs to the boundary and it can be either a proper subset of the boundary or coincide with the boundary, or it is equal to the union of the boundary with the global attractor of the group induced on the interior of the manifold M . It is shown that, generally speaking, non-global attractors do not possess this property. Various examples are constructed, including an example with two different global attractors.

Keywords: attractor, global attractor, minimal set, group of homeomorphisms, manifold with boundary.

DOI: 10.26907/2949-3919.2025.3.43-57

References

- [1] G. Katz, *Recovering contact forms from boundary data*, arXiv:2309.14604v5 (2025).
URL: <https://arxiv.org/abs/2309.14604>
- [2] H. Frerichs, *Scalar curvature deformations with non-compact boundaries*, arXiv:2403.03941v2 (2025).
URL: <https://arxiv.org/abs/2403.03941>
- [3] B. Bourquez, R. Caju, H. Van Den Bosch, *Quantitative stability for Yamabe minimizers on manifolds with boundary*, arXiv:2503.09801v1 (2025).
URL: <https://arxiv.org/abs/2503.09801>
- [4] J.F. Escobar, *Conformal deformation of a Riemannian metric to a scalar flat metric with constant mean curvature on the boundary*, Ann. Math. **136** (1), 1–50 (1992).
URL: <https://doi.org/10.2307/2946545>

Acknowledgements. This work is an output of a research project implemented as part of the Basic Research Program at the National Research University Higher School of Economics (HSE University).

- [5] R.A. Dedaev, N.I. Zhukova, *Existence of attractors of foliations, pseudogroups and groups of transformations*, Russ. J. Nonlinear Dyn. **21** (1), 85–102 (2025).
URL: <https://doi.org/10.20537/nd250205>
- [6] A.V. Bagaev, *Attractors of semigroups generated by a finite family of contraction transformations of a complete metric space*, Zh. SVMO **26** (4), 359–375 (2024) [in Russian].
URL: <https://www.mathnet.ru/rus/svmo893>
- [7] D.V. Anosov, *Minimal set*, Mathematical Encyclopedia, Vol. 3, Soviet Encore, Moscow, 690–691 (1982) [in Russian].
- [8] N.I. Zhukova, *Minimal sets of Cartan foliations*, Proc. Steklov Inst. Math. **256** (1), 105–135 (2007) [in Russian].
DOI: <https://doi.org/10.1134/S0081543807010075>
- [9] I. Tamura, *Topology of foliations: an introduction*, Transl. Math. Monogr. **97**, AMS, Providence, R.I., 1992.

Roman Aleksandrovich Dedaev

HSE University,

25/12 Bolshaya Pecherskaya str., Nizhny Novgorod 603155, Russia,

e-mail: dedaevroman@gmail.com

Nina Ivanovna Zhukova

HSE University,

25/12 Bolshaya Pecherskaya str., Nizhny Novgorod 603155, Russia,

e-mail: nina.i.zhukova@yandex.ru

Roman Ruslanovich Imaev

HSE University,

25/12 Bolshaya Pecherskaya str., Nizhny Novgorod 603155, Russia,

e-mail: rriimaev@edu.hse.ru

Об асимптотическом поведении траекторий косых произведений с замкнутым множеством периодических точек

Л.С. Ефремова, М.А. Шалагин

Аннотация. Статья продолжает исследования асимптотического поведения траекторий наиболее простых косых произведений на многомерных клетках, проводимые авторами. Здесь дано описание структуры неблуждающего множества непрерывных косых произведений, имеющих замкнутое множество периодических точек и таких, что множество (наименьших) периодов периодических точек, не ограничено. Построен пример дифференцируемого косого произведения с замкнутым множеством периодических точек, заданного на n -мерной клетке ($n \geq 3$) и имеющего одномерное ω -предельное множество.

Ключевые слова: косое произведение, неблуждающее множество, Ω -взрыв, ω -предельное множество.

DOI: 10.26907/2949-3919.2025.3.58-86

Введение

Различные аспекты асимптотического поведения траекторий непрерывных косых произведений с замкнутым множеством периодических точек, заданных на компактном прямоугольнике плоскости, изучались в статьях [1–7]. Некоторые многомерные обобщения результатов указанных работ получены в [8–10].

Данная статья является непосредственным продолжением работ [4, 9]. Так, в [9], во-первых, дано описание неблуждающего множества непрерывных косых произведений на многомерных клетках в предположении ограниченности множества (наименьших) периодов периодических точек (отметим, что при этом множество периодических точек каждого рассматриваемого отображения замкнуто) и, во-вторых, доказаны теоремы о структуре ω -предельных множеств такого рода отображений, обобщающие результаты [4]. В частности, в [9] получены необходимые условия существования одномерных ω -предельных множеств непрерывных косых произведений на многомерных клетках, однако примеры таких отображений на клетках размерности ≥ 3 в [9] отсутствуют.

Следует сказать, что существуют такие непрерывные (но не гладкие!) косые произведения на многомерных клетках с замкнутым множеством периодических точек, множество

Благодарности. Работа поддержана грантом Российского научного фонда (проект № 24-21-00242).

(наименьших) периодов периодических точек которых, не ограничено (см. далее раздел 1). В этой работе мы даем описание неблуждающего множества именно таких отображений. Здесь же мы строим пример дифференцируемого косого произведения с одномерным ω -предельным множеством на клетке размерности ≥ 3 , обобщающий пример косого произведения из [4] с аналогичными свойствами, заданного на замкнутом прямоугольнике плоскости.

Статья имеет следующую структуру. В разделе 1 приводятся определения и результаты, используемые в рассмотрении данной статьи. В разделе 2 мы описываем неблуждающее множество непрерывных косых произведений на клетках произвольной конечной размерности, имеющих замкнутое множество периодических точек при дополнительном предположении о неограниченности множества (наименьших) периодов периодических точек. В разделе 3 строится пример дифференцируемого косого произведения на клетке размерности ≥ 3 , имеющего одномерное ω -предельное множество, заполненное неподвижными точками отображения.

1. Предварительные сведения

1.1. Отображение $F : I^n \rightarrow I^n$ (здесь $I^n = \prod_{j=1}^n I_j$ – n -мерная клетка ($n \geq 2$), I_j – невырожденный отрезок прямой при любом $1 \leq j \leq n$), представимое в виде

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n) = (f_1(x_1), f_2(x_1, x_2), \dots, f_n(x_1, x_2, \dots, x_n)) \quad (1)$$

называется *косым произведением отображений интервала*, а n -мерная клетка I^n называется *фазовым пространством* F .

Положим $\widehat{x}_j = (x_1, x_2, \dots, x_j)$ для $n \geq 3$, $2 \leq j \leq n-1$, и будем использовать обозначения

$$f_{2,x_1}(x_2) = f_2(x_1, x_2), \quad f_{j+1,\widehat{x}_j}(x_{j+1}) = f_{j+1}(x_1, x_2, \dots, x_{j+1}) \quad (2)$$

и

$$\widehat{f}_2 = (f_1, f_{2,x_1}), \quad \widehat{f}_{j+1} = (f_1, f_{2,x_1}, \dots, f_{j+1,\widehat{x}_j}), \quad \text{где } \widehat{f}_n \equiv F. \quad (3)$$

В силу формул (1)–(3) отображение \widehat{f}_j при каждом $2 \leq j \leq n-1$ также представляет собой косое произведение отображений интервала, фазовым пространством которого является j -мерная клетка $\widehat{I}^j = \prod_{k=1}^j I_k$.

Следуя [8–10], условимся считать *факторотображением* косого произведения (1) отображение \widehat{f}_{n-1} , а отображение $f_{n,\widehat{x}_{n-1}} : I_n \rightarrow I_n$ при каждом $\widehat{x}_{n-1} \in \widehat{I}^{n-1}$ будем рассматривать как *отображение в слое* над точкой \widehat{x}_{n-1} .

Из соотношений (1)–(3) следует, что для любого $k \geq 2$ выполнено:

$$F^k(\widehat{x}_{n-1}, x_n) = (f_1^k(x_1), f_{2,x_1,k}(x_2), \dots, f_{n,\widehat{x}_{n-1},k}(x_n))$$

так, что для каждого $2 \leq j \leq n$ справедливо равенство:

$$f_{j, \hat{x}_{j-1}, k}(x_j) = f_{j, \hat{f}_{j-1}^{k-1}(\hat{x}_{j-1})} \circ \dots \circ f_{j, \hat{x}_{j-1}}(x_j), \text{ где } \hat{x}_1 \equiv x_1, \hat{f}_1 \equiv f_1.$$

Обозначим через $SP^0(I^n)$ ($SP^1(I^n)$), $n \geq 2$, пространство всех непрерывных (всех C^1 -гладких) косых произведений (1), наделенное C^0 -нормой (C^1 -нормой), индуцированной стандартной C^0 -нормой (C^1 -нормой) пространства $C^0(I^n)$ ($C^1(I^n)$) всех непрерывных (всех C^1 -гладких) отображений n -мерной клетки I^n в себя.

Сформулируем определения основных динамически предельных множеств, рассматриваемых в данной работе: неблуждающего множества и ω -предельных множеств траекторий (см. [11, гл. 0, § 0.2]).

Определение 1. Множество $\Omega(F) \subset I^n$ называется *неблуждающим множеством* отображения $F \in SP^0(I^n)$, если оно состоит из всех тех точек фазового пространства I^n , которые обладают следующим свойством:

для произвольной окрестности $U^n(x)$ в I^n каждой такой точки x (называемой *неблуждающей точкой* F) существует натуральное число k , для которого верно неравенство

$$U^n(x) \cap F^k(U^n(x)) \neq \emptyset.$$

Определение 2. Точка $x'(\hat{x}'_{n-1}, x'_n) \in I^n$ называется *ω -предельной точкой траектории* точки $x(\hat{x}_{n-1}, x_n) \in I^n$ относительно отображения $F \in SP^0(I^n)$, если существует строго возрастающая последовательность натуральных чисел $k_1 < k_2 < \dots < k_m < \dots$ такая, что

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} F^{k_m}(\hat{x}_{n-1}, x_n) = (\hat{x}'_{n-1}, x'_n).$$

Множество всех ω -предельных точек траектории точки x относительно F называется *ω -предельным* и обозначается $\omega_F(x)$.

Символом $\text{pr}_{n-1} : I^n \rightarrow \hat{I}^{n-1}$ обозначим естественную проекцию n -мерной клетки I^n на $(n-1)$ -мерную клетку \hat{I}^{n-1} .

Сформулируем свойство проекции для неблуждающего множества (см. [8]) и ω -предельных множеств траекторий точек непрерывного косого произведения отображений интервала (см. [9]) на многомерной клетке.

Лемма 3. Пусть $F \in SP^0(I^n)$. Тогда справедливо равенство:

$$\Omega(\hat{f}_{n-1}) = \text{pr}_{n-1}(\Omega(F)).$$

Лемма 4. Пусть $F \in SP^0(I^n)$. Тогда при любом $x(\hat{x}_{n-1}, x_n) \in I^n$ верно равенство:

$$\omega_{\hat{f}_{n-1}}(\hat{x}_{n-1}) = \text{pr}_{n-1}(\omega_F(x)).$$

Под срезом множества (\cdot) слоем над точкой $\hat{x}_{n-1} \in \hat{I}^{n-1}$ мы понимаем множество $(\cdot)(\hat{x}_{n-1})$, удовлетворяющее равенству

$$(\cdot)(\hat{x}_{n-1}) = \{x_n : (\hat{x}_{n-1}, x_n) \in (\cdot)\}.$$

Обозначим $\text{Per}(\cdot)$ множество периодических точек отображения.

Следующее утверждение содержит полную информацию о взаимосвязи множества периодических точек отображения $F \in SP^0(I^n)$ с множествами периодических точек его факторотображения и отображений в слоях над периодическими точками факторотображения (см. [8]).

Лемма 5. Пусть $F \in SP^0(I^n)$ ($n \geq 2$). Тогда

$$\text{Per}(\hat{f}_{n-1}) = \text{pr}_{n-1}(\text{Per}(F)),$$

и для каждой точки $\hat{x}_{n-1} \in \text{Per}(\hat{f}_{n-1})$ с (наименьшим) периодом $m(\hat{x}_{n-1})$ справедливо:

$$\text{Per}(f_{n, \hat{x}_{n-1}, m(\hat{x}_{n-1})}) = (\text{Per}(F))(\hat{x}_{n-1}).$$

При этом (наименьший) период $m(x)$ любой точки $x(\hat{x}_{n-1}, x_n) \in \text{Per}(F)$ удовлетворяет равенству

$$m(x) = m(\hat{x}_{n-1}) \cdot m(x_n).$$

Здесь $m(x_n)$ – наименьший период точки $x_n \in \text{Per}(f_{n, \hat{x}_{n-1}, m(\hat{x}_{n-1})})$.

Обобщенная теорема А.Н. Шарковского для непрерывных косых произведений на клетках произвольной конечной размерности является следствием классической теоремы А.Н. Шарковского для непрерывных отображений отрезка [12, 13] и леммы 5 (первое доказательство обобщенной теоремы А.Н. Шарковского см. в [14]).

Теорема 6 (обобщенная теорема А.Н. Шарковского). Пусть косое произведение $F \in SP^0(I^n)$, $n \geq 2$, имеет периодическую орбиту периода $t > 1$. Тогда F имеет также и периодическую орбиту каждого периода l , предшествующего t ($l \prec t$) в порядке А.Н. Шарковского:

$$\begin{aligned} 1 \prec 2 \prec 2^2 \prec 2^3 \prec \dots \prec 2^\infty \prec \dots \prec 2^2 \cdot 9 \prec 2^2 \cdot 7 \prec 2^2 \cdot 5 \prec 2^2 \cdot 3 \prec \dots \\ \prec 2 \cdot 9 \prec 2 \cdot 7 \prec 2 \cdot 5 \prec 2 \cdot 3 \prec \dots \prec 9 \prec 7 \prec 5 \prec 3. \end{aligned}$$

Из теоремы 6 вытекает, что если множество $\tau(F)$ (наименьших) периодов периодических точек отображения $F \in SP^0(I^n)$ ограничено, то это множество представимо в виде

$$\tau(F) = \{1, 2, \dots, 2^\nu\} \text{ при некотором } 0 \leq \nu < +\infty. \quad (4)$$

В том случае, если множество $\tau(F)$ отображения $F \in SP^0(I^n)$ удовлетворяет равен-

ству (4), говорим (также, как и в случае непрерывных отображений отрезка), что отображение F имеет тип $\prec 2^\infty$.

В [9] доказан критерий замкнутости множества периодических точек C^1 -гладких косых произведений на многомерных клетках.

Теорема 7. Для отображения $F \in SP^1(I^n)$ ($n \geq 2$) следующие утверждения эквивалентны:

- 1) множество $\text{Per}(F)$ замкнуто;
- 2) $\Omega(F) = \text{Per}(F)$;
- 3) F имеет тип $\prec 2^\infty$.

Более того, если $F \in SP^0(I^n)$, и F обладает свойством 3), то F обладает и каждым из свойств 1) и 2).

Таким образом, множество C^1 -гладких косых произведений отображений интервала с замкнутым множеством периодических точек, заданных на клетках произвольной конечной размерности, совпадает с множеством такого рода отображений, каждое из которых имеет ограниченный набор (наименьших) периодов периодических точек (в [9] такие отображения названы простейшими). В то же время из результатов статей [12, 13] и леммы 5 следует, что существуют непрерывные (но не гладкие) косые произведения с замкнутым множеством периодических точек, заданные на клетках произвольной конечной размерности, множество наименьших периодов периодических точек которых представимо в виде

$$\tau(F) = \{1, 2, 2^2, 2^3, \dots, 2^i, \dots\}. \quad (5)$$

В том случае, если множество $\tau(F)$ отображения $F \in SP^0(I^n)$ представимо в виде (5), будем говорить, что рассматриваемое косое произведение имеет тип 2^∞ .

1.2. Здесь мы приведем определения и результаты, необходимые для описания неблуждающего множества косых произведений типа 2^∞ с замкнутым множеством периодических точек.

Эффективным инструментом описания неблуждающего множества произвольных отображений из $SP^0(I^n)$ служат динамические многозначные функции такие, как Ω -функция, вспомогательные, подходящие и аппроксимирующие функции (см. [7, 9, 15–17]), связанные со специальными отображениями, с помощью которых можно представить любые итерации косых произведений. Так, при любом $k \geq 1$ выполнено:

$$F^k = F_{k,1} \circ F_k, \quad (6)$$

где $F_k : I^n \rightarrow I^n$, и

$$F_k(\hat{x}_{n-1}, x_n) = (\text{id}_{\hat{I}_{n-1}}(\hat{x}_{n-1}), f_{n, \hat{x}_{n-1}, k}(x_n)); \quad (7)$$

а $F_{k,1} : I^n \rightarrow I^n$, и

$$F_{k,1}(\hat{x}_{n-1}, x_n) = (\hat{f}_{n-1}^k(\hat{x}_{n-1}), \text{id}_{I_n}(x_n)). \quad (8)$$

Здесь $\text{id}_{(\cdot)}$ – тождественное отображение множества.

В данной статье нам потребуются только лишь вспомогательные многозначные функции (определяемые с помощью отображений (7)) и расширенные вспомогательные функции, введенные в [9].

Определение 8. Вспомогательными многозначными функциями для неблуждающего множества отображения $F \in SP^0(I^n)$ с замкнутым множеством периодических точек при любом $k \geq 1$ мы называем многозначные функции $\Omega_k^F : \Omega(\hat{f}_{n-1}) \rightarrow 2^{I_n}$ такие, что

$$\Omega_k^F(\hat{x}_{n-1}) = \Omega(f_{n, \hat{x}_{n-1}, k})$$

для любого $\hat{x}_{n-1} \in \Omega(\hat{f}_{n-1})$. Здесь 2^{I_n} означает топологическое пространство всех замкнутых подмножеств отрезка I_n с экспоненциальной топологией [18, гл. 1, § 17, I].

Расширенными вспомогательными функциями $\Omega_{k, ex}^F$, определенными в некоторой окрестности $\hat{U}_{n-1}(\Omega(\hat{f}_{n-1}))$ неблуждающего множества факторотображения, мы называем многозначные функции, при любом $k \geq 1$ задаваемые равенством:

$$\Omega_{k, ex}^F(\hat{x}_{n-1}) = \Omega(f_{n, \hat{x}_{n-1}, k}) \text{ при любом } \hat{x}_{n-1} \in \hat{U}_{n-1}(\Omega(\hat{f}_{n-1})).$$

Напомним, что точка $\hat{x}_{n-1}^* \in \hat{U}_{n-1}(\Omega(\hat{f}_{n-1}))$ называется *точкой полунепрерывности сверху* расширенной вспомогательной функции $\Omega_{k, ex}^F$, если для произвольной окрестности $U_n^\varepsilon(\Omega(f_{n, \hat{x}_{n-1}^*, k}))$ множества $\Omega(f_{n, \hat{x}_{n-1}^*, k})$ в I_n найдется δ -окрестность $\hat{U}_{n-1}^\delta(\hat{x}_{n-1}^*)$ точки \hat{x}_{n-1}^* в \hat{I}^{n-1} такая, что для любого $\hat{x}_{n-1} \in \hat{U}_{n-1}^\delta(\hat{x}_{n-1}^*)$ верно включение

$$\Omega_{k, ex}^F(\hat{x}_{n-1}) \subset U_n^\varepsilon(\Omega(f_{n, \hat{x}_{n-1}^*, k})) \quad (\text{см. [18, гл. 1, § 17, I]}). \quad (9)$$

Следуя [9], сформулируем определение C^0 - Ω -взрыва отображения в слое над неподвижной точкой фактора в семействе отображений в слоях.

Определение 9. Пусть $F \in SP^0(I^n)$. Говорим, что отображение в слое f_{n, \hat{x}_{n-1}^*} над \hat{f}_{n-1} -неподвижной точкой \hat{x}_{n-1}^* допускает C^0 - Ω -взрыв в семействе отображений в слоях, если существует последовательность расширенных на некоторое множество $\hat{U}_{n-1}(\Omega(\hat{f}_{n-1}))$ вспомогательных функций $\{\Omega_{k_m, ex}^F\}_{m \geq 1}$ такая, что \hat{x}_{n-1}^* не является точкой полунепрерывности сверху каждой функции $\Omega_{k_m, ex}^F$ ($m \geq 1$).

Нам потребуется также информация об основных динамических свойствах непрерывных отображений отрезка с замкнутым множеством периодических точек.

Предложение 10. Для непрерывного отображения $f : J \rightarrow J$ отрезка J в себя следующие утверждения эквивалентны:

- 1) множество $\text{Per}(f)$ замкнуто;
- 2) справедливы равенства $\Omega(f) = \text{Per}(f)$ [19];

- 3) ω -предельное множество $\omega_f(x)$ траектории любой точки $x \in J$ есть периодическая орбита [13, 19].

Более того, если f удовлетворяет условию 1), то верны следующие свойства:

- 4) $\tau(f) = \{1, 2, \dots, 2^\nu\}$, где $0 \leq \nu \leq +\infty$ [19];
 5) f не допускает C^0 - Ω -взрыв¹ [20];
 6) для каждой точки $x^0 \in \text{Per}(f)$ найдется окрестность $U(x^0)$ такая, что

$$U(x^0) \cap f^k(U(x^0)) \neq \emptyset$$

тогда и только тогда, когда k кратно (наименьшему) периоду $m(x^0)$ точки x^0 [21].

Подобно тому, как это сделано в [9], в данной статье для доказательства теоремы о структуре неблуждающего множества косоуго произведения типа 2^∞ будем использовать слабо неблуждающие точки непрерывного отображения отрезка в себя. Понятие слабой неблуждаемости точек непрерывных отображений на метрических компактах введено в [22] (см. также [23, гл. 1, § 3]).

Определение 11. Точка $x^* \in J$ называется *слабо неблуждающей* для непрерывного отображения $f : J \rightarrow J$, если для любой окрестности $U(x^*)$ точки x^* в J и любой ε -окрестности $B_\varepsilon^0(f)$ отображения f в пространстве непрерывных отображений отрезка J в себя найдутся отображение $\varphi \in B_\varepsilon^0(f)$ и натуральное число k такие, что

$$U(x^*) \cap \varphi^k(U(x^*)) \neq \emptyset.$$

Множество слабо неблуждающих точек отображения f обозначим $\Omega_w(f)$.

Следующее утверждение демонстрирует важность свойства слабой неблуждаемости в изучении C^0 - Ω -взрыва (см., например, [23, гл. 1, § 3]).

Предложение 12. Непрерывное отображение $f : J \rightarrow J$ допускает C^0 - Ω -взрыв в том и только том случае, если

$$\Omega(f) \neq \Omega_w(f).$$

1.3. Завершая раздел 1, приведем сведения, необходимые для построения примера дифференцируемого косоуго произведения на многомерной клетке, которое имеет только лишь неподвижные точки (не содержит периодических точек с периодами ≥ 2) и обладает одномерным ω -предельным множеством, состоящим из неподвижных точек отображения.

¹Говорим, что непрерывное отображение $f : J \rightarrow J$ допускает C^0 - Ω -взрыв, если существует $\delta > 0$ такое, что в любой окрестности $B_\varepsilon^0(f)$ отображения f в пространстве $C^0(J)$ всех непрерывных отображений отрезка J в себя, наделенном C^0 -нормой равномерной сходимости, найдется отображение $\varphi : J \rightarrow J$, для которого выполнено: $\Omega(\varphi) \not\subseteq U^\delta(\Omega(f))$. Здесь $U^\delta(\Omega(f))$ есть δ -окрестность в J неблуждающего множества $\Omega(f)$ отображения f (см., например, [7]).

Хотя идейно построение такого примера тесно связано с аналогичным примером косого произведения с двумерным фазовым пространством (сравните с [4]), исследование дифференциальных свойств отображения на многомерной клетке (размерности $n \geq 3$) существенно сложнее, чем в двумерном случае (который практически требует исследования дифференциальных свойств функции одного переменного).

Сначала сформулируем утверждение, содержащее информацию о допустимой структуре ω -предельных множеств простейших косых произведений (доказательство см. в [9]). Пусть $M = 2^\nu$ – наибольший элемент множества $\tau(F)$ отображения $F \in SP^0(I^n)$ типа $\prec 2^\infty$.

Теорема 13. Пусть $F \in SP^0(I^n)$, $n \geq 2$, – косое произведение типа $\prec 2^\infty$. Тогда для любой точки $x(\hat{x}_{n-1}, x_n) \in I^n$ существуют неподвижная точка x_1^0 отображения f_1^M и отрезки $I'_2 \subseteq I_2, \dots, I'_n \subseteq I_n$ (возможно, вырожденные) такие, что ω -предельное множество $\omega_{FM}(x)$ траектории точки x относительно F^M имеет вид

$$\omega_{FM}(x) = \{x_1^0\} \times \prod_{j=2}^n I'_j, \quad (10)$$

причем $\omega_{FM}(x)$ состоит из неподвижных точек F^M .

В [9] доказано, что свойство траектории иметь ω -предельное множество, представление которого по формуле (10) содержит невырожденные отрезки, связано с расходимостью некоторых специальных рядов, построенных по исследуемой траектории.

Теорема 14. Пусть $F \in SP^0(I^n)$ ($n \geq 2$) является отображением типа $\prec 2^\infty$. Тогда следующие утверждения эквивалентны:

- 1) существует точка $x(\hat{x}_{n-1}, x_n) \in I^n$ такая, что представление ω -предельного множества ее траектории относительно F^M по формуле (10) содержит невырожденный отрезок $I'_{j'}$ ($2 \leq j' \leq n$);
- 2) ряд

$$\sum_{p=1}^{\infty} \varphi_{\hat{x}_{j'-1}, Mp}(x_{j'}) \quad (11)$$

– расходящийся (знакопеременный), где

$$\varphi_{\hat{x}_{j'-1}, Mp}(x_{j'}) = \begin{cases} f_{j', \hat{x}_{j'-1}, M}(x_{j'}), & \text{если } p = 1; \\ f_{j', \hat{x}_{j'-1}, Mp}(x_{j'}) - f_{j', \hat{x}_{j'-1}, M(p-1)}(x_{j'}), & \text{если } p \geq 2. \end{cases}$$

Следующее утверждение представляет собой вариант леммы Адамара для функции многих переменных (см., например, [24, гл. 6, § 2]), приспособленный к рассматриваемому здесь случаю косых произведений на многомерных клетках (см. [9]).

Лемма 15. Пусть $F \in SP^0(I^n)$ – косое произведение типа $\prec 2^\infty$ ($n \geq 2$), и существует точка $x^0(\hat{x}_{n-1}^0, x_n^0) \in \text{Fix}(F^M)$ такая, что срез $(\text{Fix}(F^M))(\hat{x}_{n-1}^0)$ содержит невырожден-

ный отрезок. Пусть I'_n – такой отрезок, а функция $f_{n,\widehat{x}_{n-1}}$ дифференцируема по совокупности переменных x_1, \dots, x_{n-1} на $\{\widehat{x}_{n-1}^0\} \times I'_n$.

Тогда существуют непрерывные на $\{\widehat{x}_{n-1}^0\} \times I'_n$ функции

$$\psi_{n,1}(\widehat{x}_{n-1}, x_n), \dots, \psi_{n,n-1}(\widehat{x}_{n-1}, x_n),$$

определенные на n -мерной клетке $\prod_{i=1}^{n-1} I_i \times I'_n$, такие, что справедливо равенство:

$$f_{n,\widehat{x}_{n-1}}(x_n) = x_n + \sum_{i=1}^{n-1} \psi_{n,i}(\widehat{x}_{n-1}, x_n)(x_i - x_i^0); \quad (12)$$

более того,

$$\psi_{n,i}(\widehat{x}_{n-1}^0, x_n) = \frac{\partial}{\partial x_i} f_{n,\widehat{x}_{n-1}^0}(x_n).$$

Преобразуем ряд (11) с использованием формулы (12) и сформулируем аналитические необходимые условия существования одномерных ω -предельных множеств у косых произведений типа $\prec 2^\infty$ на многомерных клетках (см. [9]).

Обозначим через $W^s(\widehat{x}_{n-1}^0, \widehat{f}_{n-1}^M)$ устойчивое многообразие неподвижной точки \widehat{x}_{n-1}^0 отображения \widehat{f}_{n-1}^M , где

$$W^s(\widehat{x}_{n-1}^0, \widehat{f}_{n-1}^M) = \left\{ \widehat{x}_{n-1} \in \widehat{I}^{n-1} : \lim_{k \rightarrow +\infty} \widehat{f}_{n-1}^{Mk}(\widehat{x}_{n-1}) = \widehat{x}_{n-1}^0 \right\}.$$

Теорема 16. Пусть $F \in SP^0(I^n)$ является отображением типа $\prec 2^\infty$, причем для ω -предельного множества некоторой точки $x'(\widehat{x}'_{n-1}, x'_n) \in I^n$ выполнено:

$$\omega_{FM}(x') = \{\widehat{x}_{n-1}^0\} \times I'_n,$$

где I'_n – невырожденный отрезок. Пусть $f_{n,\widehat{x}_{n-1}}(x_n)$ дифференцируема по совокупности переменных x_1, \dots, x_{n-1} на отрезке $\{\widehat{x}_{n-1}^0\} \times I'_n$. Тогда

$$\widehat{x}'_{n-1} \in W^s(\widehat{x}_{n-1}^0, \widehat{f}_{n-1}^M) \setminus \left\{ \widehat{f}_{n-1}^{-Mk}(\widehat{x}_{n-1}^0) \right\}_{k \geq 1},$$

где $\widehat{f}_{n-1}^{-Mk}(\cdot)$ – полный прообраз порядка Mk точки относительно \widehat{f}_{n-1} , и существует счётное подмножество $\mathbb{N}(I'_n)$ множества натуральных чисел \mathbb{N} , где

$$\mathbb{N}(I'_n) = \left\{ p \in \mathbb{N} : f_{n,\widehat{x}'_{n-1},M_p}(x'_n), f_{n,\widehat{x}'_{n-1},M(p+1)}(x'_n) \in I'_n \right\},$$

такое, что ряд

$$\sum_{p \in \mathbb{N}(I'_n)} \left(\sum_{i=1}^{n-1} \psi_{n,i} \left(\widehat{f}_{n-1}^{Mp}(\widehat{x}'_{n-1}), f_{n, \widehat{x}'_{n-1}, Mp}(x'_n) \right) \left(f_{i, \widehat{x}'_{i-1}, Mp}(x'_i) - x_i^0 \right) \right)$$

расходится. Здесь $f_{1, \widehat{x}'_0, Mp}(x'_1) \equiv f_1^{Mp}(x'_1)$.

2. Неблуждающее множество косых произведений типа 2^∞ , периодические точки которых образуют замкнутое множество

В этой части статьи мы докажем теорему о структуре неблуждающего множества косого произведения типа 2^∞ с замкнутым множеством периодических точек.

Пусть $\text{Per}(\widehat{f}_{n-1}, 2^i)$ ($n \geq 2$, $i \geq 0$) есть множество тех периодических точек факторотображения, (наименьшие) периоды которых делят 2^i , а

$$\Psi_i = F|_{\text{Per}(\widehat{f}_{n-1}, 2^i) \times I_n}.$$

Теорема 17. Пусть $F \in SP^0(I^n)$ ($n \geq 2$) есть отображение типа 2^∞ с замкнутым множеством $\text{Per}(F)$. Тогда

$$\Omega(F) = \lim_{i \rightarrow +\infty} \Omega_{2^i}^{\Psi_i} = \lim_{i \rightarrow +\infty} \Omega_{2^i, ex}^F = \text{Per}(F). \quad (13)$$

Здесь $\text{Lim}(\cdot)$ – топологический предел последовательности множеств; эти множества состоят, во-первых, из графиков в I^n 2^i -х вспомогательных функций $\Omega_{2^i}^{\Psi_i}$ отображений Ψ_i и, во-вторых, графиков расширенных на некоторые окрестности $\widehat{U}_{n-1}^{\varepsilon_i}(\Omega(\widehat{f}_{n-1}))$ неблуждающего множества $\Omega(\widehat{f}_{n-1})$ факторотображения \widehat{f}_{n-1} 2^i -х вспомогательных функций косого произведения F , причем $\lim_{i \rightarrow +\infty} \varepsilon_i = 0$ так, что

$$\lim_{i \rightarrow +\infty} \left(\widehat{U}_{n-1}^{\varepsilon_i}(\Omega(\widehat{f}_{n-1})) \right) = \Omega(\widehat{f}_{n-1}).$$

В силу леммы 5 косое произведение $F \in SP^0(I^n)$ имеет тип 2^∞ тогда и только тогда, когда либо его факторотображение \widehat{f}_{n-1} , либо отображение в слое $f_{n, \widehat{x}_{n-1}, m(\widehat{x}_{n-1})}$ над некоторой точкой $\widehat{x}_{n-1} \in \text{Per}(\widehat{f}_{n-1})$ с (наименьшим) периодом $m(\widehat{x}_{n-1}) \in \{2^i\}_{i \geq 0}$ имеет тип 2^∞ . Поэтому доказательство теоремы 17 мы проведем в два этапа, рассмотрев сначала косые произведения, факторотображение каждого из которых имеет тип $\prec 2^\infty$, а затем – косые произведения, факторотображение каждого из которых имеет тип 2^∞ .

Лемма 18. Пусть $F \in SP^0(I^n)$ есть отображение типа 2^∞ с замкнутым множеством $\text{Per}(F)$, причем факторотображение \widehat{f}_{n-1} имеет тип $\prec 2^\infty$. Тогда справедливы равенства (13).

Доказательство. 1. В силу условий леммы 18 для множества $\tau(\widehat{f}_{n-1})$ верно равенство (4). Поэтому при любом $i \geq \nu$ отображение $\widehat{f}_{n-1}^{2^i}$ имеет только лишь неподвижные точки. В силу определения 8, предложения 10 и теоремы 7 при всех $i \geq \nu$ верно равенство

$$\Omega_{2^i}^F = \Omega_{2^\nu}^F = \Omega_{2^i}^{\Psi_i} = \text{Per}(F). \quad (14)$$

В силу (14) последовательность $\{\Omega_{2^i}^{\Psi_i}\}_{i \geq \nu}$ постоянна, и выполнено

$$\lim_{i \rightarrow +\infty} \Omega_{2^i}^{\Psi_i} = \Omega_{2^\nu}^F = \text{Per}(F^{2^\nu}) = \text{Per}(F). \quad (15)$$

Убедимся в том, что

$$\Omega\left(F|_{\text{Per}(\widehat{f}_{n-1}) \times I_n}\right) = \text{Per}(F). \quad (16)$$

Действительно, в силу условий леммы 18 и теоремы 7 справедливо равенство

$$\Omega(\widehat{f}_{n-1}) = \text{Per}(\widehat{f}_{n-1}) = \text{Fix}(\widehat{f}_{n-1}^{2^\nu}) = \Omega(\widehat{f}_{n-1}^{2^\nu}),$$

где $\text{Fix}(\cdot)$ – множество неподвижных точек отображения. Так как F – отображение типа 2^∞ , а \widehat{f}_{n-1} – отображение типа $\prec 2^\infty$, то найдутся точки $\widehat{x}_{n-1} \in \Omega(\widehat{f}_{n-1})$ такие, что

$$f_{n, \widehat{x}_{n-1}, 2^\nu} \neq \text{id}_{I_n}.$$

Возьмем произвольно точку $x_n \in I_n \setminus \text{Per}(f_{n, \widehat{x}_{n-1}, 2^\nu})$. В силу предложения 10 (утверждения 5), 6)) и предложения 12 получаем

$$x_n \notin \Omega_w(f_{n, \widehat{x}_{n-1}, 2^\nu}).$$

Тогда из определения 11 следует, что существуют окрестность $U_n^0(x_n)$ точки x_n в I_n и ε_0 -окрестность $B_{\varepsilon_0}^0(f_{n, \widehat{x}_{n-1}, 2^\nu})$ отображения в слое $f_{n, \widehat{x}_{n-1}, 2^\nu}$ такие, что для любого отображения $f_{n, \widehat{x}'_{n-1}, 2^\nu} \in B_{\varepsilon_0}^0(f_{n, \widehat{x}_{n-1}, 2^\nu})$, где $\widehat{x}'_{n-1} \in \text{Fix}(\widehat{f}_{n-1}^{2^\nu})$, и любого $k \geq 1$ выполнено

$$U_n^0(x_n) \cap f_{n, \widehat{x}'_{n-1}, 2^\nu}^k(U_n^0(x_n)) = \emptyset.$$

Произвольной итерации косо го произведения $F \in SP^0(I^n)$ порядка $2^\nu k$ ($k \geq 1$) соответствует непрерывное C^0 -представление $\rho_{2^\nu k} : \widehat{I}^{n-1} \rightarrow C^0(I_n)$ (напомним, что $C^0(I_n)$ означает пространство всех непрерывных отображений отрезка I_n в себя, наделенное стандартной C^0 -нормой равномерной сходимости) такое, что

$$\rho_{2^\nu k}(\widehat{x}_{n-1}) = f_{n, \widehat{x}_{n-1}, 2^\nu}^k = f_{n, \widehat{x}_{n-1}, 2^\nu k}$$

для всех $\widehat{x}_{n-1} \in \widehat{I}^{n-1}$ [11, гл. 0, § 0.3].

Используем непрерывность C^0 -представления ρ_{2^ν} и по положительному числу ε_0

укажем положительное число δ_0 так, что при любых $\hat{x}'_{n-1} \in \hat{I}^{n-1}$ и, в частности, при $\hat{x}'_{n-1} \in \Omega(\hat{f}_{n-1})$ (здесь $\Omega(\hat{f}_{n-1}) = \text{Fix}(\hat{f}_{n-1}^{2^\nu})$) таких, что $\hat{x}'_{n-1} \in \hat{U}_{n-1}^{\delta_0}(\hat{x}_{n-1})$, где $\hat{U}_{n-1}^{\delta_0}(\hat{x}_{n-1})$ есть δ_0 -окрестность точки \hat{x}_{n-1} в \hat{I}^{n-1} справедливо

$$f_{n, \hat{x}'_{n-1}, 2^\nu} \in B_{\varepsilon_0}^0(f_{n, \hat{x}_{n-1}, 2^\nu}).$$

Положим

$$U((\hat{x}_{n-1}, x_n)) = \left(\hat{U}_{n-1}^{\delta_0}(\hat{x}_{n-1}) \times U_n(x_n) \right) \cap \left(\text{Fix}(\hat{f}_{n-1}^{2^\nu}) \times I_n \right),$$

т.е. $U((\hat{x}_{n-1}, x_n))$ есть относительная окрестность точки (\hat{x}_{n-1}, x_n) во множестве $\text{Fix}(\hat{f}_{n-1}^{2^\nu}) \times I_n$. Тогда из предыдущих рассуждений следует, что

$$U((\hat{x}_{n-1}, x_n)) \cap F_{|\text{Fix}(\hat{f}_{n-1}^{2^\nu}) \times I_n}^{2^\nu k}(U((\hat{x}_{n-1}, x_n))) = \emptyset.$$

Последнее означает, что произвольная точка

$$(\hat{x}_{n-1}, x_n) \in \text{Fix}(\hat{f}_{n-1}^{2^\nu}) \times (I_n \setminus \text{Per}(f_{n, \hat{x}_{n-1}, 2^\nu}))$$

является блуждающей точкой отображения $F_{|\text{Fix}(\hat{f}_{n-1}^{2^\nu}) \times I_n}^{2^\nu}$. Последнее вместе с утверждением 6) предложения 10 означает, что (\hat{x}_{n-1}, x_n) – блуждающая точка и отображения $F_{|\text{Per}(\hat{f}_{n-1}) \times I_n}$. Таким образом, равенство (16) доказано.

2. Завершим доказательство леммы 18. Во-первых, заметим, что если

$$\text{Per}(\hat{f}_{n-1}) = \hat{I}^{n-1},$$

то справедливость утверждения леммы 18 следует из предыдущего п. 1. Поэтому будем предполагать далее, что

$$\text{Per}(\hat{f}_{n-1}) \neq \hat{I}^{n-1}.$$

Возьмем произвольно окрестность $\hat{U}_{n-1}(\text{Per}(\hat{f}_{n-1}))$ множества $\text{Per}(\hat{f}_{n-1})$ в \hat{I}^{n-1} и рассмотрим расширенные вспомогательные функции $\Omega_{2^\nu k, ex}^F$ ($k \geq 1$) на выбранную окрестность $\hat{U}_{n-1}(\text{Fix}(\hat{f}_{n-1}^{2^\nu}))$. Аналогично тому, как это сделано в п. 1 доказательства, возьмем произвольно точку $\hat{x}_{n-1}^* \in \text{Fix}(\hat{f}_{n-1}^{2^\nu})$ такую, что

$$f_{n, \hat{x}_{n-1}^*, 2^\nu} \neq \text{id}_{I_n}.$$

Если \hat{x}_{n-1}^* не является предельной точкой множества $\hat{I}^{n-1} \setminus \text{Fix}(\hat{f}_{n-1}^{2^\nu})$, то следует применить рассуждения п. 1 доказательства леммы 18. Поэтому далее будем предполагать, что \hat{x}_{n-1}^* – предельная точка множества $\hat{I}^{n-1} \setminus \text{Fix}(\hat{f}_{n-1}^{2^\nu})$.

Из предложения 10 (см. утверждение 5)) следует, что отображение $f_{n, \hat{x}_{n-1}^*, 2^\nu k}$ в слое над точкой \hat{x}_{n-1}^* не допускает C^0 - Ω -взрыв при любом $k \geq 1$, в частности, в семействе отображений в слоях над точками открытого множества $\hat{U}_{n-1}(\text{Fix}(\hat{f}_{n-1}^{2^\nu}))$. Воспользуемся отрицанием определения 9. Тогда для каждой расширенной на $\hat{U}_{n-1}(\text{Fix}(\hat{f}_{n-1}^{2^\nu}))$ вспомогательной функции $\Omega_{2^\nu k, ex}^F$ точка \hat{x}_{n-1}^* является точкой полунепрерывности сверху. Более того, для произвольной ε -окрестности $U_n^\varepsilon(\Omega(f_{n, \hat{x}_{n-1}^*, 2^\nu k}))$ множества

$$\Omega(f_{n, \hat{x}_{n-1}^*, 2^\nu k}) = \text{Per}(f_{n, \hat{x}_{n-1}^*, 2^\nu k})$$

в I_n найдется универсальная (независящая от k) δ -окрестность $\hat{U}_{n-1}^\delta(\hat{x}_{n-1}^*)$ точки \hat{x}_{n-1}^* в $\hat{U}_{n-1}(\Omega(\hat{f}_{n-1}))$ такая, что при всех $\hat{x}_{n-1} \in \hat{U}_{n-1}^\delta(\hat{x}_{n-1}^*)$ и всех $k \geq 1$ выполнено включение (9), где вместо k используется произведение $2^\nu k$ (детальное доказательство существования такого числа δ повторяет рассуждения, имеющиеся в [9]).

Пусть x_n^* – произвольная точка множества $I_n \setminus \text{Per}(f_{n, \hat{x}_{n-1}^*, 2^\nu k})$, а

$$0 < \varepsilon^* < \frac{1}{2} d_n(x_n^*, \text{Per}(f_{n, \hat{x}_{n-1}^*, 2^\nu k})),$$

где $d_n((\cdot)^*, (\cdot))$ – расстояние от точки до множества на отрезке I_n .

Пусть универсальное $\delta^* = \delta^*(\varepsilon^*) > 0$ выбрано в силу предыдущего по $\varepsilon^* > 0$ из условия полунепрерывности сверху функций $\Omega_{2^\nu k, ex}^F$ в точке \hat{x}_{n-1}^* при любом $k \geq 1$ так, что при всех $\hat{x}_{n-1} \in \hat{U}_{n-1}^{\delta^*}(\hat{x}_{n-1}^*)$ справедливо включение

$$\Omega_{2^\nu k}^F(\hat{x}_{n-1}) \subset U_n^{\varepsilon^*}(\Omega(f_{n, \hat{x}_{n-1}^*, 2^\nu k})).$$

Вместе с полученным включением воспользуемся формулами (6)–(8). Тогда получаем равенство

$$(\hat{U}_{n-1}^{\delta^*}(\hat{x}_{n-1}^*) \times U_n^{\varepsilon^*}(x_n^*)) \cap F^{2^\nu k}(\hat{U}_{n-1}^{\delta^*}(\hat{x}_{n-1}^*) \times U_n^{\varepsilon^*}(x_n^*)) = \emptyset$$

при всех $k \geq 1$.

Последнее вместе с утверждением 6) предложения 10 доказывает справедливость равенства

$$\Omega(F) = \text{Per}(F) \tag{17}$$

при выполнении условий леммы 18. Используя равенство (17) вместе с (15) и определением множеств, на которых заданы расширенные вспомогательные функции $\Omega_{2^i, ex}^F$ (см. формулировку теоремы 17), убеждаемся в справедливости равенства (13).

Лемма 18 доказана. \square

Прежде, чем сформулировать следующее утверждение, заметим, что если факторотображение \hat{f}_{n-1} косо го произведения F имеет тип 2^∞ , то и F имеет тип 2^∞ (см. лемму 5).

Лемма 19. Пусть $F \in SP^0(I^n)$ имеет замкнутое множество $\text{Per}(F)$ так, что фактор \widehat{f}_{n-1} есть отображение типа 2^∞ . Тогда справедливы равенства (13).

Доказательство. 1. В силу леммы 18 при всех $i \geq 0$ выполнены равенства

$$\Omega(\Psi_i) = \Omega_{2^i}^{\Psi_i} = \text{Per}(\Psi_i), \quad (18)$$

причем в условиях леммы 19 верны включения

$$\Omega_{2^i}^{\Psi_i} \subset \Omega_{2^{i+1}}^{\Psi_{i+1}} \subset \text{Per}(F). \quad (19)$$

Поэтому из (18) и (19) следует существование топологического предела $\lim_{i \rightarrow +\infty} \Omega_{2^i}^{\Psi_i}$, а вместе с замкнутостью множества $\text{Per}(F)$ – и справедливость равенства

$$\lim_{i \rightarrow +\infty} \Omega_{2^i}^{\Psi_i} = \bigcup_{i=0}^{+\infty} \Omega_{2^i}^{\Psi_i} = \bigcup_{i=0}^{+\infty} \text{Per}(\Psi_i) = \text{Per}(F). \quad (20)$$

Укажем также, что в силу леммы 5 и равенств (20) справедливо

$$\text{Per}(\widehat{f}_{n-1}) = \text{pr}_{n-1}(\text{Per}(F)) = \bigcup_{i=0}^{+\infty} \text{Per}(\widehat{f}_{n-1}, 2^i). \quad (21)$$

2. Рассмотрим случай $n = 2$. Тогда $\text{Per}(\widehat{f}_{n-1}) = \text{Per}(f_1)$ – замкнутое множество, и $\text{Per}(f_1) = \Omega(f_1)$ (см. утверждение 2) предложения 10). Возьмем произвольно бесконечно малую последовательность положительных чисел $\{\varepsilon_i\}_{i \geq 1}$ и рассмотрим последовательность графиков расширенных на ε_i -окрестности $U_1^{\varepsilon_i}(\Omega(f_1))$ неблуждающего множества $\Omega(f_1)$ фактора f_1 2^i -х вспомогательных функций $\Omega_{2^i, ex}^F$ отображения F . Тогда с использованием равенств (20), (21) и леммы 5 при любом $x_1 \in U_1^{\varepsilon_i}(\Omega(f_1))$ имеем

$$\Omega_{2^i, ex}^F(x_1) = \left(\bigcup_{i=0}^{+\infty} \Omega_{2^i}^{\Psi_i} \right)_{ex} (x_1) = \bigcup_{i=0}^{+\infty} \left(\Omega_{2^i, ex}^{\Psi_i} \right) (x_1) = \Omega(f_2, x_1, 2^i).$$

Возьмем произвольно и зафиксируем точку $x_1^* \in \text{Per}(f_1)$. Тогда найдется (наименьшее) $i^* = i^*(x_1^*)$ такое, что $x_1^* \in \text{Per}(f_1, 2^{i^*})$ (и, следовательно, $x_1^* \in \text{Per}(f_1, 2^i)$ при любом $i \geq i^*$), причем

$$\Omega(f_2, x_1^*, 2^{i^*}) = \Omega(f_2, x_1^*, 2^i) = \text{Per}(f_2, x_1^*, 2^{i^*}).$$

Тогда отображение $f_{2, x_1^*, 2^i}$ в слое над точкой x_1^* при каждом $i \geq i^*$ не допускает C^0 - Ω -взрыв в семействе отображений в слоях. Используя определения 9 и 11, предложения 10 и 12 (в предложении 10 см. утверждения 5), 6)), убеждаемся в том, что верно равенство (17). Так как $\lim_{i \rightarrow +\infty} \varepsilon_i = 0$, то из предыдущего следует также существование топологического предела $\lim_{i \rightarrow +\infty} \Omega_{2^i, ex}^F$ и справедливость равенства $\lim_{i \rightarrow +\infty} \Omega_{2^i, ex}^F = \text{Per}(F)$. Таким образом, в условиях леммы 19 для $n = 2$ справедливы равенства (13).

3. Предположим, что утверждение леммы 19 справедливо для $n - 1$ при $n \geq 3$. Применяя метод математической индукции и используя рассуждения, аналогичные проведенным в п. 2, убеждаемся в справедливости равенств (13) для n . Лемма 19 доказана. \square

Справедливость теоремы 17 вытекает из лемм 18 и 19. Теорема 17 доказана.

3. Пример отображения на клетке произвольной конечной размерности, имеющего одномерное ω -предельное множество

В этой части статьи мы построим пример дифференцируемого косоугольного произведения, заданного на n -мерной клетке $[0, 1]^{n-2} \times [0, \alpha] \times [0, 1]$ при $n \geq 3$, такого, что оно имеет одномерное ω -предельное множество, представляющее собой единичный отрезок оси Ox_n (значение положительного числа α будет определено позже). Алгоритм построения указанного примера следует алгоритму построения аналогичного примера для $n = 2$ (см. [4]), хотя увеличение размерности фазового пространства вносит заметные усложнения в процедуру построения и исследование дифференциальных свойств отображения (см. п. 3, § 2 и рассмотрения § 4).

1. Пусть отображение $F : [0, 1]^n \rightarrow [0, 1]^n$ задано следующим равенством:

$$F(\hat{x}_{n-1}, x_n) = \left(x_1 - \frac{x_1^2}{2}, \dots, x_j - \frac{x_j^2}{2 + x_{j-1}}, \dots, x_n + \psi(x_{n-1}, x_n) \sum_{i=1}^{n-1} x_i \right), \quad (22)$$

где $2 \leq j \leq n - 1$. Определение функции $\psi(x_{n-1}, x_n)$, зависящей от двух переменных x_{n-1} и x_n , будет дано ниже.

При любом $k \geq 1$ положим

$$x_1^k = f_1^k(x_1^0); \quad x_j^k = f_{j, \hat{x}_{j-1}, k}(x_j^0) \quad \text{при } 2 \leq j \leq n - 1,$$

где $x_1^0 = x_j^0 = 1$.

В [4] для $j = 1$ и любого $k \geq 1$ доказано неравенство

$$\frac{1}{k+1} \leq x_1^k < \frac{2}{k}; \quad \text{но } \frac{2}{k} < \frac{3}{k}, \quad (23)$$

Распространим неравенство (23) на случай произвольного $2 \leq j \leq n - 1$ и убедимся, что при произвольном $k \geq 1$ выполнено:

$$\frac{1}{k+1} \leq x_j^k < \frac{3}{k}. \quad (24)$$

Для доказательства неравенств (24) воспользуемся методом математической индук-

ции по индексу k . Действительно,

$$x_j^1 = x_j^0 - \frac{(x_j^0)^2}{2 + x_{j-1}^0} = \frac{2}{3}; \quad \frac{1}{2} < \frac{2}{3} < 3.$$

Поэтому при $k = 1$ неравенство (24) справедливо. Предположим, что это неравенство верно для натурального числа k и докажем его справедливость для $k + 1$. Используя монотонное возрастание функции $f_{j, \hat{x}_{j-1}}(x_j)$ по переменной x_j ($2 \leq j \leq n - 1$) на отрезке $[0, 1]$, при $k \geq 2$ получаем неравенства:

$$x_j^{k+1} = x_j^k - \frac{(x_j^k)^2}{2 + x_{j-1}^k} < \frac{3}{k} - \frac{3}{k^2} = \frac{3(k-1)}{k^2} < \frac{3(k-1)}{k^2 - 1} = \frac{3}{k+1}.$$

Аналогичным способом при всех натуральных k получаем оценку снизу:

$$x_j^{k+1} = x_j^k - \frac{(x_j^k)^2}{2 + x_{j-1}^k} > \frac{1}{k+1} - \frac{1}{2(k+1)^2} = \frac{2k+1}{2(k+1)^2} > \frac{1}{k+2}.$$

Таким образом, при всех $k > 1$ и $1 \leq j \leq n - 1$, неравенства (24) верны.

Из (24) вытекают следующие свойства:

- (i) $\omega_{\hat{f}_{n-1}}(\hat{x}_{n-1}^0) = \{\hat{0}_{n-1}\}$, где $\hat{0}_{n-1} = \underbrace{(0, 0, \dots, 0)}_{(n-1) \text{ раз}}$;
- (ii) при любых $1 \leq j \leq n - 1$ выполнено:

$$x_j^k \underset{k \rightarrow +\infty}{=} O(1/k), \text{ и, следовательно,}$$

(iii) расходится числовой ряд

$$\sum_{k=0}^{+\infty} x_j^k.$$

Из свойства (iii) и расходимости минорантного ряда $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(k+1)(10 + \ln(k+1))}$ следует расходимость ряда с положительными членами

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x_j^k}{10 - \ln x_{n-1}^k},$$

а вместе с ним, и ряда

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\sum_{j=1}^{n-1} x_j^k}{10 - \ln x_{n-1}^k}. \quad (25)$$

Положим

$$x_n^0 = \frac{1}{\sqrt{10}}.$$

В силу расходимости ряда (25) найдется строго возрастающая последовательность столь больших натуральных чисел $\{k_m\}_{m \geq 1}$, что выполнены неравенства:

$$\sum_{k=0}^{k_1+2} \frac{\sum_{j=1}^k x_j^k}{10 - \ln x_{n-1}^k} > 1 - x_n^0 - \frac{1}{\sqrt{10}};$$

$$\sum_{k=k_m+2}^{k_{m+1}+2} \frac{\sum_{j=1}^k x_j^k}{10 - \ln x_{n-1}^k} > 1 - x_n^{k_m+2} - \frac{1}{\sqrt{10 - \ln x_{n-1}^{k_m+2}}} \quad \text{для четного } m \geq 1; \quad (26)$$

$$\sum_{k=k_m+2}^{k_{m+1}+2} \frac{\sum_{j=1}^k x_j^k}{10 - \ln x_{n-1}^k} > x_n^{k_m+2} - \frac{1}{\sqrt{10 - \ln x_{n-1}^{k_m+2}}} \quad \text{для нечетного } m \geq 1, \quad (27)$$

Здесь

$$x_n^{k_{m+1}+2} = x_n^{k_{m+1}+1} = x_n^{k_m+2} + (-1)^m \sum_{k=k_m+2}^{k_{m+1}+2} \frac{\sum_{j=1}^k x_j^k}{10 - \ln x_{n-1}^k}, m \geq 1. \quad (28)$$

Определим сначала функцию $|\psi(x_{n-1}, x_n)|$ (см. формулу (22)). Для этого будем использовать C^1 -гладкие по x_n “шапочки” Урысона, длины горизонтальных участков и высоты которых зависят от $x_{n-1} \in (0, 1]$. Пусть $h(x_{n-1})$ есть высота “шапочки” Урысона, зависящая от x_{n-1} . Будем использовать также функции

$$v_1(x_{n-1}) = \sqrt{h(x_{n-1})}, \quad v_2(x_{n-1}) = 1 - v_1(x_{n-1}).$$

Положим

$$|\psi(x_{n-1}, x_n)| = \begin{cases} h(x_{n-1}) \sin^2 \frac{\pi x_n}{2v_1(x_{n-1})}, & \text{если } x_n \in [0, v_1(x_{n-1})], \\ h(x_{n-1}), & \text{если } x_n \in (v_1(x_{n-1}), v_2(x_{n-1})), \\ h(x_{n-1}) \sin^2 \frac{\pi(x_n - 1)}{2v_1(x_{n-1})}, & \text{если } x_n \in [v_2(x_{n-1}), 1]. \end{cases} \quad (29)$$

Далее нам потребуются промежутки изменения переменной x_{n-1} следующего вида:

$$\begin{aligned} J_0 &= (x_{n-1}^{k_1}, 1], & J_m &= (x_{n-1}^{k_{m+1}}, x_{n-1}^{k_m+3}], \\ J_m^{(1)} &= (x_{n-1}^{k_m+1}, x_{n-1}^{k_m}], & J_m^{(2)} &= (x_{n-1}^{k_m+3}, x_{n-1}^{k_m+1}], \text{ при } m \geq 1. \end{aligned}$$

Пусть

$$h_1(x_{n-1}) = \frac{1}{10 - \ln x_{n-1}}.$$

Тогда h_1 является строго возрастающей, выпуклой вверх и положительной функцией переменной x_{n-1} на промежутке $(0, 1]$. Пусть $J = \bigcup_{m=0}^{\infty} J_m$, а $h(x_{n-1}) = h_{1|J}(x_{n-1})$.

Более тонкие рассуждения требуются для определения функции h на промежутках $J_m^{(1)}$ и $J_m^{(2)}$ при $m \geq 1$. Так как функция ψ зависит только от двух переменных, x_{n-1} и x_n , то ее определение, а, следовательно, в силу формулы (29) и определение h повторяет (с точностью до обозначения переменных) рассуждения, приведенные в статье [4]. Здесь эти рассуждения необходимы для исследования дифференциальных свойств ψ . Приведем их.

Так, на каждом промежутке $J_m^{(1)}$ построим две C^1 -гладкие линейные функции

$$\bar{h}_1(x_{n-1}) = \frac{1}{10 - \ln x_{n-1}^{k_m}} + \frac{x_{n-1} - x_{n-1}^{k_m}}{x_{n-1}^{k_m} (10 - \ln x_{n-1}^{k_m})^2},$$

$$h_2(x_{n-1}) = 2 \frac{x_{n-1} - x_{n-1}^{k_m+1}}{(x_{n-1}^{k_m+1} - x_{n-1}^{k_m+2}) (10 - \ln x_{n-1}^{k_m})}.$$

Функция \bar{h}_1 задает уравнение касательной к h_1 в точке $C_m^1(x_{n-1}^{k_m}, h_1(x_{n-1}^{k_m}))$; h_2 — линейная функция переменной x_{n-1} , причем $h_1(x_{n-1}^{k_m+1}) > h_2(x_{n-1}^{k_m+1}) = 0$ и $h_1(x_{n-1}^{k_m}) < h_2(x_{n-1}^{k_m})$. Следовательно, графики функций h_1 и h_2 пересекаются в некоторой точке $C_m(c_m, h_2(c_m))$ без касания, где $c_m \in (x_{n-1}^{k_m+1}, x_{n-1}^{k_m})$. Графики же функций \bar{h}_1 и h_2 пересекаются в другой точке $C_m^2(c_m^2, h_2(c_m^2))$, где $c_m^2 \in (c_m, x_{n-1}^{k_m})$. На интервалах (C_m, C_m^2) и (C_m^2, C_m^1) укажем точки $C_m^3(c_m^3, h_2(c_m^3))$ и $C_m^4(c_m^4, \bar{h}_1(c_m^4))$ соответственно так, чтобы $l([C_m^3, C_m^2]) = l([C_m^2, C_m^4])$. При этом $h_2(c_m^3) < h_2(c_m^2) < \bar{h}_1(c_m^4)$. Тогда корректно определена C^1 -гладкая строго возрастающая, выпуклая вверх на каждом промежутке $J_m^{(1)}$ функция h такая, что

$$h|_{(x_{n-1}^{k_m+1}, c_m^3]} = h_2|_{(x_{n-1}^{k_m+1}, c_m^3]}, \quad h|_{[c_m^4, x_{n-1}^{k_m}]} = \bar{h}_1|_{[c_m^4, x_{n-1}^{k_m}]},$$

при этом на каждом интервале (c_m^3, c_m^4) график функции h представлен дугой окружности, касающейся \bar{h}_1 и h_2 в точках C_m^3 и C_m^4 соответственно.

Определим функцию h на любом промежутке $J_m^{(2)}$, $m \geq 1$. Аналогично предыдущему рассмотрим две C^1 -гладкие линейные функции

$$h_3(x_{n-1}) = 2 \frac{x_{n-1}^{k_m+1} - x_{n-1}}{(x_{n-1}^{k_m+1} - x_{n-1}^{k_m+2}) (10 - \ln x_{n-1}^{k_m})},$$

$$h_4(x_{n-1}) = \frac{1}{10 - \ln x_{n-1}^{k_m+3}} + \frac{x_{n-1} - x_{n-1}^{k_m+3}}{x_{n-1}^{k_m+3} (10 - \ln x_{n-1}^{k_m+3})^2}.$$

Из определения функции h_4 следует, что эта прямая (график h_4) касается графика функции h_1 в точке с координатами $(x_{n-1}^{k_m+3}, h_1(x_{n-1}^{k_m+3}))$. Определим h в точке $x_{n-1}^{k_m+2}$ так, чтобы выполнялись следующие равенства:

$$h(x_{n-1}^{k_m+2}) = h_1(x_{n-1}^{k_m+2}), \quad h'(x_{n-1}^{k_m+2}) = 0.$$

В силу определения h_3 верны соотношения:

$$h_3(x_{n-1}^{k_m+2}) > h(x_{n-1}^{k_m+2}) > h_3(x_{n-1}^{k_m+1}) = 0.$$

Поэтому горизонтальная (в плоскости переменных x_{n-1} и \bar{x}_{n-1}) касательная к графику функции h в точке $B_m(x_{n-1}^{k_m+2}, h(x_{n-1}^{k_m+2}))$ пересекается с графиком функции h_3 в некоторой точке B_m^1 , причем

$$l([B_m, B_m^1]) = x_{n-1}^{k_m+1} - x_{n-1}^{k_m+2} = \frac{(x_{n-1}^{k_m+1})^2}{2 + x_{n-1}^{k_m+1}}.$$

Пусть B_m^2 – это точка с координатами $(x_{n-1}^{k_m+1}, 0)$. Имеем

$$\frac{l([B_m, B_m^1])}{l([B_m^1, B_m^2])} < \frac{x_{n-1}^{k_m+1} - x_{n-1}^{k_m+2}}{h(x_{n-1}^{k_m+2})} = \frac{(x_{n-1}^{k_m+1})^2}{2 + x_{n-1}^{k_m+1}} (10 - \ln x_{n-1}^{k_m+2}). \quad (30)$$

Поскольку

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} \frac{(x_{n-1}^{k_m+1})^2}{2 + x_{n-1}^{k_m+1}} (10 - \ln x_{n-1}^{k_m+2}) = 0,$$

то из (30) следует, что начиная с некоторого номера m_0 , при всех $m \geq m_0$ будет выполняться неравенство $l([B_m, B_m^1]) < l([B_m^1, B_m^2])$. Поэтому при всех $m \geq m_0$ на интервале (B_m^1, B_m^2) найдется точка $B_m^3(b_m^3, h_3(b_m^3))$ такая, что $l([B_m, B_m^1]) = l([B_m^1, B_m^3])$. Тогда на отрезке $[x_{n-1}^{k_m+2}, x_{n-1}^{k_m+1}]$ корректно определена положительная строго убывающая, выпуклая вверх C^1 -гладкая функция h такая, что $h|_{[b_m^3, x_{n-1}^{k_m+1}]} = h_3|_{[b_m^3, x_{n-1}^{k_m+1}]}$. При этом на промежутке $[x_{n-1}^{k_m+2}, b_m^3)$ график h представлен дугой окружности, у которой касательная в точке B_m горизонтальна (в плоскости переменных x_{n-1} и \bar{x}_{n-1}), а в точке B_m^3 совпадает со значением линейной по x_{n-1} функции h_3 .

Наконец, дадим описание функции h на каждом интервале $(x_{n-1}^{k_m+3}, x_{n-1}^{k_m+2})$. Используя то, что h_1 – выпуклая вверх на $(0, 1]$ функция переменной x_{n-1} , а $h(x_{n-1}^{k_m+2}) = h_1(x_{n-1}^{k_m+2})$, получаем неравенство $h_4(x_{n-1}^{k_m+2}) > h(x_{n-1}^{k_m+2})$. К тому же, функция h_1 строго возрастает на промежутке $(0, 1]$. Поэтому $h(x_{n-1}^{k_m+2}) > h_4(x_{n-1}^{k_m+3})$. Из этих рассуждений следует, что найдется точка $A_m^1(a_m^1, h(x_{n-1}^{k_m+2}))$, в которой горизонтальная (в плоскости переменных x_{n-1} и \bar{x}_{n-1}) касательная к графику функции h в точке B_m пересекает касательную h_4 к графику h в точке $A_m(x_{n-1}^{k_m+3}, h(x_{n-1}^{k_m+3}))$. Сравним длины отрезков $[A_m, A_m^1]$ и $[A_m^1, B_m]$. Используем дополнительную точку $A_m^2(x_{n-1}^{k_m+3}, h(x_{n-1}^{k_m+2}))$. Имеем:

$$\begin{aligned} \frac{l([A_m, A_m^2])}{l([A_m^2, B_m])} &= \frac{h(x_{n-1}^{k_m+2}) - h_4(x_{n-1}^{k_m+3})}{x_{n-1}^{k_m+3} - x_{n-1}^{k_m+2}} = \\ &= \frac{(2 + x_{n-1}^{k_m+2})(\ln x_{n-1}^{k_m+2} - \ln x_{n-1}^{k_m+3})}{(x_{n-1}^{k_m+2})^2 (10 - \ln x_{n-1}^{k_m+2}) (10 - \ln x_{n-1}^{k_m+3})} < \frac{l([A_m, A_m^1])}{l([A_m^1, B_m])}. \end{aligned} \quad (31)$$

Применяя (31) и предельное соотношение

$$\begin{aligned} \lim_{m \rightarrow +\infty} \frac{(2 + x_{n-1}^{k_m+2}) (\ln x_{n-1}^{k_m+2} - \ln x_{n-1}^{k_m+3})}{(x_{n-1}^{k_m+2})^2 (10 - \ln x_{n-1}^{k_m+2}) (10 - \ln x_{n-1}^{k_m+3})} = \\ = \lim_{m \rightarrow +\infty} \frac{1}{x_{n-1}^{k_m+2} (10 - \ln x_{n-1}^{k_m+2}) (10 - \ln x_{n-1}^{k_m+3})} = +\infty, \end{aligned}$$

получаем, что найдется натуральное число $\bar{m}_0 \geq m_0$ такое, что для любого $m \geq \bar{m}_0$ выполняется $l([A_m, A_m^1]) > l([A_m^1, B_m])$. Поэтому при любых $m \geq \bar{m}_0$ существует точка $A_m^3(a_m^3, h_4(a_m^3)) \in (A_m, A_m^1)$ такая, что $l([A_m^3, A_m^1]) = l([A_m^1, B_m])$. Тогда на интервале $(x_{n-1}^{k_m+3}, x_{n-1}^{k_m+2})$ корректно определена строго возрастающая выпуклая вверх C^1 -гладкая функция h такая, что $h|_{(x_{n-1}^{k_m+3}, a_m^3)} = h_4|_{(x_{n-1}^{k_m+3}, a_m^3)}$. При этом, на промежутке $[a_m^3, x_{n-1}^{k_m+2})$ график h представляет собой дугу окружности, касающейся h_4 в точке A_m^3 и имеющей горизонтальную (в плоскости переменных x_{n-1} и \bar{x}_{n-1}) касательную в точке B_m . Пусть $h(0) = 0$, а $\bar{k} = k_{\bar{m}_0} + 1$ есть номер члена последовательности $\{x_{n-1}^k\}_{k \geq 1}$, начиная с которого выполняются все соотношения для длин отрезков, указанные выше. Положим $\alpha = x_{n-1}^{\bar{k}}$.

Из приведенного построения функции h следует, что h непрерывна на отрезке $[0, \alpha]$, причем во всех точках полуинтервала $(0, \alpha]$, за исключением точек $x_{n-1}^{k_m+1}$, $m \geq \bar{m}_0$, существует конечная производная h' , а в каждой точке $x_{n-1}^{k_m+1}$ существуют конечные односторонние производные, отличающиеся лишь знаком, при этом производной функции h в нуле не существует. Далее мы не будем использовать дифференциальные свойства h .

Теперь определим функцию $\psi(x_{n-1}, x_n)$ для любых $x_n \in [0, 1]$, $m \geq \bar{m}_0$:

$$\psi(x_{n-1}, x_n) = \begin{cases} (-1)^m |\psi(x_{n-1}, x_n)|, & \text{если } x_{n-1} \in J_m \cup J_{m+1}^{(1)}; \\ (-1)^{m+1} |\psi(x_{n-1}, x_n)|, & \text{если } x_{n-1} \in J_{m+1}^{(2)}; \\ 0, & \text{если } x_{n-1} = 0. \end{cases} \quad (32)$$

2. В силу формулы (22) функция f_1 непрерывно дифференцируема по x_1 , и при любом $2 \leq j \leq n-1$, $n \geq 3$, функция $f_{j, x_{j-1}}$, зависящая от двух переменных x_{j-1} и x_j , непрерывно дифференцируема по совокупности переменных так, что $\hat{f}_{n-1} \in SP^1([0, 1]^{n-1})$ и, тем более, $\hat{f}_{n-1} \in SP^1([0, 1]^{n-2} \times [0, \alpha])$. Из формул (22), (29) и (32) следует, что $f_{n, \hat{x}_{n-1}}$ непрерывно дифференцируема по всем переменным, кроме x_{n-1} .

Возьмем произвольно и зафиксируем $\hat{x}_{n-2} \in \hat{I}^{n-2}$. Покажем, что функция $f_{n, \hat{x}_{n-1}}$ дифференцируема по x_{n-1} на замкнутом прямоугольнике $\{\hat{x}_{n-2}\} \times I_{n-1} \times I_n$ и исследуем поведение частной производной $\frac{\partial}{\partial x_{n-1}} f_{n, \hat{x}_{n-1}}$.

Прежде всего заметим, что из формул (29), (32) и определения функции h следует, что функция ψ непрерывна по совокупности переменных на прямоугольнике $[0, \alpha] \times [0, 1]$, и справедливо неравенство $|\psi(x_{n-1}, x_n)| \leq h(x_{n-1})$. Поэтому верна следующая оценка:

$$h(x_{n-1}) \leq \begin{cases} \frac{1}{10 - \ln x_{n-1}^{k_m+3}}, & \text{если } x_{n-1} \in J_m, m \geq 1; \\ \frac{1}{10 - \ln x_{n-1}^{k_m}}, & \text{если } x_{n-1} \in J_m^{(1)}; \\ \frac{1}{10 - \ln x_{n-1}^{k_m+2}}, & \text{если } x_{n-1} \in J_m^{(2)}. \end{cases}$$

Так как $\lim_{x_{n-1} \rightarrow +0} \frac{1}{10 - \ln x_{n-1}} = 0$, то, используя указанное выше неравенство, получаем:

$$\lim_{x_{n-1} \rightarrow +0} \psi(x_{n-1}, x_n) = \lim_{x_{n-1} \rightarrow +0} h(x_{n-1}) = 0 = h(0) = \psi(0, x_n).$$

Непосредственные вычисления показывают, что функция $f_{n, \hat{x}_{n-1}}(x_n)$ дифференцируема по x_{n-1} в каждой точке произвольного слоя $\{(\hat{x}_{n-2}, 0)\} \times [0, 1]$, причем

$$\frac{\partial}{\partial x_{n-1}} f_{n, (\hat{x}_{n-2}, 0)}(x_n) = 0.$$

Докажем дифференцируемость функции $f_{n, \hat{x}_{n-1}}$ по переменной x_{n-1} на множестве $\{(\hat{x}_{n-2}, x_{n-1}^{k_m+1})\} \times [0, 1]$, для произвольного $m \geq \bar{m}_0$ и любых $\hat{x}_{n-2} \in \hat{I}^{n-2}$. Действительно, если x_n — произвольная точка из отрезка $[0, 1]$, то $\psi(x_{n-1}^{k_m+1}, x_n) = 0$ и получаем, что $f_{n, (\hat{x}_{n-2}, x_{n-1}^{k_m+1})}(x_n) = \text{id}_{[0,1]}(x_n)$. Используя этот факт, приведем вычисление частной производной функции $f_{n, \hat{x}_{n-1}}(x_n)$ по переменной x_{n-1} в каждой точке $(\hat{x}_{n-2}, x_{n-1}^{k_m+1}, x_n)$. Имеем:

$$\begin{aligned} \lim_{x_{n-1} \rightarrow x_{n-1}^{k_m+1}} \frac{f_{n, \hat{x}_{n-1}}(x_n) - f_{n, (\hat{x}_{n-2}, x_{n-1}^{k_m+1})}(x_n)}{x_{n-1} - x_{n-1}^{k_m+1}} &= \lim_{x_{n-1} \rightarrow x_{n-1}^{k_m+1}} \frac{\psi(x_{n-1}, x_n) \left(\sum_{i=1}^{n-2} x_i + x_{n-1}^{k_m+1} \right)}{x_{n-1} - x_{n-1}^{k_m+1}} = \\ &= \lim_{x_{n-1} \rightarrow x_{n-1}^{k_m+1}} \frac{(-1)^m h_3(x_{n-1}) \left(\sum_{i=1}^{n-2} x_i + x_{n-1}^{k_m+1} \right)}{x_{n-1} - x_{n-1}^{k_m+1}} = \lim_{x_{n-1} \rightarrow x_{n-1}^{k_m+1}} \frac{2(-1)^{m-1} \left(\sum_{i=1}^{n-2} x_i + x_{n-1}^{k_m+1} \right)}{(10 - \ln x_{n-1}^{k_m})(x_{n-1}^{k_m+1} - x_{n-1}^{k_m+2})} = \\ &= \frac{2(2 + x_{n-2}^{k_m+1})(-1)^{m-1} \left(\sum_{i=1}^{n-2} x_i + x_{n-1}^{k_m+1} \right)}{(x_{n-1}^{k_m+1})^2 (10 - \ln x_{n-1}^{k_m})}, \end{aligned}$$

т. е.

$$\frac{\partial}{\partial x_{n-1}} f_{n, (\hat{x}_{n-2}, x_{n-1}^{k_m+1})}(x_n) = \frac{2(2 + x_{n-2}^{k_m+1})(-1)^{m-1} \left(\sum_{i=1}^{n-2} x_i + x_{n-1}^{k_m+1} \right)}{(x_{n-1}^{k_m+1})^2 (10 - \ln x_{n-1}^{k_m})}, \quad m \geq \bar{m}_0. \quad (33)$$

Таким образом, формула (33) показывает, что функция $f_{n, \hat{x}_{n-1}}(x_n)$ дифференцируема по x_{n-1} в каждой точке $(\hat{x}_{n-2}, x_{n-1}^{k_m+1}, x_n)$, и в то же время частная производная

$\frac{\partial}{\partial x_{n-1}} f_{n, \hat{x}_{n-1}}(x_n)$ не ограничена в любой окрестности произвольной точки любого слоя $\{(\hat{x}_{n-2}, 0)\} \times [0, 1]$. Следовательно, каждая точка $(\hat{x}_{n-2}, 0, x_n)$, $x_n \in [0, 1]$, $\hat{x}_{n-2} \in \hat{I}^{n-2}$, является точкой разрыва 2-го рода частной производной $\frac{\partial}{\partial x_{n-1}} f_{n, \hat{x}_{n-1}}(x_n)$ по переменной x_{n-1} . Убедимся в том, что частная производная $\frac{\partial}{\partial x_{n-1}} f_{n, \hat{x}_{n-1}}(x_n)$ непрерывна в каждом слое $\{(\hat{x}_{n-2}, x_{n-1}^{k_m+1})\} \times [0, 1]$, $m \geq \bar{m}_0$.

Действительно, по построению найдется окрестность $U_{n-1, \delta}(x_{n-1}^{k_m+1})$ точки $x_{n-1}^{k_m+1}$ на единичном отрезке оси x_{n-1} , в которой функция ψ – линейная по переменной x_{n-1} . Поэтому для всех $x_{n-1} \in U_{n-1, \delta}(x_{n-1}^{k_m+1})$, $x_{n-1} \neq x_{n-1}^{k_m+1}$ и $x_n \in (v_1(x_{n-1}), v_2(x_{n-1}))$ выполнено

$$\psi(x_{n-1}, x_n) = \frac{2(-1)^{m-1}(x_{n-1} - x_{n-1}^{k_m+1})}{(10 - \ln x_{n-1}^{k_m})(x_{n-1}^{k_m+1} - x_{n-1}^{k_m+2})}.$$

Тогда при любых $\hat{x}_{n-2} \in \hat{I}^{n-2}$, $x_{n-1} \in U_{n-1, \delta}(x_{n-1}^{k_m+1})$, $x_{n-1} \neq x_{n-1}^{k_m+1}$, верно следующее равенство:

$$\frac{\partial}{\partial x_{n-1}} f_{n, \hat{x}_{n-1}}(x_n) = \frac{2(-1)^{m-1} \left(\sum_{i=1}^{n-2} x_i + 2x_{n-1} - x_{n-1}^{k_m+1} \right)}{(10 - \ln x_{n-1}^{k_m})(x_{n-1}^{k_m+1} - x_{n-1}^{k_m+2})}. \quad (34)$$

В силу (33) и (34) частная производная $\frac{\partial}{\partial x_{n-1}} f_{n, (\hat{x}_{n-1})}(x_n)$ непрерывна в произвольной точке любого слоя $\{(\hat{x}_{n-2}, x_{n-1}^{k_m+1})\} \times [0, 1]$.

Проводя аналогичные рассуждения, убеждаемся, что функция $f_{n, \hat{x}_{n-1}}$ дифференцируема по x_{n-1} на всей клетке $\hat{I}^{n-2} \times [0, \alpha] \times [0, 1]$, а частная производная $\frac{\partial}{\partial x_{n-1}} f_{n, \hat{x}_{n-1}}(x_n)$ непрерывна по x_{n-1} в тех точках фазового пространства, где $x_{n-1} \neq 0$.

Укажем, что в силу формулы (22), определения функции $f_{n, \hat{x}_{n-1}}$ и свойств (i), (iii) выполнены условия как леммы 15, так и теоремы 16. Поэтому для некоторой точки $x^0 \in I^n$ найдется отрезок I'_n такой, что $\omega_F(x^0) = \{\hat{0}_{n-1}\} \times I'_n$, где I'_n – невырожденный отрезок.

3. В заключении укажем точку $x'(\hat{x}'_{n-1}, x'_n) \in I^n$ такую, что

$$\omega_F(x') = \{\hat{0}_{n-1}\} \times [0, 1].$$

Пусть точка x' имеет следующие координаты

$$x'_1 = x_1^{k_m+2}, \quad x'_2 = x_2^{k_m+2}, \quad \dots, \quad x'_n = x_n^{k_m+2},$$

при произвольном чётном $m > \bar{m}_0$. Зададим последовательность натуральных чисел $\{p_l\}_{l \geq 1}$ такую, что $p_l = k_{m+l} - k_{m+l-1} - 1$. Так как m – четное число, то при $l = 1$ выполнено

$$((\hat{x}')_{n-1}^{p_1}, (x')_n^{p_1}) = F^{p_1}((\hat{x}'_{n-1}, x'_n)) = \left(\hat{x}_{n-1}^{k_{m+1}+1}, x'_n + \sum_{k=k_m+2}^{k_{m+1}+1} \frac{\sum_{i=1}^{n-1} x_i^k}{10 - \ln x_{n-1}^k} \right). \quad (35)$$

В силу (28) справедливо $((\hat{x}'_{n-1})^{p_1+1}, (x'_n)^{p_1+1}) = (\hat{x}_{n-1}^{k_{m+1}+2}, (x'_n)^{p_1})$, т.е. верно $(x'_n)^{p_1+1} = (x'_n)^{p_1}$. Более того, при всех $l \geq 2$ выполнено $(x'_n)^{p_1+p_2+\dots+p_l+l-1} = (x'_n)^{p_1+p_2+\dots+p_l}$ и имеем

$$\begin{aligned} ((\hat{x}')_{n-1}^{p_1+p_2+\dots+p_l+l-1}, (x'_n)^{p_1+p_2+\dots+p_l+l-1}) &= F^{p_1+p_2+\dots+p_l+l-1}(\hat{x}'_{n-1}, x'_n) = \\ &= \left(\hat{x}_{n-1}^{k_{m+1}+1}, (x'_n)^{p_1+p_2+\dots+p_l} + (-1)^{l-1} \sum_{k=k_{m+l-1}+2}^{k_{m+l}+1} \frac{\sum_{i=1}^{n-1} x_i^k}{10 - \ln x_{n-1}^k} \right). \end{aligned}$$

Используя (28) и (35), получаем

$$f_{n, \hat{x}'_{n-1}, p_1+p_2+\dots+p_l+l-1}(x'_n) = x'_n + \sum_{j=1}^l \left((-1)^{j-1} \sum_{k=k_{m+j-1}+2}^{k_{m+j}+1} \frac{\sum_{i=1}^{n-1} x_i^k}{10 - \ln x_{n-1}^k} \right).$$

Числовой ряд

$$\sum_{l=1}^{+\infty} \left((-1)^{l-1} \sum_{k=k_{m+l-1}+2}^{k_{m+l}+1} \frac{\sum_{i=1}^{n-1} x_i^k}{10 - \ln x_{n-1}^k} \right)$$

расходится, так как из (28) следует, что не выполнено необходимое условие сходимости. Заметим, что если в этом ряде опустить скобки, то получим расходящийся ряд

$$\begin{aligned} &\frac{x_1^{k_m+2}}{10 - \ln x_{n-1}^{k_m+2}} + \dots + \frac{x_{n-1}^{k_m+2}}{10 - \ln x_{n-1}^{k_m+2}} + \dots + \frac{x_1^{k_{m+1}+1}}{10 - \ln x_{n-1}^{k_{m+1}+1}} + \dots + \frac{x_{n-1}^{k_{m+1}+1}}{10 - \ln x_{n-1}^{k_{m+1}+1}} \\ &- \frac{x_1^{k_{m+1}+2}}{10 - \ln x_{n-1}^{k_{m+1}+2}} - \dots - \frac{x_{n-1}^{k_{m+1}+2}}{10 - \ln x_{n-1}^{k_{m+1}+2}} - \dots - \frac{x_1^{k_{m+2}+1}}{10 - \ln x_{n-1}^{k_{m+2}+1}} - \dots - \frac{x_{n-1}^{k_{m+2}+1}}{10 - \ln x_{n-1}^{k_{m+2}+1}} + \dots \end{aligned}$$

Тогда в силу теоремы 14 (см. утверждение 2)) ω -предельное множество $\omega_F(x')$ содержит невырожденный отрезок $I'_n \subset [0, 1]$.

Докажем, что $I'_n = [0, 1]$. Для этого достаточно показать, что точки $x_n = 0$ и $x_n = 1$ являются предельными для последовательности $\left\{ f_{n, \hat{x}'_{n-1}, p_1+p_2+\dots+p_l+l-1}(x'_n) \right\}_{l \geq 1}$. Воспользуемся оценками (26) и (27). Имеем:

$$\begin{aligned} 1 - \frac{1}{\sqrt{10 - \ln x_{n-1}^{k_m+2}}} - \frac{\sum_{i=1}^{n-1} x_i^{k_{m+1}+2}}{10 - \ln x_{n-1}^{k_{m+1}+2}} &< (x'_n)^{k_m+2} + \sum_{k=k_m+2}^{k_{m+1}+1} \frac{\sum_{i=1}^{n-1} x_i^k}{10 - \ln x_{n-1}^k} < 1, \text{ для четного } m > 1; \\ \frac{1}{\sqrt{10 - \ln x_{n-1}^{k_m+2}}} + \frac{\sum_{i=1}^{n-1} x_i^{k_{m+1}+2}}{10 - \ln x_{n-1}^{k_{m+1}+2}} &> (x'_n)^{k_m+2} - \sum_{k=k_m+2}^{k_{m+1}+1} \frac{\sum_{i=1}^{n-1} x_i^k}{10 - \ln x_{n-1}^k} > 0, \text{ для нечетного } m > 1. \end{aligned}$$

Поскольку

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{10 - \ln x_{n-1}^{k_m+2}}} = \lim_{m \rightarrow +\infty} \frac{\sum_{i=1}^{n-1} x_i^{k_{m+1}+2}}{10 - \ln x_{n-1}^{k_{m+1}+2}} = 0,$$

то, согласно неравенствам, указанным выше, $x_n = 0$ и $x_n = 1$ являются предельными точками последовательности $\left\{ f_{n, \hat{x}'_{n-1, p_1+p_2+\dots+p_l+l-1}}(x'_n) \right\}_{l \geq 1}$. Из теоремы 13 следует связность ω -предельного множества. Поэтому $I'_n = [0, 1]$.

Таким образом, построен пример дифференцируемого косоного произведения на n -мерной клетке, имеющего одномерное ω -предельное множество вида $\{\hat{0}_{n-1}\} \times [0, 1]$.

Список литературы

- [1] Л.С. Ефремова, *О неблуждающем множестве и центре треугольных отображений с замкнутым множеством периодических точек в базе*, в сб.: Динамические системы и нелинейные явления, Ин-т математики АН УССР, Киев, 15–25 (1990).
- [2] F. Balibrea, J.L. Guirao, J.I. Casado, *A triangular map on I^2 , whose ω -limit sets are all compact interval of $\{0\} \times I$* , Discrete Contin. Dyn. Syst. **8** (4), 983–994 (2002).
DOI: <https://doi.org/10.3934/dcds.2002.8.983>
- [3] J. Kupka, *The triangular maps with closed sets of periodic points*, J. Math. Anal. Appl. **319** (1), 302–314 (2006).
DOI: <https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2005.06.028>
- [4] Л.С. Ефремова, *Дифференциальные свойства и притягивающие множества простейших косых произведений отображений интервала*, Матем. сб. **201** (6), 93–130 (2010).
DOI: <https://doi.org/10.4213/sm7551>
- [5] Л.С. Ефремова, *О C^0 - Ω -взрывах в C^1 -гладких косых произведениях отображений интервала с замкнутым множеством периодических точек*, Вестн. Нижегородского гос. ун-та им. Н.И. Лобачевского (3), 130–136 (2012).
- [6] L.S. Efremova, *Remarks on the nonwandering set of skew products with a closed set of periodic points of the quotient map*, in: Nonlinear maps and their applications. Springer Proc. Math. Statist. **57**, Springer, New York, 39–58 (2014).
DOI: https://doi.org/10.1007/978-1-4614-9161-3_6
- [7] Л.С. Ефремова, *Динамика косых произведений отображений интервала*, УМН **72** (1), 107–192 (2017).
DOI: <https://doi.org/10.4213/rm9745>
- [8] L.S. Efremova, *Simplest skew products on n -dimensional ($n \geq 2$) cells, cylinders and tori*, Lobachevskii J. Math. **43** (7), 1598–1618 (2022).
DOI: <https://doi.org/10.1134/S1995080222100080>

- [9] Л.С. Ефремова, М.А. Шалагин, *О предельных множествах простейших косых произведений на многомерных клетках*, Известия вузов. ПНД **32** (6), 796–815 (2024). DOI: <https://doi.org/10.18500/0869-6632-003134>
- [10] L.S. Efremova, D.A. Novozhilov, *Chain-recurrent C^0 - Ω -blowup in C^1 -smooth simplest skew products on multidimensional cells*, Regul. Chaotic Dyn. **30** (1), 120–140 (2025). DOI: <https://doi.org/10.1134/S156035472501006X>
- [11] З. Нитецки, *Введение в дифференциальную динамику*, Мир, М. 1975.
- [12] А.Н. Шарковский, *Существование циклов непрерывного преобразования прямой в себя*, Укр. матем. журн. **16** (1), 61–71 (1964).
- [13] А.Н. Шарковский, *О циклах и структуре непрерывного отображения*, Укр. матем. журн. **17** (3), 104–111 (1965).
- [14] P.E. Kloeden, *On Sharkovsky's cycle coexistence ordering*, Bull. Austral. Math. Soc. **20** (2), 171–177 (1979). DOI: <https://doi.org/10.1017/S0004972700010819>
- [15] Л.С. Ефремова, *О понятии Ω -функции косого произведения отображений интервала*, Итоги науки и техн. Современ. мат. и ее прил. Темат. обз. **67**, 129–160 (1999). URL: <https://www.mathnet.ru/rus/into81>
- [16] L.S. Efremova, *C^1 -smooth Ω -stable skew products and completely geometrically integrable self-maps of 3D-tori, I: Ω -stability*, Regul. Chaotic Dyn. **29** (3), 491–514 (2024). DOI: <https://doi.org/10.1134/762S1560354724520010>
- [17] L.S. Efremova, *Skew products and geometrically integrable maps: results, problems and prospects*, in: S. Elaydi et al. (eds.) *New developments in discrete dynamical systems, difference equations, and applications*, Springer Proc. Math. Stat. **485**, 119–145 (2025). DOI: https://doi.org/10.1007/978-3-031-82003-8_7
- [18] К. Куратовский, *Топология*, Т. 1, Мир, М., 1966.
- [19] О.М. Шарковський, *Неблукуючі точки та центр неперервного відображення прямої в себе*, Допов. АН УРСР **7**, 865–868 (1964).
- [20] L.S. Block, W.A. Coppel, *Dynamics in one dimension*, Lecture Notes in Math. **1513**, Springer-Verlag, Berlin, 1992. DOI: <https://doi.org/10.1007/BFb0084762>
- [21] Z. Nitecky, *Maps of the interval with closed periodic set*, Proc. Amer. Math. Soc. **85** (3), 451–456 (1982). DOI: <https://doi.org/10.1090/S0002-9939-1982-0656122-2>
- [22] А.Н. Шарковский, В.А. Добрынский, *Неблуждающие точки динамических систем*, в сб.: *Динамические системы и вопросы устойчивости решений дифференциальных уравнений*, Наукова думка, Киев, 165–174 (1973).

- [23] И.У. Бронштейн, *Неавтономные динамические системы*, Штиинца, Кишинев, 1984.
[24] В.А. Зорич, *Математический анализ*, Т. 1. Наука, М., 1981.

Людмила Сергеевна Ефремова

Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского,
пр-т Гагарина, д. 23, г. Нижний Новгород, 603022, Россия,
Московский физико-технический институт (университет),
Институтский переулок, д. 9, г. Долгопрудный, Московская область, 141701, Россия,
e-mail: ludmila.efremova@itmm.unn.ru

Шалагин Матвей Андреевич

Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского,
пр-т Гагарина, д. 23, г. Нижний Новгород, 603022, Россия,
e-mail: shalaginmatvey@gmail.com

On the asymptotic behavior of the trajectories of skew products with a closed set of periodic points

L.S. Efremova, M.A. Shalagin

Abstract. The article continues the research of the asymptotic behavior of the trajectories of the most simple skew products on multidimensional cells conducted by the authors. Here we describe the structure of nonwandering set of continuous skew products having a closed set of periodic points and such that the set of (least) periods of periodic points is unbounded. An example of a differentiable skew product with a closed set of periodic points is constructed, defined on an n -dimensional cell ($n \geq 3$) and having a one-dimensional ω -limit set.

Keywords: skew product, nonwandering set, Ω -blow up, ω -limit set.

DOI: 10.26907/2949-3919.2025.3.58-86

References

- [1] L.S. Efremova, *On the nonwandering set and the center of triangular mappings with a closed set of periodic points in the base*, in: Dynamical systems and nonlinear phenomena, Akad. Nauk Ukrain. SSR, Inst. Mat., Kiev, 15–25 (1990) [in Russian].
- [2] F. Balibrea, J.L. Guirao, J.I. Casado, *A triangular map on I^2 , whose ω -limit sets are all compact interval of $\{0\} \times I$* , Discrete Contin. Dyn. Syst. **8** (4), 983–994 (2002).
DOI: <https://doi.org/10.3934/dcds.2002.8.983>
- [3] J. Kupka, *The triangular maps with closed sets of periodic points*, J. Math. Anal. Appl. **319** (1), 302–314 (2006).
DOI: <https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2005.06.028>
- [4] L.S. Efremova, *Differential properties and attracting sets of a simplest skew product of interval maps*, Sb. Math. **201** (6), 873–907 (2010).
DOI: <https://doi.org/10.1070/SM2010v201n06ABEH004095>
- [5] L.S. Efremova, *On C^0 - Ω -blow-ups in C^1 -smooth skew products of interval mappings with a closed set of periodic points*, Vestnik of Lobachevsky State University of Nizhny Novgorod (3), 130–136, (2012) [in Russian].

Acknowledgements. The work is supported by the Russian Science Foundation (grant no. 24-21-00242).

Received: 13 May 2025. Accepted: 09 September 2025. Published: 16 October 2025.

-
- [6] L.S.Efremova, *Remarks on the nonwandering set of skew products with a closed set of periodic points of the quotient map*, in: Nonlinear maps and their applications. Springer Proc. Math. Statist. **57**, Springer, New York, 39–58 (2014).
DOI: https://doi.org/10.1007/978-1-4614-9161-3_6
- [7] L.S.Efremova, *Dynamics of skew products of interval maps*, Russian Math. Surveys **72** (1), 101–178 (2017).
DOI: <https://doi.org/10.1070/RM9745>
- [8] L.S.Efremova, *Simplest skew products on n -dimensional ($n \geq 2$) cells, cylinders and tori*, Lobachevskii J. Math. **43** (7), 1598–1618 (2022).
DOI: <https://doi.org/10.1134/S1995080222100080>
- [9] L.S.Efremova, M.A.Shalagin, *On limit sets of simplest skew products defined on multidimensional cells*, Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics, **32** (6), 796–815 (2024) [in Russian].
DOI: <https://doi.org/10.18500/0869-6632-003134>
- [10] L.S.Efremova, D.A. Novozhilov, *Chain-recurrent C^0 - Ω -blowup in C^1 -smooth simplest skew products on multidimensional cells*, Regul. Chaotic Dyn. **30** (1), 120–140 (2025).
DOI: <https://doi.org/10.1134/S156035472501006X>
- [11] Z. Nitecki, *Differentiable dynamics. An introduction to the orbit structure of diffeomorphisms*, The M.I.T. Press, Cambridge, Mass.-London, 1971.
- [12] A. N. Sharkovsky, *Coexistence of cycles of a continuous map of the line into itself*, Internat. J. Bifur. Chaos Appl. Sci. Engrg. **5** (5), 1263–1273 (1995).
DOI: <https://doi.org/10.1142/S0218127495000934>
- [13] A.N.Sharkovsky, *On cycles and structure of a continuous map*, Ukr. Mat. Zh. **17** (3), 104–111 (1965) [in Russian].
- [14] P.E. Kloeden, *On Sharkovsky's cycle coexistence ordering*, Bull. Austral. Math. Soc. **20** (2), 171–177 (1979).
DOI: <https://doi.org/10.1017/S0004972700010819>
- [15] L.S. Efremova, *On the concept of the Ω -function for the skew product of interval mappings*, J. Math. Sci. **105** (1), 1779–1798 (2001).
DOI: <https://doi.org/10.1023/A:1011311512743>
- [16] L.S.Efremova, *C^1 -smooth Ω -stable skew products and completely geometrically integrable self-maps of 3D-tori, I: Ω -stability*, Regul. Chaotic Dyn. **29** (3), 491–514 (2024).
DOI: <https://doi.org/10.1134/762S1560354724520010>
- [17] L.S.Efremova, *Skew products and geometrically integrable maps: results, problems and prospects*, in: S. Elaydi et al. (eds.) New developments in discrete dynamical systems, difference equations, and applications, Springer Proc. Math. Stat. **485**, 119–145 (2025).
DOI: https://doi.org/10.1007/978-3-031-82003-8_7

- [18] K. Kuratowski, *Topology*. Vol. 1, Academic Press, New York-London, 1966.
DOI: <https://doi.org/10.1016/C2013-0-11022-7>
- [19] O.M. Sharkovskii, *Non-wandering points and the center of a continuous mapping of the line into itself*, Dopov. Acad. Nauk Ukr. RSR, 865–868 (1964) [in Ukrainian].
- [20] L.S. Block, W.A. Coppel, *Dynamics in one dimension*, Lecture Notes in Math. **1513**, Springer-Verlag, Berlin, 1992.
DOI: <https://doi.org/10.1007/BFb0084762>
- [21] Z. Nitecky, *Maps of the interval with closed periodic set*, Proc. Amer. Math. Soc. **85** (3), 451–456 (1982).
DOI: <https://doi.org/10.1090/S0002-9939-1982-0656122-2>
- [22] A.N. Sharkovsky, V.A. Dobrynsky, *Nonwandering points of dynamical systems*, in: Dynamical systems and problems of the stability of solutions of differential equations, Naukova Dumka, Kiev, 165–174 (1973) [in Russian].
- [23] I.U. Bronshtein, *Non-autonomous dynamical systems*, Shtiintsa, Kishinev, 1984 [in Russian].
- [24] V. A. Zorich, *Mathematical Analysis*, Vol. I. Springer-Verlag, Berlin, 2015.
DOI: <https://doi.org/10.1007/978-3-662-48792-1>

Lyudmila Sergeevna Efremova

Lobachevskii Nizhny Novgorod State University,
23 Gagarin ave., Nizhny Novgorod 603022, Russia,
Moscow Institute of Physics and Technology,
9 Institutskii alley, Dolgoprudny, Moscow Region, 141701, Russia,
e-mail: ludmila.efremova@itmm.unn.ru

Matvey Andreevich Shalagin

Lobachevskii Nizhny Novgorod State University,
23 Gagarin ave., Nizhny Novgorod 603022, Russia,
e-mail: shalaginmatvey@gmail.com

Классификация меняющих ориентацию периодических гомеоморфизмов двумерного тора

Т.Д. Мартынов, О.В. Починка, Е.Е. Чилина

Аннотация. Согласно Я. Нильсену и Х. Хангу, каждый класс топологической сопряженности периодических гомеоморфизмов ориентируемых компактных поверхностей полностью описывается конечным набором данных, называемых *характеристикой*. Для двумерной сферы исчерпывающие классификационные результаты с построением линейных представителей в каждом классе сопряженности получены Б. Керекьярто. Для двумерного тора подобные результаты получены при участии авторов настоящей статьи. В данной работе найдены все характеристики меняющих ориентацию периодических гомеоморфизмов двумерного тора. Для каждой из них построен гомеоморфизм, представляющий класс топологической сопряженности. Классификация периодических гомеоморфизмов, кроме самостоятельного интереса, играет ключевую роль в решении проблемы Палиса–Пью о построении устойчивых дуг в пространстве дискретных динамических систем, входящей в список 50 важнейших проблем динамических систем. Для всех классов градиентно-подобных диффеоморфизмов поверхностей, где эта проблема решена, использовалась именно идея тесной связи таких систем с периодическими преобразованиями. Таким образом, полученный результат позволит расширить класс систем, для которых проблема Палиса–Пью решена.

Ключевые слова: периодические гомеоморфизмы, двумерный тор, топологическая классификация.

DOI: 10.26907/2949-3919.2025.3.87-109

Введение и формулировка результатов

Периодические гомеоморфизмы – один из трех типов гомеоморфизмов, возникающих в гомотопической теории гомеоморфизмов поверхностей Нильсена–Терстона [1]. Композиция таких гомеоморфизмов со сдвигом градиентного потока функции Морса порождает класс градиентно-подобных диффеоморфизмов поверхностей [2] – простейших структурно устойчивых систем. Эта взаимосвязь позволила получить классификацию

Благодарности. Исследование осуществлено в рамках Программы фундаментальных исследований НИУ ВШЭ.

© 2025 Т.Д. Мартынов, О.В. Починка, Е.Е. Чилина

Поступила: 19.06.2025. Принята: 09.09.2025. Опубликовано: 16.10.2025.

градиентно-подобных диффеоморфизмов, используя инварианты периодических гомеоморфизмов. Кроме того, тесные взаимоотношения между этими объектами привели к решению проблемы Палиса–Пью [3] построения устойчивых дуг между градиентно-подобными диффеоморфизмами тех поверхностей, для которых удалось получить полный список классов топологической сопряженности периодических преобразований [4, 5]. Таким образом, классификация периодических гомеоморфизмов поверхностей является не только самодостаточной задачей, но и ключом к решению ряда смежных проблем.

Одними из первых работ, посвященных классификации периодических гомеоморфизмов, являются работы Б. Керекьярто [6] и Л.Э.Я. Брауэра [7] 1919 года, в которых описываются периодические отображения 2-диска и 2-сферы. В работе [8] 1937 года Я. Нильсеном получены необходимые и достаточные условия топологической сопряженности сохраняющих ориентацию периодических гомеоморфизмов компактных ориентируемых поверхностей. Им доказано, что полный инвариант класса топологической сопряженности периодического гомеоморфизма описывается конечным набором данных – *характеристикой*. В работах [9, 10] 1983–1984 годов К. Йокоямой получено подобное описание классов периодических гомеоморфизмов компактных поверхностей, в том числе и неориентируемых, которое позже дополнено им в работе [11]. Х. Ханг [12] в 2017 году привел современное изложение результатов Я. Нильсена и обобщил их на случай меняющих ориентацию периодических гомеоморфизмов замкнутых ориентируемых поверхностей.

Работа С. Хиросэ [13] 2010 года содержит реализацию сохраняющих ориентацию периодических гомеоморфизмов компактных ориентируемых поверхностей родов 1, 2, 3, 4 посредством вращений Дэна. В работе [14] 2023 года Д.А. Барановым, В.З. Гринесом, О.В. Починкой, Е.Е. Чилиной найдены все характеристики сохраняющих ориентацию периодических гомеоморфизмов двумерного тора и построены алгебраические представители каждого класса топологической сопряженности. Также в работе [15] 2021 года Д.А. Барановым и О.В. Починкой найдены все характеристики сохраняющих ориентацию периодических гомеоморфизмов замкнутой ориентируемой поверхности рода 2.

Для периодических гомеоморфизмов многообразий размерности большей двух задача их классификации является значительно более сложной уже даже для случая трехмерного тора. Авторам настоящей работы известны следующие результаты. В работе 1971 года [16] К.И. Тахарой получена классификация конечных подгрупп группы $GL(3, \mathbb{Z})$, что соответствует классификации периодических алгебраических автоморфизмов трехмерного тора. Инволюции трехмерного тора классифицированы в работе К.В. Квуна [17] 1975 года. Работа Дж. Хемпеля [18] 1975 года посвящена классификации периодических гомеоморфизмов трехмерного тора без точек меньшего периода. Частичная классификация гомеоморфизмов четного периода трехмерного тора приведена в работе М.А. Наташена [19] 1988 года.

В нашей работе найдены все характеристики меняющих ориентацию периодических гомеоморфизмов двумерного тора. Каждая из них реализована алгебраическим диффеоморфизмом.

Приведем основные сведения про периодические гомеоморфизмы, необходимые для формулировки результатов настоящей работы (более детально см. [12]). Везде далее используются следующие обозначения:

- $\Sigma_{g,v}$ – ориентированная компактная поверхность рода g с v дырами;
- $\Sigma_g = \Sigma_{g,0}$ – ориентированная замкнутая поверхность рода g ;
- $\mathbb{T}^2 = \Sigma_1 = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ – двумерный тор;
- $p : (x, y) \mapsto (x, y) \pmod{1}$ – естественная проекция из \mathbb{R}^2 в \mathbb{T}^2 ;
- $N(A)$ – трубчатая окрестность подмногообразия $A \subset \Sigma_{g,v}$ (односторонняя трубчатая окрестность множества A в случае, когда множество A принадлежит краю поверхности $\Sigma_{g,v}$);
- $O_f(x) = \{f^n(x)\}_{n \in \mathbb{Z}}$ – орбита точки x гомеоморфизма f .

Гомеоморфизм $f : \Sigma_{g,v} \rightarrow \Sigma_{g,v}$ называется *периодическим* гомеоморфизмом периода $n \in \mathbb{N}$, если $f^n = \text{id}_{\Sigma_{g,v}}$ и $f^k \neq \text{id}_{\Sigma_{g,v}}$ для любого натурального $k < n$. Периодом точки $x \in \Sigma_{g,v}$ периодического гомеоморфизма $f : \Sigma_{g,v} \rightarrow \Sigma_{g,v}$ называется наименьшее натуральное число k такое, что $f^k(x) = x$. Точка $x \in \Sigma_{g,v}$ называется *точкой меньшего периода* периодического гомеоморфизма f периода n , если ее период $k < n$.

Гомеоморфизмы $f : \Sigma_{g,v} \rightarrow \Sigma_{g,v}$ и $f' : \Sigma'_{g,v} \rightarrow \Sigma'_{g,v}$ будем называть *топологически сопряженными*, если существует сохраняющий ориентацию гомеоморфизм $h : \Sigma_{g,v} \rightarrow \Sigma'_{g,v}$ такой, что $f'h = hf$.

Для периодического гомеоморфизма $f : \Sigma_{g,v} \rightarrow \Sigma_{g,v}$ периода n введем следующие обозначения:

- B_f^k – множество всех точек периода $0 < k < n$;
- B_f – множество всех точек периода меньшего n .

Фактор-пространство $\Sigma_{g,v}/f$ является компактной поверхностью, называемой *модульной поверхностью гомеоморфизма f* . Обозначим через $\pi_f : \Sigma_{g,v} \rightarrow \Sigma_{g,v}/f$ естественную проекцию. Положим $\mathcal{B}_f = \pi_f(B_f)$.

Выберем точку $\bar{x}_0 \in \pi_f^{-1}(x)$ из полного прообраза точки $x \in (\Sigma_{g,v}/f) \setminus \mathcal{B}_f$ и определим гомоморфизм $\Omega_f : \pi_1((\Sigma_{g,v}/f) \setminus \mathcal{B}_f, x) \rightarrow \mathbb{Z}_n$ следующим образом. Для каждой петли $\gamma \subset \Sigma_{g,v}/f \setminus \mathcal{B}_f$ в точке $x \in \Sigma_{g,v}/f \setminus \mathcal{B}_f$ обозначим через $[\gamma]$ элемент фундаментальной группы $\pi_1((\Sigma_{g,v}/f) \setminus \mathcal{B}_f, x)$, состоящий из всех петель в точке x , гомотопных γ . Для петли γ обозначим через $\bar{\gamma}$ ее поднятие на $\Sigma_{g,v}$ с началом в точке \bar{x}_0 и концом в точке \bar{x}_1 (см. рис. 1). Тогда существует натуральное число $r \leq n$ такое, что $f^r(\bar{x}_0) = \bar{x}_1$.

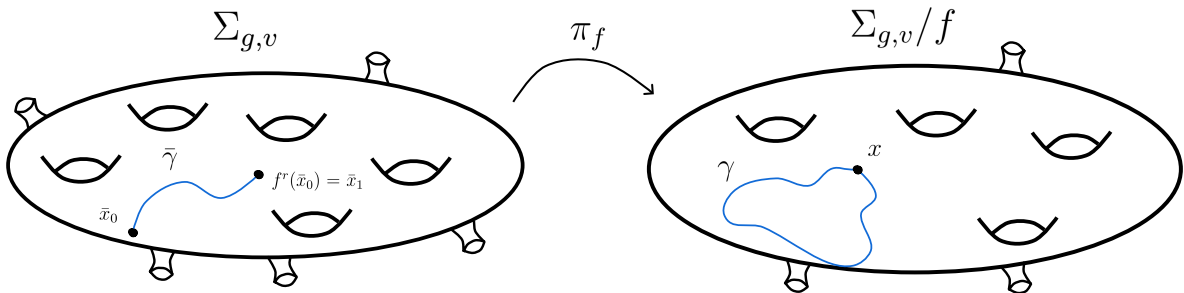


Рис. 1. Поднятие петли γ

Определим гомоморфизм $\Omega_f([\gamma]) = r \pmod{n}$, который индуцирует гомоморфизм $\omega_f: H_1((\Sigma_{g,v}/f) \setminus \mathcal{B}_f) \rightarrow \mathbb{Z}_n$.

Утверждение 1 ([12, предложение 2.4]). Пусть $f: \Sigma_g \rightarrow \Sigma_g$ – меняющий ориентацию периодический гомеоморфизм периода n . Тогда

- n – четное число;
- если множество $B_f^k \neq \emptyset$ для четного значения $0 < k < n$, то оно конечно;
- если множество $B_f^k \neq \emptyset$ для нечетного значения k , то оно состоит из конечного числа попарно непересекающихся простых замкнутых кривых и $n = 2k$;
- факторпространство Σ_g/f может быть как ориентируемой, так и неориентируемой компактной поверхностью и

$$\partial(\Sigma_g/f) = \bigcup_{k\text{-нечетное}} \pi_f(B_f^k). \quad (1)$$

Положим (см. рис. 2):

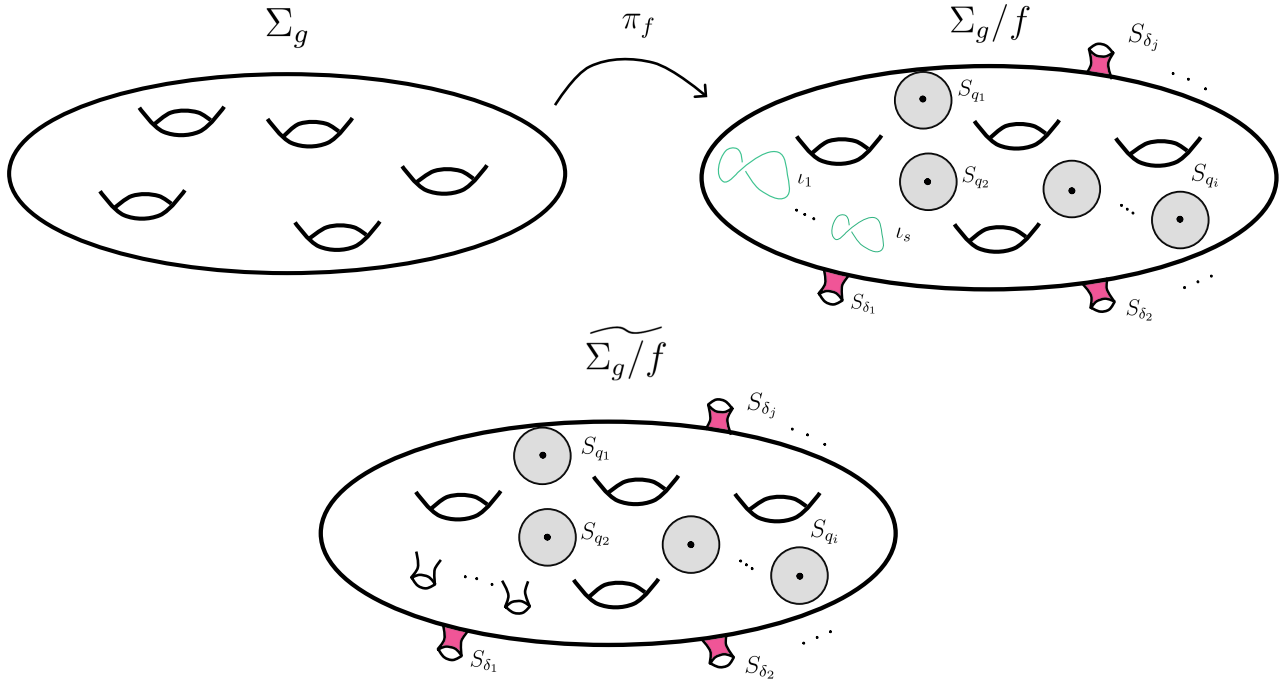
- q_1, q_2, \dots, q_b – элементы множества $\bigcup_{k\text{-четное}} \pi_f(B_f^k)$;
- $\delta_1, \dots, \delta_c$ – компоненты связности края поверхности Σ_g/f ;
- ι_1, \dots, ι_s – произвольный набор простых замкнутых кривых на Σ_g/f таких, что топологическое пространство $cl(N(\iota_l))$ для любого $l = 1, \dots, s$ гомеоморфно ленте Мёбиуса, и поверхность Σ_g/f после разреза по кривым ι_1, \dots, ι_s является ориентируемой;
- $S_{q_i}, i = 1, \dots, b$ – край поверхности $cl(N(q_i))$;
- $S_{\delta_j}, j = 1, \dots, c$ – компонента связности края поверхности $cl(N(\delta_j))$, отличная от δ_j .

Разрежем поверхность Σ_g/f по кривым ι_1, \dots, ι_s . Получим ориентируемую поверхность, которую обозначим через $\widetilde{\Sigma_g/f}$. Зафиксируем на $\widetilde{\Sigma_g/f}$ произвольную ориентацию. Ориентация $\widetilde{\Sigma_g/f}$ индуцирует ориентацию края поверхности $\widetilde{\Sigma_g/f} \setminus N(\mathcal{B}_f)$, которая в свою очередь индуцирует ориентацию кривых $\iota_l, S_{q_i}, S_{\delta_j}$. Введем следующие множества:

- $Q = \{\omega_f(S_{q_1}), \dots, \omega_f(S_{q_b})\}$,
- $\Delta = \{\omega_f(S_{\delta_1}), \dots, \omega_f(S_{\delta_c})\}$,
- $I = \{\omega_f(\iota_1), \dots, \omega_f(\iota_s)\}$.

Обозначим через h род поверхности $\widetilde{\Sigma_g/f}$. Тогда класс топологической сопряженности гомеоморфизма f взаимно однозначно соответствует классу эквивалентности (относительно отношений эквивалентности $R0$ – $R4$, описанных в утверждении 10 ниже) его характеристики

$$\chi : [h, n; Q; \Delta; I]. \quad (2)$$


 Рис. 2. Модульная поверхность Σ_g/f

Основными результатами данной работы являются следующие теоремы:

Теорема 2. Любой меняющий ориентацию периодический гомеоморфизм $f: \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2$ имеет в точности одну из следующих попарно неэквивалентных характеристик:

- $\chi_{1,k} : [0, 2k; \emptyset; \emptyset; \{2k-1, 1\}]$, где $k \in \mathbb{N}$;
- $\chi_{2,k} : [0, 4k; \emptyset; \emptyset; \{2k-1, 1\}]$, где $k \in \mathbb{N}$;
- $\chi_{1,k,\ell} : [0, 2(2k-1); \emptyset; \{2\ell, 2(2k-\ell-1)\}; \emptyset]$, $k, \ell \in \mathbb{N}$, $\text{НОД}(\ell, 2k-1) = 1$;
- $\chi_{2,k,\ell} : [0, 2(2k-1); \emptyset; \{4\ell\}; \{2(k-\ell)-1\}]$, $k, \ell \in \mathbb{N}$, $\text{НОД}(\ell, 2k-1) = 1$.

В работе Л.Э.Я. Брауэра [20] доказано, что любой меняющий ориентацию периодический гомеоморфизм двумерного тора топологически сопряжен диффеоморфизму одного из следующих видов: $f(x, y) = \left(x + \frac{l}{k}, -y\right) \pmod{1}$; $f(x, y) = \left(x + y + \frac{l}{k}, -y\right) \pmod{1}$, $\text{НОД}(k, l) = 1$. В теореме ниже среди них выделены гомеоморфизмы, реализующие классы топологической сопряженности, соответствующие характеристикам теоремы 2.

Теорема 3. Характеристики $\chi_{1,k}$, $\chi_{2,k}$, $\chi_{1,k,\ell}$, $\chi_{2,k,\ell}$, реализуются, соответственно, гомеоморфизмами:

- $f_{1,k}(x, y) = \left(x + \frac{1}{2k}, -y\right) \pmod{1}$;
- $f_{2,k}(x, y) = \left(x + y + \frac{1}{4k}, -y\right) \pmod{1}$;
- $f_{1,k,\ell}(x, y) = \left(x + \frac{\alpha}{2k-1}, -y\right) \pmod{1}$, где $2\ell\alpha \equiv 1 \pmod{2k-1}$;
- $f_{2,k,\ell}(x, y) = \left(x + y + \frac{\alpha}{2k-1}, -y\right) \pmod{1}$, где $4\ell\alpha \equiv 1 \pmod{2k-1}$.

1. Вспомогательные сведения и факты

В этом разделе приводятся вспомогательные утверждения про периодические гомеоморфизмы и действие группы на топологическом пространстве.

1.1. ПЕРИОДИЧЕСКИЕ ГОМЕОМОРФИЗМЫ. Пусть $f: \Sigma_{g,v} \rightarrow \Sigma_{g,v}$ – сохраняющий ориентацию периодический гомеоморфизм периода n . Тогда модульная поверхность $\Sigma_{g,v}/f$ является компактной ориентированной поверхностью с ориентацией, индуцированной накрытием π_f , в случае $v = 0$ она замкнута. При этом, если множество B_f не пусто, то оно конечно. Введем следующие обозначения (см. рис. 3):

- q_1, q_2, \dots, q_b – элементы множества \mathcal{B}_f ;
- $\delta_1, \dots, \delta_c$ – компоненты связности края поверхности $\Sigma_{g,v}/f$;
- $S_{q_i}, j = 1, \dots, b$ – край поверхности $cl(N(q_i))$.

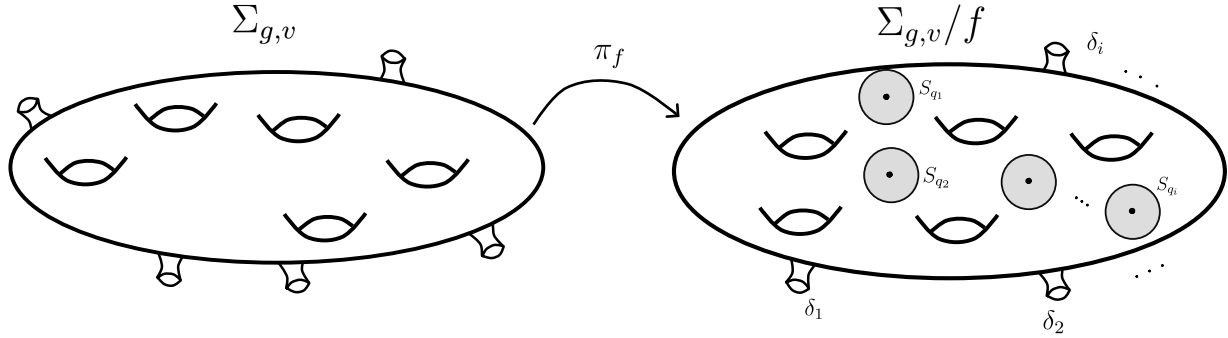


Рис. 3. Модульная поверхность $\Sigma_{g,v}/f$

Ориентируем кривые S_{q_i} и δ_i согласованно с ориентацией поверхности $\Sigma_{g,v}/f \setminus N(\mathcal{B}_f)$. Введем множества $Q = \{\omega_f(S_{q_1}), \dots, \omega_f(S_{q_b})\}$, $\Delta = \{\omega_f(\delta_1), \dots, \omega_f(\delta_c)\}$ и обозначим через h род поверхности $\Sigma_{g,v}/f$. Определим характеристику гомеоморфизма f , как набор следующих параметров

$$\kappa : [h, n; Q; \Delta]. \quad (3)$$

Утверждение 4 ([8, п. 11, с. 53]). *Два сохраняющих ориентацию периодических гомеоморфизма ориентированной компактной поверхности топологически сопряжены тогда и только тогда, когда их характеристики совпадают.*

Утверждение 5 ([12, теорема 3.3]). *Сохраняющий ориентацию периодический гомеоморфизм $f: \Sigma_{g,v} \rightarrow \Sigma_{g,v}$ с характеристикой*

$$\kappa : [h, n; Q = \{\theta_1, \dots, \theta_b\}; \Delta = \{\eta_1, \dots, \eta_c\}]$$

существует тогда и только тогда, когда

- 1) $\theta_i \not\equiv 0 \pmod{n}$, $i = 1, \dots, b$;

- 2) $\theta_1 + \dots + \theta_b + \eta_1 + \dots + \eta_c \equiv 0 \pmod{n}$;
- 3) если $h = 0$, то $\text{НОД}(\theta_1, \dots, \theta_b, \eta_1, \dots, \eta_c, n) = 1$;
- 4) $v = \sum_{j=1}^c \text{НОД}(\eta_j, n)$;
- 5) $2g + v - 2 = n \left(2h + b + c - \sum_{i=1}^b \frac{\text{НОД}(\theta_i, n)}{n} - 2 \right)$.

Утверждение 6 ([14, теоремы 1, 2]). Пусть $f: \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2$ – сохраняющий ориентацию периодический гомеоморфизм с непустым множеством точек меньшего периода. Тогда характеристика f совпадает в точности с одной из следующих:

$$\begin{aligned} \kappa_1 : [0, 2; \{1, 1, 1, 1\}; \emptyset], \quad \kappa_2 : [0, 3; \{1, 1, 1\}; \emptyset], \quad \kappa_3 : [0, 3; \{2, 2, 2\}; \emptyset], \quad \kappa_4 : [0, 6; \{1, 2, 3\}; \emptyset], \\ \kappa_5 : [0, 6; \{3, 4, 5\}; \emptyset], \quad \kappa_6 : [0, 4; \{2, 1, 1\}; \emptyset], \quad \kappa_7 : [0, 4; \{2, 3, 3\}; \emptyset]. \end{aligned}$$

Каждая характеристика κ_i реализуется алгебраическим автоморфизмом двумерного тора $f_{A_i}: \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2$, индуцированным матрицей A_i :

$$\begin{aligned} A_1 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}, \quad A_4 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \\ A_5 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_6 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_7 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Утверждение 7 ([14, теорема 2]). Пусть $f: \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2$ – сохраняющий ориентацию периодический гомеоморфизм периода $n \in \mathbb{N}$ без точек меньшего периода. Тогда его характеристика имеет вид $\kappa : [1, n; \emptyset; \emptyset]$.

Для установления взаимосвязи характеристики $\chi : [h, n; Q; \Delta; I]$ меняющего ориентацию периодического гомеоморфизма f с характеристикой его квадрата f^2 , нам понадобится следующий факт.

Предложение 8. Пусть $f: \Sigma_g \rightarrow \Sigma_g$ – меняющий ориентацию периодический гомеоморфизм периода $n = 2t$. Тогда верны следующие утверждения:

- 1) если период точки x равен $2k$ для гомеоморфизма f , то для гомеоморфизма f^2 ее период равен k ;
- 2) если период точки x равен $2k - 1$ для гомеоморфизма f , то для гомеоморфизма f^2 ее период равен $2k - 1$;
- 3) гомеоморфизм f^2 имеет период t ;
- 4) гомеоморфизм f^2 имеет четное число орбит меньшего периода.

Доказательство. Проведем доказательство отдельно для каждого пункта.

1) Если период точки x гомеоморфизма f равен $2k$, то $f^{2k}(x) = (f^2(x))^k = x$. Заметим, что для $s < k$ выполняется $(f^2(x))^s = f^{2s}(x) \neq x$, так как иначе $2s < 2k$ и нарушалось бы условие минимальности в определении периода точки x для гомеоморфизма f .

2) Если период точки x гомеоморфизма f равен $(2k - 1)$, то, согласно утверждению 1, $m = 2k - 1$. Тогда $f^n(x) = f^{2m}(x) = (f^2)^m(x) = (f^2)^{2k-1}(x) = x$. Как и в пункте 1), устанавливается, что $2k - 1$ – период точки x .

3) $f^{2m} = (f^2)^m = \text{id}$ и для любых $s < m \Rightarrow f^{2s} \neq \text{id}_{\Sigma_g}$.

4) Пусть $f: \Sigma_g \rightarrow \Sigma_g$ – меняющий ориентацию периодический гомеоморфизм периода $n = 2m$. Тогда $f^2: \Sigma_g \rightarrow \Sigma_g$ – сохраняющий ориентацию периодический гомеоморфизм периода m . Если $B_{f^2} = \emptyset$, то число орбит меньшего периода равно нулю. Если $B_{f^2} \neq \emptyset$, то отсюда следует, что B_{f^2} конечно. Из доказанных выше пунктов 1) и 2) следует, что x – точка меньшего периода гомеоморфизма $f^2 \iff x$ – точка меньшего четного периода гомеоморфизма f . Пусть $O_f(x)$ – орбита точки $x \in B_f$ периода $2k < 2m$. Тогда $O_f(x) = O_{f^2}(x) \sqcup O_{f^2}(f(x))$. Отсюда следует, что если гомеоморфизм f имеет p орбит точек меньшего четного периода, то гомеоморфизм f^2 имеет $2p$ орбит точек меньшего периода. \square

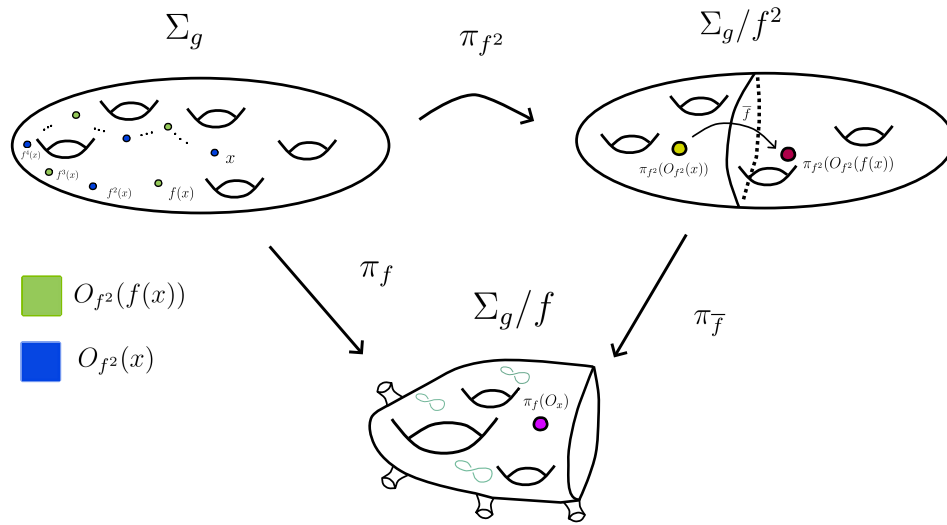
Пусть $f: \Sigma_g \rightarrow \Sigma_g$ – меняющий ориентацию периодический гомеоморфизм периода n . Так как гомеоморфизм $f^2: \Sigma_g \rightarrow \Sigma_g$ сохраняет ориентацию, то модульная поверхность Σ_g/f^2 компактна и ориентируема. Орбита точки четного периода гомеоморфизма f распадается на две орбиты относительно f^2 и при проекции на Σ_g/f^2 представляет две различные точки (см. рис. 4). Орбита точки нечетного периода гомеоморфизма f на Σ_g/f^2 проецируется в одну точку на Σ_g/f^2 . Тогда f индуцирует гомеоморфизм $\bar{f}: \Sigma_g/f^2 \rightarrow \Sigma_g/f^2$ периода 2 и для естественной проекции $\pi_{\bar{f}}: \Sigma_g/f^2 \rightarrow \Sigma_g/f$ имеет место равенство $\pi_{\bar{f}} \pi_{f^2} = \pi_f$. Эти соотношения в совокупности с утверждениями 1, 5 приводят к следующему результату.

Утверждение 9 ([12], теорема 4.9). *Меняющий ориентацию периодический гомеоморфизм $f: \Sigma_g \rightarrow \Sigma_g$ с характеристикой*

$$\chi: [h, 2m; Q = \{2\theta_1, \dots, 2\theta_b\}; \Delta = \{2\eta_1, \dots, 2\eta_c\}; I = \{\zeta_1, \dots, \zeta_s\}]$$

существует тогда и только тогда, когда

- 1) $\Delta \cup I \neq \emptyset$;
- 2) если m четно, то $\Delta = \emptyset$;
- 3) ζ_l нечетно при $l = 1, \dots, s$;
- 4) $[h, m; \{\theta_1, \dots, \theta_b\}; \{\eta_1, \dots, \eta_c, \zeta_1, \dots, \zeta_s\}]$ – характеристика сохраняющего ориентацию периодического гомеоморфизма;
- 5) $g - 1 = m \left(2h + b + c + s - \sum_{i=1}^b \frac{\text{НОД}(\theta_i, m)}{m} - 2 \right)$.


 Рис. 4. Действие \bar{f}

Утверждение 10 ([12, теорема 5.1]). Два меняющих ориентацию периодических гомеоморфизма замкнутой ориентированной поверхности топологически сопряжены тогда и только тогда, когда их характеристики эквивалентны посредством отношений R0–R4, где

$$R0 : [h, 2m; Q; \Delta; I] \sim [h, 2m; Q; \Delta; I];$$

$$R1 : [h, 2m; Q; \Delta; I] \sim [h, 2m; \{-2\theta_1, \dots, -2\theta_b\}; \{-2\eta_1, \dots, -2\eta_c\}; \{-\zeta_1, \dots, -\zeta_s\}];$$

$$R2 : [h, 2m; Q; \Delta; I] \sim$$

$$a) [h, 2m; \{-2\theta_1, 2\theta_2, \dots, 2\theta_b\}; \Delta; \{\zeta_1, \dots, \zeta_{s-1}, \zeta_s + 2\theta_1\}],$$

$$b) [h, 2m; Q; \{-2\eta_1, 2\eta_2, \dots, 2\eta_c\}; \{\zeta_1, \dots, \zeta_{s-1}, \zeta_s + 2\eta_1\}],$$

$$c) [h, 2m; Q; \Delta; \{-\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_{s-1}, \zeta_s + 2\zeta_1\}];$$

$$R3 : [h, 2m; Q; \Delta; \{\zeta_1, \dots, \zeta_{s-3}, \zeta_{s-2}, \zeta_{s-1}, \zeta_s\}] \sim$$

$$[h + 1, 2m; Q; \Delta; \{\zeta_1, \dots, \zeta_{s-3}, \zeta_{s-2} + \zeta_{s-1} + \zeta_s\}] \text{ при } s \geq 3;$$

$$R4 : [h, 2m; Q; \Delta; \{\zeta_1, \zeta_2\}] \sim [h, 2m; Q; \Delta; \{\zeta_1 + 2d, \zeta_2 - 2d\}] \text{ при } s = 2, \text{ здесь}$$

$$d = \begin{cases} 1, & \text{если } h = 0; \\ \text{НОД}(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_b, \eta_1, \dots, \eta_c), & \text{если } h > 0. \end{cases}$$

1.2. Действие группы на топологическом пространстве. Пусть X – топологическое пространство, G – группа. Говорят, что G действует на X , если задано отображение множества $G \times X$ в X , которое обозначается $(g, x) \mapsto g \cdot x$ и обладает следующими свойствами:

- 1) для всех $x \in X$ выполняется $1 \cdot x = x$, где $1 \in G$ – единичный элемент группы;
- 2) для всех $g, h \in G, x \in X$ выполняется $g \cdot (h \cdot x) = (g \cdot h) \cdot x$.

Топологическое пространство X называется G -пространством, если G действует на X и отображение $\psi(x) = g \cdot x$ непрерывно. Введем отношение эквивалентности R на X следующим образом: $xRy \Leftrightarrow \exists g \in G : y = g \cdot x \Leftrightarrow y \in G \cdot x$, где $G \cdot x = \{g \cdot x \mid x \in G\}$. Мно-

жество X/G классов эквивалентности с фактор-топологией называется *пространством орбит действия G на X* .

Замечание 11. Для любого гомеоморфизма $f: X \rightarrow X$ топологическое пространство X является G -пространством, если $G = \langle f \rangle = \{f^n\}_{n \in \mathbb{Z}}$.

Утверждение 12 ([21, следствие 8.12]). *Если X – компактное хаусдорфово G -пространство с конечной группой G , то X/G – компактное хаусдорфово пространство.*

Предложение 13. Пусть $f: X \rightarrow X$ – периодический гомеоморфизм компактного хаусдорфова топологического пространства (X, τ) , (A, τ_A) – замкнутое подмножество с индуцированной топологией такое, что для любого $x \in X$ выполняется $O_f(x) \cap A \neq \emptyset$ и на A задано отношение эквивалентности R следующим образом: $xRy \iff x, y \in (O_f(x) \cap A)$. Тогда $X/f \cong A/R$.

Доказательство. Пусть $\pi_R: A \rightarrow A/R$ – каноническая проекция, а $(X/f, \tau_f)$ – топологическое пространство со стандартной фактор-топологией. Рассмотрим отображение $h: X/f \rightarrow A/R$, действующее по правилу: $\pi_f(O_f(x)) \mapsto \pi_R(O_f(x) \cap A)$. Покажем, что h биективно и открыто.

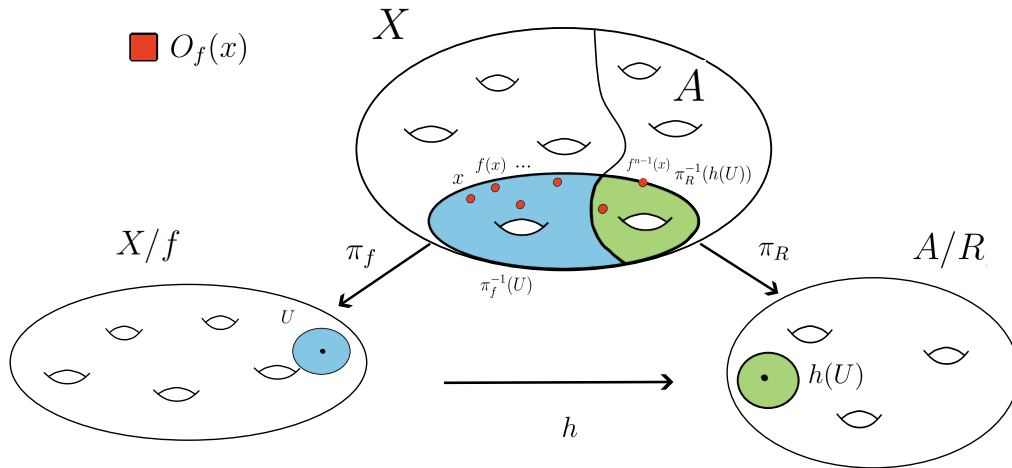
1) Инъекция: Пусть $\pi_f(x) \neq \pi_f(y)$, тогда $O_f(x) \cap O_f(y) = \emptyset$. Отсюда следует, что $h(\pi_f(x)) \neq h(\pi_f(y))$, так как $(O_f(x) \cap A) \cap (O_f(y) \cap A) = (O_f(x) \cap O_f(y)) \cap A = \emptyset$.

2) Сюръекция: По условию, для любого $x \in X$ выполняется $O_f(x) \cap A \neq \emptyset$. Значит для любой точки $\pi_R(O_f(x) \cap A) \in A/R$ существует точка $\pi_f(O_f(x)) \in X/f$ такая, что $h(\pi_f(O_f(x))) = \pi_R(O_f(x) \cap A)$.

3) Открытость: Пусть τ_R – индуцированная фактор-топология на A/R . Покажем, что для любого $U \in \tau_f$ выполняется $h(U) \in \tau_R$. Множество $U \in \tau_f \iff \pi_f^{-1}(U) \in \tau$. По условию $\pi_f^{-1}(U) \cap A \neq \emptyset$ и при этом данное пересечение является следом для A , т. е. открыто в индуцированной топологии. Множество $h(U)$ открыто $\iff \pi_R^{-1}(h(U)) \in \tau_A \iff \pi_R^{-1}(h(U))$ есть след открытого множества в X . Заметим, что по построению отображения верно равенство: $\pi_R^{-1}(h(U)) = \pi_f^{-1}(U) \cap A$ (см. рис. 5). Отсюда получаем следующую импликацию: $U \in \tau_f \Rightarrow h(U) \in \tau_R$. Так как h – биекция, то открытость равносильна непрерывности $h^{-1}: A/R \rightarrow X/f$.

Заметим, что A – замкнутое подмножество компактного пространства X , а значит A – компактно (см. [21, теорема 7.10]). Следовательно, и образ непрерывного отображения $A/R = \pi_R(A)$ будет компактным. Так как $f: X \rightarrow X$ – периодический гомеоморфизм, то группа $G = \langle f \rangle$ является конечной. Из утверждения 12 следует, что X/f – компактное хаусдорфово пространство. Так как непрерывное биективное отображение компактного пространства в хаусдорфово пространство является гомеоморфизмом (см. [21, теорема 8.8]), то h – гомеоморфизм. \square

Множество A , удовлетворяющее условиям предложения 13 и такое, что $\text{int } A$ не содержит точек с одной и той же орбиты, будем называть *фундаментальной областью гомеоморфизма f* .


 Рис. 5. Действие гомеоморфизма h

2. Нахождение характеристик

Докажем теорему 2 о том, что любой меняющий ориентацию периодический гомеоморфизм $f: \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2$ имеет в точности одну из следующих попарно неэквивалентных характеристик:

- $\chi_{1,k} : [0, 2k; \emptyset; \emptyset; \{2k - 1, 1\}]$, где $k \in \mathbb{N}$;
- $\chi_{2,k} : [0, 4k; \emptyset; \emptyset; \{2k - 1, 1\}]$, где $k \in \mathbb{N}$;
- $\chi_{1,k,\ell} : [0, 2(2k - 1); \emptyset; \{2\ell, 2(2k - \ell - 1)\}; \emptyset]$, $k, \ell \in \mathbb{N}$, $\text{НОД}(\ell, 2k - 1) = 1$;
- $\chi_{2,k,\ell} : [0, 2(2k - 1); \emptyset; \{4\ell\}; \{2(k - \ell) - 1\}]$, $k, \ell \in \mathbb{N}$, $\text{НОД}(\ell, 2k - 1) = 1$.

Доказательство. Пусть $f: \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2$ – меняющий ориентацию периодический гомеоморфизм с периодом $n = 2m$. Тогда $f^2: \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2$ – сохраняющий ориентацию периодический гомеоморфизм, период которого, в силу предложения 8, равен m . В силу этого же утверждения, f^2 имеет четное число орбит меньшего периода. Из утверждений 6, 7 следует, что f^2 имеет либо характеристику $\kappa_1 : [0, 2; \{1, 1, 1, 1\}]$, либо характеристику $\kappa : [1, m; \emptyset; \emptyset]$.

Если f^2 имеет характеристику κ_1 , то $m = 2$ и, следовательно, по утверждению 1, f не имеет орбит нечетного меньшего периода. Таким образом, f имеет характеристику $[h, 4; \{2, 2\}; \emptyset; \{\zeta_1, \dots, \zeta_s\}]$, где параметры h, s , согласно пункту 5) утверждения 9 удовлетворяют соотношению $2h = 1 - s$. Поскольку $h \geq 0$, то $s \leq 1$. В силу условия 1) утверждения 9, $s > 0$, и, следовательно, $s = 1$, $h = 0$. Тогда единственно возможная характеристика f примет вид $[0, 4; \{2, 2\}; \emptyset; \{\zeta\}]$, где, в силу условия 2) утверждения 5, $4 + \zeta \equiv 0 \pmod{2}$, что противоречит условию 3) утверждения 9 о нечетности ζ .

Таким образом, гомеоморфизм f^2 имеет характеристику $\kappa : [1, m; \emptyset; \emptyset]$ и $B_f = B_f^m$. Далее рассмотрим отдельно две ситуации: 1) m – четное, 2) m – нечетное.

1) Если m – четное, то из утверждения 1 следует, что $\Delta = \emptyset$. Поскольку f^2 не имеет точек меньшего периода, то, в силу предложения 8, $Q = \emptyset$. Таким образом, f имеет характеристику $[h, 2m; \emptyset; \emptyset; \{\zeta_1, \dots, \zeta_s\}]$, где параметры h, s , согласно пункту 5) утверждения 9, удовлетворяют соотношению $2h = 1 - s$.

ждения 9, удовлетворяют соотношению $2h = 2 - s$. Поскольку $h \geq 0$, то $s \leq 2$. В силу условия 1) утверждения 9, $s > 0$. Следовательно, $s = 2$, $h = 0$. Тогда единственно возможная характеристика f примет вид $[0, 2m; \emptyset; \emptyset; \{\zeta_1, \zeta_2\}]$, где, в силу условия 2) утверждения 5, $\zeta_1 + \zeta_2 \equiv 0 \pmod{m}$. Воспользовавшись отношением эквивалентности $R4$, мы получим, что $[0, 2m; \emptyset; \emptyset; \{\zeta_1, \zeta_2\}] \sim [0, 2m; \emptyset; \emptyset; \{\zeta, 1\}]$, где $\zeta + 1 \equiv 0 \pmod{m}$. Поскольку $\zeta \in \{1, \dots, 2m - 1\}$, то $\zeta + 1 \in \{m, 2m\}$ и, следовательно, $\zeta \in \{m - 1, 2m - 1\}$. Если $\zeta = 2m - 1$, то получаем характеристику

$$\chi_{1,m} : [0, 2m; \emptyset; \emptyset; \{2m - 1, 1\}], \quad m \in 2\mathbb{N}. \quad (4)$$

Если $\zeta = m - 1$, то, положив $m = 2k$, получаем характеристику

$$\chi_{2,k} : [0, 4k; \emptyset; \emptyset; \{2k - 1, 1\}], \quad k \in \mathbb{N}. \quad (5)$$

2) Если m – нечетное, то рассмотрим два подслучая: 2а) $B_f = \emptyset$, 2б) $B_f \neq \emptyset$.

В случае 2а), согласно утверждению 1, $Q = \Delta = \emptyset$. Следовательно, характеристика гомеоморфизма f имеет вид $[h, 2m; \emptyset; \emptyset; \{\zeta_1, \dots, \zeta_s\}]$, где параметры h, s , в силу условия 5) утверждения 9, удовлетворяют соотношению $2h = 2 - s$. Как и в случае 1), мы получим характеристику $[0, 2m; \emptyset; \emptyset; \{\zeta_1, \zeta_2\}] \sim [0, 2m; \emptyset; \emptyset; \{\zeta, 1\}]$, где $\zeta \in \{m - 1, 2m - 1\}$. Поскольку m – нечетное, то $\zeta = m - 1$ – четное, что противоречит условию 3) утверждения 9. Тогда $\zeta = 2m - 1$. Откуда получаем характеристику:

$$\chi_{1,m} : [0, 2m; \emptyset; \emptyset; \{2m - 1, 1\}], \quad m \in \mathbb{N} \setminus 2\mathbb{N}. \quad (6)$$

Объединив характеристики (4) и (6), получим характеристику

$$\chi_{1,k} : [0, 2k; \emptyset; \emptyset; \{2k - 1, 1\}], \quad k \in \mathbb{N}. \quad (7)$$

В случае 2б), из утверждения 1 следует, что $Q = \emptyset$ и $\Delta \neq \emptyset$. Следовательно, характеристика гомеоморфизма f имеет вид $[h, 2m; \emptyset; \{\eta_1, \dots, \eta_c\}; \{\zeta_1, \dots, \zeta_s\}]$, где параметры $h \geq 0$, $c > 0$, $s \geq 0$, в силу условия 5) утверждения 9, удовлетворяют соотношению $2h = 2 - (c + s)$. Тогда $h = 0$, а для пары c, s возможны два случая: либо $c = 2$, $s = 0$, либо $c = s = 1$.

Если $c = 2$, $s = 0$, то из условий 2), 3) утверждения 5 следует, что $\eta_1 + \eta_2 = m$. Откуда, положив $m = 2k - 1$, $\eta_1 = \ell$, получаем характеристику

$$\chi_{1,k,\ell} : [0, 2(2k - 1); \emptyset; \{2\ell, 2(2k - \ell - 1)\}; \emptyset], \quad k, \ell \in \mathbb{N}, \quad \text{НОД}(\ell, 2k - 1) = 1. \quad (8)$$

Если $c = s = 1$, то характеристика гомеоморфизма f имеет вид $[h, 2m; \emptyset; \{2\eta\}; \{\zeta\}]$. Из условий 2), 3) утверждения 5 следует, что $(\eta + \zeta) \in \{m, 2m\}$. Тогда характеристика принимает вид $[h, 2m; \emptyset; \{2\eta\}; \{m - \eta\}]$ или $[h, 2m; \emptyset; \{2\eta\}; \{2m - \eta\}]$, где $\text{НОД}(\eta, m) = 1$. В силу пункта б) отношения эквивалентности $R2$, характеристика второго вида эквивалентна характеристике первого вида. Действительно,

$$[h, 2m; \emptyset; \{2\eta\}; \{2m-\eta\}] \sim [h, 2m; \emptyset; \{-2\eta\}; \{2m+\eta\}] = [h, 2m; \emptyset; \{2(m-\eta)\}; \{m-(m-\eta)\}].$$

Таким образом, учитывая, что в характеристике первого типа $m, m-\eta$ – нечетные, получаем, что η – четное. Откуда, положив $m = 2k - 1, \eta = 2\ell$, получаем характеристику

$$\chi_{2,k,\ell} : [0, 2(2k-1); \emptyset; \{4\ell\}; \{2(k-\ell)-1\}], \quad k, \ell \in \mathbb{N}, \quad \text{НОД}(\ell, 2k-1) = 1. \quad (9)$$

Поскольку период гомеоморфизма и число элементов в множестве Δ не меняются при замене характеристики на эквивалентную, а в эквивалентных характеристиках, множества I , вида $\{\zeta, 1\}$, совпадают, то полученные характеристики попарно не эквивалентны. \square

3. Реализация классов топологической сопряженности

Докажем теорему 3 о том, что характеристики $\chi_{1,k}, \chi_{2,k}, \chi_{1,k,\ell}, \chi_{2,k,\ell}$, реализуются, соответственно, гомеоморфизмами:

- $f_{1,k}(x, y) = \left(x + \frac{1}{2k}, -y\right) \pmod{1}$;
- $f_{2,k}(x, y) = \left(x + y + \frac{1}{4k}, -y\right) \pmod{1}$;
- $f_{1,k,\ell}(x, y) = \left(x + \frac{\alpha}{2k-1}, -y\right) \pmod{1}$, где $2\ell\alpha \equiv 1 \pmod{2k-1}$;
- $f_{2,k,\ell}(x, y) = \left(x + y + \frac{\alpha}{2k-1}, -y\right) \pmod{1}$, где $4\ell\alpha \equiv 1 \pmod{2k-1}$.

Доказательство. Найдем характеристику каждого из перечисленных в теореме гомеоморфизмов. Для упрощения обозначений всюду далее мы будем обозначать через $\hat{f} : \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2$ проекцию отображения $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, т. е. $pf = \hat{f}p$.

1. $f(x, y) = f_{1,k}(x, y) = \left(x + \frac{1}{2k}, -y\right)$. Заметим, что отображение f сохраняет вертикальное и горизонтальное слоения плоскости \mathbb{R}^2 . При этом, $f(x, 0) = \left(x + \frac{1}{2k}, 0\right)$. Тогда отображение $\hat{f}|_{p(Ox)}$ является поворотом с числом вращения $\frac{1}{2k}$ и отрезок $p\left(\left[0, \frac{1}{2k}\right] \times \{0\}\right)$ есть фундаментальная область этого поворота. Поскольку $f^{2k}(x, y) = (x + 1, y)$, то \hat{f}^{2k} – тождественное отображение. Тогда кольцо $A = p\left(\left[0, \frac{1}{2k}\right] \times [0, 1]\right)$ является фундаментальной областью отображения \hat{f} , период \hat{f} равен $2k$ и \hat{f} не имеет точек меньшего периода, т. е. $Q = \emptyset$.

Факторизация A происходит согласно правилу, изображенному на рис. 6. Тогда по предложению 13, модульная поверхность \mathbb{T}^2/\hat{f} гомеоморфна бутылке Клейна \mathbb{K}^2 , т. е. $\Delta = \emptyset$. Положим $\bar{t}_1 = p\left(\left[0, \frac{1}{2k}\right] \times \{0\}\right)$, $\bar{t}_2 = p\left(\left[0, \frac{1}{2k}\right] \times \left\{\frac{1}{2}\right\}\right)$. После разреза мо-

дульной поверхности по кривым $\iota_i = \pi_{\hat{f}}(\bar{\iota}_i)$, $i = 1, 2$, получится поверхность $\widetilde{\mathbb{T}^2/\hat{f}}$, гомеоморфная цилиндру (см. рис. 6), т. е. $h = 0$. Зададим на $\widetilde{\mathbb{T}^2/\hat{f}}$ ориентацию, соответствующую обходу $\bar{\iota}_1$ от точки $p(0, 0)$ к точке $p\left(\frac{1}{2k}, 0\right)$. Так как $f(0, 0) = \left(\frac{1}{2k}, 0\right)$, то $\omega_{\hat{f}}(\iota_1) = 1$. Выбранная ориентация соответствует обходу $\bar{\iota}_2$ от точки $p\left(\frac{1}{2k}, \frac{1}{2}\right)$ к точке $p\left(0, \frac{1}{2}\right)$. Так как $f^{2k-1}\left(\frac{1}{2k}, \frac{1}{2}\right) = \left(1, -\frac{1}{2}\right)$ и $p\left(1, -\frac{1}{2}\right) = p\left(0, \frac{1}{2}\right)$, то $\omega_{\hat{f}}(\iota_2) = 2k - 1$.

Таким образом, \hat{f} имеет характеристику

$$\chi_{1,k} : [0, 2k; \emptyset; \emptyset; \{2k - 1, 1\}].$$

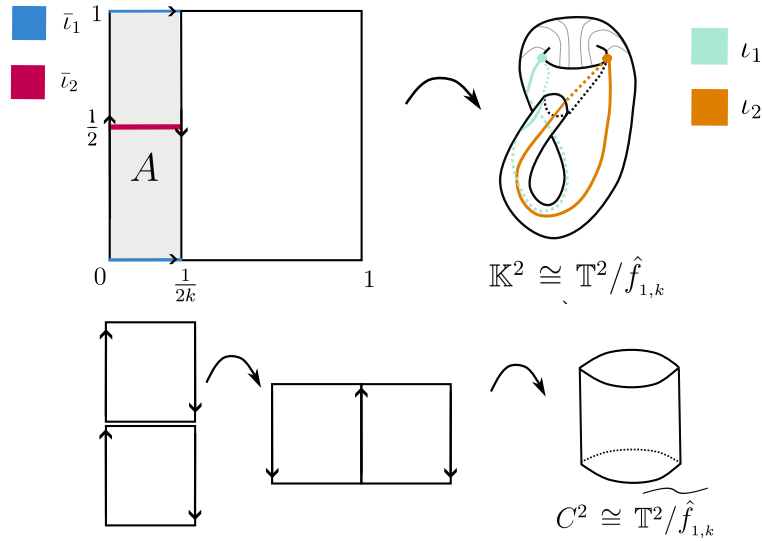


Рис. 6. Модульная поверхность $\mathbb{T}^2/\hat{f}_{1,k}$

2. $f(x, y) = f_{2,k}(x, y) = \left(x + y + \frac{1}{4k}, -y\right)$. Заметим, что отображение f сохраняет горизонтальное слоение плоскости \mathbb{R}^2 и слоение из прямых $L_c = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y + 2x = c\}$, $c \in \mathbb{R}$. При этом, $f(x, 0) = \left(x + \frac{1}{4k}, 0\right)$. Тогда отображение $\hat{f}|_{p(Ox)}$ является поворотом с числом вращения $\frac{1}{4k}$ и отрезок $p\left(\left[0, \frac{1}{4k}\right] \times \{0\}\right)$ – фундаментальная область этого поворота. Поскольку $f^{4k}(x, y) = (x + 1, y)$, то \hat{f}^{4k} – тождественное отображение. Обозначим через \bar{A} часть единичного квадрата плоскости \mathbb{R}^2 , ограниченную прямыми $L_1, L_{1+\frac{1}{2k}}$ (см. рис. 7). Положим $A = p(\bar{A})$. Поскольку $f^{4k}(x, y) = (x + 1, y)$, то \hat{f}^{4k} – тождественное отображение. Тогда параллелограмм A является фундаментальной областью отображения \hat{f} , период \hat{f} равен $4k$ и \hat{f} не имеет точек меньшего периода, т. е. $Q = \emptyset$.

Так как $f^{2k}(x, 0) = \left(x + \frac{1}{2}, 0\right)$, то факторизация A происходит согласно правилу, изображенному на рис. 7. По предложению 13, модульная поверхность \mathbb{T}^2/\hat{f} гомеоморфна бу-

тылке Клейна \mathbb{K}^2 , т. е. $\Delta = \emptyset$. Положим $\bar{\iota}_1 = p \left(\left[0, \frac{1}{4k} \right] \times \{1\} \right)$, $\bar{\iota}_2 = p \left(\left[\frac{1}{4}, \frac{1}{4} + \frac{1}{4k} \right] \times \left\{ \frac{1}{2} \right\} \right)$. После разреза модульной поверхности по кривым $\iota_i = \pi_{\hat{f}}(\bar{\iota}_i)$, $i = 1, 2$, получится поверхность $\widetilde{\mathbb{T}^2/\hat{f}}$, гомеоморфная цилиндру (см. рис. 7), т. е. $h = 0$. Зададим на $\widetilde{\mathbb{T}^2/\hat{f}}$ ориентацию, соответствующую обходу $\bar{\iota}_1$ от точки $p(0, 1)$ к точке $p\left(\frac{1}{4k}, 1\right)$. Так как $f(0, 1) = \left(1 + \frac{1}{4k}, -1\right)$ и $p\left(1 + \frac{1}{4k}, -1\right) = p\left(\frac{1}{4}, 1\right)$, то $\omega_{\hat{f}}(\iota_1) = 1$. Выбранная ориентация соответствует обходу $\bar{\iota}_2$ от точки $p\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4k}, \frac{1}{2}\right)$ к точке $p\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right)$. Так как $f^{2k-1}\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4k}, \frac{1}{2}\right) = \left(\frac{5}{4}, -\frac{1}{2}\right)$ и $p\left(\frac{5}{4}, -\frac{1}{2}\right) = p\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right)$, то $\omega_{\hat{f}}(\iota_2) = 2k - 1$.

Таким образом, \hat{f} имеет характеристику

$$\chi_{2,k} : [0, 4k; \emptyset; \emptyset; \{2k - 1, 1\}].$$

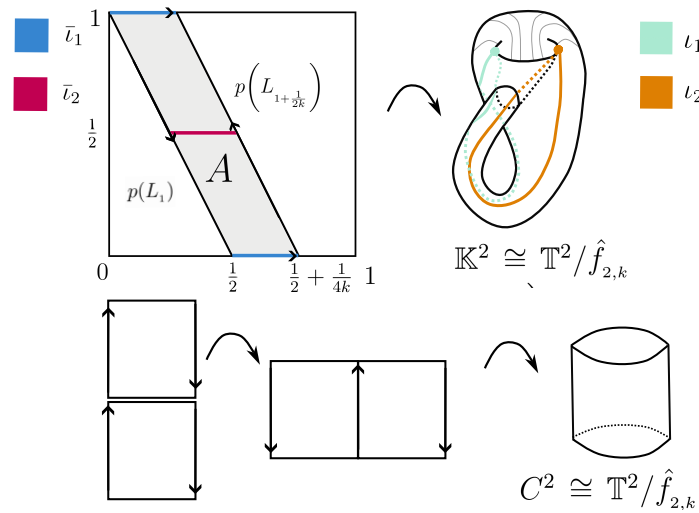


Рис. 7. Модульная поверхность $\mathbb{T}^2/\hat{f}_{2,k}$

3. $f(x, y) = f_{1,k,\ell}(x, y) = \left(x + \frac{\alpha}{2k-1}, -y\right)$, где $2\ell\alpha \equiv 1 \pmod{2k-1}$. Заметим, что отображение f сохраняет вертикальное и горизонтальное слоения плоскости \mathbb{R}^2 . При этом, $f(x, 0) = \left(x + \frac{\alpha}{2k-1}, 0\right)$. Тогда отображение $\hat{f}|_{p(Ox)}$ является поворотом с числом вращения $\frac{\alpha}{2k-1}$ и отрезок $p\left(\left[0, \frac{1}{2k-1}\right] \times \{0\}\right)$ – фундаментальная область этого поворота.

Поскольку $f^{2k-1}(x, y) = (x + \alpha, -y)$, то $\hat{f}^{2(2k-1)}$ – тождественное отображение. Тогда прямоугольник $A = p\left(\left[0, \frac{1}{2k-1}\right] \times \left[0, \frac{1}{2}\right]\right)$ (см. рис. 8) является фундаментальной областью отображения \hat{f} , период \hat{f} равен $2(2k-1)$ и \hat{f} имеет только точки нечетного меньшего

периода $2k - 1$, составляющие окружности $p\left([0, 1] \times \{0\}\right)$ и $p\left([0, 1] \times \left\{\frac{1}{2}\right\}\right)$, т. е. $Q = \emptyset$.

Выберем $\varepsilon \in \left(0, \frac{1}{4}\right)$ и положим (см. рис. 8):

- $\bar{\delta}_1 = p\left(\left[0, \frac{1}{2k-1}\right] \times \{0\}\right)$, $\bar{\delta}_2 = p\left(\left[0, \frac{1}{2k-1}\right] \times \left\{\frac{1}{2}\right\}\right)$;
- $N(\bar{\delta}_1) = p\left(\left[0, \frac{1}{2k-1}\right] \times [0, \varepsilon)\right)$, $N(\bar{\delta}_2) = p\left(\left[0, \frac{1}{2k-1}\right] \times \left(\frac{1}{2} - \varepsilon, \frac{1}{2}\right)\right)$;
- $\bar{S}_{\bar{\delta}_1} = p\left(\left[0, \frac{1}{2k-1}\right] \times \{\varepsilon\}\right)$, $\bar{S}_{\bar{\delta}_2} = p\left(\left[0, \frac{1}{2k-1}\right] \times \left\{\frac{1}{2} - \varepsilon\right\}\right)$;

Поскольку $2\ell\alpha \equiv 1 \pmod{2k-1}$, то

$$f^{2\ell}\left(\{0\} \times \left[0, \frac{1}{2}\right]\right) = \left\{\frac{1}{2k-1}\right\} \times \left[0, \frac{1}{2}\right] \pmod{1}. \quad (10)$$

То есть факторизация A происходит согласно правилу, изображенному на рис. 8. В силу предложения 13, модульная поверхность гомеоморфна цилиндру C^2 с краями $\delta_1 = \pi_{\hat{f}}(\bar{\delta}_1)$, $\delta_2 = \pi_{\hat{f}}(\bar{\delta}_2)$ и, следовательно, $h = 0$, $I = \emptyset$.

Положим $S_{\delta_i} = \pi_{\hat{f}}(\bar{S}_{\delta_i})$, $i = 1, 2$ (см. рис. 8). Выберем ориентацию на модульной поверхности, соответствующую обходу $\bar{S}_{\bar{\delta}_1}$ от точки $p(0, \varepsilon)$ к точке $p\left(\frac{1}{2k-1}, \varepsilon\right)$. В силу (10), $\omega_{\hat{f}}(S_{\delta_1}) = 2\ell$. Для выбранной ориентации, обход $\bar{S}_{\bar{\delta}_2}$ происходит от точки $p\left(\frac{1}{2k-1}, \frac{1}{2} - \varepsilon\right)$ к точке $p\left(0, \frac{1}{2} - \varepsilon\right)$, откуда следует, что $\omega_{\hat{f}}(S_{\delta_2}) = 2(2k-1) - 2\ell$.

Таким образом, \hat{f} имеет характеристику

$$\chi_{1,k,\ell} : [0, 2(2k-1); \emptyset; \{2\ell, 2(2k-\ell-1)\}; \emptyset].$$

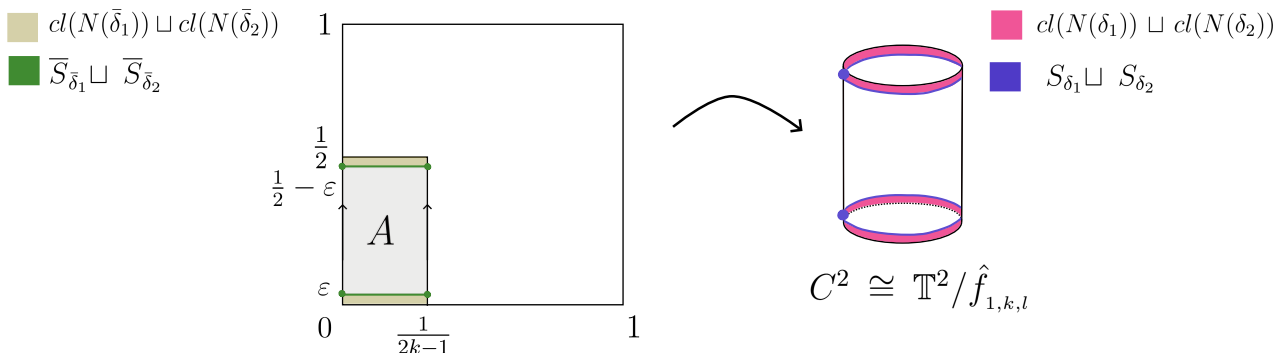


Рис. 8. Модульная поверхность $\mathbb{T}^2/\hat{f}_{1,k,\ell}$

4. $f(x, y) = f_{2k, \ell}(x, y) = \left(x + y + \frac{\alpha}{2k-1}, -y\right)$, где $4\ell\alpha \equiv 1 \pmod{2k-1}$. Как и в случае 2, отображение f сохраняет горизонтальное слоение плоскости \mathbb{R}^2 и слоение из прямых $L_c = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y + 2x = c\}$, $c \in \mathbb{R}$. При этом, $f(x, 0) = \left(x + \frac{\alpha}{2k-1}, 0\right)$. Тогда отображение $\hat{f}|_{p(Ox)}$ является поворотом с числом вращения $\frac{\alpha}{2k-1}$ и отрезок $p\left(\left[0, \frac{1}{2k-1}\right] \times \{0\}\right)$ – фундаментальная область этого поворота. Так как $f\left(x, \frac{1}{2}\right) = \left(x + \frac{1}{2} + \frac{\alpha}{2k-1}, -\frac{1}{2}\right)$, то отображение $\hat{f}|_{p(y=\frac{1}{2})}$ является поворотом с числом вращения $\frac{2(k-\alpha)-1}{2(2k-1)}$ и отрезок $p\left(\left[\frac{1}{4}, \frac{1}{4} + \frac{1}{2(2k-1)}\right] \times \left\{\frac{1}{2}\right\}\right)$ – фундаментальная область этого поворота.

Поскольку $f^{2k-1}(x, y) = (x + y + \alpha, -y)$, то $\hat{f}^{2(2k-1)}$ – тождественное отображение. Обозначим через \bar{A} часть единичного квадрата плоскости \mathbb{R}^2 , ограниченную прямыми L_1 , $L_{1+\frac{2}{2k-1}}$, $y = 0$, $y = \frac{1}{2}$ (см. рис. 9). Положим $A = p(\bar{A})$. Тогда параллелограмм A является фундаментальной областью отображения \hat{f} , период \hat{f} равен $2(2k-1)$ и \hat{f} имеет только точки нечетного меньшего периода $2k-1$, составляющие окружность $p([0, 1] \times \{0\})$, т. е. $Q = \emptyset$.

Выберем $\varepsilon \in (0, \frac{1}{4})$ и положим (см. рис. 9):

- $\bar{\delta} = p\left(\left[\frac{1}{2}, \frac{1}{2} + \frac{1}{2k-1}\right] \times \{0\}\right)$;
- $N(\bar{\delta}) = p([0, 1] \times [0, \varepsilon]) \cap A$;
- $\bar{S}_{\bar{\delta}} = p\left(\left[\frac{1-\varepsilon}{2}, \frac{1-\varepsilon}{2} + \frac{1}{2k-1}\right] \times \{\varepsilon\}\right)$;
- $\bar{\iota} = p\left(\left[\frac{1}{4} + \frac{1}{2(2k-1)}, \frac{1}{4} + \frac{1}{2k-1}\right] \times \left\{\frac{1}{2}\right\}\right)$.

Поскольку $4\ell\alpha \equiv 1 \pmod{2k-1}$, то

$$f^{4\ell}(p(L_1) \cap A) = p\left(L_{1+\frac{2}{2k-1}}\right) \cap A. \quad (11)$$

То есть факторизация A происходит согласно правилу, изображенному на рис. 9. В силу предложения 13, модульная поверхность гомеоморфна ленте Мёбиуса \mathbb{M}^2 с краем $\delta = \pi_{\hat{f}}(\bar{\delta})$.

После ее разрезания вдоль кривой $\iota = \pi_{\hat{f}}(\bar{\iota})$, получим поверхность $\widetilde{\mathbb{T}^2/\hat{f}}$, гомеоморфную цилиндру C^2 (см. рис. 9) и, следовательно, $h = 0$.

Положим $S_{\bar{\delta}} = \pi_{\hat{f}}(\bar{S}_{\bar{\delta}})$ (см. рис. 9). Ориентируем поверхность $\widetilde{\mathbb{T}^2/\hat{f}}$ согласованно с обходом $\bar{S}_{\bar{\delta}}$ от точки $p\left(\frac{1}{2} - \varepsilon, 2\varepsilon\right)$ к точке $p\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2k-1} - \varepsilon, 2\varepsilon\right)$. Тогда, согласно (11), $\omega_{\hat{f}}(S_{\bar{\delta}}) = 4\ell$. Положим $\iota = \pi_{\hat{f}}(\bar{\iota})$. Выбранная ориентация согласована с направлением обхо-

да $\bar{\iota}$ от точки $p\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{2k-1}, \frac{1}{2}\right)$ к точке $p\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{2(2k-1)}, \frac{1}{2}\right)$. Заметим, что

$$4\ell\alpha \equiv 1 \pmod{2k-1} \Leftrightarrow 4\ell\alpha = (2k-1)t + 1, \quad t \in \mathbb{Z}.$$

Так как t должно быть нечетным, то $4\ell\alpha \equiv 2k \pmod{2(2k-1)}$ и, следовательно,

$$2k + 1 - 4\ell\alpha \equiv 1 \pmod{2(2k-1)}.$$

Тогда

$$f^{2k-2\ell-1}\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{2k-1}, \frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{2k-1} + \frac{1}{2} + \frac{-2\ell\alpha}{2k-1}, \frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{2(2k-1)}, \frac{1}{2}\right) \pmod{1}.$$

Откуда $\omega_{\hat{f}}(\iota) = 2(k-\ell) - 1$.

Таким образом, \hat{f} имеет характеристику

$$\chi_{2,k,\ell} : [0, 2(2k-1); \emptyset; \{4\ell\}; \{2(k-\ell)-1\}].$$

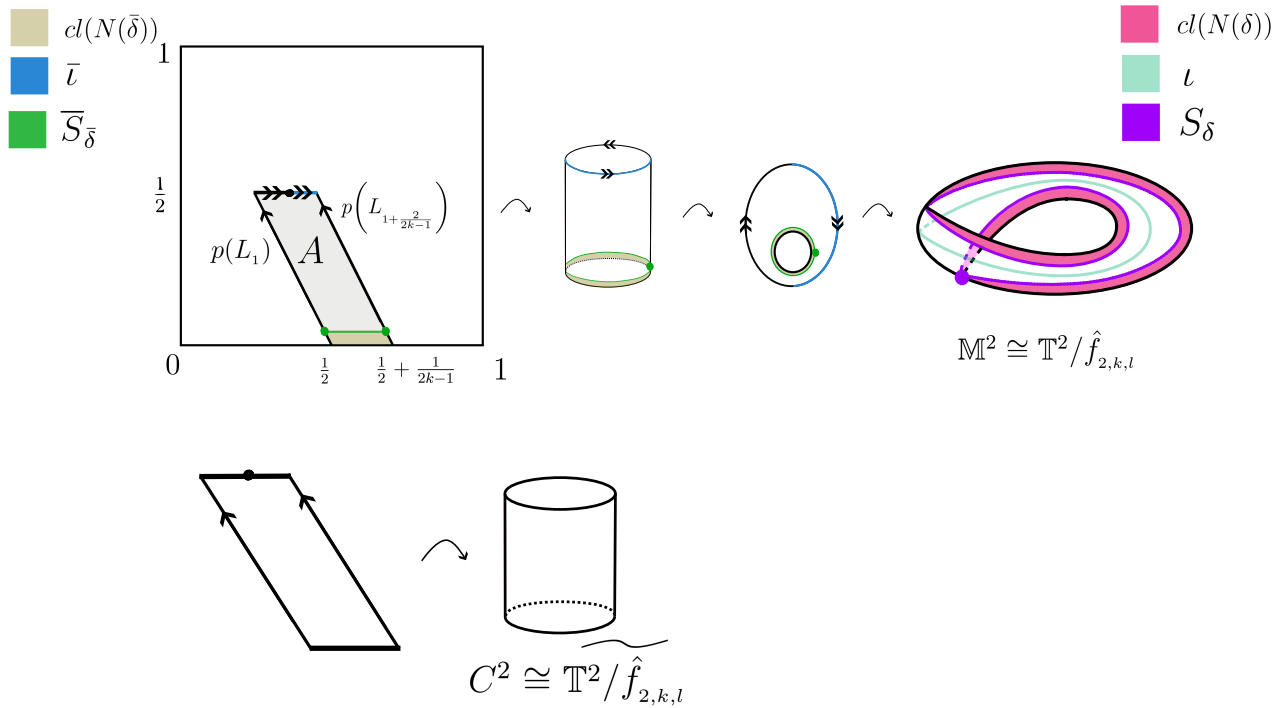


Рис. 9. Модульная поверхность $\mathbb{T}^2 / \hat{f}_{2,k,\ell}$

□

Список литературы

- [1] J. Nielsen, *Untersuchungen zur topologie der geschlossenen zweiseitigen Flächen*, Acta Math. **50** (1), 189–358 (1927) [In German].
DOI: <https://doi.org/10.1007/BF02421324>
- [2] О.В. Починка, С.Х. Капкаева, В.З. Гринес, *Трехцветный граф как полный топологический инвариант для градиентно-подобных диффеоморфизмов поверхностей*, Матем. сб. **205** (10), 19–46 (2014).
DOI: <https://doi.org/10.4213/sm8328>
- [3] J. Palis, C. Pugh, *Fifty problems in dynamical systems*, в сб.: Lecture Notes in Math. **468** Springer, Berlin-New York, 345–353 (1975).
DOI: <https://doi.org/10.1007/BFb0082633>
- [4] E. Nozdrinova, O. Pochinka, *Solution of the 33rd Palis–Pugh problem for gradient-like diffeomorphisms of a two-dimensional sphere*, Discrete Contin. Dyn. Syst. **41** (3), 1101–1131 (2021).
DOI: <https://doi.org/10.3934/dcds.2020311>
- [5] A.A. Nozdrinov, E.V. Nozdrinova, O.V. Pochinka, *Stable isotopy connectivity of gradient-like diffeomorphisms of 2-torus* J. Geom. Phys. **207**, art. 105352 (2025).
DOI: <https://doi.org/10.1016/j.geomphys.2024.105352>
- [6] B. von Kerékjártó, *Über die periodischen Transformationen der Kreisscheibe und der Kugelfläche*, Math. Ann. **80** (1), 36–38 (1919) [in German].
DOI: <https://doi.org/10.1007/BF01463232>
- [7] L.E.J. Brouwer, *Über die periodischen Transformationen der Kugel*, Math. Ann. **80** (1), 39–41 (1919) [in German].
DOI: <https://doi.org/10.1007/BF01463233>
- [8] J. Nielsen, *Die struktur periodischer transformationen von flächen*, Math.-fys. Medd. Danske Vid. Selsk. **15** (1), Levin and Munksgaard, 1937.
- [9] K. Yokoyama, *Classification of periodic maps on compact surfaces: I*, Tokyo J. Math. **6** (1), 75–94 (1983).
DOI: <https://doi.org/10.3836/tjm/1270214327>
- [10] K. Yokoyama, *Classification of periodic maps on compact surfaces: II*, Tokyo J. Math. **7** (1), 249–285 (1984).
DOI: <https://doi.org/10.3836/tjm/1270153007>
- [11] K. Yokoyama, *Complete classification of periodic maps on compact surfaces*, Tokyo J. Math. **15** (2), 247–279 (1992).
DOI: <https://doi.org/10.3836/tjm/1270129455>

- [12] H. Hang, *Homology and orientation reversing periodic maps on surfaces*, Topology Appl. **229**, 1–19 (2017).
DOI: <https://doi.org/10.1016/j.topol.2017.06.023>
- [13] S. Hirose, *Presentations of periodic maps on oriented closed surfaces of genera up to 4*, Osaka J. Math. **47** (2), 385–421 (2010).
- [14] D.A. Baranov, V.Z. Grines, O.V. Pochinka, E.E. Chilina, *On a classification of periodic maps on the 2-torus*, Russ. J. Nonlinear Dyn. **19** (1) 91–110 (2023).
DOI: <https://doi.org/10.20537/nd220702>
- [15] Д.А. Баранов, О.В. Починка, *Классификация периодических преобразований ориентированной поверхности рода два*, Журнал СВМО **23** (2), 147–158 (2021).
DOI: <https://doi.org/10.15507/2079-6900.23.202102.147-158>
- [16] K.-I. Tahara, *On the finite subgroups of $GL(3, \mathbb{Z})$* , Nagoya Math. J. **41**, 169–209 (1971).
DOI: <https://doi.org/10.1017/S002776300001415X>
- [17] K.W. Kwun, J.L. Tollefson, *PL Involutions of $S^1 \times S^1 \times S^1$* , Trans. Amer. Math. Soc. **203**, 97–106 (1975).
DOI: <https://doi.org/10.2307/1997071>
- [18] J. Hempel, *Free cyclic actions on $S^1 \times S^1 \times S^1$* , Proc. Amer. Math. Soc. **48** (1), 221–227 (1975).
DOI: <https://doi.org/10.2307/2040721>
- [19] M.A. Natsheh, *On cyclic group actions of even order on the three dimensional torus*, Bull. Austral. Math. Soc. **37** (2), 189–196 (1988).
DOI: <https://doi.org/10.1017/S0004972700026721>
- [20] L.E.J. Brouwer, *Aufzählung der periodischen Transformationen des Torus*, в сб.: KNAW Proc. **21** II, 1352–1356 (1919).
- [21] Ч. Коснёвски, *Начальный курс алгебраической топологии*, Мир, М., 1983.

Тимур Денисович Мартынов

Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики»,
ул. Большая Печерская, д. 25/12, г. Нижний Новгород, 603155, Россия,
e-mail: mar.tim.denn@gmail.com

Ольга Витальевна Починка

Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики»,
ул. Большая Печерская, д. 25/12, г. Нижний Новгород, 603155, Россия,
e-mail: olga-pochinka@yandex.ru

Екатерина Евгеньевна Чилина

Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики»,
ул. Большая Печерская, д. 25/12, г. Нижний Новгород, 603155, Россия,
e-mail: k.chilina@yandex.ru

Classification of orientation reversing periodic homeomorphisms of a two dimensional torus

T.D. Martynov, O.V. Pochinka, E.E. Chilina

Abstract. According to J. Nielsen and H. Hang, each class of topological conjugacy of periodic homeomorphisms of orientable compact surfaces is completely described by a finite set of data called the *characteristic*. For a two-dimensional sphere, exhaustive classification results with the construction of linear representatives in each conjugacy class were obtained by B. Kerékjártó. For a two-dimensional torus, similar results were obtained with the participation of the authors of this article. Here we find all the characteristics of orientation-changing periodic homeomorphisms of a two-dimensional torus. A homeomorphism representing a class of topological conjugacy is constructed for each of them. The classification of periodic homeomorphisms, in addition to being of independent interest, plays a key role in solving the Palis–Pugh problem of constructing stable arcs in the space of discrete dynamical systems, which is included in the list of 50 most important problems of dynamical systems. For all classes of gradient-like diffeomorphisms of surfaces where this problem is solved, the idea of a close connection of such systems with periodic transformations was used. Thus, the obtained result will make it possible to expand the class of systems for which the Palis problem has been solved.

Keywords: periodic homeomorphisms, two-dimensional torus, topological classification.

DOI: 10.26907/2949-3919.2025.3.87-109

References

- [1] J. Nielsen, *Untersuchungen zur topologie der geschlossenen zweiseitigen Flächen*, Acta Math. **50** (1), 189–358 (1927) [In German].
DOI: <https://doi.org/10.1007/BF02421324>
- [2] V.Z. Grines, S.Kh. Kapkaeva, O.V. Pochinka, *A three-colour graph as a complete topological invariant for gradient-like diffeomorphisms of surfaces*, Sb. Math. **205** (10), 1387–1412 (2014).
DOI: <https://doi.org/10.1070/SM2014v205n10ABEH004423>

Acknowledgements. This work is an output of a research project implemented as part of the Basic Research Program at the National Research University Higher School of Economics (HSE University).

Received: 19 June 2025. Accepted: 09 September 2025. Published: 16 October 2025.

-
- [3] J. Palis, C. Pugh, *Fifty problems in dynamical systems*, in: Lecture Notes in Math. **468** Springer, Berlin-New York, 345–353 (1975).
DOI: <https://doi.org/10.1007/BFb0082633>
- [4] E. Nozdrinova, O. Pochinka, *Solution of the 33rd Palis–Pugh problem for gradient-like diffeomorphisms of a two-dimensional sphere*, Discrete Contin. Dyn. Syst. **41** (3), 1101–1131 (2021).
DOI: <https://doi.org/10.3934/dcds.2020311>
- [5] A.A. Nozdrinov, E.V. Nozdrinova, O.V. Pochinka, *Stable isotopy connectivity of gradient-like diffeomorphisms of 2-torus* J. Geom. Phys. **207**, art. 105352 (2025).
DOI: <https://doi.org/10.1016/j.geomphys.2024.105352>
- [6] B. von Kerékjártó, *Über die periodischen Transformationen der Kreisscheibe und der Kugelfläche*, Math. Ann. **80** (1), 36–38 (1919) [in German].
DOI: <https://doi.org/10.1007/BF01463232>
- [7] L.E.J. Brouwer, *Über die periodischen Transformationen der Kugel*, Math. Ann. **80** (1), 39–41 (1919) [in German].
DOI: <https://doi.org/10.1007/BF01463233>
- [8] J. Nielsen, *Die struktur periodischer transformationen von flächen*, Math.-fys. Medd. Danske Vid. Selsk. **15** (1), Levin and Munksgaard, 1937.
- [9] K. Yokoyama, *Classification of periodic maps on compact surfaces: I*, Tokyo J. Math. **6** (1), 75–94 (1983).
DOI: <https://doi.org/10.3836/tjm/1270214327>
- [10] K. Yokoyama, *Classification of periodic maps on compact surfaces: II*, Tokyo J. Math. **7** (1), 249–285 (1984).
DOI: <https://doi.org/10.3836/tjm/1270153007>
- [11] K. Yokoyama, *Complete classification of periodic maps on compact surfaces*, Tokyo J. Math. **15** (2), 247–279 (1992).
DOI: <https://doi.org/10.3836/tjm/1270129455>
- [12] H. Hang, *Homology and orientation reversing periodic maps on surfaces*, Topology Appl. **229**, 1–19 (2017).
DOI: <https://doi.org/10.1016/j.topol.2017.06.023>
- [13] S. Hirose, *Presentations of periodic maps on oriented closed surfaces of genera up to 4*, Osaka J. Math. **47** (2), 385–421 (2010).
- [14] D.A. Baranov, V.Z. Grines, O.V. Pochinka, E.E. Chilina, *On a classification of periodic maps on the 2-torus*, Russ. J. Nonlinear Dyn. **19** (1) 91–110 (2023).
DOI: <https://doi.org/10.20537/nd220702>
- [15] D.A. Baranov, O.V. Pochinka, *Classification of periodic transformations of an orientable surface of genus two*, Zh. SVMO **23** (2), 147–158 (2021) [in Russian].
DOI: <https://doi.org/10.15507/2079-6900.23.202102.147-158>

- [16] K.-I. Tahara, *On the finite subgroups of $GL(3, \mathbb{Z})$* , Nagoya Math. J. **41**, 169–209 (1971).
DOI: <https://doi.org/10.1017/S002776300001415X>
- [17] K.W. Kwun, J.L. Tollefson, *PL Involutions of $S^1 \times S^1 \times S^1$* , Trans. Amer. Math. Soc. **203**, 97–106 (1975).
DOI: <https://doi.org/10.2307/1997071>
- [18] J. Hempel, *Free cyclic actions on $S^1 \times S^1 \times S^1$* , Proc. Amer. Math. Soc. **48** (1), 221–227 (1975).
DOI: <https://doi.org/10.2307/2040721>
- [19] M.A. Natsheh, *On cyclic group actions of even order on the three dimensional torus*, Bull. Austral. Math. Soc. **37** (2), 189–196 (1988).
DOI: <https://doi.org/10.1017/S0004972700026721>
- [20] L.E.J. Brouwer, *Aufzählung der periodischen Transformationen des Torus*, in: KNAW Proc. **21** II, 1352–1356 (1919).
- [21] C. Kosniowski, *A first course in algebraic topology*, Cambridge University Press, Cambridge-New York, 1980.
DOI: <https://doi.org/10.1017/CBO9780511569296>

Timur Denisovich Martynov

HSE University,

25/12 Bolshaya Pecherskaya str., Nizhny Novgorod, 603155, Russia,

e-mail: mar.tim.denn@gmail.com

Olga Vitalyevna Pochinka

HSE University,

25/12 Bolshaya Pecherskaya str., Nizhny Novgorod, 603155, Russia,

e-mail: olga-pochinka@yandex.ru

Ekaterina Evgenevna Chilina

HSE University,

25/12 Bolshaya Pecherskaya str., Nizhny Novgorod, 603155, Russia,

e-mail: k.chilina@yandex.ru

О минимальных множествах непрерывных отображений на одномерных континуумах

Е.Н. Махрова

Аннотация. Пусть X – конечное дерево, а $f : X \rightarrow X$ – непрерывное отображение, имеющее нулевую топологическую энтропию и бесконечное минимальное множество M . Нами доказано, что сужение $f|_M$ отображения f на M топологически сопряжено отображению счетчика τ_α , где $\alpha = (j_1, \dots, j_n, 2, 2, \dots)$ есть последовательность при $j_i \geq 2$ для $1 \leq i \leq n$. Дано описание топологической структуры конечных деревьев, на которых существуют непрерывные отображения с нулевой топологической энтропией и бесконечным минимальным множеством M , на котором отображение $f|_M$ топологически сопряжено счетчику τ_α , где $\alpha = (j_1, \dots, j_n, 2, 2, \dots)$. В то же время для любой последовательности $\alpha = (j_1, \dots, j_i, \dots)$, где $j_i \geq 2$ для всех $i \geq 1$, существуют дендрит X , не являющийся конечным деревом, и непрерывное отображение f с нулевой топологической энтропией и бесконечным минимальным множеством M , на котором отображение f топологически сопряжено счетчику τ_α .

Нами также показано: если X – дендрит, а $f : X \rightarrow X$ – непрерывное отображение, имеющее нулевую топологическую энтропию и бесконечное минимальное множество M , то существует такая последовательность $\alpha = (j_1, \dots, j_i, \dots)$ ($j_i \geq 2$), что отображение $f|_M$ полусопряжено отображению счетчика τ_α .

Ключевые слова: дендрит, конечное дерево, минимальное множество, отображение счетчика (adding-machine), топологическая энтропия, почти периодическая точка, рекуррентная точка.

DOI: 10.26907/2949-3919.2025.3.110-135

Введение

1. Под *континуумом* будем понимать компактное связное метрическое пространство. Пусть X – континуум, p – произвольная точка из X . Если связными компонентами границы произвольной окрестности $U(p)$ точки p в X являются одноточечные множества, то X называется *одномерным континуумом* (см., например, [1, том 1, гл. 2, §25, I]). Локально связный континуум, не содержащий подмножеств, гомеоморфных окружности,

Благодарности. Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 24-21-00242, <https://rscf.ru/project/24-21-00242/>.

© 2025 Е.Н. Махрова

Поступила: 07.06.2025. Принята: 09.09.2025. Опубликовано: 16.10.2025.

называется *дендритом*. Из данного определения следует, что дендрит – одномерный континуум.

Пусть X – дендрит, а $p \in X$. Тогда $X \setminus \{p\}$ либо единственное связное множество, либо представимо в виде конечного объединения связных множеств. Каждое связное множество из $X \setminus \{p\}$ назовем *компонентой точки p* . Если множество $X \setminus \{p\}$ связно, то p называется *концевой точкой дендрита X* . Если $X \setminus \{p\}$ состоит из более двух компонент, то p – *точка ветвления дендрита X* . Дендрит с конечным числом концевых точек называется *конечным деревом*.

Условимся обозначать через $R(X)$ ($E(X)$) множество точек ветвления (концевых точек) дендрита X .

Пусть X – компактное топологическое пространство, $f : X \rightarrow X$ – непрерывное отображение. Непустое множество $M \subset X$ называется *минимальным относительно f* , если оно замкнуто, инвариантно и не содержит собственных подмножеств, удовлетворяющих указанным свойствам. Если X само является минимальным множеством, то отображение f будем называть *минимальным*.

Одним из основных вопросов теории динамических систем является вопрос существования минимальных множеств, их взаимосвязи с равенством нулю или положительностью топологической энтропии и свойствами динамической системы. Результаты такого рода исследований непрерывных отображений отрезка или конечных деревьев связаны, в основном, с конечными минимальными множествами, т. е. периодическими орбитами. Так, например, установлена связь между периодами периодических точек, топологической энтропией и свойствами непрерывного отображения отрезка (см., например, [2, гл. 3, § 3]). В [3] получены условия на периодические орбиты непрерывного отображения конечного дерева, при выполнении которых топологическая энтропия заданного отображения положительная. Отметим, что свойства как конечных, так и бесконечных минимальных множеств у непрерывного отображения отрезка и 3-ода изучались в [4, 5] с использованием понятия D -функции минимального множества. В [6] описаны свойства бесконечных минимальных множеств у непрерывного отображения отрезка с нулевой топологической энтропией. Что касается непрерывных отображений дендритов, то конечные минимальные множества не оказывают влияние на топологическую энтропию [7], зато существует связь между свойствами бесконечных минимальных множеств и топологической энтропией [8].

В нашей работе изучаются свойства бесконечных минимальных множеств у непрерывного отображения с нулевой топологической энтропией, заданного на конечном дереве и дендрите.

2. Чтобы сформулировать основные результаты работы, нам понадобится понятие отображения счетчика (англоязычная версия – adding-machine, odometer, solenoid; см., например, [9]).

Пусть $\alpha = (j_1, j_2, \dots)$ – последовательность натуральных чисел, где $j_i \geq 2$ для любого натурального числа i , и

$$\Delta_\alpha = \{(x_1, x_2, \dots) : x_i \in \{0, 1, \dots, j_i - 1\}, i \geq 1\}.$$

Определим метрику на Δ_α , положив

$$d_\alpha((x_1, x_2, \dots), (y_1, y_2, \dots)) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\delta(x_i, y_i)}{2^i},$$

где $\delta(x_i, y_i) = 1$, если $x_i \neq y_i$, и $\delta(x_i, y_i) = 0$, если $x_i = y_i$.

Определим сложение в Δ_α по следующему правилу:

$$(x_1, x_2, \dots) + (y_1, y_2, \dots) = (z_1, z_2, \dots),$$

где $z_1 = (x_1 + y_1) \bmod j_1$ и $z_2 = (x_2 + y_2 + t_1) \bmod j_2$. Здесь $t_1 = 0$, если $x_1 + y_1 < j_1$, и $t_1 = 1$, если $x_1 + y_1 \geq j_1$, и т. д.

Определим отображение счетчика или просто счетчик $\tau_\alpha : \Delta_\alpha \rightarrow \Delta_\alpha$ так, чтобы

$$\tau_\alpha(x_1, x_2, \dots) = (x_1, x_2, \dots) + (1, 0, 0, \dots).$$

Если $j_i = 2$ при любом $i \geq 1$, то положим $\alpha = 2$, а отображение τ_2 будем называть *двоичным счетчиком*.

В [10, теорема 4.1] показано, что для любой последовательности α счетчик τ_α является минимальным отображением. Отметим, что отображение счетчика играет важную роль в описании динамики непрерывного отображения отрезка (см., например, [11–13]).

Перейдем к основным результатам работы. Первая теорема является характеристическим свойством бесконечного минимального множества у непрерывного отображения конечного дерева с нулевой топологической энтропией и является обобщением результата А. Катка и Б. Хасселблата, доказанного для непрерывного отображения отрезка (см. далее теорему 9).

Теорема 1. Пусть X – конечное дерево, непрерывное отображение $f : X \rightarrow X$ имеет нулевую топологическую энтропию и бесконечное минимальное множество M . Тогда

- 1) существует такая последовательность α , что отображение $f|_M$ топологически сопряжено счетчику τ_α , т. е. существует гомеоморфизм $h : M \rightarrow \Delta_\alpha$, для которого $\tau_\alpha \circ h = h \circ f|_M$;
- 2) найдется такое натуральное число $n \geq 1$, что $j_i \geq 2$ для $1 \leq i \leq n$, а $j_i = 2$ для всех $i \geq n + 1$, т. е. последовательность α имеет вид $(j_1, \dots, j_n, 2, 2, \dots)$.

Следующая теорема является обратной для теоремы 1 и описывает структуру конечного дерева, допускающего существование непрерывного отображения с нулевой топологической энтропией и с бесконечным минимальным множеством, сужение отображения

на которое топологически сопряжено счетчику τ_α , где α – любая наперед заданная последовательность вида

$$(j_1, \dots, j_n, 2, 2, \dots), \text{ где } j_i \geq 2 \text{ для } 1 \leq i \leq n. \quad (1)$$

Теорема 2. Для любой последовательности α вида (1) существуют конечное дерево X , у которого $\text{card } R(X) = 1 + j_1 + \dots + j_{n-1}$, и непрерывное отображение $f : X \rightarrow X$ с нулевой топологической энтропией такие, что f имеет бесконечное минимальное множество M , на котором отображение $f|_M$ топологически сопряжено счетчику τ_α , где $\text{card}(\cdot)$ – мощность множества (\cdot) .

Отметим, что для любого конечного дерева X , у которого число точек ветвления меньше, чем $1 + j_1 + \dots + j_{n-1}$ и любой последовательности α вида (1) существует непрерывное отображение $f : X \rightarrow X$, имеющее бесконечное минимальное множество M , на котором отображение $f|_M$ топологически сопряжено счетчику τ_α , но топологическая энтропия f положительна.

Следующая теорема показывает, что дендриты допускают существование непрерывных отображений с нулевой топологической энтропией, имеющих бесконечное минимальное множество, на котором каждое заданное отображение топологически сопряжено счетчику τ_α для любой наперед заданной последовательности α .

Теорема 3. Для любой последовательности α существуют дендрит Y и непрерывное отображение $f : Y \rightarrow Y$, обладающее следующими свойствами:

- 1) топологическая энтропия f равна нулю;
- 2) f имеет бесконечное минимальное множество M , сужение отображения на которое топологически сопряжено счетчику τ_α .

В следующей теореме выделен класс дендритов, на которых любое непрерывное отображение с нулевой топологической энтропией и бесконечным минимальным множеством имеет свойство, связанное с отображением счетчика.

Теорема 4. Пусть X – дендрит со счетным числом концевых точек, $f : X \rightarrow X$ – непрерывное отображение, имеющее нулевую топологическую энтропию и бесконечное минимальное множество M . Тогда существует такая последовательность α , что сужение $f|_M$ отображения f на M полусопряжено отображению счетчику τ_α , т. е. существует такое непрерывное сюръективное отображение $h : M \rightarrow \Delta_\alpha$, что $\tau_\alpha \circ h = h \circ f$.

Данная теорема неверна в случае, когда X является окружностью или конечным графом [8, теорема 1.7]. Отметим также, что различия в свойствах отображений, заданных на конечных деревьях и дендритах, у которых имеется бесконечное минимальное множество (см. утверждение 1) теоремы 1 и теорему 4), связаны с различной топологической структурой самого бесконечного минимального множества (см., например, [14, 15]).

В заключение данного раздела отметим, что с каждым годом растет интерес к динамическим системам, заданным на одномерных разветвленных континуумах, поскольку

они появляются как множества Жюлиа в комплексных динамических системах [16], как предельные множества динамических систем с фазовыми пространствами размерности, не меньшей двойки [17, 18], как глобальные аттракторы косых произведений и интегрируемых отображений [19, 20], как аттракторы стягиваемых полигональных систем [21], в задачах математической физики [22] и др.

1. Предварительные сведения

1. Обозначим через \mathbb{N} – множество натуральных чисел, \mathbb{C} – множество комплексных чисел, через i мнимую единицу.

Пусть X – дендрит, A – подмножество в X . Обозначим через $\text{diam } A$ диаметр множества A ; $\text{card } A$ – мощность множества A .

Следуя работе [23], связное подмножество дендрита X , замыкание которого гомеоморфно отрезку $[0; 1]$ на прямой \mathbb{R}^1 , будем называть *дугой*.

Символом $[x; y]$ будем обозначать дугу с концами в точках x и y , содержащую эти точки. Положим $(x; y) = [x; y] \setminus \{x\}$, $[x; y) = [x; y] \setminus \{y\}$, $(x; y) = [x; y] \setminus \{x; y\}$.

Отметим следующие свойства дендритов.

Лемма 5 ([1]). *Пусть X – дендрит. Тогда*

- 1) *любые различные две точки x, y в X можно соединить единственной дугой $[x; y]$;*
- 2) *множество $R(X)$ точек ветвления дендрита X не более, чем счетно;*
- 3) *любой подконтиуум дендрита – дендрит.*

Если X – конечное дерево, то $R(X)$ конечно. Более того, для любой точки p в X число компонент точки p также конечно. Число компонент точки p будем называть *порядком точки p* и обозначать через $\text{ord}_X p$.

2. Пусть $f : X \rightarrow X$ – непрерывное отображение дендрита X , p – произвольная точка в X . Точка p называется

- *периодической точкой отображения f* , если существует такое $n \in \mathbb{N}$, что $f^n(p) = p$; наименьшее n , удовлетворяющее данному условию называется *периодом* точки p . Если $n = 1$, то p называется *неподвижной точкой отображения f* ;
- *устойчивой по Пуассону относительно f* , если для любой окрестности $U(p)$ точки p найдется такое $n \in \mathbb{N}$, что $f^n(p) \in U(p)$;
- *рекуррентной относительно f* , если p – устойчивая по Пуассону и для любой окрестности $U(p)$ точки p существует $k_0 \in \mathbb{N}$ такое, что если $f^j(p) \in U(p)$ для некоторого $j \geq 1$, то существует натуральное число $0 < k \leq k_0$, для которого $f^{j+k}(p) \in U(p)$;
- *почти периодической относительно f* , если для любой окрестности $U(p)$ точки p найдется такое натуральное число $n \geq 1$, что $f^{nj}(p) \in U(p)$ для любого $j \geq 1$.

Обозначим через $\text{Fix}(f)$, $\text{Per}(f)$, $\text{Poiss}(f)$, $\text{Rec}(f)$, $\text{AP}(f)$ – множество неподвижных точек, периодических точек, устойчивых по Пуассону точек, рекуррентных точек, почти периодических точек отображения f , соответственно.

Из приведенных выше определений следуют включения:

$$\text{Fix}(f) \subseteq \text{Per}(f) \subseteq \text{AP}(f) \subseteq \text{Rec}(f) \subseteq \text{Poiss}(f). \quad (2)$$

А из определения рекуррентной точки получаем равенство:

$$\text{Rec}(f) = \text{Rec}(f^n) \quad \text{для любого } n \in \mathbb{N}. \quad (3)$$

Следующая теорема устанавливает связь между минимальным множеством и множеством рекуррентных точек у непрерывного отображения континуума и является переформулировкой характеристического свойства минимальных множеств, полученного Дж. Биркгофом [24, гл. 7, §7].

Теорема 6 ([25]). Пусть X – континуум, $f : X \rightarrow X$ – непрерывное отображение, точка $x \in X$. Множество $\overline{\{f^i(x)\}_{i \geq 0}}$ является минимальным тогда и только тогда, когда $x \in \text{Rec}(f)$.

Для доказательства основных результатов работы нам понадобятся следующие утверждения, касающиеся свойств минимальных множеств.

Лемма 7 ([26]). Пусть $f : M \rightarrow M$ – минимальное отображение. Тогда для любого открытого множества $U \subset M$ найдется такое $n_0 \in \mathbb{N}$, что $\bigcup_{n=0}^{n_0} f^{-n}(U) = M$.

Теорема 8 ([9]). Пусть $f : X \rightarrow X$ – непрерывное отображение компактного метрического пространства X , M – бесконечное минимальное множество в X относительно f . Если любая точка $x \in M$ является почти периодической относительно f , то найдется такая последовательность α , что отображение $f|_M$ топологически сопряжено счетчику τ_α .

Теорема 9 ([6, теорема 11.3.13]). Пусть непрерывное отображение $f : [0; 1] \rightarrow [0; 1]$ отрезка $[0; 1] \subset \mathbb{R}^1$ имеет нулевую топологическую энтропию и замкнутое топологически транзитивное множество M (т. е. существует точка $x \in M$ такая, что $\overline{\{f^i(x)\}_{i \geq 0}} = M$) без периодических точек. Тогда отображение $f|_M$ топологически сопряжено двоичному счетчику τ_2 .

В частности, теорема 9 справедлива, если M – бесконечное минимальное множество, поскольку любое бесконечное минимальное множество является топологически транзитивным замкнутым множеством без периодических точек.

3. Определение топологической энтропии для непрерывного отображения компактного топологического пространства введено в [27], где доказано следующая

Лемма 10 ([27, теорема 2]). Для любого непрерывного отображения $f : X \rightarrow X$ компакта X справедливо равенство $h(f^n) = n \cdot h(f)$.

Положительность топологической энтропии у одномерных динамических систем чаще всего устанавливается в случае существования подковы у заданного отображения. Напомним определение подковы.

Определение 11. Пусть $f : X \rightarrow X$ – непрерывное отображение дендрита X . Будем говорить, что f имеет подкову, если существуют непустые непересекающиеся подконтинуумы A, B в X такие, что $f(A) \cap f(B) \supset A \cup B$.

Подкову отображения f будем обозначать через (A, B) .

Следующая теорема является непосредственным следствием определений топологической энтропии [27] и подковы (см. также [23]).

Теорема 12. Если непрерывное отображение $f : X \rightarrow X$ компактного топологического пространства X имеет подкову, то топологическая энтропия отображения f положительна.

2. Доказательство теоремы 1

Для доказательства теоремы 1 нам потребуются следующие вспомогательные утверждения.

Теорема 13 ([28]). Пусть $f : X \rightarrow X$ – непрерывное отображение дендрита X , у которого множество концевых точек не более чем счетно, а Y – подконтинуум в X такой, что $Y \subseteq f(Y)$. Тогда $Y \cap \text{Per}(f) \neq \emptyset$.

Пусть X – дендрит, A – подмножество в X . Положим

$$[A] = \bigcup_{x,y \in A} [x, y].$$

Приведем необходимое нам свойство множества $[A]$.

Лемма 14 ([29]). Пусть X – дендрит, A – замкнутое множество в X . Тогда $[A]$ – дендрит, причем множество $E([A])$ концевых точек дендрита $[A]$ удовлетворяет условию: $E([A]) \subseteq A$.

Пусть непрерывное отображение $f : X \rightarrow X$ конечного дерева X имеет бесконечное множество M . Поскольку X – конечное дерево, то в силу леммы 14 $[M]$ – конечное дерево или дуга. Следующее утверждение устанавливает факт существования периодической точки на $[M]$ у непрерывного отображения f .

Лемма 15. Если непрерывное отображение $f : X \rightarrow X$ конечного дерева X имеет бесконечное минимальное множество M , то существует периодическая точка p в $[M]$, причем $\text{ord}_Y p \geq 2$.

Доказательство. Так как минимальное множество замкнуто, то в силу леммы 14 $[M]$ – конечное дерево, частным случаем которого является дуга, причем $E(Y) \subset M$. Положим $Y = [M]$. Из непрерывности f получаем, что $f(Y)$ связно. Так как M – минимальное множество, то $f(M) = M$. Отсюда и из условий « $E(Y) \subset M$ », « $f(Y)$ связно» получаем, что $Y \subseteq f(Y)$. В силу теоремы 13 существует периодическая точка p в Y . Поскольку $E(Y) \subset M$, а $p \notin M$, то $p \notin E(Y)$, т. е. $\text{ord}_Y p \geq 2$. Лемма 15 доказана. \square

Отметим, если X – дендрит, не являющийся конечным деревом, то непрерывное отображение $f : X \rightarrow X$, у которого существует бесконечное минимальное множество M , может не иметь периодических точек на $[M]$ (см., например, [28, 29]). В случае, когда X – конечное дерево и непрерывное отображение $f : X \rightarrow X$ имеет бесконечное минимальное множество M , то из леммы 15 получаем, что

$$[M] \cap \text{Per}(f) \neq \emptyset.$$

Пусть p – любая периодическая точка из $[M]$, а x – произвольная точка в M . Положим $Y = [M]$. Обозначим компоненту точки p в Y , содержащую точку x , через $Y_x(p)$. Докажем вспомогательное утверждение.

Лемма 16. Пусть непрерывное отображение $f : X \rightarrow X$ конечного дерева X имеет нулевую топологическую энтропию и бесконечное минимальное множество M . Тогда для любой периодической точки p в $Y = [M]$ периода t и произвольной точки $x \in M$ существует натуральное число n , кратное t , такое, что $\{f^{ni}(x)\}_{i \geq 0} \subset Y_x(p)$.

Доказательство. Так как $x \in M$, то согласно теореме 6 имеем $x \in \text{Res}(f)$. В силу (3) получаем, что $x \in \text{Res}(f^m)$. Тогда из определения рекуррентной точки относительно f^m следует

$$Y_x(p) \cap \{f^{mi}(x)\}_{i \geq 1} \neq \emptyset.$$

Рассмотрим следующие случаи:

- (I) существует такое натуральное число $i_0 \geq 1$, что $x \in (p; f^{mi_0}(x))$;
- (II) для любого натурального числа $i \geq 1$ не выполнено условие (I).

Пусть имеет место случай (I). Положим $g = f^{mi_0}$. Тогда $g(p) = p$, и $x \in (p; g(x))$. Покажем, что $g^i(x) \in Y_x(p)$ для любого числа $i \geq 1$. Предположим противное. Тогда существует натуральное число $s \geq 2$ такое, что $g^s(x) \notin Y_x(p)$. Так как $g(p) = p$, и $g([p; x])$ связно в силу непрерывности g , то

$$g([p; x]) \supseteq [p; g(x)] \supset [p; x].$$

Поэтому найдется точка $x_1 \in (p; x)$, для которой $g(x_1) = x$. Тогда

$$g([p; x_1]) \supseteq [p; g(x_1)] \supset [p; x_1].$$

Следовательно, существует точка $x_2 \in (p; x_1)$ такая, что $g(x_2) = x_1$. Повторим приведенные рассуждения $(s - 1)$ раз ($s \geq 2$). В результате построим набор точек x_1, \dots, x_{s-1} , удовлетворяющих следующим свойствам:

- 1) $x_i \in (p; x_{i-1})$ для всех $2 \leq i \leq s - 1$;
- 2) $g(x_i) = x_{i-1}$, и, следовательно, $g^i(x_i) = x$ для каждого $1 \leq i \leq s - 1$.

Покажем, что отображение g^s имеет подковку $([p; x_{s-1}], [x_{s-2}; g(x)])$. Из свойства 1) точек $\{x_i\}_{i=1}^{s-1}$ следует, что $x_{s-1} \in (p; x_{s-2})$. Поэтому

$$[p; x_{s-1}] \cap [x_{s-2}; g(x)] = \emptyset.$$

Используя непрерывность g , свойства 1)–2) набора точек $\{x_i\}_{i=1}^{s-1}$, получаем:

$$\begin{aligned} g^s([p; x_{s-1}]) &\supseteq g([p; g^{(s-1)}(x_{s-1})]) = g([p; x]) \supseteq [p; g(x)] \supset [p; x_{s-1}] \cup [x_{s-2}; g(x)], \\ g^s([x_{s-2}; g(x)]) &\supseteq g^2([g^{(s-2)}(x_{s-2}); g^{(s-1)}(x)]) = g^2([x; g^{(s-1)}(x)]) \supseteq g([g(x); g^s(x)]) \supset \\ &\supset g([p; x]) \supseteq [p; g(x)] \supset [p; x_{s-1}] \cup [x_{s-2}; g(x)]. \end{aligned}$$

Таким образом, g^s имеет подковку $([p; x_{s-1}], [x_{s-2}; g(x)])$. В силу теоремы 12 топологическая энтропия отображения g^s положительная. Согласно лемме 10 топологическая энтропия отображения f также положительна. Последнее противоречит условиям леммы 16. Поэтому $\{g^i(x)\}_{i \geq 0} = \{f^{ni}(x)\}_{i \geq 0} \subset Y_x(p)$, где $n = m i_0$. В первом случае лемма 16 справедлива.

Пусть имеет место случай (II). Выберем окрестность $U(x)$ точки x таким образом, чтобы $U(x) \subset Y_x(p)$, и

$$(U(x) \setminus \{x\}) \cap R(Y) = \emptyset. \quad (4)$$

Поскольку $x \in M$, то согласно теореме 6 справедливо $x \in \text{Res}(f)$. Используя (3), получаем, что $x \in \text{Res}(f^m)$. Положим $g = f^m$. Из определения рекуррентной точки отображения g следует существование такого натурального числа $j \geq 1$, что $g^j(x) \in U(x)$. Согласно (4) в случае (II) имеем: $g^j(x) \in (p; x)$. Выберем окрестность $U(g^j(x))$ точки $g^j(x)$ со следующими свойствами:

$$U(g^j(x)) \subset U(x), \quad U(g^j(x)) \cap \{x\} = \emptyset.$$

В силу леммы 7 найдется такое натуральное число $s \geq 1$, что

$$(g^{-s}(x) \cap M) \cap U(g^j(x)) \neq \emptyset.$$

Пусть $y \in (g^{-s}(x) \cap M) \cap U(g^j(x))$. Из (4) и выбора окрестности $U(g^j(x))$ точки $g^j(x)$ получаем, что $y \in (p; x)$, причем $g^s(y) = x$. В силу рассмотренного случая (I) выполнено включение: $\{g^{si}(y)\}_{i \geq 0} \subset Y_y(p)$. Следовательно, $\{g^{si}(x)\}_{i \geq 0} \subset Y_y(p)$. Поскольку точки x и y принадлежат одной компоненте точки p , то $\{g^{si}(x)\}_{i \geq 0} \subset Y_x(p)$. Положим $n = ms$. Тогда все точки $\{f^{ni}(x)\}_{i \geq 0}$ лежат на одной компоненте точки p . Лемма 16 доказана. \square

Лемма 17. Пусть непрерывное отображение $f : X \rightarrow X$ конечного дерева X имеет нулевую топологическую энтропию и бесконечное минимальное множество M . Тогда найдется натуральное число n и множество $M_0 \subset M$ такие, что M_0 – минимальное множество относительно f^n , и $[M_0]$ является дугой.

Доказательство. Положим $Y^{(0)} = [M]$. Утверждение леммы 17 справедливо, если $Y^{(0)}$ является дугой. Рассмотрим случай, когда $Y^{(0)}$ отлично от дуги, т.е. $R(Y^{(0)}) \neq \emptyset$. В силу леммы 15 существует точка $p_1 \in Y^{(0)} \cap \text{Per}(f)$, причем $\text{ord}_{Y^{(0)}} p_1 \geq 2$. Так как $R(Y^{(0)})$ конечно, а $\text{ord}_{Y^{(0)}} p_1 \geq 2$, то найдется компонента $Y_{i_1}^{(0)}(p_1)$ точки p_1 в $Y^{(0)}$ ($1 \leq i_1 \leq \text{ord}_{Y^{(0)}} p_1$) со следующим свойством:

$$\text{card } R(Y_{i_1}^{(0)}(p_1)) < \text{card } R(Y^{(0)}). \quad (5)$$

Пусть x_1 – любая точка из $M \cap Y_{i_1}^{(0)}(p_1)$. Согласно лемме 16 найдется такое натуральное число n_1 , кратное периоду точки p_1 , что

$$\{f^{n_1 i}(x_1)\}_{i \geq 0} \subset Y_{i_1}^{(0)}(p_1).$$

Положим $M_1 = \overline{\{f^{n_1 i}(x_1)\}_{i \geq 0}}$. Так как $x_1 \in M$, то из теоремы 6 получаем $x_1 \in \text{Rec}(f)$. Согласно (3) имеем $x_1 \in \text{Rec}(f^{n_1})$. Тогда из теоремы 6 следует, что M_1 – минимальное множество относительно f^{n_1} . Поскольку $p_1 \notin M$, то $M_1 \subset Y_{i_1}^{(0)}(p_1)$. Следовательно, $[M_1] \subset Y_{i_1}^{(0)}(p_1)$. Положим $Y^{(1)} = [M_1]$. Учитывая (5), получаем

$$\text{card } R(Y^{(1)}) < \text{card } R(Y^{(0)}).$$

Если $\text{card } R(Y^{(1)}) = \emptyset$, то $Y^{(1)}$ – дуга, и лемма 17 доказана. В противном случае повторим рассуждения, приведенные выше. Так как множество точек ветвления конечного дерева конечно, то найдется натуральное число $k \leq \text{card } R(Y^{(0)})$ такое, что $Y^{(k)} = [M_k]$ является дугой, где M_k – минимальное множество относительно $f^{n_1 \dots n_k}$. Лемма 17 доказана. \square

Для доказательства следующего утверждения нам потребуются определения монотонного отображения и ретракции пространства на подмножество.

Определение 18 ([1, Том 2, §46, I]). Непрерывное отображение $f : X \rightarrow X$ конечного дерева X называется монотонным, если полный прообраз $f^{-1}(A)$ любого связного подмножества A из $f(X)$ связан в X .

Определение 19 ([1, Том 1, §13, V]). Подмножество A пространства X называется ретрактом пространства X , если существует непрерывное отображение r , называемое ретракцией пространства X на множество A , такое, что $r(x) = x$ для $x \in A$.

Следующая лемма устанавливает факт существования монотонной ретракции на любом конечном дереве.

Лемма 20 ([30]). Пусть $f : X \rightarrow X$ – непрерывное отображение конечного дерева X . Тогда для любого подмножества A в X существует монотонная ретракция $r : X \rightarrow A$.

Докажем еще одно вспомогательное утверждение.

Лемма 21. Пусть X – конечное дерево, а непрерывное отображение $f : X \rightarrow X$ имеет нулевую топологическую энтропию и бесконечное минимальное множество M , у которого $[M]$ является дугой. Тогда отображение $f|_M$ топологически сопряжено двоичному счетчику τ_2 .

Доказательство. Положим $I = [M]$. Согласно лемме 14 выполнено включение: $E(I) \subset M$. Тогда из непрерывности f и равенства $f(M) = M$ следует, что $I \subseteq f(I)$. Рассмотрим следующие случаи:

- (i) $f(I) = I$;
- (ii) $I \neq f(I)$.

Рассмотрим первый случай. Пусть $h : I \rightarrow [0; 1]$ – любой гомеоморфизм дуги I на отрезок $[0; 1]$. Положим

$$\varphi = h \circ f \circ h^{-1} : [0; 1] \rightarrow [0; 1].$$

Поскольку топологическая энтропия отображений f и h равна нулю, то топологическая энтропия отображения φ также равна 0. Более того, φ имеет бесконечное минимальное множество $h(M)$. В силу теоремы 9 получаем, что отображение $\varphi|_{h(M)}$ топологически сопряжено двоичному счетчику τ_2 . Следовательно, отображение $f|_M$ также топологически сопряжено τ_2 , и в первом случае лемма 21 доказана.

Пусть имеет место второй случай. Тогда $I \subset f(I)$. В силу леммы 21 существует монотонная ретракция $r : X \rightarrow I$ конечного дерева X на дугу I . Положим

$$g = r \circ f : I \rightarrow I.$$

Из непрерывности f и r следует, что g – непрерывное отображение дуги I на себя. Поскольку монотонное отображение конечного дерева имеет нулевую топологическую энтропию (см. [7, теорема В]), то топологическая энтропия g равна 0. Так как $f(M) = M$, а $r(x) = x$ для любой точки $x \in M \subset I$, то g имеет минимальное множество M , и $g|_M = f|_M$. В силу рассмотренного первого случая отображение $g|_M$ топологически сопряжено двоичному счетчику τ_2 . Поскольку $g|_M = f|_M$, то отображение $f|_M$ также топологически сопряжено τ_2 . Лемма 21 доказана. \square

Доказательство теоремы 1. Пусть $f : X \rightarrow X$ – непрерывное отображение конечного дерева X , у которого топологическая энтропия равна 0, и f имеет бесконечное минимальное множество M . Покажем, что любая точка x из M является почти периодической.

В силу леммы 17 найдутся натуральное число k и множество M_0 в M такие, что M_0 – минимальное множество относительно f^k , и $[M_0]$ является дугой. Согласно лемме 21

сужение $f^k_{|M_0}$ отображения f^k на M_0 топологически сопряжено двоичному счетчику. Следовательно, любая точка x из M_0 является почти периодической относительно f^k . Согласно определению почти периодической точки относительно f^k получаем, что для любой окрестности $U(x)$ точки x существует натуральное число s такое, что

$$(f^k)^{si}(x) = f^{(ks)i}(x) \in U(x).$$

Отсюда следует, что $x \in \text{AP}(f)$.

Положим $M_i = f^i(M_0)$ для $1 \leq i \leq k-1$, $M = M_0 \cup \dots \cup M_{k-1}$. Из определения почти периодической точки следует, что для любой точки x из M_0 имеем: $f^i(x) \in \text{AP}(f^k)$ ($1 \leq i \leq k-1$). Следовательно, $M_i \subset \text{AP}(f^k)$ ($1 \leq i \leq k-1$). Повторяя приведенные выше рассуждения, получаем, что $M_i \subset \text{AP}(f)$ ($1 \leq i \leq k-1$). Таким образом, любая точка из M является почти периодической относительно f . В силу теоремы 8 существует такая последовательность α , что отображение $f_{|M}$ топологически сопряжено счетчику τ_α . Утверждение 1) теоремы 1 доказано.

Докажем утверждение 2) теоремы 1. В силу утверждения 1) теоремы 1 существует последовательность $\alpha = (j_1, \dots, j_i, \dots)$ такая, что отображение $f_{|M}$ топологически сопряжено счетчику τ_α . Следовательно, отображение $f^k_{|M}$ топологически сопряжено отображению τ_α^k . Но M состоит из k инвариантных относительно f^k подмножеств M_i ($0 \leq i \leq k-1$), поэтому отображение $f^k_{|M_i}$ топологически сопряжено счетчику τ_α^k . С другой стороны, из доказательства утверждения 1) следует, что отображение $f^k_{|M_i}$ топологически сопряжено τ_2 для каждого числа $0 \leq i \leq k-1$. Поэтому из определения счетчика получаем, что существует $n \in \mathbb{N}$ такое, что $j_i = 2$ для всех $i \geq n+1$, т. е. последовательность α имеет вид (1).

Теорема 1 доказана.

3. Доказательство теорем 2 и 3

Начнем с вспомогательных определений. Пусть n – натуральное число, и $n \geq 2$. Положим

$$Z_n = \{z \in \mathbb{C} : z^n \in [0; 1]\}. \quad (6)$$

При $n = 2$ множество Z_2 есть отрезок $[-1; 1]$. Если $n \geq 3$, то множество Z_n называется n -одом. Отметим, что n -од имеет единственную точку ветвления 0.

Доказательство теоремы 2 начнем со случая, когда конечное дерево является n -одом, $n \geq 3$ (для $n = 2$ см. теорему 9).

Лемма 22. Для любой последовательности α вида $(n, 2, 2, \dots)$, где $n \geq 2$ существует непрерывное отображение $f : Z_n \rightarrow Z_n$ n -ода Z_n такое, что топологическая энтропия f равна 0, и f имеет бесконечное минимальное множество M , на котором f топологически сопряжено счетчику τ_α .

Доказательство. Начнем с построения вспомогательных отображений.

1. Пусть $g(z) = \lambda^* z(1 - z) : [0; 1] \rightarrow [0; 1]$ – непрерывное отображение отрезка $[0; 1]$, где $\lambda^* \approx 3,56995$ – предельное значение параметров удвоения периодов (см., например, [11]). Отображение g имеет бесконечное минимальное множество M_0 , на котором g топологически сопряжено двоичному счетчику τ_2 (см., например, [31], [2, гл. 1, §2]). Топологическая энтропия g равна 0 [2, гл. 3, §3].

2. Введем обозначение $I_j = [0; e^{2\pi i j/n}]$, где $0 \leq j \leq n - 1$. Тогда $Z_n = \bigcup_{j=0}^{n-1} I_j$. Определим вспомогательное отображение $\varphi_n : Z_n \rightarrow Z_n$, задающее поворот на угол $2\pi/n$ против часовой стрелки, т. е.

$$\varphi_n(z) = z \cdot e^{2\pi i/n}, \text{ если } z \in Z_n. \quad (7)$$

Тогда

$$\varphi_n(I_j) = \begin{cases} I_{j+1}, & \text{если } 0 \leq j \leq n-2; \\ I_0, & \text{если } j = n-1. \end{cases} \quad (8)$$

Отметим, что φ_n – гомеоморфизм, $\varphi_n(0) = 0$ для любого $n \in \mathbb{N}$, а любая точка $z \in Z_n \setminus \{0\}$ является периодической периода n .

3. Перейдем к построению отображения $f : Z_n \rightarrow Z_n$. Положим

- 1) $f(z) = \varphi_n \circ g(z)$, если $z \in I_0$;
- 2) $f(z) = \varphi_n(z)$, если $z \in \bigcup_{j=1}^{n-1} I_j$.

Изучим свойства отображения f .

(i) Поскольку топологическая энтропия отображений g и φ_n равна 0, то топологическая энтропия f также равна нулю.

(ii) Напомним, что отображение g имеет бесконечное минимальное множество M_0 такое, что отображение $g|_{M_0}$ топологически сопряжено двоичному счетчику τ_2 . Положим $M_j = f^j(M_0)$ для $1 \leq j \leq n-1$. Тогда отображение f имеет бесконечное минимальное множество

$$M = M_0 \cup \dots \cup M_{n-1}.$$

(iii) Покажем, что $f|_M$ топологически сопряжено счетчику τ_α , где $\alpha = (n, 2, 2, \dots)$.

Из задания отображения f следует, что $f^n(M_j) = M_j$, и $f|_{M_j}^n$ топологически сопряжено счетчику τ_2 ($0 \leq j \leq n-1$). Следовательно, относительно отображения f^n каждой точке $z \in M_j$ соответствует бесконечная последовательность (k_1, \dots, k_i, \dots) , где $k_i \in \{0, 1\}$. Доопределим каждую бесконечную последовательность следующим образом: если $z \in M_j$, $0 \leq j \leq n-1$, то данной точке будет соответствовать последовательность $(j, k_1, \dots, k_i, \dots)$. Тогда согласно (8) получаем, что $f(z)$ соответствует последовательность $(j+1, k_1, \dots, k_i, \dots)$, если $0 \leq j \leq n-2$, и $(0, \tau_2(k_1, \dots, k_i, \dots))$, если $j = n-1$. Таким образом, отображение $f|_M$ топологически сопряжено счетчику τ_α при $\alpha = (n, 2, 2, \dots)$. Лемма 22 доказана. \square

Доказательство теоремы 2. Пусть последовательность α имеет вид $(j_1, \dots, j_n, 2, 2, \dots)$, где $j_i \geq 2$ для $1 \leq i \leq n$. В силу леммы 22 утверждение теоремы справедливо, если $n = 1$. Поэтому рассмотрим случай, когда $n \geq 2$.

I. Начнем с построения конечного дерева X .

Для каждого числа j_i ($1 \leq i \leq n$) положим

$$L_{j_i} = \bigcup_{k=0}^{j_i-1} \left[\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \mathbf{i}; \frac{k}{j_i-1} \right]. \quad (9)$$

При $j_i = 2$ множество L_{j_i} является дугой. Если $j_i \geq 3$, то L_{j_i} гомеоморфно j_i -оду, при этом $\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \mathbf{i} \in R(L_{j_i})$. Отметим, что $\text{diam } L_{j_i} = 1$ ($1 \leq i \leq n$). Множество концевых точек континуума L_{j_i} имеет вид: $\left\{ \frac{k}{j_i-1} \right\}_{k=0}^{j_i-1}$.

Для каждого числа $2 \leq i \leq n$ введем вспомогательную функцию

$$g_i(z) = \frac{z}{j_1 \cdot \dots \cdot j_{i-1}}, \text{ если } z \in L_{j_i}. \quad (10)$$

Положим $\tilde{L}_{j_i} = g_i(L_{j_i})$ для $2 \leq i \leq n$. Тогда из задания отображения $g_i(z)$ следует, что

$$\text{diam } \tilde{L}_{j_i} = \frac{1}{j_1 \cdot \dots \cdot j_{i-1}}. \quad (11)$$

Точку $g_i\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \mathbf{i}\right)$ обозначим через p_i ($2 \leq i \leq n$).

Для построения конечного дерева X будем объединять L_{j_1} и копии множеств \tilde{L}_{j_i} ($2 \leq i \leq n$) следующим образом:

1. Положим $Y_1 = L_{j_1}$, $a_{i_1} = \frac{i_1}{j_1-1}$ для $0 \leq i_1 \leq j_1-1$.

2. Для каждого числа $0 \leq i_1 \leq j_1-1$ определим отображение $\psi_{i_1}(z)$, задающее параллельный перенос множества \tilde{L}_{j_2} на \mathbb{C} таким образом, чтобы $\psi_{i_1}(p_2) = a_{i_1}$. Положим $G_{i_1} = \psi_{i_1}(\tilde{L}_{j_2})$, $a_{i_1, i_2} = \psi_{i_1}\left(g_2\left(\frac{i_2}{j_2-1}\right)\right)$ для $0 \leq i_s \leq j_s-1$, $s \in \{1, 2\}$. Так как $g_2\left(\frac{i_2}{j_2-1}\right) \in E(\tilde{L}_{j_2})$ для любого числа $0 \leq i_2 \leq j_2-1$, то $a_{i_1, i_2} \in E(G_{i_1})$ ($0 \leq i_1 \leq j_1-1$).

Пусть $Y_2 = \bigcup_{i_1=0}^{j_1-1} G_{i_1}$. Из построения Y_2 следует, что $Y_1 \cap Y_2 = \{a_{i_1}\}_{i_1=0}^{j_1-1}$. Согласно (11) выполнено условие: $G_{i_1} \cap G_{s_1} = \emptyset$, если $i_1 \neq s_1$ ($0 \leq i_1, s_1 \leq j_1-1$). Поэтому $Y_1 \cup Y_2$ – конечное дерево, у которого $a_{i_1} \in R(Y_1 \cup Y_2)$, а $a_{i_1, i_2} \in E(Y_1 \cup Y_2)$, где $0 \leq i_s \leq j_s-1$, $s \in \{1, 2\}$.

3. Для любого набора чисел (i_1, i_2) , где $0 \leq i_s \leq j_s-1$, $s \in \{1, 2\}$, определим отображение $\psi_{i_1, i_2}(z)$, задающее параллельный перенос \tilde{L}_{j_3} на \mathbb{C} таким образом, чтобы

$\psi_{i_1, i_2}(p_3) = a_{i_1, i_2}$. Положим $G_{i_1, i_2} = \psi_{i_1, i_2}(\tilde{L}_{j_3})$, $a_{i_1, i_2, i_3} = \psi_{i_1, i_2}\left(g_3\left(\frac{i_3}{j_3 - 1}\right)\right)$, где $0 \leq i_s \leq j_s - 1$ ($1 \leq s \leq 3$). Поскольку $g_3\left(\frac{i_3}{j_3 - 1}\right) \in E(\tilde{L}_{j_3})$, то $a_{i_1, i_2, i_3} \in E(G_{i_1, i_2})$. В силу (11) имеем

$$G_{i_1, i_2} \cap G_{k_1, k_2} = \emptyset, \text{ если } (i_1, i_2) \neq (k_1, k_2). \quad (12)$$

Объединение всех G_{i_1, i_2} обозначим через Y_3 , где $0 \leq i_s \leq j_s - 1$, $s \in \{1, 2\}$. Из построения Y_3 и условия (12) следует, что $Y_1 \cup Y_2 \cup Y_3$ – конечное дерево.

4. Повторим рассуждения пункта 3 для $3 \leq k \leq n - 2$. В результате мы построим конечное дерево $Y_1 \cup \dots \cup Y_{n-1}$, причем $a_{i_1, \dots, i_{n-1}} \in E(Y_1 \cup \dots \cup Y_{n-1})$ ($0 \leq i_s \leq j_s - 1$, $1 \leq s \leq n - 1$).

5. Опишем построение для $k = n - 1$.

Для любого набора чисел (i_1, \dots, i_{n-1}) , где $0 \leq i_s \leq j_s - 1$, $1 \leq s \leq n - 1$, определим отображение $\psi_{i_1, \dots, i_{n-1}}(z)$, задающее параллельный перенос \tilde{L}_{j_n} на \mathbb{C} таким образом, чтобы $\psi_{i_1, \dots, i_{n-1}}(p_n) = a_{i_1, \dots, i_{n-1}}$. Положим $G_{i_1, \dots, i_{n-1}} = \psi_{i_1, \dots, i_{n-1}}(\tilde{L}_{j_n})$, где $0 \leq i_s \leq j_s - 1$, $1 \leq s \leq n - 1$. Обозначим через Y_n объединение всех $G_{i_1, \dots, i_{n-1}}$. Из (11) следует, что

$$G_{i_1, \dots, i_{n-1}} \cap G_{k_1, \dots, k_{n-1}} = \emptyset, \text{ если } (i_1, \dots, i_{n-1}) \neq (k_1, \dots, k_{n-1}).$$

Кроме этого, $G_{i_1, \dots, i_{n-1}} \cap Y_{n-1} = \{a_{i_1, \dots, i_{n-1}}\}$. Поэтому $Y_1 \cup \dots \cup Y_n$ – конечное дерево. Положим

$$X = Y_1 \cup \dots \cup Y_n.$$

Из построения дерева X следует, что $\text{card } R(X) = 1 + j_1 + \dots + j_{n-1}$. Концевыми точками дерева X являются точки $\psi_{i_1, \dots, i_{n-1}}\left(g_n\left(\frac{i_n}{j_n - 1}\right)\right)$, которые мы обозначим через a_{i_1, \dots, i_n} , где $1 \leq i_s \leq j_s - 1$, $1 \leq s \leq n$.

II. Перейдем к построению отображения $f : X \rightarrow X$.

Для любого числа $1 \leq k \leq n - 1$ определим Z_{j_k} как в (6), отображение $\varphi_{j_k} : Z_{j_k} \rightarrow Z_{j_k}$ как в (7), и пусть отображение $f : Z_{j_n} \rightarrow Z_{j_n}$ будет таким, как в доказательстве леммы 22. Положим $\chi = f : Z_{j_n} \rightarrow Z_{j_n}$.

Разобьем задание отображения $f : X \rightarrow X$ на несколько шагов.

1) Пусть $h : Z_{j_1} \rightarrow Y_1$ – любой гомеоморфизм такой, что $h(Z_{j_1}) = Y_1$. Положим

$$f(z) = h \circ \varphi_{j_1} \circ h^{-1}(z), \text{ если } z \in Y_1.$$

Тогда $p_1 \in \text{Fix}(f)$, а любая точка x из $Y_1 \setminus \{p_1\}$ – периодическая точка периода j_1 . При этом, для любой точки $a_{i_1} \in E(Y_1)$ выполнено условие: $f(a_{i_1}) = a_{i_1+1}$, если $0 \leq i_1 \leq j_1 - 2$,

и $f(a_{i_1}) = a_0$, если $i_1 = j_1 - 1$. Следовательно,

$$f([p_1; a_{i_1}]) = \begin{cases} [p_1; a_{i_1+1}], & \text{если } 0 \leq i_1 \leq j_1 - 2; \\ [p_1; a_0], & \text{если } i_1 = j_1 - 1. \end{cases} \quad (13)$$

2) Пусть $2 \leq k \leq n - 1$. Опишем задание отображения $f : Y_k \rightarrow Y_k$ на множестве Y_k .

Пусть $h_{i_1, \dots, i_{k-1}} : Z_{j_k} \rightarrow G_{i_1, \dots, i_{k-1}}$ — произвольный гомеоморфизм такой, что $h_{i_1, \dots, i_{k-1}}(Z_{j_k}) = G_{i_1, \dots, i_{k-1}}$, где $0 \leq i_s \leq j_s - 1$, $1 \leq s \leq k - 1$. Определим $f : Y_k \rightarrow Y_k$ таким образом, чтобы для любой точки $z \in G_{i_1, \dots, i_{k-1}}$ выполнялось равенство:

$$f^{j_1 \dots j_{k-1}}(z) = h_{i_1, \dots, i_{k-1}} \circ \varphi_{j_k} \circ h_{i_1, \dots, i_{k-1}}^{-1}(z).$$

Тогда любая точка z из $Y_k \setminus \bigcup_{\substack{0 \leq i_s \leq j_s - 1 \\ 1 \leq s \leq k}} \{a_{i_1, \dots, i_{k-1}}\}$ является периодической периода j_k относительно $f^{j_1 \dots j_{k-1}}$, и, следовательно, периодической периода $j_1 \dots j_k$ относительно отображения f . Более того, для каждой точки $a_{i_1, \dots, i_k} \in E(Y_k)$ справедливо:

$$\begin{aligned} f^{j_1 \dots j_{k-1}}(a_{i_1, \dots, i_{k-1}, i_k}) &= a_{i_1, \dots, i_{k-1}, (i_k+1)}, & \text{если } 0 \leq i_k \leq j_k - 2, \\ f^{j_1 \dots j_{k-1}}(a_{i_1, \dots, i_{k-1}, i_k}) &= a_{i_1, \dots, i_{k-1}, 0}, & \text{если } i_k = j_k - 1. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$f^{j_1 \dots j_{k-1}}([p_1; a_{i_1, \dots, i_{k-1}, i_k}]) = \begin{cases} [p_1; a_{i_1, \dots, i_{k-1}, (i_k+1)}], & \text{если } 0 \leq i_k \leq j_k - 2; \\ [p_1; a_{i_1, \dots, i_{k-1}, 0}], & \text{если } i_k = j_k - 1. \end{cases} \quad (14)$$

3) Пусть $h_{i_1, \dots, i_{n-1}} : Z_{j_n} \rightarrow G_{i_1, \dots, i_{n-1}}$ — гомеоморфизм Z_{j_n} на $G_{i_1, \dots, i_{n-1}}$. Зададим отображение $f : Y_n \rightarrow Y_n$ таким образом, чтобы для любой точки $z \in G_{i_1, \dots, i_{n-1}} \subset Y_n$ выполнялось равенство:

$$f^{j_1 \dots j_{n-1}}(z) = h_{i_1, \dots, i_{n-1}} \circ \chi \circ h_{i_1, \dots, i_{n-1}}^{-1}(z).$$

Тогда $f^{j_1 \dots j_{n-1}}(G_{i_1, \dots, i_{n-1}}) = G_{i_1, \dots, i_{n-1}}$ для любых $0 \leq i_s \leq j_s - 1$, $1 \leq s \leq n - 1$. Пусть $i_1 = \dots = i_{n-1} = 0$. Согласно лемме 22 отображение $f^{j_1 \dots j_{n-1}}$ имеет минимальное множество $M_0 \subset \underbrace{G_{0, \dots, 0}}_{n-1}$ такое, что $f^{j_1 \dots j_{n-1}}|_{M_0}$ топологически сопряжено счетчику τ_{α_1} , где $\alpha_1 = (j_n, 2, 2, \dots)$. Положим $M_j = f^j(M_0)$ для любого числа $1 \leq j \leq j_1 \dots j_{n-1} - 1$. Тогда отображение f имеет минимальное множество

$$M = \bigcup_{j=0}^{j_1 \dots j_{n-1} - 1} M_j.$$

Учитывая (13) и (14), получаем, что отображение $f|_M$ топологически сопряжено отобра-

жению τ_α , где $\alpha = (j_1, \dots, j_{n-1}, j_n, 2, 2, \dots)$.

Отметим, что f непрерывное отображение, имеющее нулевую топологическую энтропию. Теорема 2 доказана.

Доказательство теоремы 3. Пусть $\alpha = (j_1, \dots, j_n, \dots)$ – любая последовательность натуральных чисел, где $j_n \geq 2$. Начнем с построения дендрита Y .

Пусть для любого числа $i \in \mathbb{N}$ определены континуумы L_{j_i} как в (9), для любого натурального числа $i \geq 2$ определены отображения $g_i(z)$ как в (10). Положим $\tilde{L}_{j_i} = g_i(L_{j_i})$ для $i \geq 2$. Так же как в доказательстве теоремы 2 обозначим через p_i вершину \tilde{L}_{j_i} для каждого числа $i \in \mathbb{N}$. Предположим, что построены множества Y_1, \dots, Y_n как в п. I доказательства теоремы 2. Обозначим концевые точки множества Y_n через a_{i_1, \dots, i_n} так же как в п. I доказательства теоремы 2.

Для любого набора чисел (i_1, \dots, i_n) , где $0 \leq i_s \leq j_s - 1$, $1 \leq s \leq n$, определим отображение $\psi_{i_1, \dots, i_n}(z)$, задающее параллельный перенос $\tilde{L}_{j_{n+1}}$ на \mathbb{C} таким образом, чтобы $\psi_{i_1, \dots, i_n}(p_{n+1}) = a_{i_1, \dots, i_n}$. Положим $G_{i_1, \dots, i_n} = \psi_{i_1, \dots, i_n}(\tilde{L}_{j_{n+1}})$, где $0 \leq i_s \leq j_s - 1$, $1 \leq s \leq n$. Из (11) следует, что

$$G_{i_1, \dots, i_n} \cap G_{k_1, \dots, k_n} = \emptyset, \text{ если } (i_1, \dots, i_n) \neq (k_1, \dots, k_n). \quad (15)$$

Отметим, что $G_{i_1, \dots, i_n} \cap Y_n = \{a_{i_1, \dots, i_n}\}$ для любых $0 \leq i_s \leq j_s - 1$, где $1 \leq s \leq n$. Обозначим через Y_{n+1} объединение всех G_{i_1, \dots, i_n} . Применим принцип математической индукции. В результате построим последовательность множеств $\{Y_n\}_{n \geq 1}$ таких, что

$$Y_n \cap Y_{n+1} = \bigcup_{\substack{0 \leq i_s \leq j_s - 1 \\ 1 \leq s \leq n}} \{a_{i_1, \dots, i_n}\}. \quad (16)$$

Положим $Y = \overline{\bigcup_{n=1}^{+\infty} Y_n}$. Из построения Y следует, что Y связно и замкнуто. В силу (11) получаем, что

$$\text{diam } Y = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{j_1 \cdot \dots \cdot j_n}. \quad (17)$$

Так как для каждого $n \geq 1$ выполнено неравенство: $j_n \geq 2$, то

$$\frac{1}{j_1 \cdot \dots \cdot j_n} \leq \frac{1}{2^n}.$$

Следовательно, ряд в (17) сходится, и Y – ограничено. Таким образом, Y – континуум. Локальная связность Y следует из (11), поскольку

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \text{diam } G_{i_1, \dots, i_n} = 0.$$

Из (15) и (16) получаем, что континуум Y не содержит дуг, гомеоморфных окружности. Следовательно, Y – дендрит.

Пусть e – любая точка из $E(Y)$, а $p_1 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$. Согласно утверждению 1) леммы 5 существует единственная дуга $[p_1; e]$ в Y , соединяющая точки p_1 и e . Из построения Y следует существование последовательности точек $\{a_{i_1, \dots, i_n}\}_{n \geq 1} \subset R(Y)$ ($0 \leq i_s \leq j_s - 1$, $1 \leq s \leq n$), принадлежащих дуге $[p_1; e]$ таких, что

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_{i_1, \dots, i_n} = e.$$

В результате каждой концевой точке e из Y поставлена в соответствие бесконечная последовательность (i_1, \dots, i_n, \dots) , где $0 \leq i_n \leq j_n - 1$, $n \in \mathbb{N}$.

Построенный дендрит Y является обобщением дендрита Гехмана [32] (конструктивное построение дендрита Гехмана, отличное от [32], см. также в [7]). Отметим, что дендрит Y является топологическим пределом конечных деревьев $Y_1 \cup \dots \cup Y_n$ при $n \rightarrow \infty$.

Перейдем к построению отображения $f : Y \rightarrow Y$. Идея построения отображения взята из [7, теорема С], где построены дендрит X и непрерывное отображение $f : X \rightarrow X$ для последовательности $\alpha = 2$.

Зададим отображение f на Y_1 как в п. 1) построения отображения f в доказательстве теоремы 2. На каждом множестве Y_n ($n \geq 2$) определим f как в п. 2) построения отображения f в доказательстве той же теоремы. В результате каждая точка z из $Y_n \setminus \bigcup_{\substack{0 \leq i_s \leq j_s - 1 \\ 1 \leq s \leq n-1}} \{a_{i_1, \dots, i_{n-1}}\}$ является периодической периода $j_1 \cdot \dots \cdot j_n$ для любого числа $n \in \mathbb{N}$.

Пусть $e \in E(Y)$, и $e = \lim_{n \rightarrow +\infty} a_{i_1, \dots, i_n}$, где $a_{i_1, \dots, i_n} \in R(Y)$. Так же как в [7, теорема С] положим

$$f(e) = \lim_{n \rightarrow +\infty} f(a_{i_1, \dots, i_n}).$$

Построенное отображение f непрерывно, и $f(E(Y)) = E(Y)$. Более того, f – гомеоморфизм.

Покажем, что любая точка e из $E(Y)$ является почти периодической относительно отображения f . Пусть $U(e)$ – произвольная окрестность точки p . Из построения Y и условия (11) получаем, что существуют натуральные числа $n \geq 1$, i_1, \dots, i_n , где $0 \leq i_s \leq j_s - 1$ ($1 \leq s \leq n$), такие, что $G_{i_1, \dots, i_n} \subset U(e)$. Из построения отображения f следует равенство

$$f^{j_1 \cdot \dots \cdot j_n}(G_{i_1, \dots, i_n}) = G_{i_1, \dots, i_n}.$$

Положим $k_0 = j_1 \cdot \dots \cdot j_n$. Тогда $f^{k_0 k}(e) \in U(e)$ для любого числа $k \in \mathbb{N}$, т.е. $e \in \text{AP}(f)$. Согласно теореме 8 найдется последовательность α_1 такая, что отображение $f|_{E(Y)}$ топологически сопряжено счетчику τ_{α_1} . С учетом (13) и (14) получаем, что $\alpha_1 = (j_1, \dots, j_n, \dots)$, т.е. $\alpha_1 = \alpha$. Теорема 3 доказана.

4. Доказательство теоремы 4

Начнем с необходимых определений.

Пусть непрерывное отображение $f : X \rightarrow X$ дендрита X имеет минимальное множество M . Минимальное множество M называется *вполне минимальным*, если для любого натурального числа $n \geq 1$ множество M является минимальным для f^n .

Следуя работе [10], *регулярным периодическим разложением множества M* будем называть набор множеств $M_0, \dots, M_{k-1} \subset M$ таких, что $M = M_0 \cup \dots \cup M_{k-1}$, $f(M_i) = M_{i+1 \pmod k}$, и каждое M_i является минимальным относительно f^k . Число k называется длиной M . Множество длин всех регулярных периодических разложений множества M называется *идеалом разложения* и обозначается через $DI(M)$.

Если при некотором натуральном $n \geq 2$ множество M не является минимальным относительно f^n , то M имеет регулярное периодическое разложение длины k , являющееся делителем числа n [4]. Отметим, что $DI(M) = \{1\}$ тогда и только тогда, когда множество M является вполне минимальным [10].

Минимальное множество M будем называть *относительно вполне минимальным*, если существует регулярное периодическое разложение M_0, \dots, M_{n-1} при $n \geq 2$ такое, что каждое множество M_i является вполне минимальным относительно отображения f^n .

Отметим, что минимальное множество M не является вполне минимальным и относительно вполне минимальным, если идеал разложения $DI(M)$ бесконечен [10]. В этом случае M будем называть *минимальным множеством с бесконечным идеалом*.

Нам потребуются следующие вспомогательные утверждения.

Теорема 23 ([8]). Пусть X – дендрит со счетным числом концевых точек, а $f : X \rightarrow X$ – непрерывное отображение, имеющее бесконечное минимальное множество M , которое является вполне минимальным или относительно вполне минимальным. Тогда топологическая энтропия отображения f положительна.

Теорема 24 ([10, теорема 4.4]). Пусть $f : X \rightarrow X$ – минимальное отображение компактного метрического пространства X с бесконечным идеалом. Тогда существует такая последовательность α , что отображение f полусопряжено счетчику τ_α .

Доказательство теоремы 4. Так как дендрит X имеет счетное число концевых точек, то в силу теоремы 23 множество M является минимальным с бесконечным идеалом. Тогда согласно теореме 24 существует последовательность α такая, что отображение $f|_M$ полусопряжено счетчику τ_α . Теорема 4 доказана.

Список литературы

- [1] К. Куратовский, *Топология*, Т. 1, Мир, М., 1966; Т. 2, Мир, М., 1969.
- [2] А.Н. Шарковский, Ю.Л. Майстренко, Е.Ю. Романенко, *Разностные уравнения и их приложения*, Наук. думка, Киев, 1986.

-
- [3] L. Alsedà, X. Ye, *No division and the set of periods for tree maps*, Ergodic Theory Dynam. Systems **15** (2), 221–237 (1995).
DOI: <https://doi.org/10.1017/S0143385700008348>
- [4] X. Ye, *D-function of a minimal set and an extension of Sharkovskii's theorem to minimal sets*, Ergodic Theory Dynam. Systems **12** (2), 365–376 (1992).
DOI: <https://doi.org/10.1017/S0143385700006817>
- [5] L. Alsedà, X. Ye, *Minimal sets of maps of Y* , J. Math. Anal. Appl. **187** (1), 324–338 (1994).
DOI: <https://doi.org/10.1006/jmaa.1994.1359>
- [6] B. Hasselblat, A. Katok, *A first course in dynamics. With a panorama of recent developments*, Cambridge University Press, New York, 2003.
- [7] Л.С. Ефремова, Е.Н. Махрова, *Динамика монотонных отображений дендритов*, Матем. сб. **192** (6), 15–30 (2001).
DOI: <https://doi.org/10.4213/sm570>
- [8] E.N. Makhrova, *Remarks on minimal sets on dendrites and finite graphs*, J. Difference Equ. Appl. **29** (9–12), 1313–1322 (2023).
DOI: <https://doi.org/10.1080/10236198.2023.2220417>
- [9] L. Block, J. Keesling, *A characterization of adding machine maps*, Topology Appl. **140** (2–3), 151–161 (2004).
DOI: <https://doi.org/10.1016/j.topol.2003.07.006>
- [10] J. Banks, *Regular periodic decompositions for topologically transitive maps*, Ergodic Theory Dynam. Systems **17** (3), 505–529 (1997).
DOI: <https://doi.org/10.1017/S0143385797069885>
- [11] М. Фейгенбаум, *Универсальность в поведении нелинейных систем*, УФН **141** (2), 343–374 (1983).
DOI: <https://doi.org/10.3367/UFNr.0141.198310e.0343>
- [12] Z. Nitecki, *Topological dynamics on the interval*, in: A. Katok, Ergodic theory and dynamical systems II, Progr. Math. **21**, Birkhäuser, Boston, MA, 1–73 (1982).
https://doi.org/10.1007/978-1-4899-2689-0_1
- [13] A. Blokh, *The “spectral” decomposition for one-dimensional maps*, in: Dynam. Report. Expositions Dynam. Systems **4**, 1–59 (1995).
DOI: https://doi.org/10.1007/978-3-642-61215-2_1
- [14] F. Balibrea, R. Hric, L'. Snoha, *Minimal sets on graphs and dendrites*, Internat. J. Bifur. Chaos Appl. Sci. Engrg. **13** (7), 1721–1725 (2003).
DOI: <https://doi.org/10.1142/S0218127403007576>
- [15] F. Balibrea, T. Downarowicz, R. Hric, L'. Snoha, V. Špitalský, *Almost totally disconnected minimal systems*, Ergodic Theory Dynam. Systems **29** (3), 737–766 (2009).
DOI: <https://doi.org/10.1017/S0143385708000540>

-
- [16] H.-O. Peitgen, P.H. Richter, *The beauty of fractals. Images of complex dynamical systems*, Springer-Verlag, Berlin, 1986.
DOI: <https://doi.org/10.1007/978-3-642-61717-1>
- [17] S.J. Agronsky, J.G. Ceder, *What sets can be ω -limit sets in E^n ?*, Real Anal. Exchange **17** (1), 97–109 (1991/1992).
DOI: <https://doi.org/10.2307/44152199>
- [18] F. Balibrea, J.L. García-Guirao, *Continua with empty interior as ω -limit sets*, Appl. Gen. Topol. **6** (2), 195–205 (2005).
- [19] L.S. Efremova, *Example of the smooth skew product in the plane with the one-dimensional ramified continuum as the global attractor*, in: *European Conference on Iteration Theory 2010*, ESAIM Proc. **36**, EDP Sci., Les Ulis, 15–25 (2012).
DOI: <https://doi.org/10.1051/proc/201236002>
- [20] L.S. Efremova, *Ramified continua as global attractors of C^1 -smooth self-maps of a cylinder close to skew products*, J. Difference Equ. Appl. **29** (9–12), 1244–1274 (2023).
DOI: <https://doi.org/10.1080/10236198.2023.2204144>
- [21] D. Drozdov, A. Tetenov, *On the classification of fractal square dendrites*, Adv. Theory Nonlinear Anal. Appl. **7** (3), 19–96 (2023).
DOI: <https://doi.org/10.17762/atnaa.v7.i3.276>
- [22] В.Ж. Сакбаев, О.Г. Смолянов, *Диффузия и квантовая динамика на графах*, Докл. РАН, **451** (2), 141–145 (2013).
DOI: <https://doi.org/10.7868/s0869565213200061>
- [23] Л.С. Ефремова, Е.Н. Махрова, *Одномерные динамические системы*, УМН **76** (5), 81–146 (2021).
DOI: <https://doi.org/10.4213/rm9998>
- [24] Дж.Д. Биркгоф, *Динамические системы*, Регулярная и хаотическая динамика, Москва–Ижевск, 2002.
- [25] R. Munasinghe, *Composants, unstable sets, and minimal sets of inverse limit spaces*, Thesis (Ph.D.), University of Wyoming. ProQuest LLC, Ann Arbor, MI, 1992.
- [26] S. Kolyada, L'. Snoha, *Minimal dynamical systems*, Scholarpedia **4** (11), art. 5803.
URL: https://www.scholarpedia.org/article/Minimal_dynamical_systems
- [27] R.L. Adler, A.G. Konheim, M.H. McAndrew, *Topological entropy*, Trans. Amer. Math. Soc. **114**, 309–319 (1965).
DOI: <https://doi.org/10.1090/S0002-9947-1965-0175106-9>
- [28] Е.Н. Махрова, *Структура дендритов со свойством существования периодических точек*, Изв. вузов. Матем. (11), 41–45 (2011).
URL: <https://www.mathnet.ru/ivm8393>

-
- [29] E.N. Makhrova, *Remarks on the existence of periodic points for continuous maps on dendrites*, Lobachevskii J. Math. **43** (7), 1711–1719 (2022).
DOI: <https://doi.org/10.1134/S1995080222100274>
- [30] G.R. Gordon Jr., L. Lum, *Monotone retracts and some characterizations of dendrites*, Proc. Amer. Math. Soc. **59** (1), 156–158 (1976).
DOI: <https://doi.org/10.1090/S0002-9939-1976-0423317-X>
- [31] Ю.С. Барковский, Г.М. Левин, *О предельном канторовом множестве*, УМН **35** (2), 201–202 (1980).
URL: <https://www.mathnet.ru/rus/rm3269>
- [32] H.M. Gehman, *Concerning the subsets of a plane continuous curve*, Ann. Math. **27** (1), 29–46 (1925).
DOI: <https://doi.org/10.2307/1967832>

Елена Николаевна Махрова

Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского,
пр-т Гагарина, д. 23, г. Нижний Новгород, 603022, Россия,
e-mail: elena_makhrova@inbox.ru

On minimal sets of continuous maps on one-dimensional continua

E.N. Makhrova

Abstract. Let X be a finite tree and let $f : X \rightarrow X$ be a continuous map with zero topological entropy and an infinite minimal set M . We show that the restriction of $f|_M$ of f to M is topologically conjugate to adding-machine τ_α , where $\alpha = (j_1, \dots, j_n, 2, 2, \dots)$ be the sequence for $j_i \geq 2$ if $1 \leq i \leq n$. We describe the topological structure of finite trees on which there exist continuous maps with zero topological entropy and an infinite minimal set M on which the map $f|_M$ is topologically conjugate to adding machine τ_α , where $\alpha = (j_1, \dots, j_n, 2, 2, \dots)$. At the same time, for any sequence $\alpha = (j_1, \dots, j_i, \dots)$, where $j_i \geq 2$ for all $i \geq 1$, there exist a dendrite X that is not a finite tree and a continuous map f with zero topological entropy and an infinite minimal set M on which the map f is topologically conjugate to adding machine τ_α .

We also show that for any sequence $\alpha = (j_1, \dots, j_n, \dots)$, where $j_i \geq 2$ for all $i \geq 1$, there exist a dendrite X that is not a finite tree and a continuous map f with zero topological entropy and an infinite minimal set M such that $f|_M$ is topologically conjugate to adding-machine τ_α .

Keywords: dendrite, finite tree, minimal set, adding-machine, topological entropy, almost periodic point, recurrent point.

DOI: 10.26907/2949-3919.2025.3.110-135

References

- [1] K. Kuratowski, *Topology*. Vol. 1, Academic Press, New York-London, 1966; Academic Press, New York-London, 1968.
DOI: <https://doi.org/10.1016/C2013-0-11022-7>
<https://doi.org/10.1016/C2013-0-11023-9>
- [2] A.N. Sharkovsky, Yu.L. Maistrenko, E.Yu. Romanenko, *Difference equations and their applications*, Kluwer Academic Publishers Group, Dordrecht, 1993.
DOI: <https://doi.org/10.1007/978-94-011-1763-0>

Acknowledgements. This research is supported by Russian Science Foundation (RSF) under grant 24-21-00242, <https://rscf.ru/project/24-21-00242/>.

Received: 07 June 2025. Accepted: 09 September 2025. Published: 16 October 2025.

-
- [3] L. Alsedà, X. Ye, *No division and the set of periods for tree maps*, Ergodic Theory Dynam. Systems **15** (2), 221–237 (1995).
DOI: <https://doi.org/10.1017/S0143385700008348>
- [4] X. Ye, *D-function of a minimal set and an extension of Sharkovskii's theorem to minimal sets*, Ergodic Theory Dynam. Systems **12** (2), 365–376 (1992).
DOI: <https://doi.org/10.1017/S0143385700006817>
- [5] L. Alsedà, X. Ye, *Minimal sets of maps of Y* , J. Math. Anal. Appl. **187** (1), 324–338 (1994).
DOI: <https://doi.org/10.1006/jmaa.1994.1359>
- [6] B. Hasselblat, A. Katok, *A first course in dynamics. With a panorama of recent developments*, Cambridge University Press, New York, 2003.
- [7] L.S. Efremova, E.N. Makhrova, *The dynamics of monotone maps of dendrites*, Sb. Math. **192** (6), 807–821 (2001).
DOI: <https://doi.org/10.1070/SM2001v192n06ABEH000570>
- [8] E.N. Makhrova, *Remarks on minimal sets on dendrites and finite graphs*, J. Difference Equ. Appl. **29** (9–12), 1313–1322 (2023).
DOI: <https://doi.org/10.1080/10236198.2023.2220417>
- [9] L. Block, J. Keesling, *A characterization of adding machine maps*, Topology Appl. **140** (2–3), 151–161 (2004).
DOI: <https://doi.org/10.1016/j.topol.2003.07.006>
- [10] J. Banks, *Regular periodic decompositions for topologically transitive maps*, Ergodic Theory Dynam. Systems **17** (3), 505–529 (1997).
DOI: <https://doi.org/10.1017/S0143385797069885>
- [11] M.J. Feigenbaum, *Universal behavior in nonlinear systems*, Los Alamos Sci. **1** (1), 4–27 (1980).
DOI: [https://doi.org/10.1016/0167-2789\(83\)90112-4](https://doi.org/10.1016/0167-2789(83)90112-4)
- [12] Z. Nitecki, *Topological dynamics on the interval*, in: A. Katok, Ergodic theory and dynamical systems II, Progr. Math. **21**, Birkhäuser, Boston, MA, 1–73 (1982).
https://doi.org/10.1007/978-1-4899-2689-0_1
- [13] A. Blokh, *The “spectral” decomposition for one-dimensional maps*, in: Dynam. Report. Expositions Dynam. Systems **4**, 1–59 (1995).
DOI: https://doi.org/10.1007/978-3-642-61215-2_1
- [14] F. Balibrea, R. Hric, L'. Snoha, *Minimal sets on graphs and dendrites*, Internat. J. Bifur. Chaos Appl. Sci. Engrg. **13** (7), 1721–1725 (2003).
DOI: <https://doi.org/10.1142/S0218127403007576>
- [15] F. Balibrea, T. Downarowicz, R. Hric, L'. Snoha, V. Špitalský, *Almost totally disconnected minimal systems*, Ergodic Theory Dynam. Systems **29** (3), 737–766 (2009).
DOI: <https://doi.org/10.1017/S0143385708000540>

-
- [16] H.-O. Peitgen, P.H. Richter, *The beauty of fractals. Images of complex dynamical systems*, Springer-Verlag, Berlin, 1986.
DOI: <https://doi.org/10.1007/978-3-642-61717-1>
 - [17] S.J. Agronsky, J.G. Ceder, *What sets can be ω -limit sets in E^n ?*, Real Anal. Exchange **17** (1), 97–109 (1991/1992).
DOI: <https://doi.org/10.2307/44152199>
 - [18] F. Balibrea, J.L. García-Guirao, *Continua with empty interior as ω -limit sets*, Appl. Gen. Topol. **6** (2), 195–205 (2005).
 - [19] L.S. Efremova, *Example of the smooth skew product in the plane with the one-dimensional ramified continuum as the global attractor*, in: *European Conference on Iteration Theory 2010*, ESAIM Proc. **36**, EDP Sci., Les Ulis, 15–25 (2012).
DOI: <https://doi.org/10.1051/proc/201236002>
 - [20] L.S. Efremova, *Ramified continua as global attractors of C^1 -smooth self-maps of a cylinder close to skew products*, J. Difference Equ. Appl. **29** (9–12), 1244–1274 (2023).
DOI: <https://doi.org/10.1080/10236198.2023.2204144>
 - [21] D. Drozdov, A. Tetenov, *On the classification of fractal square dendrites*, Adv. Theory Nonlinear Anal. Appl. **7** (3), 19–96 (2023).
DOI: <https://doi.org/10.17762/atnaa.v7.i3.276>
 - [22] V.Zh. Sakbaev, O.G. Smolyanov, *Diffusion and quantum dynamics on graphs*, Dokl. Math. **88** (1), 404–408 (2013).
DOI: <https://doi.org/10.1134/S1064562413040108>
 - [23] L.S. Efremova, E.N. Makhrova, *One-dimensional dynamical systems*, Russian Math. Surveys **76** (5), 821–881 (2021).
DOI: <https://doi.org/10.1070/RM9998>
 - [24] G.D. Birkhoff, *Dynamical systems*, AMS, New York, 1927.
 - [25] R. Munasinghe, *Composants, unstable sets, and minimal sets of inverse limit spaces*, Thesis (Ph.D.), University of Wyoming. ProQuest LLC, Ann Arbor, MI, 1992.
 - [26] S. Kolyada, L'. Snoha, *Minimal dynamical systems*, Scholarpedia **4** (11), art. 5803.
URL: [https://www.scholarpedia.org/article/Minimal\\$_\\$_dynamical\\$_\\$_systems](https://www.scholarpedia.org/article/Minimal$_$_dynamical$_$_systems)
 - [27] R.L. Adler, A.G. Konheim, M.H. McAndrew, *Topological entropy*, Trans. Amer. Math. Soc. **114**, 309–319 (1965).
DOI: <https://doi.org/10.1090/S0002-9947-1965-0175106-9>
 - [28] E.N. Makhrova, *The structure of dendrites with the periodic point property*, Russian Math. (Iz. VUZ) **55** (11) 33–37 (2011).
DOI: <https://doi.org/10.3103/S1066369X11110053>

-
- [29] E.N. Makhrova, *Remarks on the existence of periodic points for continuous maps on dendrites*, Lobachevskii J. Math. **43** (7), 1711–1719 (2022).
DOI: <https://doi.org/10.1134/S1995080222100274>
- [30] G.R. Gordon Jr., L. Lum, *Monotone retracts and some characterizations of dendrites*, Proc. Amer. Math. Soc. **59** (1), 156–158 (1976).
DOI: <https://doi.org/10.1090/S0002-9939-1976-0423317-X>
- [31] Yu.S. Barkovskii, G.M. Levin, *A Cantor limit set*, Russ. Math. Surveys **35**(2), 235–236 (1980).
DOI: <https://doi.org/10.1070/RM1980v035n02ABEH001644>
- [32] H.M. Gehman, *Concerning the subsets of a plane continuous curve*, Ann. Math. **27** (1), 29–46 (1925).
DOI: <https://doi.org/10.2307/1967832>

Elena Nikolaevna Makhrova

Lobachevsky State University of Nizhny Novgorod,
23 Gagarin ave., Nizhny Novgorod 603022, Russia,
E-mail: elena_makhrova@inbox.ru

XVII Международная Казанская школа-конференция “Теория функций, ее приложения и смежные вопросы”. По результатам проведения конференции

С 24 по 28 августа 2025 г. в Казанском федеральном университете прошла XVII Международная конференция “Теория функций, ее приложения и смежные вопросы”. Среди организаторов мероприятия – Казанский (Приволжский) федеральный университет, а также Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, Математический институт им. В.А. Стеклова РАН. Школа-конференция проводилась при финансовой поддержке Научно-образовательного математического центра Приволжского федерального округа и Математического центра мирового уровня “Математический институт им. В.А. Стеклова Российской академии наук”. В конференции участвовали ведущие специалисты-математики, работающие в области теории функций действительного и комплексного переменного, функционального анализа и квантовой теории информации, дифференциальных и интегральных уравнений.

На конференции было сделано 14 пленарных докладов:

Асташкин Сергей Владимирович (Самара). *О структуре множества крайних точек единичного шара пространства Харди–Лоренца.*

Бикчентаев Айрат Мидхатович (Казань). *О жизни и творчестве профессора Данияра Хамидовича Муштары (к 80-летию со дня рождения).*

Водопьянов Сергей Константинович (Новосибирск). *Квазиконформный анализ на римановых многообразиях.*

Дубинин Владимир Николаевич (Владивосток). *Голоморфные функции в круговом кольце.*

Капустин Владимир Владимирович (С.-Петербург). *Парные корреляции нулей дзета-функции и теория операторов.*

Карманова Мария Борисовна (Новосибирск). *Графики и композиции отображений на двухступенчатых группах Карно.*

Кротов Вениамин Григорьевич (Минск). *Неравенства Харди–Литтлвуда для классов типа Харди–Лоренца.*

Мусин Ильдар Хамитович (Уфа). *О некоторых задачах теории операторов в пространствах быстро убывающих функций.*

Плещинский Николай Борисович (Казань). *100 лет со дня рождения профессора Любови Ивановны Чибриковой.*

Сергеев Армен Глебович (Москва). *Топологические инварианты диэлектриков.*

Темляков Владимир Николаевич (Москва). *Приближенное восстановление функций по значениям в точках.*

Фарков Юрий Анатольевич (Москва). *Три задачи о поперечниках классов аналитических функций.*

Федоровский Константин Юрьевич (Москва). *Аппроксимация суммами аналитических ядер.*

Хабибуллин Булат Нурмиевич (Уфа). *Распределение корней голоморфных на круге функций с субгармонической мажорантой.*

На конференции работало 5 секций, на которых было сделано более 70 научных докладов учеными из Белгорода, Бухары, Владивостока, Владимира, Гомеля, Донецка, Елабуги, Жуковского, Казани, Караганды, Красноярска, Курска, Майкопа, Мешхеда (Иран), Минска, Москвы, Муската (Оман), Набережных Челнов, Новосибирска, Реутова, Самары, Санкт-Петербурга, Смоленска, Стерлитамака, Уфы.

Во время конференции были обсуждены перспективы развития теории функций, намечены направления сотрудничества казанских математиков с коллегами из ведущих научных центров страны, а также Белоруссии, Ирана, Казахстана, Омана, Таджикистана и Узбекистана. Молодые участники конференции смогли ознакомиться с современными тенденциями и актуальными проблемами математического анализа. Конференция способствовала укреплению связей казанских математиков со специалистами из РФ и зарубежными математиками, пропаганде достижений казанских математиков в области теории функций и смежных областях математического анализа.

По итогам конференции были изданы материалы конференции в сборнике “Труды Математического центра им. Н.И. Лобачевского”, Т. 69 (Казань, КФУ, 2025. 216 с.).

На заключительном заседании было решено провести следующую конференцию по теории функций в Казани в августе 2027 г.

Председатель организационного комитета
д.ф.-м.н., проф., член-корр. АН Республики Татарстан
Насыров Семён Рафаилович

Календарь конференций (ноябрь 2025 г. – январь 2026 г.)

Ноябрь 2025 г.

- **Российско-Китайская конференция “Дифференциальные и разностные уравнения”**
г. Новосибирск, Россия, 31 октября–06 ноября 2025 г.
Сайт: <https://dd-eq.ru>
Регистрация завершена.
- **Конференция “Маломерная топология 2025”**
ПОМИ РАН, г. Санкт-Петербург, Россия, 05–07 ноября 2025 г.
Сайт: <https://www.mathnet.ru/rus/conf2667>
- **Мемориальная конференция памяти А.Н. Паршина**
МИАН, г. Москва, Россия, 11 ноября 2025 г.
Сайт: <https://www.mathnet.ru/rus/conf2657>
- **Современные стохастические модели и проблемы актуарной математики. МАМОНТ**
Каршинский государственный университет, г. Карши, Узбекистан, 11–14 ноября 2025 г.
Сайт: <https://mammoth2025.qarshidu.uz>
Регистрация завершена.
- **Онлайн конференция “Рубежи голографического соответствия–6”**
Математический институт им. В.А. Стеклова РАН, онлайн, г. Москва, Россия, 17–21 ноября 2025 г.
Сайт: <https://www.mathnet.ru/rus/conf2666>
- **Международный конгресс “Современные проблемы компьютерных и информационных наук”, посвященный 270-летию МГУ имени М.В. Ломоносова**
ВМК МГУ, г. Москва, Россия, 20–22 ноября 2025 г.
Сайт: <http://it-edu.oit.cmc.msu.ru>
Регистрация докладчиков завершена.
Срок регистрации для слушателей – до 1 ноября 2025 г.
- **Черновские аппроксимации 2025**
Онлайн, г. Нижний Новгород, г. Москва, Россия, 22 ноября 2025 г.
Сайт: <https://nnov.hse.ru/bipm/dsa/chernoffapproximations2025>
Срок регистрации – до 1 ноября 2025 г.

- **Компьютерная алгебра в научных вычислениях**
г. Дубай, ОАЭ, 24–28 ноября 2025 г.
Сайт: <https://casc-conference.org>
Срок регистрации – до 31 октября 2025 г.
- **Probability techniques in analysis and algorithms on networks**
г. Санкт-Петербург, Россия, 24–28 ноября 2025 г.
Сайт: <https://www.mathnet.ru/rus/conf2656>
- **XI Всероссийская научно-практическая конференция “Современные проблемы физико-математических наук” (СПФМН-2025)**
Орловский государственный университет имени И.С. Тургенева, г. Орёл, Россия, 28–29 ноября 2025 г.
Сайт: <https://phys-math.ru/conf2025/start>
Регистрация завершена.
- **Международная конференция “Математика в современном мире”, посвящённая 85-летию со дня рождения выдающегося таджикского математика, доктора физико-математических наук, профессора Собирова Темура Сафаровича**
Институт математики им. А. Джураева Национальной академии наук Таджикистана, г. Душанбе, Таджикистан, 28–29 ноября 2025 г.
Сайт: <https://www.mathnet.ru/rus/conf2654>
Срок регистрации – до 05 ноября 2025 г.

Декабрь 2025 г.

- **Международная конференция “Fields & Strings 2025”**
МИАН, г. Москва, Россия, 01–06 декабря 2025 г.
Сайт: <https://www.fieldsandstrings.ru>
Срок регистрации – до 23 ноября 2025 г.
- **Обучение фрактальной геометрии и информатике в вузе и школе в свете идей академика А.Н. Колмогорова**
г. Кострома, Россия, 04–06 декабря 2025 г.
Сайт: <https://www.mathnet.ru/rus/conf2623>
Регистрация завершена.
- **International scientific workshop OTHA Fall 2025 on operator theory and harmonic analysis and their applications**
Сириус, г. Сочи, Россия, 14–18 декабря 2025 г.
Сайт: <https://otha.sfedu.ru/workshop-otha-fall-2025/>
Участие в конференции с докладом – по приглашению организаторов.

- **Однодневная конференция памяти В.А. Исковских**

МИАН, г. Москва, Россия, 25 декабря 2025 г.

Сайт: <https://www.mathnet.ru/rus/conf2658>

Январь 2026 г.

- **Воронежская зимняя математическая школа С.Г. Крейна 2026**

г. Воронеж, Россия, 24–27 января 2026 г.

Сайт: <https://vzms.kmm-vsuv.ru>

Срок регистрации – до 01 декабря 2025 г.

- **Двенадцатая школа-конференция “Алгебры Ли, алгебраические группы и теория инвариантов”**

МИАН, НИУ ВШЭ, г. Москва, Россия, 26–31 января 2026 г.

Сайт: <https://lie-school.ru/2026>

Срок регистрации – до 31 декабря 2025 г.