

МАТЕМАТИКА И ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ КОМПЬЮТЕРНЫЕ НАУКИ

Издается с 2023 года
Выходит 4 раза в год

Том 1
Выпуск 1



Казань
2023

Журнал «Математика и теоретические компьютерные науки» основан в 2022 году Научно-образовательным математическим центром Приволжского федерального округа (НОМЦ ПФО). Его учредителем является ФГАОУ ВО «Казанский (Приволжский) федеральный университет». Журнал зарегистрирован в Министерстве РФ по делам печати, телерадиовещания и средств массовых коммуникаций 06 февраля 2023 г. (Эл № ФС77-84704) и ориентирован на электронную публикацию научных статей по всем основным направлениям математики и теоретических компьютерных наук:

- вещественный, комплексный и функциональный анализ;
- дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление;
- математическая физика;
- геометрия и топология;
- теория вероятностей и математическая статистика;
- математическая логика, алгебра и теория чисел;
- вычислительная математика;
- теория вычислимости и сложности вычислений;
- дискретная математика и математическая кибернетика;
- теоретическая информатика;
- математические методы в искусственном интеллекте.

Также принимаются к печати обзоры, научно-популярные статьи, статьи о математической жизни. Все статьи проходят процедуру рецензирования. Все опубликованные статьи находятся в открытом доступе.

Журнал финансируется НОМЦ ПФО (Соглашение о предоставлении из федерального бюджета субсидии в соответствии с абзацем вторым пункта 1 статьи 78.1 Бюджетного кодекса Российской Федерации № 075-02-2023-944 от «16» февраля 2023 г.).

Главный редактор

Арсланов М.М. (Россия, г. Казань)

Заместители главного редактора

Калимуллин И.Ш. (Россия, г. Казань)

Файзрахманов М.Х. (Россия, г. Казань)

Редактор

Гизатуллина Л.Ш. (Россия, г. Казань)

Редакционная коллегия

Абызов А.Н. (Россия, г. Казань)

Авхадиев Ф.Г. (Россия, г. Казань)

Асташкин С.В. (Россия, г. Самара)

Баженов Н.А. (Россия, г. Новосибирск)

Бикчентаев А.М. (Россия, г. Казань)

Востоков С.В. (Россия, г. Санкт-Петербург)

Герман О.Н. (Россия, г. Москва)

Демиденко Г.В. (Россия, г. Новосибирск)

Каюмов И.Р. (Россия, г. Казань)

Мищенко А.С. (Россия, г. Москва)

Морозов А.С. (Россия, г. Новосибирск)

Мусин И.Х. (Россия, г. Уфа)

Насыров С.Р. (Россия, г. Казань)

Полотовский Г.М. (Россия, г. Нижний Новгород)

Попов А.А. (Россия, г. Казань)

Туганбаев А.А. (Россия, г. Москва)

Турилова Е.А. (Россия, г. Казань)

Фоменко А.Т. (Россия, г. Москва)

СОДЕРЖАНИЕ

Collas B. Anabelian Arithmetic Geometry – A new Geometry of Forms and Numbers: Inter-universal Teichmüller theory or “beyond Grothendieck’s vision”	3
Избяков И.М., Новиков С.Я. Три задачи восстановления сигнала-вектора по модулям измерений и по нормам проекторов	24
Кисляков С.В. Вокруг разрывности проектора Рисса в равномерной метрике	35
Фоменко А.Т. Биллиарды переменной конфигурации и биллиарды с проскальзыванием в гамильтоновой геометрии и топологии	49

НАУЧНЫЕ РАБОТЫ СТУДЕНТОВ

Курмачева А.А. Об индексном множестве пунктуально категоричных конечнопорожденных структур	69
Уразбахтин Р.В. Арифметика и комбинаторика рекуррентных последовательностей	78

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ЖИЗНЬ

Конкурс 2023 года на соискание медали и премии имени Н.И. Лобачевского	89
--	----

**Anabelian Arithmetic Geometry – A new Geometry of Forms and Numbers:
Inter-universal Teichmüller theory or “beyond Grothendieck’s vision”**

B. Collas

Abstract. This text presents an informal overview on how, in accordance with some deeply rooted principles of the philosophy of Alexander Grothendieck concerning the practice of mathematics, recent progress in anabelian arithmetic geometry led to the Inter-universal Teichmüller theory (IUT) of Mochizuki Shinichi. The new geometry of monoids furnished by IUT may be understood as the result of a seminal encounter between Grothendieck’s principle of resolving the tension between the discrete and continuous realms, on the one hand, and p -adic Hodge theory and height theory, on the other, and opens a new research frontier that goes beyond the Grothendieck geometry of rings-schemes by providing a unifying framework for Diophantine and anabelian arithmetic geometry.

Keywords: arithmetic homotopy and Galois theory, anabelian geometry, Diophantine geometry, inter-universal Teichmüller geometry, Galois–Teichmüller theory, abc and Vojta conjectures, Fermat’s last theorem.

“[...] *nothing seems to happen, and yet at the end a highly non-trivial theorem is there.*”
– P. Deligne on Grothendieck’s “Rising Sea” method, in [Del98].

1. A PANORAMA OF GROTHENDIECK’S ANABELIAN PHILOSOPHY

At the most elementary level of human cognition, the essence of anabelian arithmetic geometry concerns the articulation – and possible reconciliation – of two *a priori* complementary ways of deciphering the perceptible world, that is to say, the discrete and continuous realms. The discreteness of number theory – or its *geometric variation*, Diophantine geometry – imposes constraints on the transcendental nature of the mind, while the continuous nature of geometry – or its *discrete variation*, arithmetic geometry – furnishes a comfortable receptacle for its various realizations.

§ Grothendieck’s Mathematics Philosophy. In response to the limitations of the human mind to grasp the essence of the dichotomy between the discrete and the continuous, Grothendieck’s approach is to propose a universal and structural vision that reconciles the two realms (the discrete and the continuous) – each as an avatar of a unique functorial and category-theoretic construction (see Fig. 1 below and [R&S] more generally). This approach is both philosophical and practical: *languages are constructed that reveal pre-existing structures*, which, in turn, stimulate the further development of language¹. In Grothendieck’s twelve themes legacy, the unified treatment of Galois symmetries of numbers and geometric forms – i.e. *anabelian geometry and Galois–Teichmüller theory* – is presented as a “master theme” to the mathematical community (see Fig. 2 and *ibid*).

¹The philosophical aspects of Grothendieck’s practice of mathematics, i.e., more specifically, the creation of unifying and revealing mathematical contexts are discussed in [R&S] § 2.8 – “La vision - ou douze thèmes pour une harmonie”. As discussed in a recent conference at Chapman University [Chap23], this approach could serve as a virtuous guide for the modern arithmetic geometer. Regarding Grothendieck’s approach, where “language is invented and structures are discovered”, see Panza’s talk *ibid*.

One can consider that the new geometry is, before anything else, a synthesis between these two worlds, until then adjoining and closely interdependent, but nevertheless separated: the “arithmetic” world, in which live the (so-called) “spaces” without principle of continuity, and the world of the continuous magnitude, where live the “spaces” in the proper sense of the term, accessible to the means of the analyst [...]. In the new vision, these two worlds, formerly separated, form only one [..., in the] vision of an “arithmetic geometry” (as I propose to call this new geometry).^[A]

Fig. 1. A. Grothendieck in “*Récoltes et semailles*” (1986), § The new geometry - or the marriage of number and grandeur [R&S]

The resolution of this discrete-continuous tension between number theory and geometry is what constitutes the core of anabelian arithmetic geometry. This process not only involves multiple areas of mathematics – including class field theory, low-dimensional topology, topological group theory, complex algebraic geometry and analytic Teichmüller geometry, but also requires a dedicated effort to acquire a specific way of mathematical thinking².

§ “Esquisse” of a Fruitful International Legacy. When Grothendieck retired from the mathematical community, he left his peers a stimulating research legacy that includes his anabelian vision: the structure is given, but the objects have yet to be defined. In his 1983 “Letter to Faltings” [Gro97], a first introduction to the anabelian yoga is sketched, that was later developed further as a broader “Galois-Teichmüller theory” in his 1.600 page private manuscript the “Long March through Galois theory” [LMG]. This research finally culminated in his 1984 “Esquisse d’un programme” [Esq], that inspired the realization of an international research program³ (~1990–2010).

What began as multiple isolated research directions in the international community⁴ – for example, in France with the work of Lochak and Schneps on Grothendieck–Teichmüller theory, in Germany then in the US with the work of Pop on anabelian birational geometry and the work of Fried on Regular Inverse Galois theory, and in Japan with the independent development of Ihara’s program – resulted in the 90’s in *unified international research efforts* with multiple breakthroughs and long-term collaborations. In Japan, the first generation – which centered around the school of Ihara Yasutaka and Oda Takayuki – was followed by a second generation – constituted by Matsumoto Makoto, Nakamura Hiroaki, Tamagawa Akio, and Mochizuki Shinichi. The school of Mochizuki Shinichi, in turn, produced a third generation – namely, Hoshi Yuichiro – and, more recently, a

The most profound (in my eyes) of these twelve themes [or “master themes” of my work], are the theme of motives, and the closely related theme of anabelian algebraic geometry and the Galois–Teichmüller yoga.^[B]

Fig. 2. A. Grothendieck in “*Récoltes et semailles*” (1986), notes 22 & 23 [R&S]

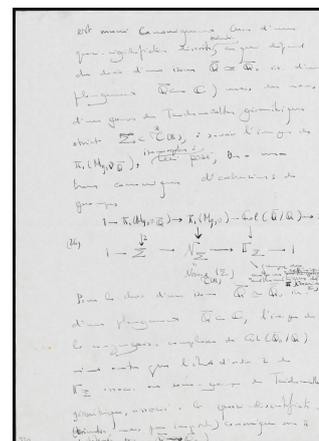


Fig. 3. La “Longue Marche” à travers la théorie de Galois

²This constant discrete-continuous tension – in addition to the use of a language-formalism-picture triangle and, following Grothendieck’s philosophy, the introduction of a rich and necessary terminology – is what makes anabelian geometry of a total different nature – and thus difficult to grasp – even for specialists in closely related fields, such as number theorists or non-anabelian algebraic geometers.

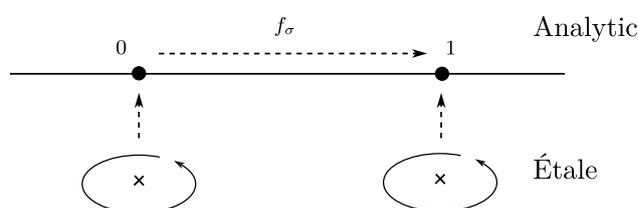
³In the Russian mathematical community, where the “Esquisse” was distributed as an underground “Samizdat”, it should be no surprise that George Shabat and Vladimir Voevodsky – first in terms of “Dessins d’enfants” [SV90], then in terms of anabelian results [Voe91] – were the first to initiate a systemic study of Grothendieck’s legacy, see [Sha18]. It is worth remembering that the theory of “Dessins” indeed originates from a famous result of Belyĭ – and a remark by Bogomolov – whose announcement made a strong impression on Grothendieck^[C]. Anabelian geometry over algebraic closed fields was later developed by Bogomolov and Tschinkel.

⁴All these approaches share, in terms of their common Grothendieckian generating process and origins, some similarity with the anabelian geometry that is discussed in these notes.

fourth generation of junior researchers. All of these developments in Japan centered around the “Research Institute for Mathematical Sciences”, Kyoto University, Japan (RIMS), which is now the only international mathematics institute that has preserved, vastly expanded and renewed this unique anabelian culture⁵.

§ A “far from abelian” Galois Arithmetic Geometry. The focus of anabelian arithmetic geometry, which encompasses both anabelian and Galois–Teichmüller geometry, is to explore the absolute Galois group $\text{Gal}(\bar{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ of the rational number field – the seed of number theory that controls all the Galois symmetries that arise from the rational numbers – in the framework of Grothendieck’s theory of the étale fundamental group, the group $\pi_1^{\text{ét}}(X)$ of paths or loops on a space X (see Fig. 6). In this category-theoretic unifying context, *the Galois group and the group of paths are two avatars of a unique construction* that unifies the discreteness of the former and the continuity of the latter.

Fig. 4. *Grothendieck–Teichmüller theory is a group-theoretic, combinatorial approach to the absolute Galois group of the field of rational numbers, which relies on an étale-analytic transport: on the sphere $\mathbb{P}^1 \setminus \{0, 1, \infty\}$, an analytic isomorphism transports the étale monodromy loop around 0 to the one around 1 for an essential arithmetic invariant f_σ to appear*



Contrary to another theme of Grothendieck’s arithmetic geometry – linear Galois representation theory, which was used by Grothendieck (1965), then Deligne (1974) to establish the Weil conjectures – and to the modularity program for elliptic curves – which leads, via Taniyama–Shimura–Weil and Ribet’s Theorem, to Wiles’ proof of Fermat’s Last Theorem (1994) – *anabelian arithmetic geometry is far from being linear and abelian*, i.e. based on a commutative fundamental group. The natural domain of anabelian arithmetic geometry is that of hyperbolic curves of a given genus g with m marked points (see Fig. 6) or their moduli spaces $\mathcal{M}_{g,[m]}$, which classify the families, deformations, and internal symmetries of such curves.

In terms of mathematical objects – following the realization of “Esquisse” given by Ihara, Schneps, Lochak, Nakamura, and Matsumoto, as well as the realization given by Drinfel’d via quantum group theory – anabelian geometry involves Teichmüller spaces (i.e. the analytic deformation of complex structures), mapping class groups and braid groups (where braid crossings are non-commutatively composed), topological group theory, and, more recently, the theory of operads. It indeed *thrives on seminal encounters* – e.g., with Deligne’s theory of weights, Thurston’s progress in Teichmüller theory – from which it borrows seminal insight and techniques.

§ In Japan beyond the Grothendieckian Vision. The Japanese school achieved decisive progress in the anabelian program for curves, namely, with the work of Nakamura – via Deligne’s theory of weights – then with the work of Tamagawa – via class field theory and the Lefschetz trace formula to detect rational points on covers – which also includes an anabelian Néron–Ogg–Shafarevich–Serre–Tate good reduction criterion. The Japanese school went further to produce higher dimensional anabelian results for configuration spaces. The zero dimensional case, that is to say, the reconstruction of a number field from its absolute Galois group, follows from previous work by Neukirch–Uchida (~1977).

⁵It may be of interest to note that Japan was the first country in which “Récoltes et Semailles” was published, with the authorization of Grothendieck, namely, by Gendai Sugakusha Ed., in 1989. It was translated into Japanese by Tsuji Yuichi.

The next breakthrough, which includes several substantial strengthenings of Grothendieck’s original anabelian conjecture for hyperbolic curves over number fields, came from a decisive shift of perspective by Mochizuki Shinichi (1995), as the result of an encounter with Faltings’ p -adic Hodge theory, *from working with spaces over number fields K/\mathbb{Q} to working with spaces over p -adic local fields K/\mathbb{Q}_p* ⁶, i.e. over formal neighborhoods around a given prime p . This shift from Grothendieck’s original global vision to working over local fields – which gives rise to stronger results that typically include the global number field case – has since proven to be the most natural anabelian setting and has yielded a plethora of progress (see [Hos22]), which also stimulated further work on other variants of anabelian geometry⁷.

Mochizuki’s anabelian breakthrough has, with the support of the Japanese anabelian community, since ramified into some additional *innovative absolute, mono-, and combinatorial anabelian variants*, each elucidating further the essential nature of $\mathrm{Gal}(\bar{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$. The final reconciliation of the continuous and discrete realms – i.e. *anabelian arithmetic geometry and the Diophantine geometry of estimates* – however required another decisive step⁸. The realization of this missing link – which may be regarded as the final chapter of a 20-year long personal journey and indeed harks back to the mathematical and philosophical legacy of Grothendieck – was provided by Mochizuki’s *Inter-universal Teichmüller theory* in 2012 – for a survey of the theory in its author’s own words, we recommend [Alien] and the more recent [EssLgc]; for the general scientist, see [Fes16]. The new geometry furnished by IUT opens new horizons that lie beyond Grothendieck’s original algebraic geometry and the realm of schemes, rings, and fields – structures with two operations – by working in the *more flexible realm of multiplicative and additive monoids* – structures with only one operation – and has already yielded some decisive and central results in number theory (see § An Anabelian abc Inequality), as well as important breakthroughs related to the original framework of Galois-Teichmüller theory.

✧ *Note to the reader: This text is intended for mathematically oriented scientists or curious mathematics students. For their convenience, special care has been given to include a reasonable use of mathematical notations. Such notations should be considered as anchors for the mind and as concrete bridges to the original texts and cited manuscripts.*

Acknowledgements. This manuscript should be understood as the outcome of multiple collaborative efforts within the arithmetic anabelian community. It is the initial study of IUT by *Yamashita Go, Mohammed Saïdi, and Hoshi Yuichiro*, together with the work of the speakers at the 2015 Oxford and 2016 Kyoto conferences, that have led to what is today’s general understanding of IUT. At a more personal level, the author would like to express his gratitude to the speakers and participants of the “Promenade in Inter-universal Teichmüller theory” 2020–2021 RIMS-Lille seminar and the “Expanding Horizons of Inter-Universal Teichmüller Theory” 2021 workshop series, and especially to *Mochizuki Shinichi, Ivan Fesenko, Pierre Dèbes, Hoshi Yuichiro, Emmanuel Lepage, Tsujimura Shota, and Minamide Arata*. Regular discussions with these mathematicians ensured the solidity of this text. This work was supported by the International Center for Next-Generation Geometry, a center affiliated with the *Research Institute for Mathematical Sciences* located in Kyoto University.

⁶For further details, we refer to the always stimulating survey of Nakamura–Tamagawa–Mochizuki [NTM98].

⁷One could cite the “close-to-abelian” program of Nakamura and Tamagawa for curves, of Tamagawa and Saïdi for fields, and of Pop and Topaz for function fields (indeed originally Bogomolov’s 1990 program).

⁸At this stage, it is interesting to note that, originally and for a long time, the bridge between anabelian and Diophantine geometry was expected to result from an argument to the effect that the Grothendieck Section conjecture implies Mordell’s conjecture; we refer to “Letter from Deligne to Thakur” in [Sti11] and Remark 9 *ibid* for a counter-argument.

2. THE DISCRETE-CONTINUOUS FRONTIER

Diophantine and anabelian arithmetic geometry, while both relying on Grothendieck’s geometry of schemes, are of an essentially different nature. Diophantine geometry is led by properties of *numbers within geometry*, for example the existence of rational points in varieties and questions of estimates (see Fig. 5), where “*the geometry governs the arithmetic*”. Anabelian arithmetic geometry, on the other hand, realizes a more symbiotic relationship between the *symmetry properties of numbers and spaces* in terms of Galois groups and étale fundamental group – or group of paths, as in Fig. 6.

Fig. 5. Thue–Siegel–Roth Theorem on bad rational approximation of algebraic numbers

Given $\alpha \in \bar{\mathbb{Q}}$ an algebraic number, then for any $\epsilon > 0$, there exist only finitely many $p/q \in \mathbb{Q}$ such that

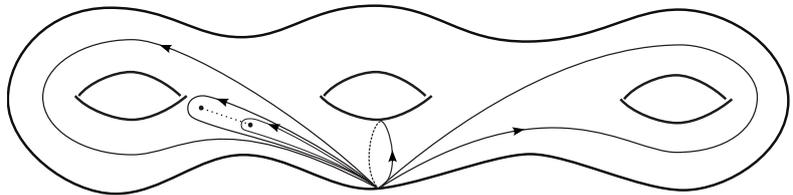
$$|\alpha - p/q| < 1/q^{2+\epsilon}.$$

While the anabelian realm is led by a unique reconstruction goal, the Diophantine one is speckled by a vast intricate network of inter-related conjectures. Among them:

- *Oesterlé–Masser’s abc conjecture* (1985) – or in its original geometric version, the Szpiro conjecture for elliptic curves – is a super-seeding conjecture at the center of this network;
- *Mordell’s conjecture* (1922) asserts *the finiteness of the set of rational points on an algebraic curve of any genus* – proven in 1983 by Faltings, Fields medal 1986 – and is the first decisive application of algebraic geometry to height theory;
- *Vojta’s conjecture* (1987) provides an innovative and fruitful geometric insight into Diophantine problems.

Anabelian geometry deals with the reconstruction of curves from their group of paths, as seen in this geometric picture of a genus 3 m-pointed curve, where each loop is isomorphic to the cyclotome $\widehat{\mathbb{Z}}$. The abstract group-theoretic identification of these loops, the disentanglement of their arithmetic and geometric properties, and their (cyclotomic) rotational synchronizations correspond to essential steps of anabelian reconstruction.

Fig. 6. An anabelian hyperbolic curve



Anabelian arithmetic geometry, on the other hand, is already based on an *essential unification of number theory and geometry*, since Grothendieck’s arithmetic fundamental group $\pi_1^{\text{ét}}(X)$ identifies either with $\widehat{\pi}_1^{\text{top}}(X)$ – a profinite version of the group of paths on a topological space – when X is a complex geometric space, or with an absolute Galois group $\text{Gal}(\bar{k}/k)$ when $X = \text{Spec } k$ is a field of characteristic zero. The étale fundamental group of a rational stack or scheme X over k furthermore appears as an extension of $\widehat{\pi}_1^{\text{top}}(X)$ by $\text{Gal}(\bar{k}/k)$ (see 2.2. Anabelian Reconstructions – Schemes and Monoids). The theory has evolved into different variants – relative/absolute, bi/mono, combinatorial – each of which encompasses complementary aspects of the number-geometry entwining.

2.1. Number Theory, Diophantine Geometry & Arithmetization. Originating from number theory, then enriched with the function field insight of Hilbert, Kronecker, then Mordell and Siegel, the geometrization of Diophantine problems mostly follows Lang’s efforts of the 60’s – who not only coined the term, but also structured the field with multiple and now famous conjectures – to push further innovative insights from analytic and complex geometry, and ultimately Grothendieck’s

algebraic geometry⁹.

From these foundational efforts resulted two of the most central conjectures of number theory and Diophantine geometry: the abc conjecture – that we present in its non-geometric and non-Szpiro form for the reader’s convenience, and Vojta’s conjectures on heights of points of varieties¹⁰.

The shift towards anabelian arithmetic is prepared in the – at the time (2009) largely unnoticed – reformulation by Mochizuki of the Vojta Conjecture, that exploits Faltings’ powerful methods from the proof of the Mordell conjecture in relation with the arithmetic of elliptic curves¹¹.

✂ For an accessible, detailed, and up-to-date presentation of Diophantine geometry and height estimate theory, we refer the reader to Bombieri–Gubler’s book [BG06] .

§ “Abc” – The Shadow of a Network of Conjectures. The abc conjecture, proposed by Masser and Oesterlé, reflects in its essence *a deep and subtle relation between the addition and multiplication of integers*:

The abc conjecture (1985). For every $\epsilon > 0$, there exists a constant K_ϵ such that any triplet of integer numbers (a, b, c) with $c = a + b$ satisfies

$$c \leq K_\epsilon \cdot \text{rad}(abc)^{1+\epsilon},$$

where $\text{rad}(n)$ denotes the product of prime divisors of n .

Or in Waldschmidt’s words: *Two integers divisible by large powers of small prime numbers have a sum divisible by small powers of large prime numbers* – The abc conjecture can be seen as a bound on the difference between the additive and multiplicative structures of the rational numbers, see also § An Anabelian abc Inequality.

Despite its elementary formulation, the abc conjecture seems at first glance beyond reach. Various computational attempts in identifying some abc triplets, including in terms of elliptic curves, *did not provide a better insight into the conjecture* – see for example Fig. 7, where colors indicate the $(1+\epsilon)$ -quality of an abc-triplet does not suggest any patterns that might lead to a better understanding of the triplets).

In different variants, *abc is deeply related to some of the most central conjectures of number theory and analytics, combinatorics, Diophantine and arithmetic geometry*. For example, abc implies:

- the Mordel conjecture (Elkies 1991);
- Roth’s conjecture of Fig. 5 (Bombieri 1994);
- no Siegel zeros for Dirichlet
- L -functions (Granville-Stark 1999);
- the (strong) Hall conjecture*;
- the (generalized) Szpiro conjecture*;

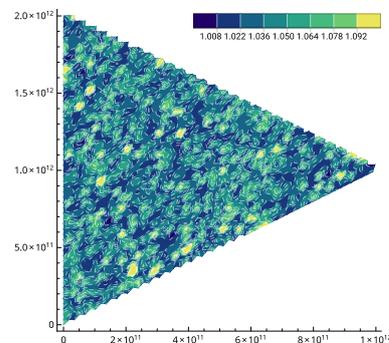


Fig. 7. An (a, b) description of large $\sim 10^{12}$ abc-triples

⁹On the attitude of Lang toward the incorporation of Grothendieck’s developing and at that time already colossal *Éléments de géométrie algébrique*, we refer to [Lan95]. This text, whose polemical tone should not hinder its contemporary pertinence, indeed presents two interesting examples of social obstacles that may encounter the circulation of new mathematical ideas – “*If Algebraic Geometry really consists of (at least) 13 Chapters, 2.000 pages, all of commutative algebra, then why not just give up? The answer is obvious.*”

¹⁰A height function measures the size of rational points, both locally – around primes – and globally – on global number fields. An Arakelov-theoretic variant provides an even more functorial approach in terms of line bundles as in the context of Faltings’ and Mochizuki’s anabelian approaches (see 3. Inter-Universal Teichmüller Geometry).

¹¹While Faltings’ proof of Mordell appears naturally as a crucial encounter between number theory and geometry, the arithmetic of elliptic curves is however there not yet fully revealed. We prefer to stress its seminal role in Mochizuki’s anabelian geometry breakthrough (see Fig. 10 and corresponding section).

where the Szpiro conjecture, *via* Frey–Hellegouarch curves $y^2 = (x - a)(x - c)$ for (a, b, c) such that $a^n + b^n = c^n$, implies Fermat’s Last Theorem above a certain degree – * denotes equivalences¹².

It was indeed the brilliant insight of Vojta to reformulate abc as a geometric Diophantine inequality in terms of height and ramification, by considering an (a, b, c) triple as a point $[a : b : c] \in \mathbb{P}^1 \setminus \{0, 1, \infty\}$ in the genus 0 curve, or projective line (see Fig. 8). While this new geometric insight makes precise a shadow area that has to be explored, no conceptual progress has been recorded within 20 years, thus illustrating the limits of traditional arithmetic thinking and *suggesting the need for a profound change of prism in arithmetic geometry*.

§ Vojta–Mochizuki – Geometrization & Arithmetization. As expressed by Dèbes, “the Vojta conjecture appears as a universal geometric Diophantine Approximation statement – rational points are rare because algebraic numbers are badly approximated by rational numbers in the sense of [the] Thue–Siegel–Roth Theorem”.

The Vojta conjecture, inspired from Nevanlinna theory in complex analysis, is a geometrization of Thue’s inequality: D can be seen as a subvariety of X , the function $m_{S,D}$ evaluates the proximity of the point to D with respect to its local parts, or primes in S (see (LHS) of Fig. 5); the height function evaluates the size of P in terms of certain referential system of coordinates describing X (see (RHS) of Fig. 5) with $x_P = q$ as the coordinate of a point P on the line.

Fig. 8. Vojta’s Conjecture (1987)

For X a variety, K a number field, $D < X$ a divisor and H an ample divisor, and $\epsilon > 0$, then:

$$m_{S,D}(P) + h_{K_X}(P) \leq \epsilon \cdot h_H(P) + O(1)$$

for every point P of X outside a finite set.

Vojta is an essential step in pushing geometrical insight into the world of rational numbers and estimates: the *abc inequality now appears as a bound on ramification over curves*¹³, which also allows *higher dimensional considerations*. In the case where $X = \mathbb{P}^N$ is N -dimensional and D is a union of (linear) hyperplanes, one indeed obtains Schmidt’s subspace Theorem, which for $N = 1$ recovers Roth’s Theorem¹⁴. In order to illustrate the intricacy of this circle of ideas, it may be interesting to note that Vojta also provides a new proof of Mordell – now simplified in an “estimate flavor” via Roth’s Theorem and height theory by Bombieri – that leads to further and rich generalizations – we refer to Rémond’s survey [Rém03] on these points.

The decisive steps to go beyond Vojta’s geometrization of abc – which also prepares the way toward the use of anabelian geometry, and the forthcoming Inter-universal Teichmüller theory – is given by Mochizuki in the 2009 paper [GenEll] that establishes various arithmetic properties for “general” elliptic curves in the moduli space $\mathcal{M}_{1,1}$ of elliptic curves – some of which will form the IUT notion of initial Θ -data that have to be *explicitly constructed* in order to apply the whole IUT algorithm of § An Algorithm between Frobenius-like data. *The seminal new insight is*, under the assumption of a certain (nonexistent) global multiplicative subspace $\mu_\ell < E$, to rely on the use of Faltings’ theory of heights and their isogeny invariance – as in Fig. 10, see also 3.1. Categorification of a Diophantine Problem – *to obtain some bounding of heights inequalities* of the form $\text{ht}(E) \leq \log(\ell)/(\ell - 1) \leq 1$, see [EssLgc] Example 3.2.1 for details.

The final step to abc is given via a reformulation of Vojta’s conjecture that includes *some local Galois stability condition* – or a certain property of a “compactly bounded set \mathcal{K} ”, in particular some $\text{Gal}(\bar{\mathbb{Q}}_p/\mathbb{Q}_p)$ -invariance for p prime number. This “Galois-input” can be seen as a first step in the

¹²Interestingly, the polynomial analog of abc is related to the additive group law of the rational points of the circle and to Pythagorean triples, it can be established in an elementary and beautiful way, and also implies Fermat’s Last Theorem for function fields.

¹³Following Elkies, the (RHS) corresponds, via the Fermat description of an (a, b, c) triple, to the ramification value at $-a/b$ over $\{0, 1, \infty\}$ of the function $f = -(x/y)^N$; note the minus sign to reverse the inequality.

¹⁴The reformulation of Vojta into Schmidt’s subspace theorem is indeed a rewarding and pleasant experience.

direction of the p -adic local anabelian context of § “Fukugen” – From Classical to Mono-absolute. The simulation of the non-existing global multiplicative subspace is at the core of inter-universal Teichmüller theory. Vojta’s inequality, which is both an abutment and a central piece of Diophantine geometry, is presented with Mochizuki’s approach as a new seminal frontier. For these reasons, the above inequalities deserves the name of “Vojta–Mochizuki inequalities”.

It may be of interest at this point to note that the creative process of Mochizuki adopts *Grothendieck’s principle of “The Rising Sea”*, see below. The Inter-universal Teichmüller geometry is the fruit of a 20-year journey initiated by Mochizuki when he was a PhD student in Princeton with Faltings in 1992, that crystallizes the multiples facets of his already innovative work in arithmetic geometry (see Fig. 11). This is the completion of this program that now provides a new significance to the 2009 “Vojta–Mochizuki inequalities”.

“The unknown thing to be known appeared to me as some stretch of earth or hard marl, resisting penetration... the sea advances insensibly in silence, nothing seems to happen, nothing moves, the water is so far off you hardly hear it... yet it finally surrounds the resistant substance.”
 – A. Grothendieck in [R&S] § 18.2.6.4 (translation by McLarty [McL07])

2.2. Anabelian Reconstructions – Schemes and Monoids. Anabelian geometry deals with the question of the reconstruction – or “*fukugen*” – of a space from its group of paths Π_X , that is a general reverse process to Grothendieck’s functorial creation of *the sequence of fundamental groups that intermingles the (discrete) number theory of the Galois group $\text{Gal}(\bar{k}/k)$ and the (continuous) geometry of $\Delta_X \simeq \widehat{\pi}_1^{\text{top}}(X)$* :

$$X \times \bar{k} \dashrightarrow X \rightarrow \text{Spec } k \quad \begin{array}{c} \text{func.} \\ -\pi_1(-) \rightarrow \\ \leftarrow \text{?} \rightarrow \\ \exists \text{ anab.} \end{array} \quad 1 \rightarrow \pi_1^{\text{et}}(X \times \bar{k}) \rightarrow \pi_1^{\text{et}}(X) \rightarrow \pi_1^{\text{et}}(k) \rightarrow 1$$

$$\begin{array}{ccc} \Delta_X & \Pi_X & \text{Gal}(\bar{k}/k) \end{array}$$

– here $X \times \bar{k}$ can be thought as the polynomial equations defining X with coefficients in an algebraic closure \bar{k} of k (see Fig. 9 below for the *classical bi-anabelian form*). We note that the case X of dimension 0 corresponds to the reconstruction of a field from its Galois group. In the dimension 1 case, Grothendieck expected for *hyperbolic curves* to be anabelian.

Fig. 9. Anabelian Geometry reconstruction: *Can any morphism between the étale fundamental groups Π_X and Π_Y be uniquely reconstructed from a morphism between X and Y ? The mono-version involves a unique object X , the absolute one forgets the relation of X to K*

For X, Y varieties over K , the natural map
 $\text{Isom}_K(X, Y) \rightarrow \text{Isom}_{\text{Gal}(\bar{k}/k)}(\Pi_X, \Pi_Y)_{\Delta_Y}$
 is an isomorphism.

In Diophantine geometry and the abelian – i.e. commutative – realm, one cannot help but notice the analogy between Faltings’ isogeny Theorem (see Fig. 10 below) and the anabelian reconstruction question.

Fig. 10. Faltings’ Isogeny Theorem *is a fundamental steps in the proof of the Mordell Conjecture that also can be seen as a local approximation of an “anabelian” result for abelian varieties – where the fundamental groups are replaced by their abelian ℓ -local Tate module parts T_ℓ*

For A, B abelian varieties, the natural map
 $\text{Hom}_k[A, B] \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_\ell \rightarrow \text{Hom}_{\text{Gal}(\bar{k}/k)}[T_\ell(A), T_\ell(B)]$
 is an isomorphism.

The étale fundamental group framework of Grothendieck’s arithmetic geometry for ring-schemes is *a first example of resolution of the tension between the discrete and the continuous realms*. On the other hand, Inter-universal Teichmüller theory involves an arithmetic geometry that

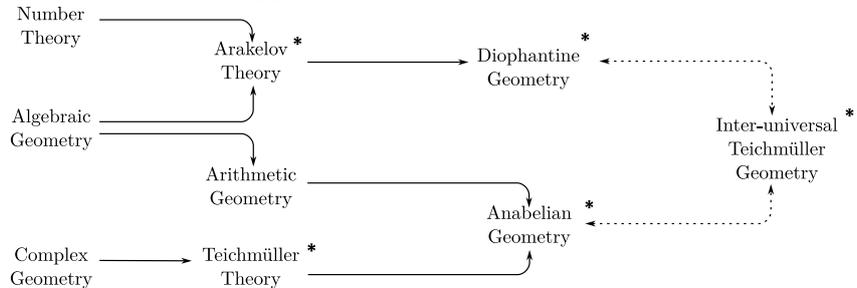
goes beyond Grothendieck’s scheme and ring structures and thus relies on a general and “twice absolute” approach, namely, *mono-anabelian* and *absolute anabelian geometry*¹⁵.

✧ We refer the reader again to the general overview of anabelian principles in the classical [NTM98], and to the report [Hos22] on the latest advances of the field.

§ “Fukugen” – From Classical to Mono-absolute. While still borrowing the pioneering group-theoretic insight and techniques of Nakamura and Tamagawa, Mochizuki’s anabelian breakthrough in the classical context – i.e. non-mono and non-absolute – introduces an important shift of perspective by relying on Faltings’ *p*-adic Hodge theory to provide a *canonical container* $\mathbb{P}(D_X)$, namely, the projective space associated to the vector space D_X of global differentials, for the reconstruction of spaces, where one can build rational points by *p*-adic convergence of sequence of points built in a sequence of covers à la Tamagawa – see also [Fal98] for an overview.

This first regeometrization of anabelian geometry – from over the original global number fields – to over *p*-adic local fields has since become the standard anabelian context. This approach moreover establishes the use of line bundles and Chern classes, an additional step toward Faltings’ height theory (see 3. Inter-Universal Teichmüller Geometry).

Fig. 11. Anabelian Geometry
 – A contemporary panorama
 Inter-universal Teichmüller
 geometry appears as a bridge
 and an abutment of anabelian
 geometry; * indicates a major
 contribution from Mochizuki
 Shinichi, often based on *p*-adic
 Hodge-theoretic considerations



In the classical non-absolute case, a fundamental role is played by the decomposition and inertia subgroups of the fundamental group (resp. D_x and $I_x < \Pi_X$). In Mochizuki’s absolute anabelian geometry, their reconstruction comes from the use of elliptic and Belyi cuspidalization techniques that relate hidden symmetries of the curves and covers of their “missing” points.

For a recent survey of higher-dimensional anabelian results, we refer to [Hos22] § 5, see also Note 17.

§ “There exists a group-theoretic algorithm...”. While absolute mono-anabelian geometry involves the reconstruction of a space X from a *single object* $\pi_1(X)$, it involves procedures and properties that are common to all objects considered¹⁶; it results in statements of the form “There exists a functorial group-theoretic algorithm to reconstruct X from Π_X , or $\Pi_X \rightsquigarrow X$ ”. In this terminology, one works in an “absolute”, as opposed to relative $\pi_1(X) \rightarrow \text{Spec } k$ context, in the sense that X is detached from its base field k .

In order to convey a sense of the flavor of the procedure, let us present *step-by-step the mono-anabelian reconstruction of the base field k (via the function field K_X)* of an anabelian hyperbolic curve X :

¹⁵Despite the many paper published in this field since its initiation in 2003, this aspect of anabelian geometry and its very specific flavor have been, over the last 20 years, largely ignored outside Japan.

¹⁶Regarding mono-anabelian geometry, Tamagawa speaks of a theory that deals with “One for all, all for one” properties and proposes the terminology of “omni” or “pan” anabelian geometry.

- (i) *Inertia and decomposition groups.* Belyi cuspidalization reconstructs, respectively, the decomposition groups D_x , then the inertia groups $I_x = D_x \cap \Delta_U < \pi_1(X \setminus U)$, where U is the complement in X of a finite set of points;
- (ii) *Synchronization of geometric cyclotomes.* The loops around various points x are globally synchronized via a canonical identification $I_x \simeq \widehat{\mathbb{Z}}(1)$ for every $x \in U$;
- (iii) *The multiplicative groups K_X^\times and k^\times .* The Kummer map $\kappa: \Gamma(U, \mathcal{O}_U^\times) \hookrightarrow H^1(\Pi_U, \mu_{\widehat{\mathbb{Z}}}(\Pi_X))$ provides the reconstruction of $\bar{k}^\times < K_{X, \bar{k}}^\times$, where $H^1(\Pi_U, \mu_{\widehat{\mathbb{Z}}}(\Pi_X))$ plays the role of a “container”;
- (iv) *The fields K_X and k .* The additive structure of $K_X^\times \cup \{0\}$ is recovered from the set of valuations and K_X^\times .

One notes in particular the 2-step reconstruction of the \boxtimes/\boxplus -ring structure that in this case is possible in a compatible way so that the (\boxtimes, \boxplus) -field structure of k is recovered.

While most theorems for curves can be translated into mono-versions, such adaptations require a deep expertise in anabelian geometry¹⁷. Mochizuki’s Belyi cuspidalization techniques lead in particular to *a new anabelian geometric class of objects*, that is of curves of strict Belyi type (see [Hos22] § 6).

§ Mono-anabelian Transport. Despite being the most natural context for anabelian geometry, the p -adic local field context can indeed be quite subtle, since *the isomorphism class of k is not necessarily determined by the isomorphism class of its absolute Galois group $\text{Gal}(\bar{k}/k)$* .

A fundamental point concerns the compatible reconstruction of the two \boxtimes - and \boxplus -monoid structures. Indeed, while:

There exists a functorial group-theoretic algorithm to reconstruct from the group $G = \text{Gal}(\bar{k}/k)$ the additive $(\bar{k}_+(G), \boxplus)$ and the multiplicative $(\mathcal{O}_{\bar{k}}^\times(G), \boxtimes)$ $\text{Gal}(\bar{k}/k)$ -monoids

– where $\bar{k}_+(G)$ denotes the *additive* structure of the field \bar{k} , and $\mathcal{O}_{\bar{k}}^\times(G) < \bar{k}_\times^\times$ multiplicative group of units of the ring of integers, both recovered from G – it is important to note that *these two monoids cannot be reconstructed simultaneously so as to obtain a reconstruct of the ring or field structure of \bar{k}* – a similar conclusion also holds for k .

As such this anabelian context goes beyond the classical ring-scheme and Galois theories. The Galois group $\text{Gal}(\bar{k}/k)$ is indeed a fundamental example of an *étale-like object* in Inter-universal Teichmüller theory, while the monoids are key examples of *Frobenius-like objects*¹⁸.

Fig. 12. Mono-anabelian transport for multiplicative monoids of sub- p -adic fields between Frobenius-like objects via isomorphisms between étale-like objects. The isomorphism obtained between Frobenius-like objects is subject to an $*$ = $\text{Aut}(G_k)$ -indeterminacy (Ind1) as well as a $\widehat{\mathbb{Z}}^\times$ -Indeterminacy (Ind2)

$$\begin{array}{ccc}
 H^1(G_k, \mu_{\widehat{\mathbb{Z}}}^\times(G_k)) & \xrightarrow{\sim} & H^1(G_k, \mu_{\widehat{\mathbb{Z}}}^\times(G_k)) & \text{Étale} \\
 \uparrow \kappa & & \downarrow \kappa^{-1} & \\
 \mathcal{O}_k^\times & \xrightarrow{\mathbb{Q}^{\widehat{\mathbb{Z}}^\times}} & \mathcal{O}_k^\times & \text{Frobenius}
 \end{array}$$

This *mono-anabelian transport* is indeed seminal in the context of Inter-universal Teichmüller geometry – where étale containers are used to share Frobenius-like data across a non-schematic

¹⁷In higher dimension, the existence of an anabelian open basis – originally predicted by Grothendieck – may naturally be derived from the Japanese anabelian school techniques in both *absolute* and *mono* versions, see [Hos20] Cor. 3.4 & Rem. 3.4.1; for a relative only version, see [SS16].

¹⁸This elementary example indeed already involves the full techniques of logarithm, poly-isomorphisms, and synchronization of cyclotomes used in the IUT § An Algorithm between Frobenius-like data. We refer to the introductory [Hos21] that was presented at the conference “Fundamental groups in arithmetic geometry” at the Institut Henri Poincaré in Paris in 2016 for further details and comments.

theta-link, see § An Algorithm between Frobenius-like data. This construction shares some analogy, in classical Grothendieck–Teichmüller theory, with the analytic transport between two isomorphic but distinct étale neighborhoods in the projective line (see Fig. 4). In this case, the analytic link requires no-indeterminacy but produces new arithmetic data.

On the path to IUT geometry, this shift to a mono-absolute framework and indeterminacies is a key milestone in establishing a flexible geometry of monoids that will allow to deform (then estimate the discrepancy between) the additive and multiplicative structures of integers in abc.

✧ *As we discuss later, one essential aspect of IUT involves the p -adic geometry of elliptic curves E_v over p -adic local fields K_v/\mathbb{Q}_p and a certain p -adic theta function. The corresponding fundamental group is in this case given by André’s tempered fundamental group and the anabelian reconstructions are those of combinatorial anabelian geometry, which are indeed compatible with the ones described above – we refer to [Lep10] § 1 for an introduction to Mochizuki’s functorial results on this topic.*

3. INTER-UNIVERSAL TEICHMÜLLER GEOMETRY

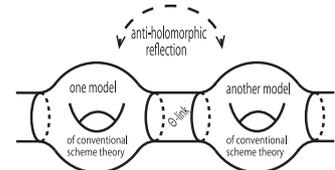
While Grothendieck’s *Éléments de géométrie algébrique* have refounded algebraic geometry with the use of *general ring theory* and formal thickenings, Mochizuki’s Inter-universal Teichmüller theory¹⁹ develops the *mono-absolute anabelian geometry of monoids*, to “juggle” or estimate the degree of “untangling” between the two \boxtimes/\boxplus -dimensions of rings. It is based on the discovery of new category-theoretic structures and the creation of new language that pushes arithmetic geometry beyond the algebraic geometry of rings and Galois groups. By doing so, it finalizes the inclusion, initiated by Vojta, of Diophantine discreteness into the already existing discrete-continuous realm of anabelian geometry.

Inter-universal Teichmüller theory is not an incremental enhancement of the Grothendieckian geometry, but a *conceptual refinement based on new paradigms* – see Note 25 and the discussion in § Universe, Species & Logical Structure – that provides new insight into (1) the interface between anabelian and Diophantine geometry, and (2) some internal arithmetic geometry mechanisms, with (3) new techniques for defining a new research frontier (see 3.2. A new Anabelian & Diophantine Frontier...). The outcome of these three steps can be seen as a second regeometrization of anabelian arithmetic geometry.

Fig. 13. Inter-universal Teichmüller theory. *A triangle between language, formalism and geometric pictures to resolve the tension between continuity and discreteness – excerpts from the original IUT papers [IUTCh-IV].*

“one may think of the fullness condition of multiradiality as the condition that there exist a sort of parallel transport isomorphism between two collections of radial data [i.e. corresponding to two “fibers”] that lifts a given isomorphism between collections of underlying coric data [i.e. corresponding to a path between the points over which the two fibers lie]”

$$\begin{aligned}
 ({}^{n,m}\overline{\mathbb{M}}_{\text{mod}}^{\otimes})_{\alpha} &\xrightarrow{\sim} \overline{\mathbb{M}}_{\text{mod}}^{\otimes}({}^{n,\circ}\mathcal{HT}^{\mathcal{D}-\Theta^{\pm\text{ell}}\text{NF}})_{\alpha}; \\
 ({}^{n,m}\mathbb{M}_{\text{mod}}^{\otimes})_{\alpha} &\xrightarrow{\sim} \mathbb{M}_{\text{mod}}^{\otimes}({}^{n,\circ}\mathcal{HT}^{\mathcal{D}-\Theta^{\pm\text{ell}}\text{NF}})_{\alpha}; \\
 ({}^{n,m}\mathcal{F}_{\text{mod}}^{\otimes})_{\alpha} &\xrightarrow{\sim} \mathcal{F}_{\text{mod}}^{\otimes}({}^{n,\circ}\mathcal{HT}^{\mathcal{D}-\Theta^{\pm\text{ell}}\text{NF}})_{\alpha}; \\
 ({}^{n,m}\overline{\mathbb{M}}_{\text{mod}}^{\otimes})_{\alpha} &\xrightarrow{\sim} \overline{\mathbb{M}}_{\text{mod}}^{\otimes}({}^{n,\circ}\mathcal{HT}^{\mathcal{D}-\Theta^{\pm\text{ell}}\text{NF}})_{\alpha}; \\
 ({}^{n,m}\mathcal{F}_{\text{mod}}^{\otimes})_{\alpha} &\xrightarrow{\sim} \mathcal{F}_{\text{mod}}^{\otimes}({}^{n,\circ}\mathcal{HT}^{\mathcal{D}-\Theta^{\pm\text{ell}}\text{NF}})_{\alpha}; \\
 {}^{n,m}\mathfrak{S}_{\text{LGP}}^{\text{!}} &\xrightarrow{\sim} \mathfrak{S}^{\text{!}}({}^{n,\circ}\mathcal{HT}^{\mathcal{D}-\Theta^{\pm\text{ell}}\text{NF}})_{\text{LGP}};
 \end{aligned}$$



¹⁹Mochizuki’s IUT was first officially presented to the international community during the 2010 “Development of Galois–Teichmüller Theory and Anabelian Geometry” conference [Moc10] – see also the 2004 “Arithmetic Geometry” Tokyo international conference [Moc04]. The initial versions of the IUT manuscripts were officially submitted in August 2012 to the public RIMS preprints server [RIMS1756, 1757, 1758, 1759] and were later updated on its author’s web page following comments of the community and the referees (plus 160 pages and 10 revisions).

The category-theoretic approach of Inter-universal Teichmüller geometry results in a rich and evocative language for guiding mathematical thinking²⁰: objects exist in *étale-like* and *Frobenius-like* flavors – depending on whether one regards an object as anabelianly reconstructed, such as Galois groups, or, alternatively, whether objects are constrained to a particular ring or monoid structure. Moreover, both *étale-like* and *Frobenius-like* objects come in two variants, namely, *holomorphic* and *mono-analytic* flavors, depending whether they involve two or only one of the two dimensions of a ring (see [Alien] § 2.7 (vii) and § 3.6 (iv)).

3.1. Categorification of a Diophantine Problem. The natural geometric context of IUT is that of elliptic curves that belong to certain subloci of their associated moduli space²¹ $\mathcal{M}_{1,1}$, i.e. over a global field K , where the goal, in order to establish a Vojta-like inequality, is to build *a certain global multiplicative subspace* $\mu_\ell < E$ (see § Vojta–Mochizuki – Geometrization & Arithmetization).

To reach this goal, two issues appear that will be the essential guiding lines of IUT theory:

- (i) While such a subspace exists locally – i.e. at certain places v for E_v over K_v local fields – such a subspace typically *does not exist globally*, i.e. for $E \in \mathcal{M}_{1,1}$;
- (ii) The quotient morphism amounts to a sort of Frobenius morphism $(-)^\ell$ *that is not a ring homomorphism* – e.g. $(a+b)^\ell \neq a^\ell + b^\ell$.

In order to overcome these obstructions, Mochizuki proposes (1) *a categorification of the original situation* by constructing Hodge theaters²² \mathcal{HT}^\bullet that *simulate the existence of such a global multiplicative subspace* $\mu_\ell < E$ (see [EssLgc] Example 3.2.1) and (2) *an arithmetic geometry that does not necessarily involve the ring structure*.

Such a categorification of the arithmetic-geometric framework can be seen as *a second example of Grothendieck’s principle of resolution of the discrete-continuous tension*, that this time, leads to the inclusion of the realm of Diophantine estimates into the realm of anabelian geometry.

✧ *Before going further, we recall that over a p -adic local field, an elliptic curve E_v (1) may be identified with the Tate curve $\mathbb{G}_m/q_{E_v}^{\mathbb{Z}}$ defined by its q_{E_v} -parameter, and (2) is determined by the evaluation of a certain Θ -function (Tate). Indeed, the main results of Mochizuki’s [EtTh] establish absolute-mono anabelian reconstruction algorithms for this p -adic Θ context²³.*

§ Hodge Theaters & Numbers-Geometry Synchronization. Not only does IUT take full benefit of the category-theoretic setting of Grothendieck’s SGA1 theory of étale fundamental groups – that it exploits at the interface of number and algebraic geometry theory in the most concrete way – it also extends this geometry beyond Grothendieck’s framework of rings, fields, and Galois groups.

The *category-theoretic simulation of a global multiplicative subspace* $\mu_\ell < E$ is realized with the definition of $\Theta^{\pm\text{ell}}\text{NF}$ -Hodge theaters (see [EssLgc] Example 3.8.2). Such a theater $\mathcal{HT}^{\Theta^{\pm\text{ell}}\text{NF}}$ is obtained as the “gluing” of an NF-part \mathcal{HT}^{NF} – NF for “Number Field” – and a $\Theta^{\pm\text{ell}}$ -part $\mathcal{HT}^{\Theta^{\pm\text{ell}}}$ – where Θ refers to the Θ -function attached to an elliptic curve. The realm of \mathcal{HT}^{NF}

²⁰For example: “The (Ind2) indeterminacy intervenes in the passage from the mono-analytic Frobenius prime-strips to the mono-analytic étale prime-strips.” More generally, on the cognitive value of a mathematical style and how it applies to Bourbaki’s structuralism, we refer to Marquis’ [Mar22].

²¹Of which the already encountered projective line \mathbb{P}^1 is a coarse version $\mathcal{M}_{1,1}$.

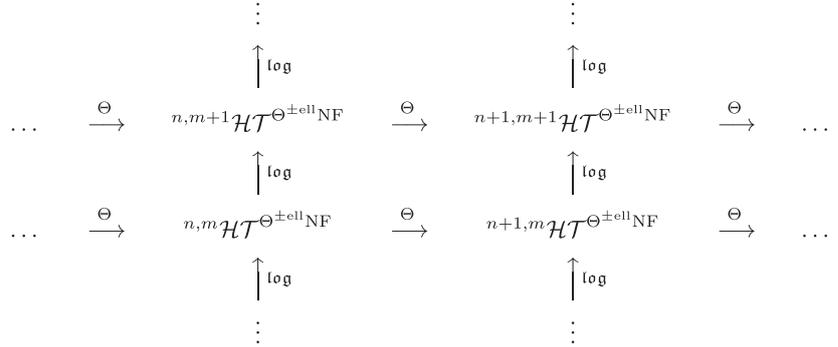
²²Formally, a Hodge theater is composed of Frobenioids – that category-theoretically encode the geometry of line bundles – assembled into various kinds of prime-strips that gather local and local-to-global data related to étale-like objects and Frobenius-like objects.

²³... and a remark similar to the one on Mochizuki’s work on Vojta in [GenEll] applies to the context-related significance of this work.

is Galois, arithmetic and multiplicative, and the realm of $\mathcal{HT}^{\Theta^{\pm\text{ell}}}$ is étale-fundamental, geometric and additive, we refer to [Alien] § 3.3 (v) for further details on these symmetries and the gluing construction.

In this category-theoretic context, the dilation of the \boxtimes -monoid structures²⁴ is obtained via a Θ -link that operates at the level of Frobenius-like objects and is essentially defined, on the q_E -parameter of Tate elliptic curves, as the Frobenius morphism $q_E \mapsto q_E^{j^2}$ for j an integer – indeed a sequence of such for $j \in \{1, \dots, (l-1)/2\}$. The Θ -link is compatible with the \boxtimes -monoid structures and determines a gluing between two isomorphic copies of the same $\Theta^{\pm\text{ell}}\text{NF}$ -Hodge theater $\overset{\dagger}{\mathcal{HT}}^{\Theta^{\pm\text{ell}}\text{NF}} \xrightarrow{\Theta} \overset{\ddagger}{\mathcal{HT}}^{\Theta^{\pm\text{ell}}\text{NF}}$, in order to remember that this framework is not compatible with a given field-ring structure, we denote the two *distinct but isomorphic ring-structures* involved with *distinct labels* $\overset{\dagger}{(-)}$ and $\overset{\ddagger}{(-)}$.

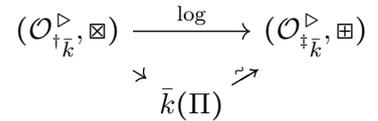
Fig. 14. Log-theta lattice of Hodge Theaters. In the shadow of this lattice, an additional sub-layer of étale containers Kummer-connects the Hodge theaters in each vertical column. The multiradial algorithm allows one to navigate from this sub-layer to a top-layer that relates the Frobenius-like components of the lattice



This situation is similar to the mono-anabelian transport one of Fig. 12: Hodge theaters admit an étale-like variant, linked to the original Hodge theater via Kummer morphism, also up to certain (Ind1,2)-like indeterminacies.

In order to desynchronize-resynchronize the Θ -link deformation of the multiplicative structure with the (fixed) additive structures of the rings involved – denoted $(\mathcal{O}_{\dagger\bar{k}}^{\triangleright}; \boxplus, \boxtimes)$ – IUT relies on the use of a certain *log-link that relates the two monoid structures* in its source and target (in a common log-shell container) – see Figure right, where Π denotes a certain étale fundamental group that forms the input data in the absolute anabelian reconstruction of the container objects in such a way that Π is detached from the “structural” morphism $\Pi \rightarrow \text{Gal}(\bar{k}/k)$, see § below.

Fig. 15. log-link, \boxplus/\boxtimes -structures and étale container



Put together, these constructions²⁵ form the *log-theta lattice of Hodge theaters* ${}^{(m,n)}\mathcal{HT}^{\Theta^{\pm\text{ell}}\text{NF}}$, for $m, n \in \mathbb{Z}$, where the possibility of a *highly non-commutative log-theta wandering* is a key aspect of IUT (see Fig. 14).

§ An Algorithm between Frobenius-like data. The Main Theorem of Inter-universal Teichmüller theory states the existence of a multiradial algorithm at the level of Hodge theaters (see Fig. 16) as follows:

²⁴This dilation of analytic structures can indeed be seen as the origin of the term “Teichmüller” in the terminology “Inter-universal Teichmüller Theory”.

²⁵In this monoid-theoretic setting, one could ask what has become of the SGA1 “automorphism of fiber functor over a geometric base point” ring-theoretic setting. We refer to the discussion on “a single unified basepoint” and “single unified set-theoretic basepoint” of [EssLgc] Examples 3.8.3 and 3.8.4 – see also Example 3.8.1 *ibid*.

Once given a certain arithmetic-geometric context for elliptic curves, there exists an algorithm for constructing a common container for the Frobenius-like data associated to distinct $\dagger(-)$ and $\ddagger(-)$ Hodge theaters that are related to another by the non-schematic Θ -link.

The arithmetic-geometric elliptic curves context is here given by fixing the so-called initial Θ -data; this algorithm relies on the previous absolute mono-anabelian constructions. We refer to [Alien] § 3.2 for additional examples of multiradiality. This algorithm is defined up to certain indeterminacies (Ind1), (Ind2), and (Ind3) that originate as follows: **(Ind1)** comes from comparing mono-analytic étale-like objects by mono-anabelian transport; **(Ind2)** comes from a mono-analytic étale-Frobenius comparison; finally **(Ind3)** originates from the non-commutativity of the log-Kummer correspondence. Of these, (Ind 3) is the most essential indeterminacy of IUT, which plays its most important role in the Θ -pilot/ q -pilot inclusion of log-shells in § An Anabelian abc Inequality.

Fig. 16. A Multiradial Algorithm allows one to recover objects $\Pi \rightarrow G$ constructed on the top row from the objects constructed on the bottom row up to certain indeterminacies; $\dagger(-)$ and $\ddagger(-)$ denote isomorphic but distinct copies of isomorphic groups

$$\begin{array}{ccccc}
 \dagger\Pi \twoheadrightarrow \dagger G & \xrightarrow{\text{full poly}} & G_k & & \ddagger\Pi \twoheadrightarrow \ddagger G & \xrightarrow{\text{full poly}} & G_k & \mathcal{R} \\
 & & \searrow & & \swarrow & & & \downarrow \Phi \\
 & & \dagger G \simeq G_k & \simeq & \ddagger G & & & \mathcal{C}
 \end{array}$$

Following Mochizuki’s own words, an essential inspiration for the notion of multiradial algorithm is Grothendieck’s definition of *the notion of a connection in the theory of crystals* – see [Alien] § 3.1 (iv) for details. Both notions may be regarded as a sort of a descent property – see [EssLgc] § 3.9.

§ Universe, Species & Logical Structure. As can be seen in the case of Wiles’ proof of Fermat’s Last Theorem in Mclarty’s discussion [McL10], and indeed already in the case of Deligne’s proof of the Weil conjectures § 7 *ibid*, the question of the set-theoretic foundational frameworks underlying breakthroughs – e.g. Peano, Zermelo-Fraenkel, or ZFC + Grothendieck Universe – is considered to be of specific importance by some for creative thought, see also Note 26.

The foundational basis of IUT geometry can be approached at two distinct levels: an “external” one that deals with the proper and logical articulation of sequences of statements, and an “internal” one that ensures the correct interaction of objects, morphisms, categories, and functors that appear in the theory. As presented in detail and in multiple contexts in [EssLgc], the former “external one” boils down to a sequence of logical “OR” and “AND” relations – we refer to § 3. *The logical structure of inter-universal Teichmüller theory* *ibid*.

The “internal”, and category-theoretic, one is related to Grothendieck’s notion of “universe”, which provides a foundational framework in set theory and amounts to fixing a given ZFC model²⁶. As examined in Chap. IV “Log-volume Computations and Set-theoretic Foundations” of [IUTChI-IV], “albeit from an extremely naive/non-expert point of view!” (dixit Mochizuki, *ibid*)²⁷, this notion in IUT is related to that of *species and mutations*, which yield a set-theoretical framework where the various mono-anabelian and inter-universal reconstruction algorithms may be expressed – we refer to the absolute anabelian and étale-Frobenius Examples 3.4–3.6 *ibid*. The following is a reformulation of Rem. 3.1.4 and 3.6.3 *ibid*:

²⁶In Grothendieck’s mathematical practice and philosophical view, the notion of universe must be considered as an accessory for resolving Bourbaki’s foundational category-theoretic problems, not as a virtuous ground for subsequent developments, see Marquis’ contribution in [Chap23] and also [Krö06] § 6 – this role is indeed explicitly attributed to topoi. By contrast to this category-theoretic prism, one notes that IUT is not a geometry of commutative diagrams (see Examples 3.6 (Syp2) and 3.10.2 in [EssLgc]).

²⁷The reader will allow the author to take an even more naive position, whose goal is only to bring these considerations to the eyes of experts in the hope of a potential formal and rigorous treatment.

Although the Θ -link and the log-link, both non-scheme/ring theoretic, can give rise a priori to numerous enlargements of the universe under consideration – and thus a priori numerous ZFC models –, species and mutations only give rise to “inter-universal” models.

If one follows Grothendieck’s principle of Note 26 even further, it would be reasonable to expect for the theory of topoi – a theoretical framework that bridges category theory, logic, and geometry – to provide an even finer and more revealing framework for these changes of ZFC models and universes – we refer to [Ble22] and references herein for an accessible and introductory presentation of topoi from the perspective of logic and mathematical universes.

“[Mochizuki’s IUT] work [...] puts anabelian geometry on a higher level/perspective and opens new unprecedented horizons in the research surrounding arithmetic fundamental groups and their connection to diophantine geometry [...] The fact (established in these papers) that Galois theory, and more precisely anabelian geometry, has a particular control on certain diophantine inequalities is an extraordinary fact which is unprecedented.”

– M. Saïdi in [MR4225476]

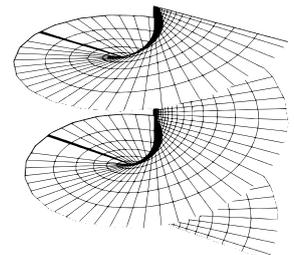
3.2. A new Anabelian & Diophantine Frontier... In Inter-universal Teichmüller theory, the abc inequality becomes an estimate on *how far the ring additive and multiplicative structures can be dismantled from each other*. The approach of Mochizuki does not only lead to an anabelian proof of abc and Fermat’s Last Theorem, it also provides some seminal “reverse” insight into classical anabelian arithmetic geometry, or Galois–Teichmüller theory, that is indeed the most natural context in which to test these new insights.

§ An Anabelian abc Inequality. The abc inequality – also the first proof of the Vojta conjecture “with ramification” already in the case of curves – results from establishing the “Vojta-Mochizuki inequalities”. In IUT, this inequality follows from two inequalities between the arithmetic degrees – or “heights”, or log-volumes – of *two regions in containers arising from the log-theta lattice of Hodge theaters* of Fig. 14, associated to *a certain Θ -pilot and a certain q -pilot*:

$$\begin{cases} -|\deg q_E| \leq -|\deg \Theta_E| < +\infty \\ -|\deg \Theta_E| \leq a_\ell - b_\ell |\deg q_E| \end{cases} \quad \text{and thus } \deg q_E \leq a_\ell / (b_\ell - 1),$$

where the first inequality follows from *the Main Theorem of IUT* on the existence of a multiradial algorithm, and the second one follows from some direct computations in classical number theory. It is interesting to observe, that in order to apply this argument, it is necessary to construct some explicit initial Θ -data. This sort of tight *cohesion of IUT between the category-theoretic, geometric, and computational realms* is a trademark of the soundest and most impactful mathematical theories.

The Θ -pilot and q -pilot objects may be thought of as regions inside some intricate collections of systems of tensor products of log-shells that arise from *local portions*²⁸ of the various Hodge theaters involved; a *log-shell* serves as a common container for the \boxtimes/\boxtimes -monoid structures. A *geometric analogy* is given by a collection of multiple neighborhoods taken in various layers that appear in the Riemann surface defined by the multi-valued complex logarithm.



²⁸We remind that these local portions are independent of each other, especially with respect to the global number field involved and even more with respect to any ring structure of reference.

At the internal level, Hodge theaters contain a *globalization part* – the global realified part – that ties together the local portions that arise from the various valuations of the number field under consideration. This global realified part plays a central role in the definition of the Frobenius-like portion of the *non-ring theoretic* Θ -link and forms one essential part of the argument discussed above so that *it results in new Diophantine consequences*²⁹ – see also the section above for a discussion in terms of Grothendieck universes.

The construction of the Θ -pilot results from a certain wandering within the log-theta lattice that allows one to reconcile the dilated multiplicative monoid structure with the additive one; *the three IUT indeterminacies are just flexible enough for this to happen.*

§ An Extended Fermat’s Last Theorem. While it is natural to expect for a theory establishing *abc* to lead to a proof of Fermat’s Last Theorem (FLT), one requirement is to start with *a version of abc where the constant K_ϵ is explicitly given*, see [GT02] – a condition that requires an essential enhancement of the non-explicit anabelian-Diophantine result of the original IUT.

Fig. 17. Fermat’s Last Theorem

For $n > 2$ the equation

$$x^n + y^n = z^n$$

has no positive integer solution.

The main obstruction lies in the initial use of a compactly bounded subset $\mathcal{K} < \mathbb{P}^1 \setminus \{0, 1, \infty\}$ that supports the prime 2 and that is later removed by the *use of a non-explicit non-critical Belyi map*. In [ExpEst], the original IUT theory is refined with the construction of an étale theta function – and properties of the corresponding monoids – *via* evaluation at 6-torsion points instead of at 2-torsion points as in the original Mumford construction.

The result is an *effective* version of *abc* (indeed the Szpiro version), which implies an anabelian proof of Fermat’s Last Theorem:

$$|abc| \leq 2^4 \cdot \exp(1.7 \cdot 10^{30} \cdot \epsilon^{-166/81}) \cdot \text{rad}(abc)^{3(1+\epsilon)}, \text{ and } \textit{Fermat has no solution for } p > 1.615 \cdot 10^{14}.$$

This lower bound – combined with a numerical result of Coppersmith (1990) and some new cyclotomic estimates of Mihailescu and Rassias (2022) – is indeed lowered to $p > 257$, which combined further with a result of Vandiver (1929), leads to a new proof of FLT in its classical and generalized form (see Cor. 5.9 *ibid*).

§ Anabelian Grothendieck–Teichmüller progress.

Following Grothendieck’s “Esquisse d’un programme” [Esq], Grothendieck–Teichmüller theory (GT) concerns the search for a combinatorial description of the absolute Galois group $\text{Gal}(\bar{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ in terms of a group \widehat{GT} that arises from the $\text{Gal}(\bar{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ -action on the étale fundamental group of the moduli stack of genus 0 curves with m marked points – see Fig. 18, where the horizontal map is arithmetic, the vertical one geometric, and the diagonal one Galois-combinatoric. The goal is here to determine *“how close are these three maps to being isomorphisms?”*

Fig. 18. GT - an arithmetic-combinatoric-geometric triangle

$$\begin{array}{ccc} \text{Gal}(\bar{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}) & \hookrightarrow & \text{Aut}[\pi_1(\mathcal{M}_{0,[m]})] \\ & \searrow & \uparrow \\ & & \widehat{GT} \end{array}$$

While Galois–Teichmüller theory and Grothendieck–Teichmüller theory usually provide some *input for anabelian geometry*, Mochizuki’s school recently obtained two unexpected reverse

²⁹From the point of view of the maturation of mathematical ideas, it is interesting to remember (1) that a hectic debate, supported by Weierstrass, animated the mathematical community on *how all-isomorphic non-labeled neighborhoods in a Riemann surface can produce any new geometric information*, and (2) that the dispute between Leibniz and Bernoulli on the logarithm of non-positive real number was resolved by the introduction of the *argument-indeterminacy*, see the contextual discussion in [EssLgc] § 1.5.

applications of *combinatorial anabelian geometry* to GT theory: (1) that \widehat{GT} is essentially too geometric to coincide precisely with $\text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ (see [HMM22] and [Hos22] § 7-8); and most essentially (2) *a combinatorial description of the algebraic closure $\overline{\mathbb{Q}}$ of the field of rational numbers and of $\text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ itself* (see [HTM20]).

“En guise de conclusion”

Inter-universal Teichmüller theory presents itself as a new arithmetic geometry that faithfully follows and incorporates the most fundamental aspects of Grothendieck’s practical philosophy of mathematics. Given the multi-layered coherency of its geometric, category-theoretic, and explicit constructions – as well as how deeply rooted it is in the most essential techniques and progress of classical algebraic geometry and number theory – IUT comes across as a stimulating and virtuous theory for the mind of the arithmetic geometer.

It already opens new horizons, “internally” – for example in terms of additional refinements of the original IUT with respect to certain subloci of the moduli stack of elliptic curves $\mathcal{M}_{1,1}$, for expected additional number theoretic breakthroughs – but also more broadly, with ramification towards other related topics of arithmetic and homotopic Galois theory. As already reported in [Hos21b], a “Galois orbit Inter-universal Teichmüller” theory is expected to establish decisive progress in the *birational local-to-global Grothendieck section conjecture* (for an introduction, see [Sai12] and [Hos14]).

One can thus only expect Mochizuki’s Inter-universal Teichmüller geometry and philosophy to act as one of the long-term beacons in the *present general harmonization process of arithmetic and homotopic Galois theory*.

✧ For additional introductory notes on Inter-universal Teichmüller theory, we refer to the 2021 notes, videos and Leitfaden of [ExpHoriz1, ExpHoriz2]; For a broader introduction and additional references, we refer to the Program and the list of references of [Prom20].

REFERENCES & NOTES

- [Krö06] R. Krömer, *La «machine de Grothendieck» se fonde-t-elle seulement sur des vocables métamathématiques? Bourbaki et les catégories au cours des années cinquante*, *Revue d’histoire des math.* **12** (1), 155–198 (2006).
- [Mar22] J. Marquis, *The Structuralist Mathematical Style: Bourbaki as a Case Study*, in: *Boston Stud. Philos. Hist. Sci.*, 199–231 (2022).
- [McL07] C. McLarty, *The rising sea: Grothendieck on simplicity and generality*, in: *Episodes in the history of modern algebra (1800–1950)*, *Hist. Math.* **32**, 301–325 (Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2007).
DOI: <https://doi.org/10.1093/bjps/axl030>
- [R&S] A. Grothendieck, *Récoltes et semailles, Réflexions et témoignage sur un passé de mathématicien*, Gallimard, pp. 717+1926 (2022).
- [Sha18] G. Shabbat, *The divine spark, To the memory of Vladimir Voevodsky*, *Troitsky variant* **249** (2018).
URL: <https://www.math.ias.edu/Voevodsky/other/Orlova.pdf>

- [Chap23] *Proceedings of the conference “Grothendieck, a Multifarious Giant: Mathematics, Logic and Philosophy”* (to be publ., 2023).
URL: <https://www.chapman.edu/scst/conferences-and-events/grothendieck-conference.aspx>
- [Esq] A. Grothendieck, *Esquisse d'un programme*, in: *Geometric Galois actions*, 1, London Math. Soc. Lecture Note Ser. **242**, 5–48, with an English translation on pp. 243–283 (Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1997).
URL: <https://mathscinet.ams.org/mathscinet-getitem?mr=MR1483107>
- [Voe91] V.A. Voevodsky, *Galois representations connected with hyperbolic curves*, *Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat.* **55** (6), 1331–1342 (1991).
DOI: <https://doi.org/10.1070/IM1992v039n03ABEH002248>
- [SV90] G. B. Shabat, V.A. Voevodsky, *Drawing curves over number fields*, in: *The Grothendieck Festschrift*, V. III, *Progr. Math.* **88**, 199–227 (Birkhäuser Boston, Boston, MA, 1990).
DOI: https://doi.org/10.1007/978-0-8176-4576-2_8
- [Gro97] A. Grothendieck, *Brief an G. Faltings*, in: *Geometric Galois actions*, 1, London Math. Soc. Lecture Note Ser. **242**, 49–58, with an English translation on pp. 285–293 (Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1997).
URL: <https://mathscinet.ams.org/mathscinet-getitem?mr=MR1483108>
- [Sti11] J. Stix, *The Brauer-Manin obstruction for sections of the fundamental group*, *J. Pure Appl. Algebra* **215** (6), 1371–1397 (2011).
DOI: <https://doi.org/10.1016/j.jpaa.2010.08.017>
- [MR4225476] M. Saïdi, *Review of the four Inter-universal Teichmuller theory papers of S. Mochizuki*, *Math. Reviews* **4225476** (2022).
- [EssLgc] S. Mochizuki, *On the Essential Logical Structure of Inter-universal Teichmuller Theory in terms of logical and “ \wedge ”/logical or “ \vee ” relations: report on the occasion of the publication of the four main papers on Inter-universal Teichmuller theory*, 2022.
URL: <https://www.kurims.kyoto-u.ac.jp/~motizuki/papers-english.html>
- [LMG] A. Grothendieck, *La “longue Marche” à travers la théorie de Galois*, *Inst. Montpelliérain Alexander Grothendieck* (Univ. Montpellier), Cote n. 140-2 (1978–1982).
URL: <https://grothendieck.umontpellier.fr>
- [Del98] P. Deligne, *Quelques idées maîtresses de l'œuvre de A. Grothendieck*, in: *Matériaux pour l'histoire des mathématiques au XX^e siècle* (Nice, 1996), *Sémin. Congr.* **3**, 11–19 (Soc. Math. France, Paris 1998).
URL: <https://mathscinet.ams.org/mathscinet-getitem?mr=MR1640253>
- [GenEll] S. Mochizuki, *Arithmetic elliptic curves in general position*, *Math. J. Okayama Univ.* **52**, 1–28 (2010).
DOI: <https://doi.org/10.18926/mjou/33503>
- [Lan95] S. Lang, *Mordell's review, Siegel's letter to Mordell, Diophantine geometry, and 20th century mathematics*, *Notices Amer. Math. Soc.* **42** (3), 339–350 (1995).
URL: <https://mathscinet.ams.org/mathscinet-getitem?mr=MR1316133>
- [Rémo3] G. Rémond, *Vojta's method in diophantine geometry, applications and related topics* in: *Proc. of the Diophantine Problems and Analytic Number Theory Conference*, *Kôkyûroku*, 202–210 (RIMS, 2003).
URL: <http://hdl.handle.net/2433/43068>

- [BG06] E. Bombieri, W. Gubler, *Heights in Diophantine geometry*, New Math. Monographs **4** (Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2006).
DOI: <https://doi.org/10.1017/CBO9780511542879>
- [NTM98] H. Nakamura, A. Tamagawa, S. Mochizuki, *Grothendieck's conjectures concerning fundamental groups of algebraic curves*, *Sūgaku* **50** (2), 113–129 (1998); Eng. “Sugaku Expositions” **14** (1), AMS (2001).
URL: <https://mathscinet.ams.org/mathscinet-getitem?mr=MR1648427>
- [Hos22] Y. Hoshi, *Progress in anabelian geometry* (in Japanese), *Sūgaku* **74** (1), 1–30 (2022); To be translated in “Sugaku Expositions” AMS.
- [EtTh] S. Mochizuki, *The étale theta function and its Frobenioid-theoretic manifestations*, *Publ. Res. Inst. Math. Sci.* **45** (1), 227–349 (2009).
DOI: <https://doi.org/10.2977/prims/1234361159>
- [Hos20] Y. Hoshi, *A note on an anabelian open basis for a smooth variety*, *Tohoku Math. J. (2)* **72** (4), 537–550 (2020).
DOI: <https://doi.org/10.2748/tmj.20190917a>
- [Hos21] Y. Hoshi, *Introduction to Mono-anabelian Geometry*, *Publ. Math. Besançon Algèbre Théorie* Nr., 5–44 (2021).
DOI: <https://doi.org/10.5802/pmb.42>
- [SS16] A. Schmidt, J. Stix, *Anabelian geometry with étale homotopy types*, *Ann. Math. (2)* **184** (3), 817–868 (2016).
DOI: <https://doi.org/10.4007/annals.2016.184.3.5>
- [HMM22] Y. Hoshi, A. Minamide, S. Mochizuki, *Group-theoreticity of numerical invariants and distinguished subgroups of configuration space groups*, *Kodai Math. J.* **45** (3), 295–348 (2022).
- [HTM20] Y. Hoshi, S. Tsujimura, S. Mochizuki, *Combinatorial construction of the absolute Galois group of the field of rational numbers*, 97 p. (2020).
URL: <http://www.kurims.kyoto-u.ac.jp/preprint/file/RIMS1935.pdf>
- [Lep10] E. Lepage, *Tempered fundamental group and metric graph of a Mumford curve*, *Publ. Res. Inst. Math. Sci.* **46** (4), 849–897 (2010).
URL: <https://mathscinet.ams.org/mathscinet-getitem?mr=MR2791009>
- [IUTChI-IV] S. Mochizuki, *Inter-universal Teichmüller theory: (I) Construction of Hodge theaters, (II) Hodge-Arakelov-theoretic evaluation, (III) Canonical splittings of the log-theta-lattice, (IV) Log-volume computations and set-theoretic foundations*, *Publ. Res. Inst. Math. Sci.* **57** (1), 3–723 (2021).
DOI: <https://doi.org/10.4171/prims/57-1-1>
- [Prom20] B. Collas, P. Dèbes, B. Fresse, *RIMS-Lille seminar. Promenade in Inter-universal Teichmüller theory* (2020).
URL: <https://www.kurims.kyoto-u.ac.jp/~bcollas/Promenade-IUT/index.html>
- [ExpHoriz2] S. Mochizuki, Y. Hoshi, I. Fesenko, Y. Taguchi, B. Collas. *Workshop. Inter-universal Teichmüller Theory Summit 2021* (2021).
URL: <https://www.kurims.kyoto-u.ac.jp/~mochizuki/RIMS-workshop-homepages-2016-2021/w4/iut2.html>
- [ExpHoriz1] S. Mochizuki, Y. Hoshi, I. Fesenko, Y. Taguchi, B. Collas. *Workshop. Invitation to*

- Inter-universal Teichmüller Theory* (2021).
 URL: <https://www.kurims.kyoto-u.ac.jp/~motizuki/RIMS-workshop-homepages-2016-2021/w3/iut1.html>
- [ExpEst] S. Mochizuki, I. Fesenko, Y. Hoshi, A. Minamide, W. Porowski, *Explicit estimates in inter-universal Teichmüller theory*, Kodai Math. J. **45** (2), 175–236 (2022).
 DOI: <https://doi.org/10.2996/kmj45201>
- [Fes16] I. Fesenko, “*Fukugen*” – *On Shinichi Mochizuki’s Inter-universal Teichmüller Theory*, Inference **2** (3), 2016.
 DOI: <https://doi.org/10.37282/991819.16.25>
- [McL10] C. McLarty, *What does it take to prove Fermat’s last theorem? Grothendieck and the logic of number theory*, Bull. Symbolic Logic **16** (3), 359–377 (2010).
 URL: <https://doi.org/10.2178/bsl/1286284558>
- [Ble22] I. Blechschmidt, *Exploring mathematical objects from custom-tailored mathematical universes*, in: *Objects, structures, and logics — FilMat studies in the philosophy of mathematics*, Boston Stud. Philos. Hist. Sci. **339**, 63–95 (Springer, Cham, 2022).
 DOI: https://doi.org/10.1007/978-3-030-84706-7_4
- [GT02] A. Granville, T. J. Tucker, *It’s as easy as abc*, Notices Amer. Math. Soc. **49** (10), 1224–1231 (2002).
 URL: <https://mathscinet.ams.org/mathscinet-getitem?mr=MR1930670>
- [Alien] S. Mochizuki, *The mathematics of mutually alien copies: from Gaussian integrals to inter-universal Teichmüller theory*, in: *Inter-universal Teichmüller Theory Summit 2016*, RIMS Kôkyûroku Bessatsu, B84, 23–192 (Res. Inst. Math. Sci. (RIMS), Kyoto, 2021).
 URL: <http://www.kurims.kyoto-u.ac.jp/~motizuki/Alien%20Copies,%20Gaussians,%20and%20Inter-universal%20Teichmuller%20Theory.pdf>
- [Hos21b] Y. Hoshi, *On the Galois orbit version of Inter-universal Teichmüller theory I & II: a progress report*, Inter-universal Teichmüller Theory Summit (2021).
 URL: <https://www.kurims.kyoto-u.ac.jp/~motizuki/RIMS-workshop-homepages-2016-2021/w4/iut2.html>
- [Moc10] S. Mochizuki, *Inter-universal Teichmüller Theory: A Progress Report*, “Development of Galois–Teichmüller Theory and Anabelian Geometry” Joint MSJ-RIMS Conf. (2010).
 URL: <https://www.mathsoc.jp/meeting/msjsi10/JointMSJ-RIMSprogram20101027.pdf>
- [Moc04] S. Mochizuki, *Categorical Representation of Arithmetic Log Schemes, with Applications to the Arithmetic of Elliptic Curves*, “Arithmetic Geometry” Tokyo Conference (2004).
 URL: <https://www.ms.u-tokyo.ac.jp/video/conference/2004arithmeticgeometry/>
- [Hos14] Y. Hoshi, *Conditional results on the birational section conjecture over small number fields*, in: *Automorphic forms and Galois representations. V. 2*, London Math. Soc. Lecture Note Ser. **415**, 187–230 (Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2014).
 URL: <https://mathscinet.ams.org/mathscinet-getitem?mr=MR3444234>
- [Sai12] M. Saïdi, *Around the Grothendieck anabelian section conjecture*, in: *Non-abelian fundamental groups and Iwasawa theory*, London Math. Soc. Lecture Note Ser. **393**, 72–106 (Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2012).
 URL: <https://mathscinet.ams.org/mathscinet-getitem?mr=MR2905530>
- [Fal98] G. Faltings, *Curves and their fundamental groups (following Grothendieck, Tamagawa and*

Mochizuki), in: *Séminaire Bourbaki*. V. 1997/98, Astérisque No. 252 (1998), Exp. No. 840 (4), 131–150.

URL: <https://mathscinet.ams.org/mathscinet-getitem?mr=MR1685577>

- [A] “On peut considérer que la géométrie nouvelle est avant toute autre chose, une synthèse entre ces deux mondes, jusque là mitoyens et étroitement solidaires, mais pourtant séparés : le monde "arithmétique", dans lequel vivent les (soi-disants) "espaces" sans principe de continuité, et le monde de la grandeur continue, ou vivent les "espaces" au sens propre du terme, accessibles aux moyens de l'analyste [...]. Dans la vision nouvelle, ces deux mondes jadis séparés, n'en forment plus qu'un seul [...], vision d'une "géométrie arithmétique" (comme je propose d'appeler cette géométrie nouvelle).”
- [B] “Les plus profonds (à mes yeux) parmi ces douze thèmes, sont celui des motifs, et celui étroitement lié de géométrie algébrique anabélienne et du yoga de Galois–Teichmüller.”
- [C] “Une telle supposition avait l'air à tel point dingue que j'étais presque gêné de la soumettre aux compétences en la matière. Deligne consulté trouvait la supposition dingue en effet, mais sans avoir un contre-exemple dans ses manches. Moins d'un an après, au Congrès International de Helsinki, le mathématicien soviétique Bielyi annonce justement ce résultat, avec une démonstration d'une simplicité déconcertante tenant en deux petites pages d'une lettre de Deligne – jamais sans doute un résultat profond et déroutant ne fut démontré en si peu de lignes!”

Benjamin Collas

Research Institute for Mathematical Sciences,

Kyoto University,

Kyoto 606-8502, Japan,

e-mail: bcollas@kurims.kyoto-u.ac.jp

Три задачи восстановления сигнала-вектора по модулям измерений и по нормам проекторов

И.М. Избяков, С.Я. Новиков

Аннотация. Дан краткий обзор результатов по восстановлению сигнала-вектора по модулям измерений и по нормам ортогональных проекторов в конечномерном евклидовом и унитарном пространствах, и в бесконечномерном вещественном пространстве ℓ^2 . Сформулированы три задачи, полное решение которых пока не найдено. Приведены возможные пути решений и доказаны теоремы, дающие частичные ответы на поставленные вопросы.

Ключевые слова: измерительный вектор, альтернативная полнота, спарк система векторов, подъем фазы, подпространство.

Введение

Во многих прикладных исследованиях возникает такая ситуация: задана некоторая система так называемых измерительных векторов $\Phi = \{\varphi_i\}_{i=1}^N$ в евклидовом или унитарном пространстве \mathbb{H}^D . Исследователю доступны результаты измерений неизвестного вектора-сигнала \mathbf{x} в виде модулей скалярных произведений $|\langle \mathbf{x}, \varphi_i \rangle|$, фазы (или знаки) этих произведений неизвестны. Возможно ли в такой ситуации восстановить вектор \mathbf{x} ? Так как модули скалярных произведений не изменяются при переходе от вектора \mathbf{x} к вектору $h\mathbf{x}$ с $|h| = 1$, то для аккуратной формулировки задачи предварительно производится факторизация. Пусть $\mathbb{T} = \{h \in \mathbb{H} : |h| = 1\}$. Вводится фактор-пространство \mathbb{H}^D/\mathbb{T} как множество классов эквивалентности: $\mathbf{x} \sim \mathbf{y}$, если существует $h \in \mathbb{T} : \mathbf{x} = h\mathbf{y}$. Таким образом, возникает задача восстановления вектора по модулям измерений. Терминология не устоялась, в англоязычных статьях используются словосочетания Phaseless Reconstruction, Phase Retrieval. Сформулируем задачу восстановления как задачу о свойстве системы измерительных векторов.

Определение 1. Набор векторов $\Phi = \{\varphi_i\}_{i=1}^N$ в \mathbb{R}^D (или \mathbb{C}^D) восстанавливает по модулям измерений (ВМИ), если для любых $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^D$ (или \mathbb{C}^D) таких, что $|\langle \mathbf{x}, \varphi_i \rangle| = |\langle \mathbf{y}, \varphi_i \rangle|$ для всех $i = 1, \dots, N$, имеем $\mathbf{x} = c\mathbf{y}$, где $c = \pm 1$ для \mathbb{R}^D (и $c \in \mathbb{T}$ для \mathbb{C}^D).

Работа поддержана грантом Российского научного фонда (проект № 22-21-20024) и выполнена в рамках реализации программы развития Научно-образовательного математического центра Приволжского федерального округа (соглашение № 075-02-2022-882).

Это определение может быть сформулировано как свойство инъективности нелинейного оператора

$$\mathcal{A} : \mathbb{H}^D/\mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}^N, (\mathcal{A}(\mathbf{x}))(n) := |\langle \mathbf{x}, \varphi_n \rangle|^2, n = 1, \dots, N.$$

1. Задача о минимальном количестве измерительных векторов

Первая задача. Каково минимальное количество $N = N(D)$ измерительных векторов $\{\varphi_j\}_{j=1}^N$, обладающих свойством (ВМИ) в \mathbb{H}^D ?

Ответ на этот вопрос известен для вещественного пространства, он основан на свойстве альтернативной полноты.

Определение 2. Набор векторов $\Phi = \{\varphi_n\}_{n=1}^N$ в \mathbb{H}^D обладает свойством альтернативной полноты (АП), если для каждого подмножества $T \subseteq \{1, \dots, N\}$ по крайней мере одно из множеств $\{\varphi_n\}_{n \in T}$ или $\{\varphi_n\}_{n \in T^c}$ полно в \mathbb{H}^D .

В англоязычных статьях используют термин “complement property”.

В пространстве \mathbb{R}^D свойства (ВМИ) и (АП) эквивалентны.

Теорема 3 ([1]). Набор векторов $\Phi = \{\varphi_i\}_{i=1}^N$ в \mathbb{R}^D восстанавливает по модулям измерений тогда и только тогда, когда он обладает свойством альтернативной полноты.

Доказательство. (\Rightarrow) Предположим, что $\Phi \notin$ (АП), т. е. существует $T \subseteq \{1, \dots, N\}$ такое, что $\{\varphi_n\}_{n \in T}$ и $\{\varphi_n\}_{n \in T^c}$ не полны в \mathbb{R}^D . Выбираем два ненулевых вектора $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^D$ так, чтобы $\langle \mathbf{u}, \varphi_n \rangle = 0$ для всех $n \in T$, а $\langle \mathbf{v}, \varphi_n \rangle = 0$ для всех $n \in T^c$.

Для произвольного n имеем

$$|\langle \mathbf{u} \pm \mathbf{v}, \varphi_n \rangle|^2 = |\langle \mathbf{u}, \varphi_n \rangle|^2 \pm 2\langle \mathbf{u}, \varphi_n \rangle \langle \mathbf{v}, \varphi_n \rangle + |\langle \mathbf{v}, \varphi_n \rangle|^2 = |\langle \mathbf{u}, \varphi_n \rangle|^2 + |\langle \mathbf{v}, \varphi_n \rangle|^2.$$

Отсюда $|\langle \mathbf{u} + \mathbf{v}, \varphi_n \rangle|^2 = |\langle \mathbf{u} - \mathbf{v}, \varphi_n \rangle|^2$ для всех n , и $\mathcal{A}(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = \mathcal{A}(\mathbf{u} - \mathbf{v})$. Так как векторы \mathbf{u} и \mathbf{v} отличны от нулевого, $\mathbf{u} + \mathbf{v} \neq \pm(\mathbf{u} - \mathbf{v})$. Это означает, что оператор \mathcal{A} не является инъективным.

(\Leftarrow) Предположим, что оператор \mathcal{A} не является инъективным. Это означает существование векторов $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^D$ таких, что $\mathbf{x} \neq \pm \mathbf{y}$ и $\mathcal{A}(\mathbf{x}) = \mathcal{A}(\mathbf{y})$. Обозначим $T := \{n : \langle \mathbf{x}, \varphi_n \rangle = -\langle \mathbf{y}, \varphi_n \rangle\}$.

Получаем, что $\langle \mathbf{x} + \mathbf{y}, \varphi_n \rangle = 0$ для всех $n \in T$, а $\langle \mathbf{x} - \mathbf{y}, \varphi_n \rangle = 0$ для всех $n \in T^c$. По предположению $\mathbf{x} \neq \pm \mathbf{y}$, поэтому $\mathbf{x} + \mathbf{y} \neq 0$ и $\mathbf{x} - \mathbf{y} \neq 0$. Таким образом, $\{\varphi_n\}_{n \in T}$ и $\{\varphi_n\}_{n \in T^c}$ не полны в \mathbb{R}^D . \square

Из теоремы 3 сразу следует $N(D) \geq 2D - 1$ в \mathbb{R}^D . С другой стороны, матрицы Вандермонда позволяют строить системы векторов $\Phi = \{\varphi_i\}_{i=1}^N$ в \mathbb{R}^D с полным спарком для любого $N \geq D$. Напомним, что *спарком* системы Φ называется наименьшее количество

линейно зависимых векторов этой системы. Можно определить это число формально, если расположить векторы $\{\varphi_i\}_{i=1}^N$ в виде столбцов $D \times N$ -матрицы Φ , и воспользоваться обозначением $\|\mathbf{x}\|_0$ для количества ненулевых координат вектора \mathbf{x} .

При таком подходе

$$\text{spark}(\Phi) = \min \{ \|\mathbf{x}\|_0 : \mathbf{x} \in \mathbb{R}^N \setminus \{0\} \text{ такие, что } \Phi \mathbf{x} = \mathbf{0} \}.$$

Для систем с полным спарком $\text{spark}(\Phi) = D + 1$, т.е. каждая подсистема из D векторов системы Φ состоит из линейно независимых векторов.

Таким образом, для \mathbb{R}^D имеет место равенство $N(D) = 2D - 1$, причем это равенство реализуется на системах с полным спарком и только на них.

В [2] приведен интересный пример набора векторов $\Phi = \{\varphi_i\}_{i=1}^5$ в \mathbb{R}^3 , не удовлетворяющего свойству (ВМИ). Он представлен столбцами матрицы

$$\Phi = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 4 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Матрица Φ полного ранга, однако она не удовлетворяет свойству (АП), так как третий столбец является суммой первых двух столбцов. Если $T = \{1, 2, 3\}$, то как $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$, так и φ_4, φ_5 , не полны в \mathbb{R}^3 . Для векторов $\mathbf{x} = (1, 1, 9)^t$ и $\mathbf{y} = (19, 7, -21)^t$ получаем

$$\mathcal{A}\mathbf{x} = \mathcal{A}\mathbf{y} = (900, 81, 1521, 144, 100)$$

и при этом $\mathbf{x} \neq \pm \mathbf{y}$.

В пространстве \mathbb{C}^D альтернативная полнота является лишь необходимым условием инъективности оператора \mathcal{A} . Этот факт потребовал отдельного доказательства [3, 4], так как непосредственно повторить его из теоремы 3 не удастся.

Действительно, для комплексного поля равенство теоремы 3 принимает вид

$$|\langle \mathbf{u} \pm \mathbf{v}, \varphi_n \rangle|^2 = |\langle \mathbf{u}, \varphi_n \rangle|^2 \pm 2\text{Re}\langle \mathbf{u}, \varphi_n \rangle \overline{\langle \mathbf{v}, \varphi_n \rangle} + |\langle \mathbf{v}, \varphi_n \rangle|^2 = |\langle \mathbf{u}, \varphi_n \rangle|^2 + |\langle \mathbf{v}, \varphi_n \rangle|^2.$$

В проведенном доказательстве теоремы 3 было показано, что отрицание свойства (АП) приводит к равенству $\mathcal{A}(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = \mathcal{A}(\mathbf{u} - \mathbf{v})$ и при этом $\mathbf{u} + \mathbf{v} \neq \pm(\mathbf{u} - \mathbf{v})$, что противоречит инъективности \mathcal{A} на $\mathbb{R}^M / \{\pm 1\}$. Однако $\mathcal{A}(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = \mathcal{A}(i(\mathbf{u} - \mathbf{v}))$, хотя векторы $\mathbf{u} + \mathbf{v}$ и $i(\mathbf{u} - \mathbf{v})$ принадлежат разным классам эквивалентности пространства $\mathbb{C}^D / \mathbb{T}$.

В [3] приведен простой пример, показывающий, что условие альтернативной полноты не является достаточным для (ВМИ) в \mathbb{C}^D .

Достаточно рассмотреть векторы $(1, 0)$, $(0, 1)$ и $(1, 1)$ в \mathbb{C}^2 . Они удовлетворяют (АП), но $\mathcal{A}((1, i)) = (1, 1, 2) = \mathcal{A}((1; -i))$, хотя $(1, i) \not\equiv (1, -i) \pmod{\mathbb{T}}$; более того, векторы с вещественными координатами вообще не могут давать инъективные измерения в комплексном пространстве, так как они не различают векторы с комплексно сопряженными координатами.

тами.

Для критерия свойства (ВМИ) в пространстве \mathbb{C}^D в [3] был разработан метод “подъема фазы” (Phase Lift), краткое описание которого приводится ниже.

Определяется вещественное D^2 -мерное пространство $\mathbb{H}^{D \times D}$ самосопряженных $D \times D$ -матриц. Для набора векторов $\{\varphi_j\}_{j=1}^N \subset \mathbb{C}^D$ вводится оператор супер-анализа $\mathbf{A} : \mathbb{H}^{D \times D} \rightarrow \mathbb{R}^N$:

$$(\mathbf{A}H)(j) := \langle H, \varphi_j \varphi_j^* \rangle_{HS},$$

где $\langle \cdot, \cdot \rangle_{HS}$ – скалярное произведение Гильберта–Шмидта $\langle H, G \rangle_{HS} = \text{tr}[G^*H]$, которое индуцирует матричную норму Фробениуса

$$\|H\|_F = \left(\sum_{i,j=1}^D |h_{ij}|^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Заметим, что \mathbf{A} является линейным оператором и

$$(\mathbf{A}\mathbf{x}\mathbf{x}^*)(j) = \langle \mathbf{x}\mathbf{x}^*, \varphi_j \varphi_j^* \rangle_{HS} = \text{tr}[\varphi_j \varphi_j^* \mathbf{x}\mathbf{x}^*] = \text{tr}[\varphi_j^* \mathbf{x}\mathbf{x}^* \varphi_j] = \varphi_j^* \mathbf{x}\mathbf{x}^* \varphi_j = |\langle \mathbf{x}, \varphi_j \rangle|^2 = \mathcal{A}(\mathbf{x})(j).$$

Таким образом, $\mathbf{x} \bmod \mathbb{T}$ “поднимается” до $\mathbf{x}\mathbf{x}^*$, что позволяет линеаризовать оператор \mathcal{A} за счет увеличения размерности пространства-области определения.

Теорема 4 ([3]). *Оператор \mathcal{A} не является инъективным $\Leftrightarrow \exists$ матрица ранга 1 или 2 в ядре оператора \mathbf{A} .*

Доказательство. (\Rightarrow) Если оператор \mathcal{A} не является инъективным, то

$$\exists \mathbf{x} \neq \mathbf{y} \in \mathbb{C}^D / \mathbb{T} : \mathcal{A}(\mathbf{x}) = \mathcal{A}(\mathbf{y}) \Leftrightarrow \mathbf{A}\mathbf{x}\mathbf{x}^* = \mathbf{A}\mathbf{y}\mathbf{y}^* \Rightarrow \mathbf{x}\mathbf{x}^* - \mathbf{y}\mathbf{y}^* \in \ker \mathbf{A}.$$

Доказательство достаточности значительно сложнее и здесь не приводится. \square

Приведем еще одно доказательство необходимости теоремы 3, которое было получено значительно позже [4], оно охватывает и вещественное, и комплексное пространство.

Доказательство. Сначала заметим, что если $\Phi = \{\varphi_n\}_{n=1}^N \in (\text{ВМИ})$, то $\text{span}(\{\varphi_n\}_{n=1}^N) = \mathbb{H}^D$. В противном случае существует $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$, $\langle \mathbf{x}, \varphi_n \rangle = 0$, $n = 1, \dots, N$,

$$|\langle \mathbf{x}, \varphi_n \rangle| = |\langle \mathbf{0}, \varphi_n \rangle| = 0, \quad n = 1, \dots, N,$$

что несовместимо с инъективностью оператора \mathcal{A} .

Предположим, что $\Phi \notin (\text{АП})$. Вновь выбираем множество индексов $T \subset \{1, \dots, N\}$ так, что $\{\varphi_n\}_{n \in T}$ и $\{\varphi_n\}_{n \in T^C}$ не полны в \mathbb{H}^D . Затем выбираем два вектора $\|\mathbf{x}\| = 1 = \|\mathbf{y}\|$ так, что $\mathbf{x} \perp \varphi_n$ для $n \in T$ и $\mathbf{y} \perp \varphi_n$ для $n \in T^C$. Тогда

$$|\langle \mathbf{x} + \mathbf{y}, \varphi_n \rangle| = |\langle \mathbf{x} - \mathbf{y}, \varphi_n \rangle|, \quad n = 1, \dots, N.$$

Так как $\Phi \in (\text{ВМИ})$, то существует $|\theta| = 1$ такое, что $\mathbf{x} + \mathbf{y} = \theta(\mathbf{x} - \mathbf{y})$, или $(1 - \theta)\mathbf{x} = -(1 + \theta)\mathbf{y}$.

Если $\theta = 1$, то $\mathbf{y} = \mathbf{0}$; если $\theta = -1$, то $\mathbf{x} = \mathbf{0}$, что противоречит выбору векторов.

Если $\theta \neq \pm 1$, то

$$\mathbf{x} = -\frac{1 + \theta}{1 - \theta}\mathbf{y} := \alpha\mathbf{y} \quad (1)$$

с $\alpha \neq 0$.

Далее, если $n \in T$, то $\langle \mathbf{x}, \varphi_n \rangle = 0$, а в силу (1) и $\langle \mathbf{y}, \varphi_n \rangle = 0$. С другой стороны, $\langle \mathbf{y}, \varphi_n \rangle = 0$ для любого $n \in T^C$. Таким образом, $\langle \mathbf{y}, \varphi_n \rangle = 0$ для любого n и $\|\mathbf{y}\| = 1$, т. е. набор $\{\varphi_n\}_{n=1}^N$ не является полным в \mathbb{H}^D , что противоречит первому замечанию данного доказательства. Аналогичная ситуация имеет место для $n \in T^C$. □

Поиски удобного для приложений критерия свойства (ВМИ) в комплексном пространстве продолжаются.

Что известно о числе $N(D)$ в пространстве \mathbb{C}^D ?

- 1) Для любого $D \geq 2$ имеем $N(D) \leq 4D - 4$ (см. [5]).
- 2) Если $D = 2^k + 1$ для натурального k , то $N(D) = 4D - 4$ (см. [6]).
- 3) С. Vinzant [7] в \mathbb{C}^4 нашла одиннадцать векторов, обеспечивающих (ВМИ). Это, видимо, единственный пример набора векторов с $N < 4D - 4$, обеспечивающего (ВМИ).

Кроме определения числа $N(D)$ ведутся поиски числа $\mathcal{N}(D)$ такого, что если $N \leq \mathcal{N}(D)$, то ни один сигнал $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^D$ не может быть однозначно восстановлен (с точностью до унимодулярного множителя) по набору $\{|\langle \mathbf{x}, \varphi_1 \rangle|, \dots, |\langle \mathbf{x}, \varphi_N \rangle|\}$, т. е. для любого $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^D$ найдется $\mathbf{y} \in \mathbb{C}^D$, $\mathbf{x} \neq h\mathbf{y}$ ни для какого $h \in \mathbb{T}$, и $|\langle \mathbf{x}, \varphi_n \rangle| = |\langle \mathbf{y}, \varphi_n \rangle|$, $n = 1, \dots, N$.

В [8] показано, что $\mathcal{N}(D) \geq 4D - 4 - 2s_2(D - 1)$, где $s_2(D - 1)$ обозначает количество единиц в двоичном представлении числа $D - 1$. Для $D = 4$ получаем $N(4) \geq 8$, оставляя возможность уменьшать число 11 в примере С. Vinzant.

2. Задача о минимальном количестве восстанавливающих подпространств

Некоторые прикладные задачи потребовали исследования возможности восстановления сигнала по нормам его проекций на подпространства, например, известная в кристаллографии проблема близнецов (twinning problem).

Определение 5. Семейство подпространств $\{W_j\}_{j=1}^N$ в \mathbb{H}^D с соответствующими ортопроекторами $\{P_j\}_{j=1}^N$ восстанавливает по нормам проекторов (ВНП), если для произвольных $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{H}^D$ таких, что $\|P_j\mathbf{x}\| = \|P_j\mathbf{y}\|$ для всех $j = 1, \dots, N$, имеем $\mathbf{x} = c\mathbf{y}$ для некоторого $|c| = 1$.

Вторая задача. Каково минимальное число $N = \mathbf{N}(D)$ подпространств $\{W_j\}_{j=1}^N$, обеспечивающих (ВНП) в \mathbb{H}^D ?

Частичные ответы на этот вопрос получены для вещественного пространства \mathbb{R}^D .

Теорема 6 ([9]). *Для любого набора чисел $1 \leq r_j \leq D-1$, $j = 1, 2, \dots, 2D-1$, существуют подпространства $\{W_j\}_{j=1}^{2D-1}$ в \mathbb{R}^D , обеспечивающие (ВНП), причем $\dim W_j = r_j$.*

Следовательно, в \mathbb{R}^D $\mathbf{N}(D) \leq 2D - 1$. Оставался вопрос о точности этой оценки. На пути решения этой задачи были получены следующие результаты.

Теорема 7 ([9]). *Пусть $\{W_j\}_{j=1}^N$ – подпространства в \mathbb{R}^D . Следующие утверждения эквивалентны:*

- 1) подпространства $\{W_j\}_{j=1}^N$ обеспечивают (ВНП);
- 2) при любом выборе ОНБ $\{\mathbf{u}_{ji}\}_{i=1}^{I_j}$ подпространства $\{W_j\}$, векторы $\{\mathbf{u}_{ji}\}_{j=1, i=1}^{N, I_j}$ обеспечивают (ВМИ).

Теорема 8 ([6]). *Пусть $\{W_j\}_{j=1}^N$ – подпространства \mathbb{R}^D с соответствующими ортопроекторами $\{P_j\}_{j=1}^N$. Следующие утверждения эквивалентны:*

- 1) подпространства $\{W_j\}_{j=1}^N$ обеспечивают (ВНП);
- 2) для любого $\mathbf{0} \neq \mathbf{x} \in \mathbb{R}^D$ семейство векторов $\{P_j \mathbf{x}\}_{j=1}^N$ полно в \mathbb{R}^D , т. е. $\text{span}(\{P_j \mathbf{x}\}_{j=1}^N) = \mathbb{R}^D$.

Доказательство. (\Rightarrow) Предположим существование \mathbf{x} , $\|\mathbf{x}\| = 1$, такого, что семейство векторов $\{P_j \mathbf{x}\}$ не полно. Найдется вектор $\|\mathbf{y}\| = 1$ такой, что $\mathbf{y} \perp \text{span}(\{P_j \mathbf{x}\}_{j=1}^N)$. Имеем

$$0 = \langle \mathbf{y}, P_j \mathbf{x} \rangle = \langle \mathbf{y}, P_j^2 \mathbf{x} \rangle = \langle P_j \mathbf{y}, P_j \mathbf{x} \rangle, \quad j = 1, \dots, N.$$

По теореме Пифагора для каждого j

$$\|P_j(\mathbf{x} + \mathbf{y})\|^2 = \|P_j \mathbf{x}\|^2 + \|P_j \mathbf{y}\|^2 = \|P_j(\mathbf{x} - \mathbf{y})\|^2.$$

Однако $\mathbf{x} + \mathbf{y} \neq \mathbf{x} - \mathbf{y}$ и $\{P_j\}_{j=1}^N$ не обеспечивает (ВНП).

(\Leftarrow) Предположим, что семейство подпространств $\{W_j\}_{j=1}^N$ не обеспечивает (ВНП). По теореме 7 найдутся такие ОНБ $\{\mathbf{u}_{ji}\}_{i=1}^{I_j}$ в $\{W_j\}$ и такое множество индексов T , что оба подмножества $\{\mathbf{u}_{ji}\}_{(i,j) \in T}$ и $\{\mathbf{u}_{ji}\}_{(i,j) \in T^c}$ не полны в \mathbb{R}^D . Выберем $\mathbf{0} \neq \mathbf{x} \perp \text{span}(\{\mathbf{u}_{ji}\}_{(i,j) \in T})$. Тогда $P_j \mathbf{x} \in \text{span}(\{\mathbf{u}_{ji}\}_{(i,j) \in T^c}) \forall j = 1, \dots, N$ и $\text{span}(\{P_j \mathbf{x}\}_{j=1}^N) \neq \mathbb{R}^D$. \square

В [10] построено $6 = 2 \cdot 4 - 2$ двумерных подпространств пространства \mathbb{R}^4 , обеспечивающих (ВНП).

Дальнейшее уменьшение числа $\mathbf{N}(D)$ невозможно, как показывает

Теорема 9 ([11]). *В пространстве \mathbb{R}^D $\mathbf{N}(D) \geq 2D - 2$.*

Доказательство. Покажем, что для (ВНП) в \mathbb{R}^D требуется не менее $2D - 2$ гиперплоскостей. Предположим, что возможно (ВНП) с $N \leq 2D - 3$ гиперплоскостями $\{W_n\}_{n=1}^N$. Выберем вектор $\mathbf{0} \neq \mathbf{x} \in \bigcap_{n=1}^{D-1} W_n$ так, чтобы $P_n \mathbf{x} = \mathbf{x}$ для $n = 1, 2, \dots, D - 1$. Посмотрим на семейство векторов $\{P_n \mathbf{x}\}_{n=1}^N = \{\mathbf{x}\} \cup \{P_n \mathbf{x}\}_{n=D}^N$. Общее количество таких векторов $\leq 1 + (2D - 3) - (D - 1) = D - 1$, так что $\{P_n \mathbf{x}\}_{n=1}^N$ не полно в \mathbb{R}^D , что противоречит теореме 8. Можно показать, что для каждого семейства подпространств $\{W_n\}_{n=1}^N$, восстанавливающих по нормам проекторов в \mathbb{R}^D , найдутся гиперплоскости $W'_n \supset W_n$, которые также восстанавливают по нормам проекторов. Следовательно, $N \geq 2D - 2$. \square

Неизвестно, для каких размерностей D найденное значение $2D - 2$ реализуется.

Наименьшее количество подпространств для (ВНП) в \mathbb{C}^D неизвестно.

3. Восстановление по модулям измерений и по нормам проекторов в вещественном ℓ^2

За последние несколько лет появились две работы [12, 13] о (ВМИ) и (ВНП) в бесконечномерном пространстве ℓ^2 .

Далее всюду пространство ℓ_2 предполагается вещественным.

Определение 10. Семейство векторов $\Phi = \{\varphi_j\}_{j \in J}$ осуществляет восстановление по модулям измерений (ВМИ), если равенства

$$|\langle \varphi_j, \mathbf{x} \rangle| = |\langle \varphi_j, \mathbf{y} \rangle| \text{ для всех } j,$$

для произвольных $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \ell^2$ обеспечивают равенство $\mathbf{x} = \pm \mathbf{y}$.

Семейство ортопроекторов $\{P_j\}_{j \in J}$ в ℓ^2 восстанавливает по нормам проекторов (ВНП), если равенства

$$\|P_j \mathbf{x}\| = \|P_j \mathbf{y}\| \text{ для всех } j,$$

для произвольных $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \ell_2$ обеспечивают равенство $\mathbf{x} = \pm \mathbf{y}$.

Получены аналоги конечномерных результатов.

Определение 11. Набор векторов $\Phi = \{\varphi_j\}_{n=1}^\infty$ в ℓ^2 обладает свойством *альтернативной полноты* (АП), если для каждого $T \subset \mathbb{N}$ либо $\overline{\text{span}\{\varphi_j\}_{j \in T}} = \ell^2$, либо $\overline{\text{span}\{\varphi_j\}_{j \in T^c}} = \ell^2$.

На бесконечномерном пространстве имеют место аналоги теоремы 3 и теоремы 8.

Теорема 12 ([13]). $\Phi \in (\text{ВМИ})$ в $\ell_2 \Leftrightarrow \Phi \in (\text{АП})$.

Теорема 13 ([12]). Проекторы $\{P_j\}_{j \in J}$ на ℓ^2 обеспечивают (ВНП) $\Leftrightarrow \overline{\text{span}\{P_j \mathbf{x}\}} = \ell^2 \forall \mathbf{0} \neq \mathbf{x} \in \ell^2$.

Повторяя рассуждения доказательства теоремы 8, получим

Следствие 14. Семейство проекторов $\{P_j\}_{j=1}^{\infty}$ на ℓ^2 не обеспечивает (ВНП) $\Leftrightarrow \exists \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \ell^2$, $\|\mathbf{x}\| = \|\mathbf{y}\| = 1$ такие, что $P_j \mathbf{x} \perp P_j \mathbf{y} \forall j$.

Определение 15. Последовательность $\{\psi_j\}_{j=1}^{\infty}$ в гильбертовом пространстве \mathbb{H} называется *последовательностью Рисса*, если существуют константы $0 < A \leq B < \infty$ такие, что для любой последовательности скаляров $\{a_j\}_{j=1}^{\infty}$ имеют место неравенства

$$A \sum_{j=1}^{\infty} |a_j|^2 \leq \left\| \sum_{j=1}^{\infty} a_j \psi_j \right\|^2 \leq B \sum_{j=1}^{\infty} |a_j|^2.$$

Если $\overline{\text{span}(\{\psi_j\})} = \mathbb{H}$, то $\{\psi_j\}_{j=1}^{\infty}$ называется *базисом Рисса*.

Теперь можно перейти к формулировке третьей задачи.

В [9] доказано, что в \mathbb{R}^D существуют такие два ОНБ, объединяя которые, можно получить систему, обеспечивающую (ВМИ).

Третья задача. Существуют ли в ℓ^2 два базиса Рисса, объединяя которые, можно получить систему, обеспечивающую (ВМИ)?

В [12] найдено *три* последовательности Рисса в ℓ^2 , объединение которых обеспечивает (ВМИ).

Список литературы

- [1] R. Balan, P. Casazza, D. Edidin, *On signal reconstruction without phase*, Appl. Comput. Harmon. Anal. **20** (3), 345–356 (2006).
DOI: <http://dx.doi.org/10.1016/j.acha.2005.07.001>
- [2] T. Bendory, D. Edidin, *Algebraic theory of Phase Retrieval* (2022).
URL: <https://arxiv.org/abs/2203.02774>
- [3] A. Bandeira, J. Cahill, D. Mixon, A. Nelson, *Saving phase: Injectivity and stability for phase retrieval*, Appl. Comput. Harmon. Anal. **37** (1), 106–125 (2014).
DOI: <https://doi.org/10.1016/J.ACHA.2013.10.002>
- [4] S. Botelho-Andrade, P. Casazza, H. Nguyen, J. Tremain, *Phase retrieval versus phaseless reconstruction*, J. Math. Anal. Appl. **436** (1), 131–137 (2016).
DOI: <https://doi.org/10.1016/J.JMAA.2015.11.045>
- [5] A. Conca, D. Edidin, M. Hering, C. Vinzant, *An algebraic characterization of injectivity in phase retrieval*, Appl. Comput. Harmon. Anal. **38** (2), 346–356 (2015).
DOI: <http://dx.doi.org/10.1016/j.acha.2014.06.005>
- [6] D. Edidin, *Projections and phase retrieval*, Appl. Comput. Harmon. Anal. **42** (2), 350–359 (2017).
DOI: <http://dx.doi.org/10.1016/j.acha.2015.12.004>

- [7] C. Vinzant, *A small frame and a certificate of its injectivity*, Int. Conf. on Sampling Theory and Appl. (SampTA), 197–200 (2015).
DOI: <http://dx.doi.org/10.1109/SAMPТА.2015.7148879>
- [8] T. Heinosaari, L. Mazzarella, M. Wolf, *Quantum tomography under prior information*, Comm. Math. Phys. **318** (2), 355–374 (2013).
DOI: <https://doi.org/10.1007/s00220-013-1671-8>
- [9] J. Cahill, P.G. Casazza, J. Peterson and L. Woodland, *Phase retrieval by projections*, Houston J. Math. **42** (2), 537–558 (2016).
URL: <https://math.uh.edu/~hjm/Vol42-2.html>
- [10] Z. Xu, *The minimal measurement number for low rank matrix recovery*, Appl. Comput. Harmon. Anal. **44** (2), 497–508 (2018).
DOI: <https://doi.org/10.1016/J.ACHA.2017.01.005>
- [11] P. Casazza, D. Ghoreishi, *Phase retrieval by projections in R^n requires $2n - 2$ projections* (2020).
URL: <https://arxiv.org/abs/2012.10738>
- [12] S. Botelho-Andrade, P. Casazza, D. Cheng, J. Haas, T. Tran, *Phase Retrieval in $\ell^2(\mathbb{R})$* (2018).
URL: <https://arxiv.org/abs/1804.01139>
- [13] J. Cahill, P.G. Casazza, I. Daubechies, *Phase retrieval in infinite dimensional Hilbert spaces*, Trans. Am. Math. Soc., Ser. B **3**, 63–76 (2016).
DOI: <http://dx.doi.org/10.1090/btran/12>

Илья Михайлович Избяков

Самарский национальный исследовательский университет,
ул. акад. Павлова, д. 1, г. Самара, 443011, Россия,
e-mail: iliya-izbyakov@mail.ru

Сергей Яковлевич Новиков

Самарский национальный исследовательский университет,
ул. акад. Павлова, д. 1, г. Самара, 443011, Россия,
e-mail: nvks@ssau.ru

Three problems of restoring a signal-vector by measurement modules and by norms of projectors

I.M. Izbiakov, S.Ya. Novikov

Abstract. The article gives a brief overview of the results of the recovery signal-vector by modules of measurements and by norms of orthoprojectors in finite-dimensional Euclidean and unitary spaces, and in infinite-dimensional real space ℓ^2 . Three unsolved problems are formulated. Possible solutions are given, and theorems that give partial answers to the questions posed.

Keywords: measurement vectors, alternative completeness, spark, vector systems, phase lifting, subspaces.

References

- [1] R. Balan, P. Casazza, D. Edidin, *On signal reconstruction without phase*, Appl. Comput. Harmon. Anal. **20** (3), 345–356 (2006).
DOI: <http://dx.doi.org/10.1016/j.acha.2005.07.001>
- [2] T. Bendory, D. Edidin, *Algebraic theory of Phase Retrieval* (2022).
URL: <https://arxiv.org/abs/2203.02774>
- [3] A. Bandeira, J. Cahill, D. Mixon, A. Nelson, *Saving phase: Injectivity and stability for phase retrieval*, Appl. Comput. Harmon. Anal. **37** (1), 106–125 (2014).
DOI: <https://doi.org/10.1016/J.ACHA.2013.10.002>
- [4] S. Botelho-Andrade, P. Casazza, H. Nguyen, J. Tremain, *Phase retrieval versus phaseless reconstruction*, J. Math. Anal. Appl. **436** (1), 131–137 (2016).
DOI: <https://doi.org/10.1016/J.JMAA.2015.11.045>
- [5] A. Conca, D. Edidin, M. Hering, C. Vinzant, *An algebraic characterization of injectivity in phase retrieval*, Appl. Comput. Harmon. Anal. **38** (2), 346–356 (2015).
DOI: <http://dx.doi.org/10.1016/j.acha.2014.06.005>
- [6] D. Edidin, *Projections and phase retrieval*, Appl. Comput. Harmon. Anal. **42** (2), 350–359 (2017).
DOI: <http://dx.doi.org/10.1016/j.acha.2015.12.004>

- [7] C. Vinzant, *A small frame and a certificate of its injectivity*, Int. Conf. on Sampling Theory and Appl. (SampTA), 197–200 (2015).
DOI: <http://dx.doi.org/10.1109/SAMP TA.2015.7148879>
- [8] T. Heinosaari, L. Mazzarella, M. Wolf, *Quantum tomography under prior information*, Comm. Math. Phys. **318** (2), 355–374 (2013).
DOI: <https://doi.org/10.1007/s00220-013-1671-8>
- [9] J. Cahill, P.G. Casazza, J. Peterson and L. Woodland, *Phase retrieval by projections*, Houston J. Math. **42** (2), 537–558 (2016).
URL: <https://math.uh.edu/~hjm/Vol42-2.html>
- [10] Z. Xu, *The minimal measurement number for low rank matrix recovery*, Appl. Comput. Harmon. Anal. **44** (2), 497–508 (2018).
DOI: <https://doi.org/10.1016/J.ACHA.2017.01.005>
- [11] P. Casazza, D. Ghoreishi, *Phase retrieval by projections in R^n requires $2n - 2$ projections* (2020).
URL: <https://arxiv.org/abs/2012.10738>
- [12] S. Botelho-Andrade, P. Casazza, D. Cheng, J. Haas, T. Tran, *Phase Retrieval in $\ell^2(\mathbb{R})$* (2018).
URL: <https://arxiv.org/abs/1804.01139>
- [13] J. Cahill, P.G. Casazza, I. Daubechies, *Phase retrieval in infinite dimensional Hilbert spaces*, Trans. Am. Math. Soc., Ser. B **3**, 63–76 (2016).
DOI: <http://dx.doi.org/10.1090/btran/12>

Iliya Mikhaylovich Izbiakov

Samara National Research University,
1 Akademika Pavlova str., Samara 443011, Russia,
e-mail: iliya-izbyakov@mail.ru

Sergey Yakovlevich Novikov

Samara National Research University,
1 Akademika Pavlova str., Samara 443011, Russia.
e-mail: nvks@ssau.ru

Вокруг разрывности проектора Рисса в равномерной метрике

С.В. Кисляков

Аннотация. Развернутая запись лекции, прочитанной автором на конференции “Комплексный анализ и смежные проблемы”, прошедшей с 29 июня по 4 июля в Казани. Лекция была посвящена гипотезе Гликсберга и родственному, но независимому от нее утверждению о незамкнутости сумм некоторых идеалов в равномерных алгебрах. Настоящий текст содержит несколько новых формулировок в сравнении с лекцией и имеющейся литературой.

Ключевые слова: проектор Рисса, гипотеза Гликсберга, незамкнутые суммы, пары Харди–Лебега.

1. История

Проектом Рисса называется ортогональный проектор пространства $L^2 = L^2(\mathbb{T}, m)$ на пространство Харди H^2 (здесь и далее m – нормированная мера Лебега на единичной окружности \mathbb{T} в комплексной плоскости). Напомним, что

$$\begin{aligned} H^p &= \{f \in L^p : \hat{f}(n) = 0, \quad n < 0\} \quad \text{при } 1 \leq p \leq \infty, \\ C_A &= \{f \in C(\mathbb{T}) : \hat{f}(n) = 0, \quad n < 0\}. \end{aligned}$$

Пространство C_A принято называть диск-алгеброй. Хорошо известно, что проектор Рисса непрерывен в L^p при $1 < p < \infty$, однако он разрывен в L^1 , L^∞ и в $C(\mathbb{T})$. В дальнейшем мы сосредоточимся на равномерной метрике, оставив L^1 -метрику несколько в стороне.

1.1. НЕПРЕРЫВНЫХ ПРОЕКТОРОВ НА ДИСК-АЛГЕБРУ НЕ СУЩЕСТВУЕТ. По этому поводу принято ссылаться на работу В. Рудина [1], в которой он заметил, что если Q – какой-нибудь непрерывный проектор из $C(\mathbb{T})$ на диск-алгебру, то формула

$$\tilde{Q}f(z) = \int_{\mathbb{T}} \bar{\zeta} Qf(z\zeta) dm(\zeta) \tag{1}$$

задает непрерывный проектор из $C(\mathbb{T})$ на C_A , коммутирующий с поворотами окружности. Тогда этот усредненный проектор \tilde{Q} должен был бы совпасть с проектором Рисса, но последний разрывен.

Разумеется, аналогичный прием применим к проекторам на любое подпространство, инвариантное относительно сдвигов, в любом разумном пространстве функций на компактной топологической группе.

Однако следует сказать, что во второй половине 40-х годов двадцатого века (т. е. задолго до работы В. Рудина) Лозинским и Харшиладзе было доказано (среди прочего), что норма любого проектора из $C(\mathbb{T})$ на пространство $\text{span} \{z^j : |j| \leq n\}$ тригонометрических полиномов степени не выше n не может быть меньше, чем $c \log n$, где постоянная c не зависит от n . Разумеется, формула (1) сразу дает константы Лебега для тригонометрической системы в качестве неулучшаемой миноранты. Подробно рассуждения Лозинского и Харшиладзе были описаны, пожалуй, только в монографии [2, приложение 3]. Разумеется, там тоже присутствует усреднение по окружности, но далеко не в той ясной форме, как в (1).

1.2. ГИПОТЕЗА ГЛИКСБЕРГА. Через два года после появления статьи В. Рудина [1], И. Гликсберг в [3] высказал гипотезу о том, что никакая замкнутая несамосопряженная подалгебра в пространстве $C(K)$ непрерывных функций на компакте K не может быть дополняемым подпространством в $C(K)$. Он доказал это утверждение в случае, когда K – компактная группа, а алгебра, о которой идет речь, инвариантна относительно сдвигов. Помимо усреднения И. Гликсберг использовал еще несколько остроумных соображений, но без групповой структуры его методы не работают. Позже мы приведем обобщение одного из его результатов в качестве примера.

Заметим, что если замкнутая подалгебра A в пространстве $C(K)$ разделяет точки (чего в изучаемых вопросах всегда можно добиться), то по теореме Стоуна–Вейерштраса она самосопряженная тогда и только тогда, когда совпадает либо с $C(K)$, либо с пространством функций, обращающихся в нуль в фиксированной точке; а значит, проектор на нее из $C(K)$ существует тривиальным образом. Иными словами, условие несамосопряженности в высказанной гипотезе естественно.

Гипотеза Гликсберга была доказана автором в [4]; см. также обзорную статью [5].

1.3. ПОД ИНЫМ УГЛОМ ЗРЕНИЯ. Впредь чертой над символом мы будем обозначать комплексное сопряжение. Возвращаясь к началу, заметим, что разрывность проектора Рисса в равномерной метрике в точности означает, что суммы

$$\overline{zC_A} + C_A \quad \text{и} \quad \overline{zH^\infty} + H^\infty$$

(или любая из них в отдельности) не замкнуты в L^∞ . По техническим причинам в работе [6] возник вопрос о суммах $\overline{\theta H^\infty} + H^\infty$, где θ – внутренняя функция, т. е. функция из H^∞ , у которой граничные значения почти всюду имеют модуль 1. Увидеть, что и эта сумма не замкнута, очень легко, однако история с гипотезой Гликсберга подсказывает, что и здесь должны быть обобщения, снова связанные с несамосопряженностью. Так оно и оказалось – в той же работе [6] было установлено, что если A – замкнутая подалгебра

в $C(K)$, а I_1 и I_2 – идеалы в ней, причем $\overline{I_1 \cap I_2} \not\subset I_1$, то сумма $I_1 + \overline{I_2}$ не замкнута в $C(K)$. Разумеется, это утверждение покрывает все упомянутые только что примеры: в случае алгебры L^∞ и ее подалгебр мы возвращаемся к непрерывным функциям, перейдя к пространству максимальных идеалов этой алгебры.

Утверждения про незамкнутые суммы и про недополняемые алгебры в общем случае (видимо) не сводятся друг к другу, хотя технически их доказательства близки.

2. Результаты

Автор рассматривал прочитанную лекцию и этот текст в том числе как повод для небольшой ревизии материала. Оказалось, что ревизия возможна: получаются более общие утверждения, хотя используемый аппарат почти не меняется. Опишем это. Удобно будет выделить некое свойство, на котором основано доказательство, а потом рассмотреть несколько ситуаций, когда оно выполнено. Главное отличие от того, что было раньше, – возможность охватить довольно значительный набор подпространств, не являющихся алгебрами. Такое, впрочем, было уже у И. Гликсберга в [3], в его примере для компактной абелевой группы (см. п. 2.3.3 ниже).

В статье автора [4], кроме недополняемости, было установлено, что насамосопряженные подалгебры в $C(K)$ сильно не похожи на пространства $C(K)$ по некоторым своим линейно-топологическим свойствам. Здесь мы тоже коснемся этого, но ограничимся только одним из таких свойств: наши подалгебры или подпространства окажутся не изоморфными никакому фактор-пространству пространства типа $C(S)$. По поводу других утверждений в том же духе см. краткий комментарий в конце п. 3.1. Будут включены также некоторые утверждения, касающиеся L^1 -метрики (вместо равномерной).

2.1. МЕСТО ДЕЙСТВИЯ. Пусть K – хаусдорфов компакт, а A – замкнутая подалгебра в пространстве комплекснозначных непрерывных функций $C(K)$. В следующем определении мы пытаемся смоделировать свойства меры Лебега m и функции z на окружности (если быть точным, то пары (zm, z)). Использование имен двух математиков для создания термина не основано ни на чем, кроме ощущения, что так, пожалуй, будет правильно.

Определение 1. Парой Харди–Лебега для алгебры A называется всякая пара (μ, F) , где μ – (всюду далее регулярная борелевская) комплексная мера на K , ортогональная алгебре A , а функция F лежит в замыкании единичного шара пространства A в топологии $\sigma(L^\infty(|\mu|), L^1(|\mu|))$ и $\int_{|F|=1} \overline{F} d\mu \neq 0$.

Упомянутая выше пара (zm, z) является парой Харди–Лебега для диск-алгебры.

Обозначив замкнутый единичный шар пространства A через U , отметим, что функция F есть слабая (а тогда и сильная) предельная точка множества U в $L^2(|\mu|)$, поэтому можно найти последовательность $f_n \in U$, сходящуюся к F п. в. относительно $|\mu|$. Тем самым заведомо $|F| \leq 1$ $|\mu|$ -п. в.

Как обычно, пространство комплексных мер на K будем обозначать через $M(K)$. Если E – замкнутое линейное подпространство в $C(K)$, положим

$$E^\perp = \left\{ \nu \in M(K) : \int_K f d\nu = 0 \text{ для всех } f \in E \right\}.$$

Определение 2. Пространство E называется допустимым для пары Харди–Лебега (μ, F) , если замыкание некоторого шара V с центром в нуле пространства E в $*$ -слабой топологии пространства $L^\infty(|\mu|)$ содержит степени F^k для бесконечного множества натуральных чисел k и $E \cdot \mu \subset A^\perp$.

2.2. ФОРМУЛИРОВКИ. Основные теоремы будут сформулированы именно для допустимых подпространств. Определение 2 кажется несколько громоздким и не очень естественным, однако позже мы рассмотрим примеры, проясняющие ситуацию. Сейчас отметим только, что сама алгебра A – всегда допустимое подпространство. Действительно, взяв функции f_n , как в предпоследнем абзаце п. 2.1, видим, что $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n^k = F^k |\mu|$ -п. в. для всех натуральных k (следовательно, имеет место и слабая сходимость в нужном смысле), в то время как степени f_n^k лежат в единичном шаре U алгебры A .

Начнем с общих формулировок.

Фиксируем алгебру $A \subset C(K)$ и пару Харди–Лебега (μ, F) для нее. Говоря далее о допустимых подпространствах, мы имеем в виду эту пару.

Теорема 3. Пусть E – допустимое подпространство в $C(K)$. Тогда оно не изоморфно фактор-пространству пространства $C(S)$ ни для какого компакта S .

Разумеется, отсюда следует, что нет проекции из $C(K)$ на E .

Можно сказать что-то и про L^1 -метрику (или, скорее, про некоторые подпространства в пространстве мер). Именно, заметим, что при любом натуральном k мера $\mu_k = F^k \cdot \mu$ лежит в A^\perp . Назовем замкнутое подпространство W пространства A^\perp 1-допустимым (“1” ставится в честь метрики типа L^1), если оно содержит бесконечно много мер μ_k . Отметим, что если пространство $E \subset C(K)$ допустимо, то замыкание множества $E \cdot \mu$ в $M(K)$ 1-допустимо.

Теорема 4. Никакое 1-допустимое пространство W не вкладывается дополняемо в пространство типа L^1 . В частности, нет линейного непрерывного проектора из $M(K)$ на W .

Вместе с любым 1-допустимым пространством таковым же будет, разумеется, и его замыкание в топологии $\sigma(M(K), C(K))$. Поэтому теорема 4 дает и некоторую новую информацию про подпространства в $C(K)$.

Следствие 5. Для любого 1-допустимого пространства W его аннулятор

$$W_\perp = \left\{ f \in C(K) : \int_K f d\nu = 0 \text{ для всех } \nu \in W \right\}$$

не является дополняемым подпространством в $C(K)$.

Наконец, сформулируем результат о незамкнутых суммах. Здесь на подпространства нужно наложить более сильное условие. Пусть, как и прежде, I – замкнутая подалгебра в $C(K)$. Фиксация пары Харди–Лебега больше не предполагается (хотя в дальнейшем такая пара все равно возникнет). Назовем замкнутое подпространство $E \subset C(K)$ сильно допустимым, если $I \subset E$ и $E \cdot I \subset I$. Заметим, что если функция 1 лежит в I , то существует только одно сильно допустимое пространство, а именно, сама алгебра I . Если же $1 \notin I$, то таких подпространств бывает много; мы увидим это позже.

Теорема 6. *Если $\bar{I} \not\subset I$, а E_1 и E_2 – сильно допустимые подпространства в $C(K)$, то сумма $E_1 + \overline{E_2}$ не замкнута в $C(K)$.*

2.3. ПРИМЕРЫ. Из предыдущего материала видно, что для доказательства гипотезы Гликсберга было достаточно построить пару Харди–Лебега для произвольной несамосопряженной алгебры A . Как выяснилось в [4] (и как мы скоро увидим здесь), это не очень сложно. Однако давайте займемся иллюстративными примерами из совсем давнего времени, до 1976 г.

2.3.1. ДИСК-АЛГЕБРА. Мы уже называли для этого случая стандартную пару Харди–Лебега – это (zm, z) , где m – нормированная мера Лебега на окружности. Допустимым будет любое подпространство в диск-алгебре, содержащее бесконечно много степеней z^k , $k \in \mathbb{N}$.

Любопытно взглянуть на то, что произойдет, если мы добавим одну “пустую” переменную. Пусть K – это двумерный тор \mathbb{T}^2 . Через z_1 и z_2 обозначим координатные функции на нем. Пусть A – замкнутая линейная оболочка неотрицательных целых степеней функции z_1 . Собственно, это та же диск-алгебра, только пересаженная на другой компакт. Пар Харди–Лебега теперь много, мы выберем ту, которая приходит из одной переменной: $(z_1\mu_1, z_1)$, где μ_1 – мера m на первом множителе в произведении $\mathbb{T} \times \mathbb{T}$. Тогда допустимы любые подпространства E , содержащие бесконечно много степеней z_1^k с $k \in \mathbb{N}$ и удовлетворяющие условию $\hat{f}(l, 0) = 0$ при всех $l \in \mathbb{Z}_+$. Инвариантности пространства E относительно сдвигов, вообще говоря, может и не быть.

Читатель может при желании посмотреть внимательней на то, что утверждают теоремы 3 и 4 применительно к этим примерам. Это, впрочем, давно не откровения (хотя, вероятно, не на все можно дать ссылки).

2.3.2. АЛГЕБРЫ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ. Имеются в виду различные алгебры непрерывных функций на компактных подмножествах в \mathbb{C}^n с какими-то дополнительными условиями аналитичности. Это не обязательно аналитичность во внутренних точках компакта (или его оболочки в том или ином смысле: внутренних точек может и не быть), а, например, в определение может входить равномерная аппроксимируемость какими-то простыми аналитическими функциями (полиномами, рациональными функциями с особенностями вне компакта и т. п.). Для подавляющего большинства таких алгебр существование пары

Харди–Лебега было известно давно (см. [7, теорема 7.1] и усиления в [8, лемма 1] и [9]). (Отметим, что совпадение названий работ [5] и [9] – случайность.) Более того, во всех этих случаях получается пара (μ, F) , для которой $|F| = 1$ п. в. относительно $|\mu|$ и $|\mu| = \bar{F}\mu$, что очень напоминает разобранный пример диск-алгебры. Назовем пары с этими дополнительными свойствами – *сильными парами Харди–Лебега*.

Выяснилось (см. [9]), что наличие сильной пары Харди–Лебега позволяет “моделировать” на базе рассматриваемой алгебры A обычные пространства Харди в круге. Например, одно из конкретных утверждений, доказанных в [9], говорит, что тогда алгебра H^∞ вкладывается в A^{**} в качестве дополняемого подпространства. Тем самым “непохожесть” алгебры A на все пространства вида $C(S)$ вытекает просто из аналогичной “непохожести” на $C(K)$ пространства H^∞ или диск-алгебры (зачастую последние две алгебры ведут себя линейно-топологически сходным образом, поскольку H^∞ – это как раз “интересная часть” второго сопряженного C_A^{**}). Однако отметим, что и в этом случае утверждения в п. 2.2 дают дополнительную информацию.

Цитированные утверждения из [7–9] отражают некую идею, казавшуюся естественной при попытках доказать гипотезу Гликсберга. Именно, было известно, что при некоторых условиях в пространство максимальных идеалов равномерной алгебры можно вложить аналитический диск (см. [7], где к этой теме автор книги Т. Гамелин возвращается несколько раз), и хотелось воспользоваться этим для моделирования на такой алгебре классических пространств Харди. Как видно из [8, 9], это соображение (после удаления “ненужных” деталей) в какой-то мере работает, но полного решения не дает. В дальнейшем мы поймем, что полное решение все же получается после отыскания следов аналитической структуры на произвольной несамосопряженной равномерной алгебре, но эти следы уж совсем слабые, поскольку они извлекаются “практически из ничего”.

2.3.3. СЛУЧАЙ, РАССМОТРЕННЫЙ И. ГЛИКСБЕРГОМ В [3]. Пусть G – компактная абелева группа, A – замкнутая подалгебра в $C(G)$, X – более широкое замкнутое линейное подпространство в $C(G)$, причем A и X инвариантны относительно сдвигов и X есть модуль над A . Если $\bar{A} \not\subset X$, то никакое замкнутое линейное пространство E такое, что $A \subset E \subset X$, не является дополняемым в $C(G)$.

Мы построим пару Харди–Лебега для A и увидим, что все такие пространства E допустимы относительно нее. Разумеется, тогда результаты, сформулированные в п. 2.2, дадут гораздо больше. (Справедливости ради следует отметить, что подобные утверждения вряд ли вообще было возможно доказать в 1964 г.) Именно, пусть λ – нормированная мера Хаара на G . Поскольку A , \bar{A} и X суть замкнутые линейные оболочки содержащихся в них (в дальнейшем непрерывных по умолчанию) характеров, найдется такой характер γ группы G , что $\gamma \in A$, но $\bar{\gamma} \notin X$. Искомой парой будет $(\gamma\lambda, \gamma)$. Действительно, $\int_G \delta\gamma d\lambda = 0$ для всех характеров $\delta \in X$, поэтому мера $\gamma\lambda$ аннулирует модуль X . Так как $fg \in X$ всякий раз, когда $f \in A$ и $g \in X$, видим, что $g \cdot \lambda \in A^\perp$ для всякой функции $g \in X$, тем самым $E \cdot \lambda \subset A^\perp$ также и для всякого пространства E , заключенного между A и X . С другой

стороны, все натуральные степени γ^k лежат в A , следовательно, и в E . Наконец, $|\gamma| = 1$ всюду и, конечно, $\int_G \bar{\gamma} d(\gamma\lambda) = 1$.

Отметим, что в п. 2.3.1 оба примера такие, как только что описано: в случае диск-алгебры на окружности берем $A = X = C_A$, при добавлении переменной модуль и алгебра уже различны. Кроме того, в ситуации Гликсберга мы опять построили сильную пару Харди–Лебега (см. п. 2.3.2), поэтому снова можно применить конструкции и результаты работы [9].

2.3.4. ОБЩИЙ СЛУЧАЙ. Наконец, покинем период, закончившийся 1976 годом, и обсудим самую общую ситуацию. После работы [9] задача носила в какой-то мере чисто спортивный характер, поскольку не было известно (и не известно до сих пор) ни одного явного примера несамосопряженной равномерной алгебры, для которой не существует сильной пары Харди–Лебега, при том, что такие пары были построены во всех реально встречающихся случаях. Так что сейчас мы будем рассуждать об объектах, которые могут в принципе существовать, но неясно, есть ли они в действительности.

Здесь в силу почти полного отсутствия структурных свойств, которыми можно было бы воспользоваться, нам придется ограничиться сильно допустимыми подпространствами, определенными перед теоремой 6. Прежде всего, опишем их все.

Пусть I – замкнутая подалгебра в $C(K)$ (возможно, без единицы). Положим $A = \{f \in C(K) : fI \subset I\}$. Ясно, что A – замкнутая подалгебра в $C(K)$, содержащая функцию 1. В ней множество I будет идеалом. При этом, очевидно, подпространство E сильно допустимо для I тогда и только тогда, когда $I \subset E \subset A$.

Итак, определение сильно допустимых подпространств скрывает за собой еще одну алгебру. В п. 2.2 мы обещали, что пара Харди–Лебега возникнет сама собой и для сильно допустимых подпространств. Убедимся в этом. Отметим только, что такая пара строится как раз по отношению к определенной выше “спрятанной” алгебре A .

Теорема 7. *Если $\bar{I} \not\subset I$, то существует пара Харди–Лебега для алгебры A , относительно которой допустимы все подпространства E , лежащие между I и A .*

Доказательство. Сначала проверим, что $\bar{I} \not\subset A$. Если не так, то линейная оболочка объединения $I \cup \bar{I} \cup \{1\}$ есть самосопряженная подалгебра в $C(K)$. Пусть B – ее замыкание. После отождествления неразделяющихся точек компакта K , по теореме Стоуна–Вейерштрасса получаем, что $B = C(S)$ для некоторого компакта S , при этом I – идеал в B . Однако все идеалы в $C(S)$ самосопряжены, поскольку каждый из них имеет вид $\{g \in C(S) : g|_e = 0\}$ для некоторого фиксированного замкнутого множества $e \subset S$.

Итак, пространство \bar{I} не содержится в A , поэтому по теореме Хана–Банаха найдется мера α из A^\perp , не ортогональная множеству \bar{I} . Обозначим через Φ сужение на \bar{I} функционала, порожденного мерой α на пространстве $C(K)$. Без потери общности считаем, что $\|\Phi\| = 1$. Продолжим без увеличения нормы функционал Φ на $C(K)$, пусть это продолжение задается мерой λ . Пусть $\beta = \lambda - \alpha$, тогда $\bar{\beta} \perp I$.

Найдем последовательность функций $\{f_n\}$ из единичного шара идеала I , для которой $\int_K \overline{f_n} d\lambda \rightarrow 1$. Можно считать, что функции f_n сходятся слабо в $L^2(|\alpha|+|\beta|)$ к некоторой функции F . Заменяя функции f_n их выпуклыми комбинациями, а затем переходя к подпоследовательности, можно считать, что $f_n \rightarrow F$ п. в. относительно всех мер $|\lambda|, |\alpha|, |\beta|$.

Таким образом, $|F| \leq 1$ п. в. относительно всех упомянутых мер и $\int_K \overline{F} d\lambda = 1 = \|\lambda\|$.

Пусть a – множество тех точек t , где $|F(t)| = 1$, тогда мера λ сосредоточена на a . Имеем

$$1 = \int_a \overline{F} d\lambda = \int_a \overline{F} d\alpha + \int_a \overline{F} d\beta.$$

Здесь, если первое слагаемое справа отлично от нуля, то пара (α, F) есть пара Харди–Лебега для A . В противном случае $\int_a F d\overline{\beta} \neq 0$. Но тогда парой Харди–Лебега для A будет пара $(F^2\overline{\beta}, F)$. Действительно, согласно определению 1 остается проверить лишь соотношение $F^2\overline{\beta} \in A^\perp$. Однако мера $\overline{\beta}$ аннулирует идеал I , поэтому $\int_K g f_n^2 d\overline{\beta} = 0$ при всех $g \in A$, и необходимое соотношение получается предельным переходом по n .

Если теперь пространство E удовлетворяет соотношению $I \subset E \subset A$, то E допустимо относительно построенной пары (ρ, F) (какая бы из двух возможностей ни реализовалась для меры ρ). Действительно, все натуральные степени функции F лежат даже в замыкании единичного шара идеала I в соответствующей слабой топологии (см. определение 2), а все меры $g\rho, g \in A$, очевидно, ортогональны алгебре A , поскольку такова мера ρ . \square

Прокомментируем кратко полученный результат. Взглянув на определение 2, мы сразу видим, что в описанной общей ситуации бывают и допустимые подпространства, содержащиеся в A , но не содержащие идеал I (не надо настаивать, чтобы все степени $F^k, k \in \mathbb{N}$, лежали в слабом замыкании некоторого шара пространства E). Воспользоваться этим, впрочем, можно, если мы знаем функцию F явно, как было иногда в предыдущих пунктах. В общей постановке выбор этой функции довольно случаен.

Отметим также разницу между общей картиной в п. 2.3.3 (если отвлечься от групповой структуры и инвариантности) и здесь: в обоих случаях имеется пара пространств, одно из которых вложено в другое, а комплексное сопряжение меньшего пространства не входит в большее. В обоих случаях нас интересуют (по крайней мере в первом приближении) промежуточные пространства для этой пары. Однако в п. 2.3.3 была алгебра и более широкий модуль над ней, а здесь – алгебра и более узкий идеал в ней. Интересно было бы суметь сказать что-то разумное про алгебру и более широкий модуль в общем случае. Впрочем, как отмечено выше, в какой-то мере – это спорт ради спорта.

Наконец, как уже говорилось, в определении сильно допустимых пространств неявно присутствует еще одна алгебра A , в которой исходное пространство I является идеалом,

при этом $\bar{I} \not\subset A$. Можно взглянуть на дело иначе, считая основным объектом алгебру A , и получить больше примеров, меняя идеал I . (При этом, конечно, пара Харди–Лебега тоже может измениться.) Можно и вообще “спрятать” именно идеал, а не алгебру, например, в такой форме (см. [5], с. 380).

Следствие 8. Пусть A – замкнутая подалгебра в $C(K)$, содержащая единицу, а E – замкнутое подпространство в A . Предположим, что нашлась функция $h \in A$ такая, что $hA \subset E$ и $\bar{h} \notin A$. Тогда пространство E не изоморфно фактор-пространству пространства $C(S)$ ни для какого компакта S .

Действительно, E – промежуточное пространство между алгеброй A и ее идеалом I , являющимся замыканием множества hA .

3. О доказательствах

Доказательства сильно используют различные сведения о банаховых пространствах и операторах в них, которые мы не обсуждаем сколь-нибудь подробно. Информацию о p -абсолютно суммирующих операторах (и о других родственных классах) можно почерпнуть, например, из [10]. Напомним, что оператор является p -абсолютно суммирующим тогда и только тогда, когда он факторизуется через часть тождественного вложения пространства $L^\infty(\sigma)$ в $L^p(\sigma)$ для некоторой конечной меры σ (“часть” означает, что уменьшаться могут как область определения, так и пространство значений). Необходимо знать, что 1-абсолютно суммирующий оператор, заданный на пространстве $C(S)$ и принимающий значения в l^2 , ядерный (и потому компактный). Далее, знаменитая теорема Гротендика гласит, что всякий линейный непрерывный оператор из L^1 в гильбертово пространство является 1-абсолютно суммирующим. Кроме того, всякий p -абсолютно суммирующий оператор переводит слабо сходящиеся последовательности в сильно сходящиеся.

3.1. ПРО ОТСУТСТВИЕ ПРОЕКТОРОВ. Займемся сначала доказательствами теорем 3 и 4, которые проведем достаточно детально, а по поводу теоремы 6 ограничимся недлинным комментарием. Нам даны замкнутая подалгебра A в $C(K)$ и пара Харди–Лебега (μ, F) для нее. Пойдем, как возникает “слабый след аналитической структуры” на алгебре A . Все объяснение уместается в следующем абзаце.

Пусть $g \in A$, $\|g\| \leq 1$. Определим оператор $T: C(\mathbb{T}) \rightarrow C(K)$ формулой $T(u) = \tilde{u} \circ g$, где \tilde{u} – интеграл Пуассона от u (гармоническое продолжение непрерывной функции u с окружности в круг). Отображение T не мультипликативно, но оно мультипликативно по отдельности на пространствах C_A и $\overline{C_A}$. В частности, $T(zC_A) \subset A$ (про $T(C_A)$, вообще говоря, такого сказать нельзя, поскольку алгебра A может не содержать единицу), поэтому оператор $S = T^*$ отображает аннулятор A^\perp в $(zC_A)^\perp$, а последнее пространство по теореме братьев Риссов есть $H^1 \cdot m$. Для сокращения обозначений считаем, что оператор S отображает A^\perp в H^1 . Напомним, что $H^1 = G^*$, где $G = C(\mathbb{T})/zC_A$.

Определим также на пространстве H^1 оператор p следующим образом. Фиксируем лакунарную по Адамару последовательность $\{l_k\}$ натуральных чисел и положим $ph = \{\hat{h}(l_k)\}_{k \in \mathbb{N}}$ для всех $h \in H^1$. Классическая теорема Пэли утверждает, что оператор p непрерывно отображает пространство H^1 в l^2 .

Возьмем функции $\{f_n\}$ из единичного шара алгебры A , сходящиеся к F п.в. (они были построены сразу после определения 1), и по каждой из них построим операторы T_n и $S_n = T_n^*$ как по функции “ g ” (см. выше). Пусть $S: A^\perp \rightarrow H^1$ – предельная точка последовательности операторов $S_n: A^\perp \rightarrow H^1$ в топологии поточечной $\sigma(H^1, G)$ -сходимости.

Лемма 9. Пусть E – допустимое подпространство в $C(K)$, а оператор $W: E \rightarrow A^\perp$ задан формулой $W\varphi = \varphi\mu$, $\varphi \in E$. Тогда композиция pSW не компактна, если лакунарная по Адамару последовательность, задающая оператор p , выбрана подходящим образом.

Если это утверждение доказано, отсюда сразу следует теорема 3. Действительно, предположим, что $v: C(S) \rightarrow E$ – непрерывная сюръекция. Поскольку оператор W является 1-абсолютно суммирующим, композиция $pSWv$ должна оказаться ядерной (см. замечания в начале раздела 3), тем самым компактной. Но это невозможно, так как единичный шар пространства E есть образ некоторого шара с центром в нуле в $C(K)$.

Доказательство леммы 9. Пусть $\{l_k\}$ – последовательность индексов, определяющая оператор Пэли p . Для любой функции $x \in E$ функция SWx есть предельная точка (в указанной выше слабой топологии) последовательности S_nWx . Пользуясь этим, вычислим k -ю компоненту вектора $pSWx$:

$$\langle S_nWx, \bar{z}^{l_k} \rangle = \int_K \bar{f}_n^{l_k} x d\mu \rightarrow \int_K \bar{F}^{l_k} x d\mu$$

при $n \rightarrow \infty$. Однако мы могли с самого начала выбрать числа l_k так, чтобы степени F^{l_k-1} достигались из шара B некоторого фиксированного радиуса пространства E с помощью сходимости $|\mu|$ -п.в. (см. определение 2). Значит, в замыкании (по норме в l^2) множества $pSW(B)$ для каждого k имеется вектор, k -я координата которого есть

$$\int_K \bar{F}^{l_k} F^{l_k-1} d\mu \rightarrow \int_{\{|F|=1\}} \bar{F} d\mu \neq 0$$

(см. определение 1). Это доказывает лемму. \square

Доказательство теоремы 4 будет теперь совсем коротким. Действительно, пусть некоторое 1-допустимое подпространство $E \subset A^\perp$ содержит меры $F^k\mu$ для бесконечного множества номеров k . Эти меры образуют слабо относительно компактное множество D в A^\perp . Если бы пространство E вкладывалось дополняемо в некоторое пространство типа L^1 , то по теореме Гротендика оператор pS был бы 1-абсолютно суммирующим на E , а тогда множество $pS(D)$ оказалось бы предкомпактным по норме в l^2 (поскольку слабо сходящиеся

последовательности перешли бы в сильно сходящиеся, это отмечалось в начале раздела 3). Последнее, однако, опровергается вычислением из доказательства леммы 9.

В заключение отметим, что в [4] (а вслед за тем и в [5]) обсуждались и другие линейно-топологические свойства рассматриваемых алгебр. Именно, если A – замкнутая несамосопряженная подалгебра в $C(K)$, то было установлено следующее.

(а) *Пространство A^{**} невозможно вложить дополняемо в банахову решетку.*

(б) *Если A есть фактор-пространство пространства X , а при этом X^{**} вкладывается дополняемо в банахову решетку, то в X имеется дополняемое подпространство, изоморфное пространству l^1 .*

Доказательства подобных фактов требуют дополнительных сведений о банаховых пространствах. Чтобы не перегружать изложение, мы не входим в подробности. Отметим только, что аналог утверждения (б) справедлив для произвольного допустимого подпространства относительно любой пары Харди–Лебега (и это утверждение сильнее, чем теорема 3). Рассуждения примерно такие же, как в [5], [6] для алгебр. Напротив, утверждение (а) на все допустимые пространства не распространяется. Примером может служить подпространство в диск-алгебре, натянутое на функции z^{2^k} , $k \in \mathbb{N}$. Оно допустимо относительно стандартной в этой ситуации пары Харди–Лебега (zm, z) , но при этом изоморфно банаховой решетке – пространству l^1 . Для сильно допустимых пространств, т. е. пространств, промежуточных между алгеброй A и идеалом I в ней при условии $\bar{I} \not\subset A$, свойство (а), однако, сохраняется, и снова примерно с тем же доказательством, что и в [4] и [5] для алгебр. Если думать об инвариантных пространствах на группах как о модели, то на интуитивном уровне можно сказать, что нарушение условия (а) для допустимых подпространств связано с чем-то вроде наличия очень больших лакун в спектре.

3.2. ПРО НЕЗАМКНУТОСТЬ СУММ. Рассуждения из предыдущего пункта наиболее близки к доказательству теоремы 3.3 в [5], однако отличия все же есть и, собственно, поэтому мы привели детали вновь. Что касается теоремы 6, то необходимо действовать почти совсем без изменений, как в § 3 из [6] (хотя формулировка у нас и сильнее), поэтому мы опускаем детали. Скажем только, что разрешать “лакуны в спектре” у допустимого подпространства в этом случае действительно нельзя (или нельзя, не подумав): легко привести примеры замкнутых сумм $E_1 + \overline{E_2}$, где E_1 и E_2 – подпространства диск-алгебры с лакунарным по Адамару спектром. Как (наверно) мы согласились в п. 3.1, сильно допустимые подпространства как раз и отвечают отсутствию лакун.

Отметим также технический момент. При доказательстве теоремы 6 удобно (см. [6]) на каком-то этапе спуститься на уровень конечномерных подпространств. Это приводит к тому, что опровергать нужно непосредственно ядерность возникающих по дороге операторов (более или менее таких же, как выше), а не ослаблять ее сначала до компактности.

Список литературы

- [1] W. Rudin, *Projections on invariant subspaces*, Proc. Amer. Math. Soc. **13** (3), 429–432 (1962).
DOI: <https://doi.org/10.2307/2034952>
- [2] И. П. Натансон, *Конструктивная теория функций*, ГИТТЛ, М–Л, 1949.
- [3] I. Glicksberg, *Some uncomplemented function algebras*, Trans. Amer. Math. Soc. **111** (1), 121–137 (1964).
DOI: <https://doi.org/10.1090/S0002-9947-1964-0161175-8>
- [4] С. В. Кисляков, *Правильные равномерные алгебры недополняемы*, ДАН СССР **309** (4), 795–798 (1989).
URL: <http://mi.mathnet.ru/dan6842>
- [5] T. W. Gamelin, S. V. Kislyakov, *Uniform algebras as Banach spaces*, Handbook of the geometry of Banach spaces V. 1, Elsevier Sci. B.V., 671–706 (2001).
DOI: [https://doi.org/10.1016/S1874-5849\(01\)80018-8](https://doi.org/10.1016/S1874-5849(01)80018-8)
- [6] S. V. Kislyakov, I. K. Zlotnikov, *Coinvariant subspaces of the shift operator and interpolation*, Anal. Math. **44** (2), 219–236 (2018).
DOI: <https://doi.org/10.1007/s10476-018-0207-z>
- [7] Т. Гамелин, *Равномерные алгебры*, Мир, М., 1973.
- [8] С. В. Кисляков, *Недополняемые равномерные алгебры*, Мат. заметки **18** (1), 91–96 (1975).
URL: <http://mi.mathnet.ru/mz7629>
- [9] С. В. Кисляков, *Равномерные алгебры как банаховы пространства*, Зап. научн. семина. ЛОМИ **65**, 80–89 (1976).
URL: <http://mi.mathnet.ru/zns12881>
- [10] J. Diestel, H. Jarchow, A. Tonge, *Absolutely summing operators*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1995.
DOI: <https://doi.org/10.1017/CBO9780511526138>

Сергей Витальевич Кисляков

Математический институт им. В. А. Стеклова,

Санкт-Петербургское отделение,

ул. Набережная реки Фонтанки, д. 27, г. Санкт-Петербург, 191023, Россия,

e-mail: skis@pdmi.ras.ru

Around the discontinuity of the Riesz projection in the uniform metric

S.V. Kislyakov

Abstract. The present paper is based on a lecture given by the author at the conference “Complex Analysis and Related Problems”, which was held from 29 June to July 4 in Kazan. The lecture was devoted to the Glicksberg conjecture and a related but independent assertion that the sums of certain ideals in a uniform algebra are never closed. This text contains several new formulations in comparison with the lecture and the existing literature.

Keywords: Riesz projection, Glicksberg conjecture, nonclosed sums, Hardy–Lebesgue pairs.

References

- [1] W. Rudin, *Projections on invariant subspaces*, Proc. Amer. Math. Soc. **13** (3), 429–432 (1962).
DOI: <https://doi.org/10.2307/2034952>
- [2] I. P. Natanson, *Constructive theory of functions*, GITTL, M–L, 1949.
- [3] I. Glicksberg, *Some uncomplemented function algebras*, Trans. Amer. Math. Soc. **111** (1), 121–137 (1964).
DOI: <https://doi.org/10.1090/S0002-9947-1964-0161175-8>
- [4] S. V. Kislyakov, *Proper uniform algebras are uncomplemented*, Dokl. Math. **40** (3), 584–586 (1990).
URL: <https://zbmath.org/?q=an:0729.46022>
- [5] T. W. Gamelin, S. V. Kislyakov, *Uniform algebras as Banach spaces*, Handbook of the geometry of Banach spaces, V. 1, Elsevier Sci. B.V., 671–706 (2001).
DOI: [https://doi.org/10.1016/S1874-5849\(01\)80018-8](https://doi.org/10.1016/S1874-5849(01)80018-8)
- [6] S. V. Kislyakov, I. K. Zlotnikov, *Coinvariant subspaces of the shift operator and interpolation*, Anal. Math. **44** (2), 219–236 (2018).
DOI: <https://doi.org/10.1007/s10476-018-0207-z>
- [7] T. W. Gamelin, *Uniform algebras*, Prentice-Hall, N.J., 1969.
- [8] S. V. Kislyakov, “Uncomplemented uniform algebras”, Math. Notes **18** (1), 637–639 (1974).

DOI: <https://doi.org/10.1007/BF01461145>

- [9] S. V. Kislyakov, “Uniform algebras as Banach spaces”, *J. Math. Sci.* **16** (3), 1102–1108 (1981).

DOI: <https://doi.org/10.1007/BF02427719>

- [10] J. Diestel, H. Jarchow, A. Tonge, *Absolutely summing operators*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1995.

DOI: <https://doi.org/10.1017/CBO9780511526138>

Sergei Vital’evich Kislyakov

Steklov Institute of Mathematics,

St. Petersburg Department,

27 Fontanka River Embankment, St. Petersburg 191023, Russia,

e-mail: skis@pdmi.ras.ru

Биллиарды переменной конфигурации и биллиарды с проскальзыванием в гамильтоновой геометрии и топологии

А.Т. Фоменко

Аннотация. Обнаружен класс биллиардов, геометрия которых может меняться при изменении энергии шара, движущегося по «биллиардному столу». Такие биллиарды названы силовыми или эволюционными. Они позволяют реализовать важные интегрируемые гамильтоновы системы (с двумя степенями свободы) сразу на всем фазовом 4-мерном пространстве системы, т. е. одновременно на всех регулярных изоэнергетических 3-мерных поверхностях. Автор и В.В. Ведюшкина доказали, что силовые биллиарды реализуют интегрируемые случаи Эйлера и Лагранжа в динамике тяжелого тела в трехмерном пространстве. Обнаружено, что эти две известные системы «биллиардно эквивалентны», хотя обладают интегралами разных степеней – квадратичным (Эйлер) и линейным (Лагранж).

Ключевые слова: силовые биллиарды, интегрируемая гамильтонова система, случаи Эйлера и Лагранжа.

Введение

Автором обнаружен класс биллиардов, геометрия которых может меняться при изменении энергии (скорости или силы удара) биллиардного шара, движущегося по “биллиардному столу”. Такие биллиарды были названы силовыми или эволюционными. Оказывается, они позволяют реализовать важные интегрируемые гамильтоновы системы (с двумя степенями свободы) сразу на всем фазовом 4-мерном пространстве системы, т. е. одновременно на всех регулярных изоэнергетических 3-мерных поверхностях системы, которые могут менять свою топологию при изменении энергии. В совместных работах автора и В.В. Ведюшкиной [1, 2], было доказано, что силовые биллиарды реализуют, например, известные интегрируемые случаи Эйлера и Лагранжа в динамике тяжелого тела в трехмерном евклидовом пространстве. Кроме того, было обнаружено, что эти две известные интегрируемые системы “биллиардно эквивалентны”, хотя обладают интегралами разных степеней – квадратичным (Эйлер) и линейным (Лагранж).

Итак, введен класс локально плоских биллиардов, подходящий для реализации топологии слоений Лиувилля интегрируемых гамильтоновых систем сразу во всех регулярных

зонах энергии. В этом новом классе силовых (эволюционных) бильярдов с изменением скорости шара (т.е. силы удара о стенку-границу) может меняться как топология всего “бильярдного стола”, так и закон отражения шара. В качестве “материала” для изготовления эволюционных интегрируемых бильярдов можно также пользоваться интегрируемыми бильярдами-книжками, введенными В.В. Ведюшкиной. Листами таких книжек являются локально плоские бильярды, ограниченные дугами софокусных квадрик и склеенные по некоторым общим ребрам.

Напомним неформальное определение бильярдной книжки (подробнее см. [3]). Занумеруем листы книжки. Каждому одномерному ребру-корешку сопоставим циклическую перестановку из группы $S(n)$, где n – число листов книжки, сходящихся на данном ребре. Спроектируем книжку на плоскость. Рассмотрим множество границ (т.е. дуг софокусных квадрик) всех бильярдных листов. Пусть на плоскости две границы образовали угол (тогда он равен $\frac{\pi}{2}$), встретившись в некоторой вершине. Потребуем, чтобы в их прообразе соответствующие им перестановки коммутировали. Здесь под перестановкой в прообразе гладкой граничной дуги понимается перестановка, состоящая из объединения циклических перестановок всех корешков, проектирующихся на данную дугу.

Движение материальной точки (шара) по бильярду-книжке задается теперь следующим образом: двигаясь по листу с номером i , после удара о границу точка переходит на лист $s(i)$, где s – это перестановка, приписанная данной границе-корешку. Описанное условие коммутирования “соседних” перестановок в вершине гарантирует корректность отражения точки при ее попадании в прямой угол при вершине. То есть точка, ударившись о вершину, возвращается назад, двигаясь по той же траектории, по которой попала в вершину.

1. Определение силового (эволюционного) бильярда

Следующее определение силовых бильярдов введено автором статьи.

1) Носителем силового бильярда назовем конечный связный двумерный локально-плоский (с евклидовой метрикой внутри 2-клеток) клеточный комплекс X . Его 2-листы L_i гомеоморфны замкнутым областям (двумерным дискам или двумерным кольцам) на плоскости и ограничены кусочно-гладкими кривыми. Их углы излома равны $\frac{\pi}{2}$. Склеивка нескольких 2-листов происходит по изометрии некоторых их общих гладких граничных дуг (корешки книжки). Таким образом, комплекс X получается склейкой локально-плоских бильярдных листов по некоторым граничным ребрам-корешкам.

2) Для каждого значения параметра-энергии $H = h > 0$ рассмотрим в носителе X замкнутый подкомплекс $X(h)$, возможно несвязный. Назовем его состоянием силового бильярда, отвечающим значению h . При этом $X(h_1)$ содержится в $X(h_2)$ для любых $h_1 < h_2$ и носитель X является объединением $X(h)$ по всем h . Тем самым с ростом энергии h состояние (комплекс) $X(h)$ “разрастается”. При изменении энергии h состояние $X(h)$ будет, вообще говоря, менять свою геометрию.

3) Конечное количество значений $h = 1, \dots, N$ энергии H , при которых меняется топология состояния $X(h)$ (меняющегося бильярдного стола) или закон отражения-преломления на ребрах границы, назовем особыми (сингулярными). Остальные значения энергии назовем регулярными. Напомним, что в интегрируемых бильярдах 1-ребрами (корешками) бильярда $X(h)$ являются дуги софокусных квадрик или концентрических окружностей.

4) Закон отражения-преломления на ребре-корешке r в состоянии $X(h)$ обозначим через $Z(h, r)$. Он задается циклической перестановкой на n листах бильярда, склеиваемых по ребру r , и определяет динамику материальной частицы (бильярдного шара) после удара о границу. Будем считать, что $Z(h) = \{Z(h, r)\}$, т.е. набор таких законов отражения-преломления есть кусочно-постоянная функция энергии, изменения которой могут быть лишь при особых значениях h .

5) Разрешим ребрам-корешкам состояния $X(h)$ гладко меняться в классе софокусных квадрик без вырождений. Как известно из теории интегрируемых бильярдов, это задает эквивалентные бильярды. При особых h ребра могут склеиваться с другими ребрами, вырождаться или превращаться в отрезки фокусных прямых. Склеивка листов вдоль границ происходит вдоль дуги одной и той же квадрики. Условная схема показана на рис. 1. На “новом корешке” появляется новый цикл-перестановка. В момент скачка мы разрешаем бильярдам менять свой класс эквивалентности. Например, сегмент границы при особом h может лечь на фокальную прямую или “сложиться пополам”. Скачком угол $\frac{\pi}{2}$ может стать равным π . Разрешается склеивать в граничных точках корешки одного состояния $X(h)$, если они легли на одну граничную дугу, т.е. если угол между ними стал равен π .

В круговых бильярдах граничные окружности могут стягиваться в точки. В частности, при некоторых особых значениях h некоторые ребра r бильярда могут становиться “проницаемыми” (“прозрачными”). После этого бильярдный шар начинает проходить сквозь такое ребро, а до этого он отражался (возможен и обратный процесс).

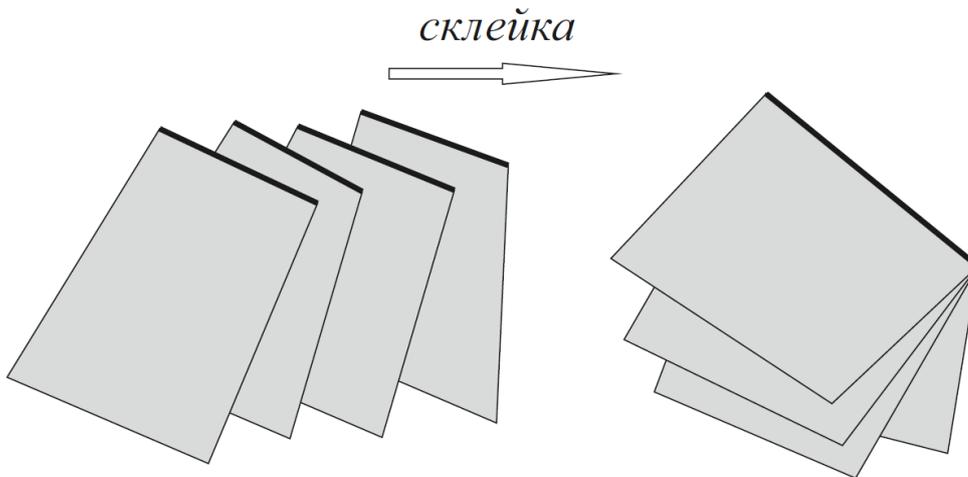


Рис. 1

6) Итак, носитель X мы считаем неизменным, “неподвижным”. Внутри него “разрастаются” состояния $X(h)$, причем X совпадает с последним состоянием $X(N)$ (см. рис. 2). Интегрируемую систему с двумя степенями свободы, задаваемую динамикой бильярдного шара на меняющихся состояниях-комплексах $X(h)$, назовем силовым (эволюционным) бильярдом. Пусть h – регулярное значение энергии из какого-то интервала $D_i = (i, i + 1)$. Соответствующий бильярд-состояние (комплекс) обозначим через $X(D_i)$.

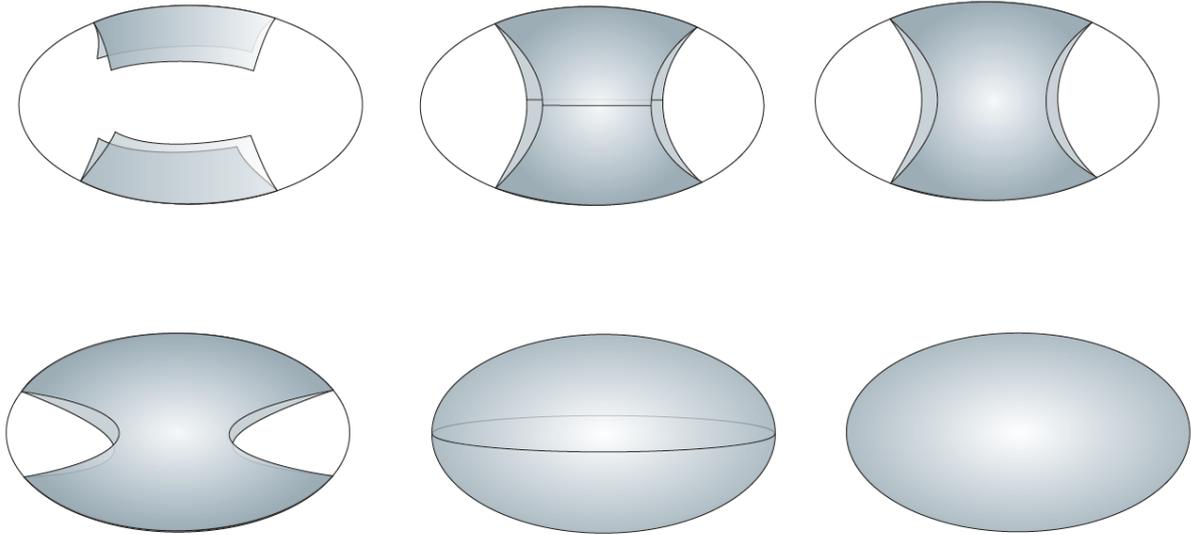


Рис. 2

7) Точкой фазового комплекса $TX(D_i)$ является пара (x, v) , где x – точка бильярдного стола $X(D_i)$, а v – вектор скорости материальной частицы в точке x . Когда точка x оказывается на границе листа L_i , соседствующего с листом L_k , то склейка соответствующих пар (x, v) и (x, w) происходит по закону отражения-преломления $Z(h, r)$, действующего на данном ребре r при данном h .

8) Регулярной изоэнергетической 3-поверхностью Q_h назовем подмножество в четырехмерном фазовом комплексе $TX(D_i)$, задаваемое уравнением: $H = h$; т. е. “уровень постоянной энергии”. Для интегрируемых бильярдных книжек регулярные Q_h являются топологическими 3-многообразиями.

Определение 1. Описанный выше бильярд переменной геометрии и соответствующую динамическую систему (задаваемую движением материальной точки) назовем силовым или эволюционным бильярдом.

Таким образом, эволюционный бильярд с носителем X задается набором данных: $D_i, X(h), Z(r, h)$, склейки, N (см. условную схему на рис. 3).

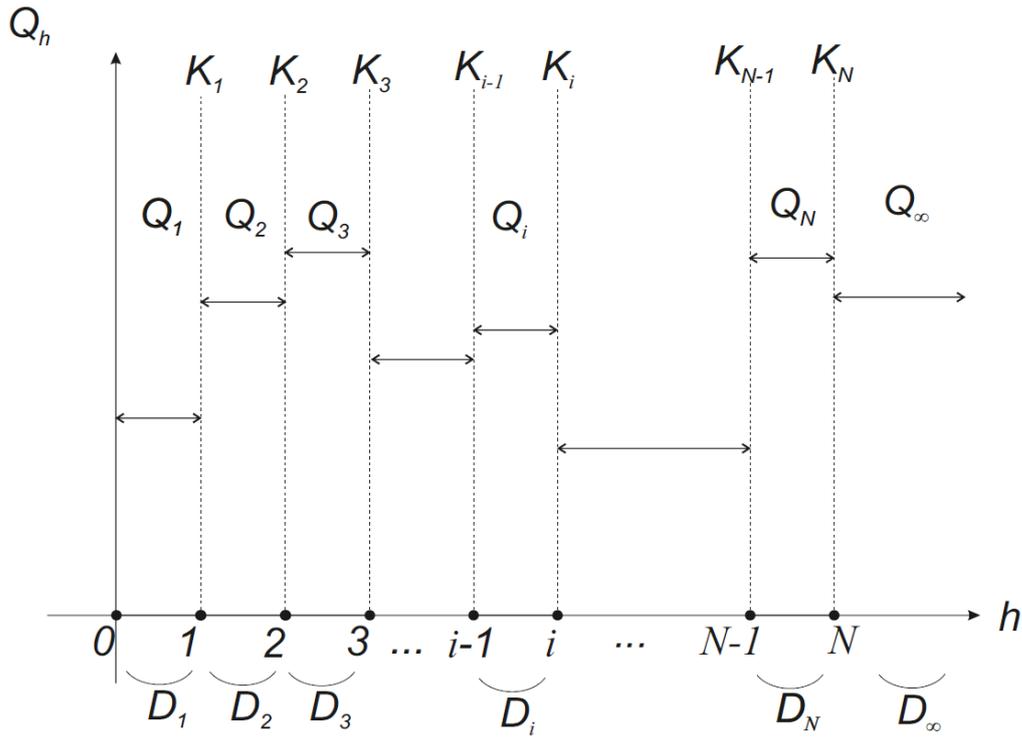


Рис. 3

Наглядный комментарий. Идея эволюционного (силового) биллиарда учитывает энергию материальной точки. Изменения динамической системы при изменении энергии частицы изучаются, например, в физике, квантовой механике. При увеличении энергии электроны, вращающиеся вокруг ядра атома, “перескакивают” с одного энергетического уровня на другой. Таким образом, “накачка” энергии приводит к бифуркациям системы. Оказывается, нечто подобное обнаруживается и в математических биллиардах. Стенки биллиардных столов становятся “чувствительными” к силе удара материальной точки (шара). Другими словами, в эволюционном биллиарде стенки реагируют (каждая по-своему) на энергию точки, ударяющейся о стенку. При критических значениях энергии стенки меняют свои свойства и движение материальной точки изменяется в соответствии с новым законом отражения-преломления.

2. Регулярные и сингулярные изоэнергетические поверхности эволюционного биллиарда

Определение 2. Регулярной изоэнергетической 3-поверхностью (комплексом) Q_h назовем подмножество в 4-мерном фазовом комплексе $TX(D_i)$, задаваемое уравнением $H = h$ (т. е. “уровень постоянной энергии”), где h – регулярное значение энергии.

В интегрируемых биллиардных книжках такие регулярные 3-поверхности являются топологическими трехмерными многообразиями (теорема Ведюшкиной–Харчевой [4]).

Теперь разберемся, как устроены “сингулярные” изоэнергетические поверхности эволюционного бильярда. Они условно изображены на рис. 3 как 3-мерные поверхности K_1, K_2, \dots, K_N . Они соответствуют сингулярным значениям энергии $h = 1, 2, \dots, N$. Пусть $h = i$ – сингулярное значение энергии. Через $X(i - \varepsilon)$ обозначим левый бильярдный стол-состояние, а через $X(i + \varepsilon)$ – правый бильярдный стол-состояние. Рассмотрим какое-нибудь ребро-корешок r на левом 2-мерном столе $X(i - \varepsilon)$, на котором сейчас поменяется закон отражения, а также произойдут склейки. Сингулярный комплекс-стол $X(i)$ устроен так. Возьмем комплекс $X(i - \varepsilon)$ и приклеим к корешку r те листы, которые должны быть подклеены к этому корешку после данного скачка, т.е. в комплексе $X(i + \varepsilon)$.

Рассмотрим два “соседних” регулярных 3-мерных многообразия: Q_i (назовем его левым) и Q_{i+1} (назовем его правым), соответствующих столам $X(i - \varepsilon)$ и $X(i + \varepsilon)$. Определим “заключенную между ними” сингулярную 3-поверхность K_i (см. рис. 3).

Оснастим каждую точку листа комплекса-стола $X(i)$ вектором скорости длины $h = i$. Сначала отождествим по стандартному закону отражения вектора скорости на тех корешках, закон отражения на которых не меняется. Далее рассмотрим корешок, где поменялся закон отражения. В каждой его точке мы отождествим все вектора скорости с одинаковым направлением в том случае, если они отождествлялись либо в Q_i , либо в Q_{i+1} . Последнее приводит к тому, что конструируемая нами 3-мерная поверхность K_i является компактной, однако в ней появляются особенности, отвечающие этим корешкам. Отсюда эта 3-мерная поверхность уже, вообще говоря, не является 3-мерным многообразием. Окрестность любой точки корешка, оснащенной вектором скорости, в 3-мерной поверхности K_i уже не гомеоморфна трехмерному диску. Значит, поверхность K_i получается из поверхности Q_i отождествлением пар (x, v) (точка-вектор) с теми парами (x, w) , которые должны быть отождествлены в Q_{i+1} . В каждом случае неоднозначности это приведет к отождествлению трех пар точка-вектор (одна входящая на корешок и две исходящих), а не двух, как происходит на корешках в регулярном случае. Именно этот эффект и приводит к возникновению особенности. Как устроена сингулярная 3-мерная поверхность? Это не топологическое многообразие, это клеточный комплекс. Он является стратифицированным 3-мерным многообразием. Его страты – гладкие многообразия.

Мы описали топологию сингулярной 3-мерной поверхности K_i , “зажатой” между двумя соседними топологическими 3-мерными многообразиями Q_i и Q_{i+1} . Отметим аналогию с гладкими интегрируемыми системами с двумя степенями свободы. Там сингулярные изоэнергетические поверхности тоже зажаты между двумя “соседними” регулярными 3-мерными поверхностями постоянной энергии. Для гладких систем сингулярность 3-мерной поверхности означает, вообще говоря, что она уже не является гладким многообразием, на ней $\text{grad}(H)$ вырождается в некоторых точках.

3. Биллиардные потоки на сингулярных изоэнергетических 3-мерных поверхностях эволюционного биллиарда. Распад-деление биллиардного шара на два шара на сингулярных биллиардных 2-мерных столах

Теперь можно понять, какой “двузначный поток” порождают на сингулярной поверхности K_i “сближающиеся” биллиардные потоки на 3-мерных многообразиях Q_i и Q_{i+1} , когда они “стремятся” (слева и справа по h) к зажатой между ними поверхности K_i . Грубо говоря, каждый из этих потоков порождает поток на сингулярной поверхности K_i , но эти предельные потоки различны. На корешках, где закон отражения меняется после скачка, невозможно корректно определить траекторию шара после отражения/преломления (см. рис. 4). Мы знаем, как ведет себя шар на левом $X(i - \epsilon)$ и правом $X(i + \epsilon)$ биллиардных столах. При достижении данного корешка шар до и после скачка переходит на разные листы (на правом и на левом столах).

Неформально говоря, на сингулярном комплексе-столе $X(i)$ после пересечения этого корешка траектория шара “раздваивается”, т. е. шар идет как бы по двум листам одновременно (см. рис. 4). Следовательно, можно считать, что шар, ударившись о такой корешок, “раскалывается” на два, и каждый из них “начинает жить собственной жизнью”. Итак, когда значение энергии h становится равным i , на сингулярном 2-мерном столе возникает распад (деление) биллиардного шара на два шара. Каждый из них движется “по своему” листу. Значит, сближающиеся биллиардные потоки на регулярных изоэнергетических поверхностях “салятся” в пределе на сингулярную поверхность K_i и порождают на ней “ветвящийся поток”. Ветвление индуцируется делением (распадом) шара на два в момент удара о корешок r . Эта ситуация происходит только на тех корешках-склейках, где меняется закон отражения при скачке. “Элементарная частица” при этом распадается на две.

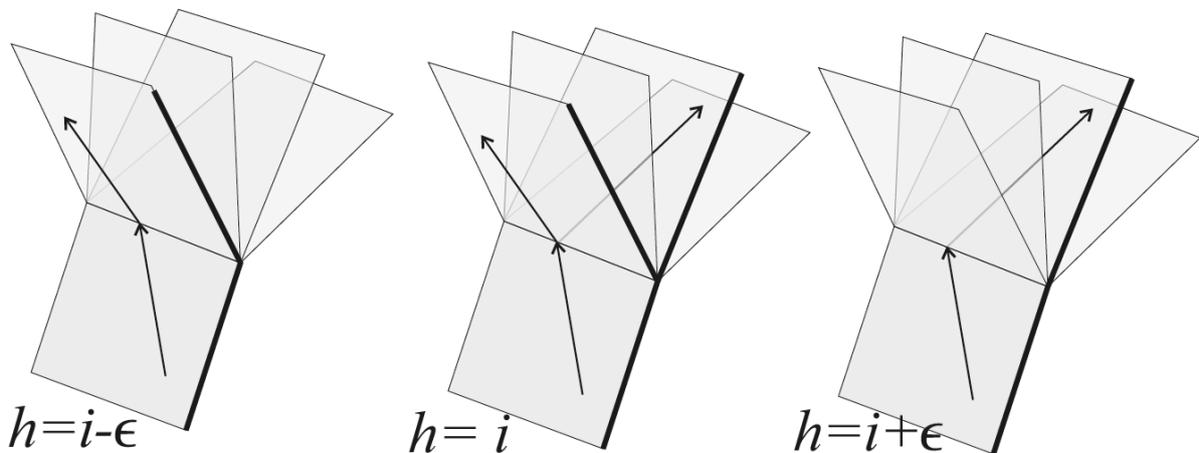


Рис. 4

В случае гладких систем на сингулярной изоэнергетической поверхности возникает гамильтонов поток с особенностями, диктуемыми особенностями этой поверхности. Этот поток однозначен, в том смысле, что в каждой фазовой точке поверхности “сидит” один вектор. А для эволюционных бильярдов поток на сингулярной поверхности тоже особый, но тут он становится ветвящимся. Один набор его “ветвей” приходит “справа”, а второй набор “ветвей” приходит “слева”. Поэтому здесь в каждой сингулярной фазовой точке “сидят” два вектора.

4. Реализация силовыми бильярдами известных систем математической физики сразу на всем фазовом 4-пространстве

Следующие теоремы доказаны В.В. Ведюшкиной и автором (см. подробности в [1,2]).

Теорема 3 (случай Эйлера). *Существует (строится явным образом, см. рис. 5) интегрируемый силовой бильярд, носитель которого гомеоморфен эллипсоиду, и который реализует (в смысле лувиллево эквивалентности) известный интегрируемый случай Эйлера в динамике тяжелого твердого тела сразу на всем фазовом многообразии M_g^4 , т. е. на всех его регулярных изоэнергетических 3-поверхностях для всех регулярных значений параметров системы g и h . Здесь g – значение интеграла площадей.*

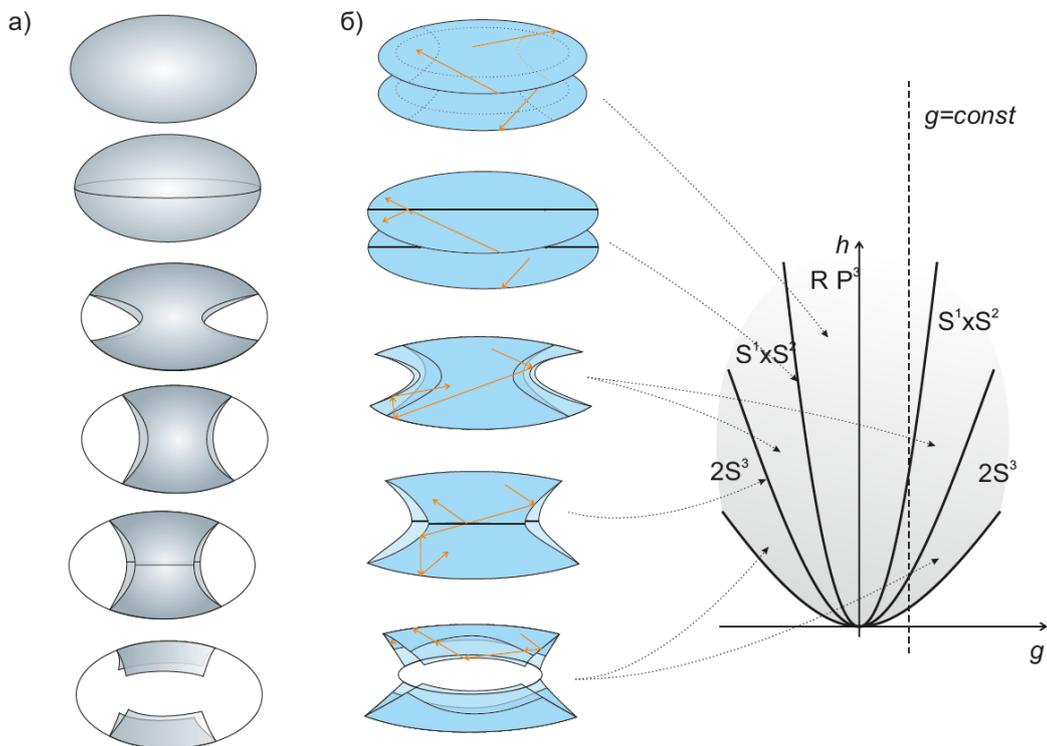


Рис. 5

Напомним, что случай Лагранжа, допускающий линейный интеграл, описывает движение осесимметричного тяжелого твердого тела с закрепленной точкой на оси симмет-

рии. Известно, что в зависимости от значений параметров, существует четыре типа бифуркационных диаграмм. Оказалось, что здесь есть ровно пять различных типов симплектических 4-листов. Для всех них удалось обнаружить реализующие силовые биллиарды.

Теорема 4 (случай Лагранжа). *Интегрируемый случай Лагранжа на каждом своем регулярном симплектическом 4-листе M_g^4 реализуется (в смысле лиувиллевой эквивалентности) одним из построенных нами (в явном виде, см. рис. 6) пяти силовых биллиардов, у которых биллиарды-состояния ограничены концентрическими окружностями (и потому интегрируемы в каждый момент эволюции).*

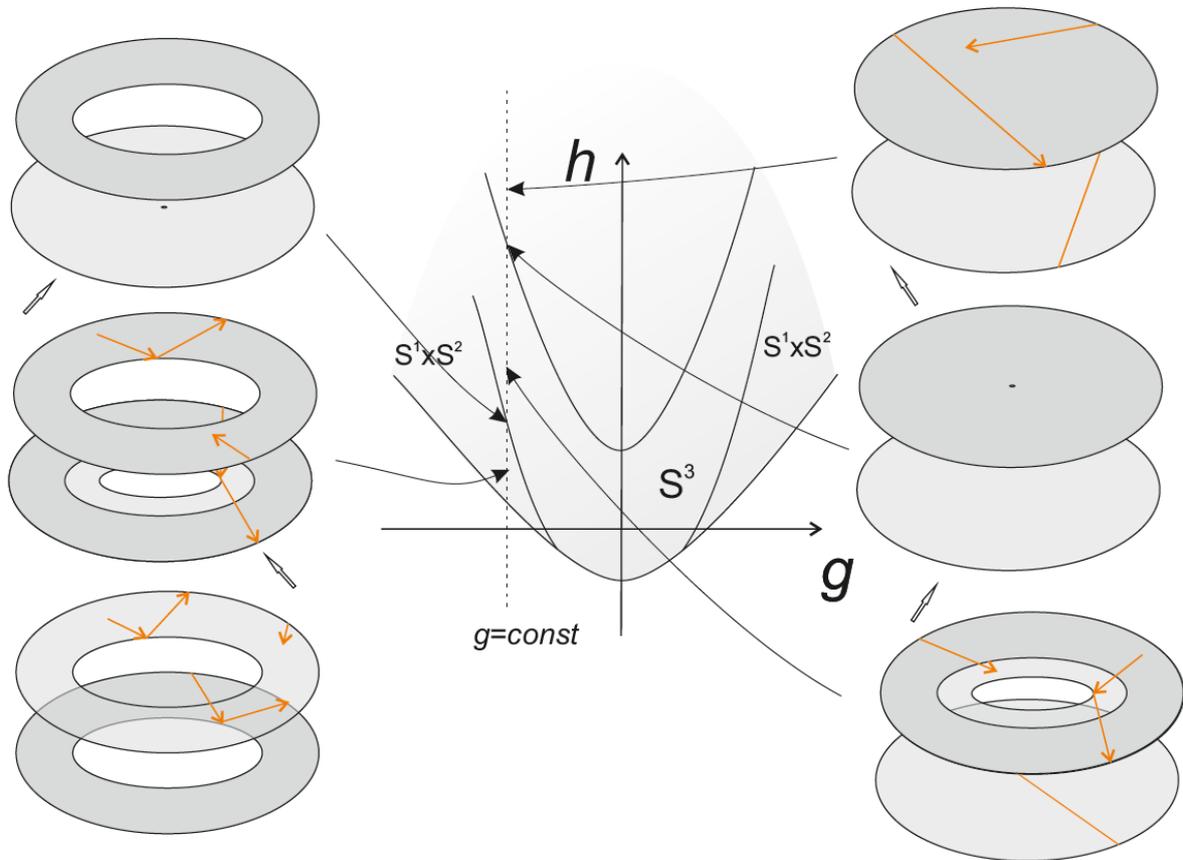


Рис. 6

Продеформируем семейство софокусных эллипсов и гипербол в семейство концентрических окружностей и радиальных лучей (устремляя фокусы друг к другу).

Теорема 5. *Указанная деформация софокусных биллиардов в круговые биллиарды переводит силовой биллиард, реализующий случай Эйлера, в новый силовой биллиард, полный набор лиувиллевых слоений которого совпадает с полным набором лиувиллевых слоений случая Лагранжа (для всех его трех типов изоэнергетических 3-поверхностей). Такие системы мы называем “биллиардно эквивалентными”.*

Обнаруженное “превращение” случая Эйлера в случай Лагранжа не переводит 4-мерный симплектический лист случая Эйлера в какой-либо из пяти типов 4-мерных симплектических листов случая Лагранжа. Оно устроено сложнее. Именно это не позволяло ранее заметить “превращение” этих известных систем друг в друга. Тем не менее, оказалось, что полный набор лиувиллевых слоений случая Эйлера превращается в полный набор лиувиллевых слоений случая Лагранжа. Сначала потребовалось обнаружить в случае Эйлера “скрытые софокусные квадратики”, а в случае Лагранжа обнаружить “скрытые концентрические окружности”. Таким образом, именно деформация софокусных квадратов в окружности (при слиянии фокусов) и “превращает” случай Эйлера в случай Лагранжа.

Также обнаружены силовые бильярды, реализующие интегрируемый случай Горячева–Чаплыгина–Сретенского одновременно на нескольких изоэнергетических 3-поверхностях в соответствующих 4-мерных регулярных зонах энергии (см. [2]).

5. Бильярды с проскальзыванием

Автором введен класс бильярдов с проскальзыванием. Приведем их определение и программу исследований, предложенную им в [5, 6]. Пусть даны две компактные, плоские (или локально плоские) области X и Y с евклидовой (или локально евклидовой) метрикой. Предположим, что среди связных компонент их гладкой границы существуют две компоненты (одна на X , вторая на Y) одинаковой длины, которые мы обозначим ∂X и ∂Y (остальные компоненты границы мы сейчас не рассматриваем). Например, в качестве областей можно взять диски или кольца, или листы Мебиуса. Пусть, для простоты, обе области ориентируемы. Зададим на каждой из них ориентацию и выберем согласованное с ней направление обхода границы (касательный вектор и внешняя нормаль составляют положительный базис).

Зададим гладкую изометрию $F : \partial X \rightarrow \partial Y$ связных граничных кривых ∂X и ∂Y , сохраняющую направление обхода этих кривых. Пусть точка $A \in \partial X$ отображается в точку $B = F(A) \in \partial Y$. Тогда точка $A_l \in \partial X$, отстоящая от точки A на расстояние l в направлении обхода ∂X , отобразится в точку $B_l \in \partial Y$, отстоящей от точки B на расстояние l в направлении обхода ∂Y .

Склеим комплекс $Z = X \cup_F Y$ из областей X и Y путем отождествления выбранных связных компонент их границ по изометрии F . Заметим, что X и Y остаются локально плоскими во всех своих внутренних точках, но Z не обязан изометрично вкладываться в \mathbb{R}^3 . Например, такой комплекс может быть гомеоморфен сфере, если X и Y были гомеоморфны дискам.

Запустим на полученном комплексе бильярд: пусть материальная точка прямолинейно движется по области X и попадает в точку x на выбранной связной компоненте ∂X ее границы под некоторым углом α . Отметим, что ориентированный угол α удобно отсчитывать против часовой стрелки от касательного вектора к границе ∂X плоского множества X , взятого в направлении обхода этой границы. Далее частица переходит на

область Y и продолжает свое движение, стартуя из граничной точки $y = F(x)$ области Y и выходя из нее под ориентированным углом $2\pi - \alpha$ к границе (определенным аналогичным образом). Напомним, что комплекс Z склеен из двух “листов” X и Y с отождествлением их границ. Материальная точка, попадая на границу, переходит с одного листа на другой лист. При возвращении на исходный лист она выходит из граничной точки, отличной от той, в которой она этот лист покинула. Наблюдая за движением точки на одном листе, мы видим, что точка, попадая на границу, продолжает свое движение, “проскальзывая” вдоль границы. На этом основании бильярд Z назовем “*бильярдом с проскальзыванием*”.

Повторим, что этот пример является частным случаем более общей конструкции. В качестве областей X и Y можно рассматривать неодносвязные области, граница которых состоит из нескольких компонент, гомеоморфным окружностям. При склейке таких областей некоторые граничные кривые склеиваются с проскальзыванием, а некоторые – без проскальзывания. Более того, интегрируемость бильярдов после добавления проскальзывания обнаруживается для неплоских бильярдов, например, многих топологических бильярдов и бильярдных книжек, введенных В.В. Ведюшкиной и имеющих нужные симметрии.

Требуется описать интегрируемые бильярды с проскальзыванием и изучить их топологические инварианты. Интересен вопрос: для каких значений углов проскальзывания и для каких бильярдных столов возникает эффект интегрируемости? Компьютерные эксперименты показывают, что для некоторых значений углов проскальзывания возникающие бильярды не являются интегрируемыми, траектории бильярдного шара “хаотичны”.

Рассмотрим для примера плоский бильярд в эллипсе, где бильярдный “шар”, ударившись о границу в точке X , “перескакивает”, “проскальзывает” в точку Y , удаленную вдоль границы от точки X на расстояние $F(X)$, где F – некоторая функция, после чего бильярдный “шар” выходит из точки Y под тем же углом, с каким он вошел в точку X . Вопрос: когда такой бильярд с проскальзыванием будет интегрируемым? Эту же задачу можно понимать еще так. Рассмотрим, например, два изометричных плоских эллипса и склеим их границы посредством некоторой изометрии (т. е. изометрично наложив друг на друга граничные дуги). Здесь получившийся бильярд гомеоморфен сфере. Бильярдный шар, попав на границу первого эллипса, переходит на второй эллипс, движется по нему, достигает границы и в результате вновь появляется в первом эллипсе. С точки зрения первого эллипса возникает “проскальзывание шара” вдоль границы. Например, если проскальзывание является центрально симметричным отражением граничного эллипса (т. е. радиус-вектор точки поворачивается на 180 градусов), то получившийся бильярд с проскальзыванием будет интегрируемым.

6. Интегрируемые бильярды с проскальзыванием

Здесь мы вкратце изложим интересные результаты, недавно полученные В.В. Ведюшкиной и В.Н. Завьяловым.

Рассмотрим в качестве примера плоский диск или эллипс. Пусть F – изометрия границы, переводящая граничную точку x в диаметрально противоположную ей точку y . Это означает поворот радиус-вектора точки x на угол π . Материальная точка, двигаясь прямолинейно по области и попадая на ее границу под углом α , выходит из диаметрально противоположной точки под тем же углом α . Такие бильярды выше были названы *бильярдами с проскальзыванием*.

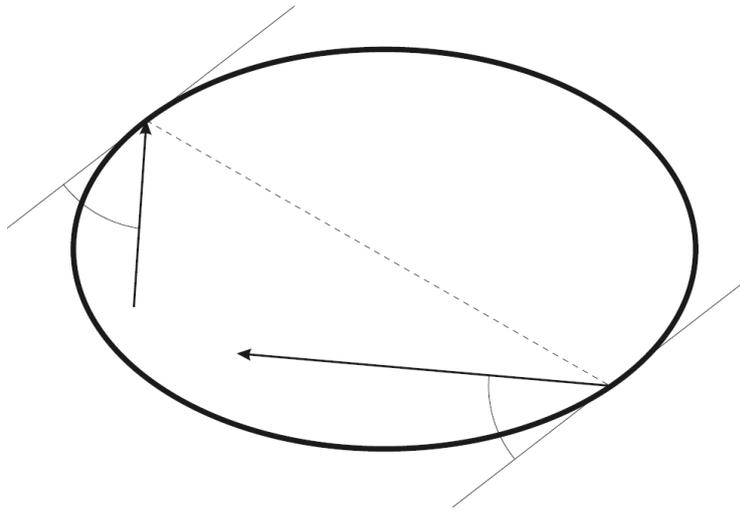


Рис. 7. Пример: звенья траектории бильярдного шара в эллипсе с проскальзыванием на угол π до и после удара о границу

Рассмотрим риманово многообразие M . На его кокасательном расслоении естественно возникает гамильтонова система – геодезический поток римановой метрики. Вопрос об интегрируемости такой системы для двумерных аналитических компактных без края многообразий был решен В.В. Козловым. А именно, верна следующая

Теорема 6. Пусть двумерное компактное связное замкнутое аналитическое многообразие с отрицательной эйлеровой характеристикой снабжено аналитической римановой метрикой. Тогда геодезический поток этой метрики неинтегрируем в классе аналитических интегралов.

Таким образом, интегрируемые геодезические потоки существуют лишь на сфере S^2 , торе T^2 и их факторах по \mathbb{Z}_2 , т. е. на проективной плоскости $\mathbb{R}P^2$ и на бутылке Клейна KL^2 . На 2-поверхностях большего рода таких потоков нет.

Сначала, в качестве примера, рассмотрим бильярд в плоском диске с проскальзыванием. Этот бильярд интегрируем, и его топологический тип задается инвариантом

Фоменко–Цишанга, так называемой меченой молекулой (граф с некоторыми числовыми метками). Справа на рис. 8 показан инвариант Фоменко–Цишанга данного биллиарда, вычисленный В.В. Ведюшкиной и В.Н. Завьяловым. Оказывается, эта молекула совпадает с молекулой одного из линейно интегрируемых геодезических потоков на проективной плоскости, снабженной стандартной локально сферической метрикой. Поэтому в силу общей теории Фоменко–Цишанга построенный биллиард с проскальзыванием лиувиллево эквивалентен указанному геодезическому потоку на проективной плоскости. Здесь трехмерная изоэнергетическая поверхность гомеоморфна линзовому пространству $L(4, 1)$.

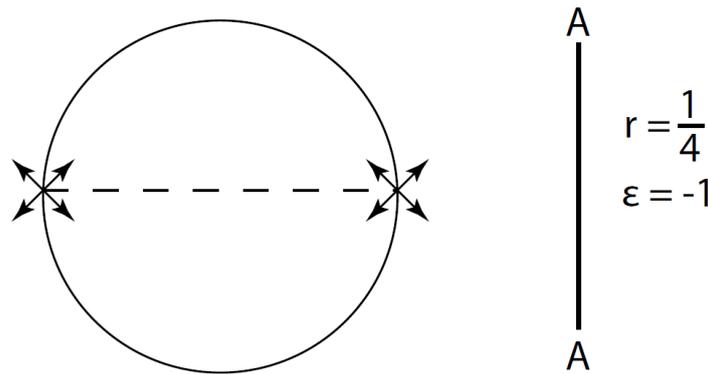


Рис. 8. Биллиард в плоском диске с проскальзыванием, лиувиллево эквивалентный одному из геодезических потоков на проективной плоскости (а именно, потоку стандартной локально сферической метрики), интегрируемому при помощи линейного интеграла

Как оказалось, верен следующий общий результат (В.В. Ведюшкина, В.Н. Завьялов). Биллиардные столы с проскальзыванием, гомеоморфные проективной плоскости или бутылке Клейна, оказывается, моделируют интегрируемые геодезические потоки на этих 2-поверхностях с интегралами степени 1 и 2. Напомним, что меченые молекулы соответствующих слоев Лиувилля были вычислены В.С. Матвеевым.

Теорема 7 (В.С. Матвеев). А) Пусть на бутылке Клейна задана (L, g) -метрика вида $g(y)(dx^2 + dy^2)$, где гладкая функция g не постоянна. Тогда слое Лиувилля линейно интегрируемого геодезического потока на изоэнергетической 3-поверхности Q задается меченой молекулой, показанной на рис. 9 справа.

Б) Пусть на проективной плоскости задана метрика $ds^2 = d\theta^2 + f(\theta)d\phi^2$. Тогда отвечающая линейно интегрируемому геодезическому потоку такой метрики меченая молекула W для случая проективной плоскости показана на рис. 9 слева. Отметим, что в этих меченых графах-молекулах (инвариантах Фоменко–Цишанга) присутствуют только атомы (бифуркации торов Лиувилля) специального вида B_n, B_n^* и B_n^{**} . Эти графы-инварианты обладают следующими числовыми метками.

- На внутренних ребрах графов $W(f)$ и $W(g)$ (см. рис. 9) метки таковы. На ребрах между седловыми атомами r -метки равны бесконечности. Между седловыми ато-

мами и атомами A метки r равны нулю, за исключением тех случаев, когда атом A отвечает неподвижной точке инволюции. В этом случае r -метка равна $\frac{1}{2}$.

- На единственном центральном ребре, соединяющем два экземпляра молекулы $W(f)$ или $W(g)$, метка r равна бесконечности, а метка ε равна -1 . Здесь имеется ровно одна семья, совпадающая со всей молекулой W , из которой выброшены все концевые атомы A . Метка n на этой семье равна -2 .
- Количество звездочек и меток $\frac{1}{2}$ в сумме равно двум для геодезического потока на проективной плоскости и четырем в случае бутылки Клейна.

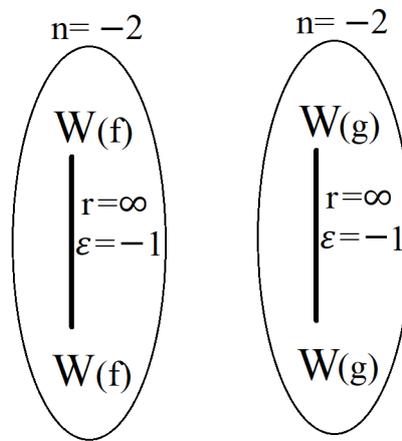


Рис. 9. Меченые молекулы (инварианты Фоменко–Цишанга) геодезических потоков с линейным интегралом на проективной плоскости (слева) и бутылке Клейна (справа). Здесь графы $W(f)$ и $W(g)$ отличны от атома A . Некоторые метки на этих графах справа и слева различны (см. теорему 7)

Конструируя круговые топологические бильярды с проскальзыванием, состоящие из дисков и колец, показанных на рис. 10, удалось доказать следующую общую теорему.

Теорема 8 (В.В. Ведюшкина, В.Н. Завьялов). *Любой гладкий интегрируемый геодезический поток на двумерном неориентируемом многообразии (т. е. на бутылке Клейна или проективной плоскости), обладающий линейным по импульсам дополнительным интегралом, лиувиллево эквивалентен бильярду с проскальзыванием, склеенному из некоторого числа плоских бильярдов (листов), ограниченных концентрическими окружностями. При этом линейный интеграл такого потока сводится к каноническому линейному интегралу на бильярде, которым является угол между траекторией шара и границей любого кольцевого или кругового бильярдного листа-стола.*

Комментарий к рис. 10. Показаны бильярды-листы, из которых составлен (склеен) бильярд, эквивалентный линейно интегрируемому геодезическому потоку на неориентируемых поверхностях. В верхней строке рис. 10 на бильярдных столах введено проскальзывание (т. е. центральное отражение). На верхнем кольце слева проскальзывание

задано на внешней границе. На верхнем кольце справа проскальзывание происходит на внутренней границе кольца.

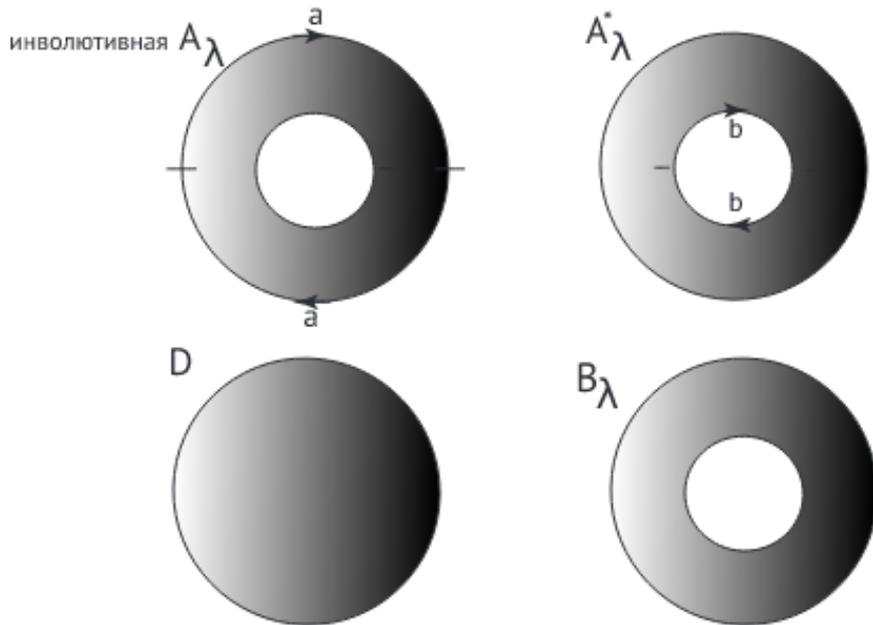


Рис. 10. В верхних билиардных кольцах введено проскальзывание. На левом верхнем кольце проскальзывание задано на внешней границе. На правом верхнем кольце проскальзывание происходит на внутренней границе

Если у круговых билиардов канонический дополнительный интеграл является линейным, то у эллиптико-гиперболических билиардов канонический интеграл (т. е. параметр софокусной квадрики) уже квадратичный. Данный факт позволяет нам моделировать квадратично интегрируемые геодезические потоки на проективной плоскости.

Теорема 9 (В.С. Матвеев). Пусть на проективной плоскости задана гладкая метрика $ds^2 = (f(x) + g(y))(dx^2 + dy^2)$. Такой геодезический поток интегрируем при помощи квадратичного интеграла. Отвечающая этому потоку меченая молекула W показана на рис. 11. В этих графах-молекулах присутствуют только атомы (бифуркации торов Лиувилля) специального вида B_n и B_n^* . При этом числовые метрики на молекулах имеют следующий вид.

- На внутренних ребрах подграфов $W(f)$ и $W(g)$ метки таковы. На ребрах между седловыми атомами r -метки равны бесконечности. Между седловыми атомами и атомами A метки r равны нулю, за исключением тех случаев, когда атом A отвечает неподвижной точке инволюции. В этом случае r -метка равна $\frac{1}{2}$.
- На оставшихся четырех ребрах метки указаны на рис. 11.
- Количество звездочек и меток $\frac{1}{2}$ в сумме равно четырем: по одной в каждом подграфе $W(f)$ или $W(g)$.

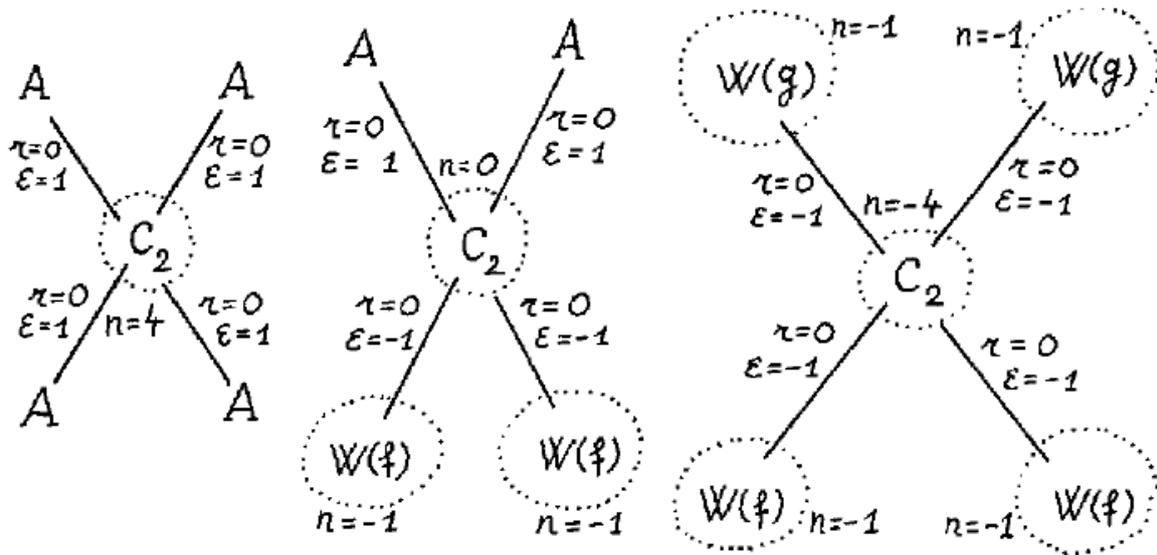


Рис. 11. Инварианты Фоменко–Цишанга для квадратично интегрируемых геодезических потоков на проективной плоскости

Самая простая молекула на рис. 11 слева моделируется бильярдом в области, ограниченной эллипсом с проскальзыванием (см. рис. 7). Остальные две молекулы, более сложные, реализуются специальными бильярдами гомеоморфными диску, составленному (склеенному) из элементарных бильярдов, перечисленных на рис. 12, причем на границе получившегося диска вводится проскальзывание. Конкретные правила склейки “элементарных кирпичей” описаны в работе [6]. Опишем их кратко. Молекула посередине моделируется бильярдом, который склеен из диска и колец, ограниченных двумя эллипсами, так же, как и в случае линейного интеграла. Для молекулы справа из двух половинок дисков (A_1) и областей A_0 последовательно склеивается диск по вертикальным отрезкам. Аналогично склеиваются кольца из B_1 и B_0 . Далее склеивается бильярдный стол так же, как и до этого.

Теорема 10 (В.Н. Завьялов). *Любой гладкий интегрируемый геодезический поток на проективной плоскости, обладающий квадратичным по импульсам дополнительным интегралом, лувиллево эквивалентен подходящему топологическому бильярду с проскальзыванием, состоящему (склеенному) из элементарных плоских бильярдов (см. рис. 12), ограниченных кривыми из фиксированного софокусного семейства. При этом квадратичный интеграл такого потока сводится к каноническому квадратичному интегралу на бильярде.*

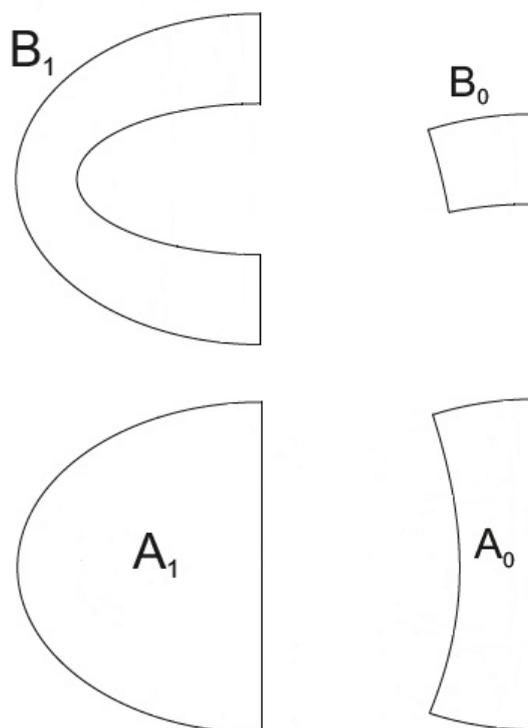


Рис. 12. Элементарные биллиарды, из которых составлен биллиард, лиувиллево эквивалентный квадратично интегрируемому геодезическому потоку на проективной плоскости

Список литературы

- [1] В. В. Ведюшкина, А. Т. Фоменко, *Силовые эволюционные биллиарды и биллиардная эквивалентность случая Эйлера и случая Лагранжа*, Докл. РАН **496** (1), 5–9 (2021). DOI: <https://doi.org/10.31857/S268695432101015X>
- [2] A. T. Fomenko, V. V. Vedyushkina, *Billiards with changing geometry and their connection with the implementation of the Zhukovsky and Kovalevskaya cases*, Russ. J. Math. Phys. **28** (3), 317–332 (2021). DOI: <https://doi.org/10.1134/S1061920821030055>
- [3] В. В. Ведюшкина, И. С. Харчева, *Биллиардные книжки моделируют все трехмерные бифуркации интегрируемых гамильтоновых систем*, Матем. сб. **209** (12), 17–56 (2018). DOI: <https://doi.org/10.4213/sm9039>
- [4] И. С. Харчева, *Изоэнергетические многообразия бильярдных книжек*, Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем., мех. (4), 12–22 (2020). URL: <http://mi.mathnet.ru/vmumm4336>

- [5] А. Т. Фоменко, В. В. Ведюшкина, *Бильярды и интегрируемость в геометрии и физике. Новый взгляд и новые возможности*, Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем., мех. (3), 15–25 (2019).
URL: <http://mi.mathnet.ru/vmumm624>
- [6] А. Т. Fomenko, V. V. Vedyushkina, V. N. Zav'yalov, *Liouville foliations of topological billiards with slipping*, Russ. J. Math. Phys. **28** (1), 37–55 (2021).
DOI: <http://doi.org/10.1134/S1061920821010052>

Анатолий Тимофеевич Фоменко

Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова,
механико-математический факультет,
Ленинские горы, д. 1, г. Москва, 119991, Россия,
e-mail: atfomenko@mail.ru

Billiards of variable configuration and billiards with slippage in Hamiltonian geometry and topology

A.T. Fomenko

Abstract. A class of billiards is found, the geometry of which can change with a change in the energy of a ball moving on a «billiard table». Such billiards are called force or evolutionary. They make it possible to implement important integrable Hamiltonian systems (with two degrees of freedom) on the entire phase 4-dimensional space of the system at once. That is, simultaneously on all regular isoenergetic 3-dimensional surfaces. The author and V.V. Vedyushkina proved that force billiards implement the Euler and Lagrange integrable cases in the dynamics of a heavy body in three-dimensional space. It is found that these two well-known systems «billiard equivalent», although they have integrals of different degrees – quadratic (Euler) and linear (Lagrange).

Keywords: force billiards, integrable Hamiltonian systems, Euler and Lagrange cases.

References

- [1] A. T. Fomenko, V. V. Vedyushkina, *Force evolutionary billiards and billiard equivalence of the Euler and Lagrange cases*, Dokl. Math. **103**, 1–4 (2021).
DOI: <https://doi.org/10.1134/S1064562421010154>
- [2] A. T. Fomenko, V. V. Vedyushkina, *Billiards with changing geometry and their connection with the implementation of the Zhukovsky and Kovalevskaya cases*, Russ. J. Math. Phys. **28** (3), 317–332 (2021).
DOI: <https://doi.org/10.1134/S1061920821030055>
- [3] V. V. Vedyushkina, I. S. Kharcheva, *Billiard books model all three-dimensional bifurcations of integrable Hamiltonian systems*, Sb. Math. **209** (12), 1690–1727 (2018).
DOI: <https://doi.org/10.1070/SM9039>
- [4] Kharcheva, I.S. *Isoenergetic Manifolds of Integrable Billiard Books*, Moscow Univ. Math. Bull. **75** (4), 149–160 (2020)
DOI: <https://doi.org/10.3103/S0027132220040026>
- [5] A. T. Fomenko, V. V. Vedyushkina, *Billiards and Integrability in Geometry and Physics. New Scope and New Potential*, Moscow Univ. Math. Bull. **74** (3), 98–107 (2019).
DOI: <https://doi.org/10.3103/S0027132219030021>

- [6] A. T. Fomenko, V. V. Vedyushkina, V. N. Zav'yalov, *Liouville foliations of topological billiards with slipping*, Russ. J. Math. Phys. **28** (1), 37–55 (2021).

DOI: <http://doi.org/10.1134/S1061920821010052>

Anatoly Timofeevich Fomenko

Moscow State University,

Faculty of Mechanics and Mathematics,

1 Leninskie Gory, Moscow, 119991, Russia,

e-mail: : atfomenko@mail.ru

Об индексном множестве пунктуально категоричных конечнопорожденных структур

А.А. Курмачева

Аннотация. Статья посвящена оценке индексного множества конечнопорожденных структур, имеющих с точностью до пунктуального изоморфизма единственное пунктуальное представление. Показано, что это индексное множество является Π_3^0 -полным.

Ключевые слова: примитивная рекурсия, пунктуальная категоричность, конечнопорожденная структура.

Введение

В работе исследуется вопрос об алгоритмической сложности построения пунктуально категоричных конечнопорожденных структур и пунктуально категоричных полугрупп через оценку сложности их индексных множеств. Основное понятие в этой области исследования — пунктуальная категоричность.

Впервые этот термин появился в статье И. Калимуллина, А. Мельникова и К. Нг [1], с которой данная тематика начала свое развитие, как независимая теория. В этой же статье было показано, что найти нетривиальные примеры пунктуально категоричных структур довольно трудно. Однако в классе конечнопорожденных структур удалось построить такой пример с помощью двух специальных унарных функций. Используя полученную конструкцию, удалось получить описание свойства пунктуальной категоричности для конечнопорожденных структур.

Теперь приведем необходимые обозначения и определения. Мы будем рассматривать пунктуальные структуры, т. е. алгебраические структуры в конечной сигнатуре, областью которых является ω , операции и отношения являются примитивно рекурсивными.

Определение 1. Структура, примитивно рекурсивно изоморфная любой своей пунктуальной копии, называется пунктуально категоричной.

Для пунктуальных конечнопорожденных структур можно ввести более удобную генерацию нумерацию, основанную на примитивно рекурсивном равенстве термов, а не на номерах примитивно рекурсивных функций, реализующих операции и отношения структуры на множестве ω . А именно, фиксируя конечное множество порождающих $X \subseteq \omega$,

Работа поддержана грантом Фонда развития теоретической физики и математики «БАЗИС».

можно рассмотреть множество $T(X)$ замкнутых термов данной сигнатуры с константами из X , стандартным образом нумеруя это множество. Тогда тип изоморфизма пунктуальной структуры \mathcal{A} определяется примитивно рекурсивными программами, реализующими не только сигнатурные отношения на термах, но и отношение равенства (конгруэнции) $=_{\mathcal{A}}$ на термах из $T(X)$, при этом \mathcal{A} оказывается изоморфной фактор-структуре на $T(X)$ относительно $=_{\mathcal{A}}$ (см. [2]).

Пусть дан номер $e = \langle e_0, e_1, \dots, e_n, e_{n+1} \rangle$, где n – число отношений в сигнатуре. Определим структуру \mathcal{P}_e как конечнопорожденную фактор-структуру, полученную на конечном множестве порождающих $X \subseteq \omega$, имеющих канонический номер e_0 , и определенную отношениями, реализуемыми примитивно рекурсивными программами с номерами e_1, \dots, e_n , относительно конгруэнции, заданной примитивно рекурсивной программой с номером e_{n+1} .

Отметим, что в построенной таким образом геделевой нумерации $\{\mathcal{P}_e\}_{e \in \omega}$ могут встретиться некорректные номера за счет того, что e_{n+1} -е отношение не является конгруэнцией относительно e_1, \dots, e_n . Кроме того, в этой нумерации могут встретиться конечные структуры. Однако нетрудно проверить, что условие на пунктуальную представимость (т. е. корректность и бесконечность) структуры \mathcal{P}_e является всего лишь Π_2^0 условием, что не будет оказывать влияния на дальнейшие рассуждения. Точно так же не будет оказывать влияния, рассматриваем ли мы нумерацию $\{\mathcal{P}_e\}_{e \in \omega}$ для какой-то конкретной сигнатуры или $\{\mathcal{P}_e\}_{e \in \omega}$ есть результат равномерного слияния всех нумераций по всем возможным конечным сигнатурам.

Основным объектом исследования данной работы является индексное множество пунктуально категоричных структур относительно данной нумерации.

Предложение 2. *Индексное множество пунктуально категоричных структур*

$$I = \{e \mid \mathcal{P}_e \text{ пунктуально категорична}\}$$

принадлежит уровню Π_3^0 арифметической иерархии.

Доказательство. По определению пунктуальной категорично имеем

$$\begin{aligned} e \in I &\Leftrightarrow \mathcal{P}_e \text{ пунктуально категорична} \\ &\Leftrightarrow \forall i [\mathcal{P}_i \cong \mathcal{P}_e \rightarrow \exists y (p_y : \mathcal{P}_i \rightarrow \mathcal{P}_e - \text{изоморфизм} \ \& \ \exists z : (p_y \circ p_z = p_z \circ p_y = \text{id}))]. \end{aligned}$$

Из конечнопорожденности структуры следует, что она вычислимо категорична, поэтому отношение изоморфизма \cong можно раскрыть через вычислимые изоморфизмы φ_j , заданные в стандартной нумерации частично вычислимых функций:

$$\begin{aligned} e \in I &\Leftrightarrow \forall i [\exists j (\varphi_j : \mathcal{P}_i \rightarrow \mathcal{P}_e - \text{вычислимый изоморфизм}) \rightarrow \exists y \\ & (p_y : \mathcal{P}_i \rightarrow \mathcal{P}_e - \text{изоморфизм} \ \& \ \exists z : (p_y \circ p_z = p_z \circ p_y = \text{id}))]. \end{aligned}$$

Отметим, что условие “ $\varphi_j : \mathcal{P}_i \rightarrow \mathcal{P}_e$ – вычислимый изоморфизм” подразумевает под собой, что φ_j является всюду определенной биективной функцией, сохраняющей алгебраические соотношения, и, следовательно, это условие записывается в арифметике через два квантора $\forall\exists$. Тогда получим последовательность кванторов

$$\forall(\exists\forall\exists \rightarrow \exists\forall).$$

Приводя формулу к пренексной нормальной форме, получим

$$\forall\exists\forall[\dots],$$

т. е. индексное множество I действительно принадлежит классу Π_3^0 . □

Основным результатом работы является доказательство того, что оценка Π_3^0 , полученная выше, является точной. Более того, индексное множество I пунктуально категоричных структур является Π_3^0 -полным. При доказательстве будет использоваться метод построения конечнопорожденных пунктуально категоричных структур из работы [1], а также следующий простой результат, дающий пример конечнопорожденной не пунктуально категоричной структуры.

Предложение 3. *Структура $\mathcal{S} = (\omega, s(x) = x + 1)$ не является пунктуально категоричной.*

Доказательство. Будем строить две пунктуальные копии нашей структуры \mathcal{S} , одна из которых $\mathcal{S} = \mathcal{A}$ – стандартная копия, а вторую \mathcal{B} будем строить так, чтобы она сохраняла вычислимый изоморфизм, который не был пунктуальным. Также необходимо перечислить все потенциальные примитивно рекурсивные изоморфизмы p_e между этими копиями. Введем требование для каждого примитивно рекурсивного изоморфизма p_e :

$$N_e : \mathcal{B} \xrightarrow{p_e} \mathcal{A},$$

которое будет работать против каждого p_e . Чтобы выполнить данное требование, будем выбирать свидетеля x из \mathcal{B} , у которого нет предшественника, и будем ждать пока $p_e(x) \downarrow$. В это время мы не можем задерживать построение \mathcal{B} , поэтому на каждом шаге вычисления изоморфизма p_e мы наращиваем две независимые цепочки, одна из которых порождается элементом $0_{\mathcal{B}}$ и имеет вид $s(0_{\mathcal{B}}), s^2(0_{\mathcal{B}}), s^3(0_{\mathcal{B}}), \dots$, а другая – элементом x и представляющая собой цепочку вида $s(x), s^2(x), s^3(x), \dots$ соответственно (строим “остров”). Как только мы сосчитаем $p_e(x)$, объявим x равным $s^n(0_{\mathcal{B}})$ для достаточно большого $n > p_e(x)$ и получим одну цепочку (приклеиваем “остров”). Далее повторяем эту процедуру для изоморфизма p_{e+1} .

Таким образом, последовательно удовлетворяя каждое требование N_e , мы будем присоединять новые цепочки в \mathcal{B} , сохраняя вычислимый изоморфизм. □

1. Основной результат

В данном разделе будем рассматривать структуры \mathcal{A} , носителем которых является ω , а функциональная сигнатура состоит из константы o и двух унарных функций s и t . Сама структура представляет собой цепочку, состоящую из t -циклов конечной длины, с помощью функции t мы можем перемещаться внутри цикла, а функция s отображает любой элемент одного цикла в фиксированный элемент следующего. Функция $f : \omega \rightarrow \omega \setminus \{0\}$ задает длину цикла.

Другими словами, структура \mathcal{A}_f образована порождающим элементом o и определяется соотношениями:

$$\begin{aligned} t^{f(n)}(s^n(o)) &= s^n(o) \quad \forall n \in \omega, \\ s(t^m(s^n(o))) &= s^{n+1}(o) \quad \forall n, m \in \omega, \end{aligned}$$

где f – примитивно рекурсивная функция.

Любой элемент структуры \mathcal{A}_f однозначно представим в виде $t^m(s^n(o))$, где $n \in \omega$ и $m < f(n)$.

Отметим, что структура \mathcal{A}_f обладает пунктуальным представлением тогда и только тогда, когда $\text{graph}\{\langle x, y \rangle : y = f(x)\}$ является примитивным рекурсивным множеством.

Теорема 4. *Индексное множество*

$$I = \{e \mid \mathcal{P}_e \text{ пунктуально категорична}\}$$

является Π_3^0 -полным.

Доказательство. Пусть S – произвольное Π_3^0 -множество. Тогда (см. [3]) существует вычислимая функция g со следующими свойствами:

$$\begin{aligned} W_{g(n,y)} \text{ бесконечно} &\iff W_{g(n,y)} = \omega, \\ n \in S &\iff (\forall y) [W_{g(n,y)} \text{ конечно}], \\ n \notin S &\iff (\exists z)(\forall y \geq z) [W_{g(n,y)} = \omega]. \end{aligned}$$

С помощью функции g построим для каждого $n \in \omega$ пунктуальную структуру $\mathcal{A} = \mathcal{A}_n$ так, чтобы выполнялось

$$n \in S \iff \mathcal{A}_n \text{ пунктуально категорична,}$$

откуда будет немедленно следовать утверждение теоремы. В дальнейшем будем считать, что произвольное $n \in \omega$ фиксировано, так что нижний индекс n в \mathcal{A}_n будет опускаться.

Запишем необходимые требования и определим их порядок выполнения. Для условия

пунктуальной категоричности необходимо выполнить требования

$$R_e : \mathcal{A} \cong \mathcal{P}_e \Rightarrow \exists \text{ примитивно рекурсивный изоморфизм } p : \mathcal{P}_e \rightarrow \mathcal{A}$$

для каждой примитивно рекурсивной структуры $\mathcal{P}_e = (\omega, o_e, s_e, t_e)$.

Для противоположного условия необходимо выполнить требование

$$N : \exists \text{ пунктуальная } \mathcal{B} \cong \mathcal{A} \forall m [p_m \text{ не является изоморфизмом из } \mathcal{B} \text{ на } \mathcal{A}],$$

где p_m – m -я примитивно рекурсивная функция.

Рассмотрим, как будет работать каждое требование по отдельности.

1.1. СТРАТЕГИЯ ПРЕССИНГА (R_e -ТРЕБОВАНИЯ) [1]. Основными задачами данной стратегии являются определение примитивно рекурсивной функции f и построение канонического пунктуального построения \mathcal{A} , в котором мы можем примитивно рекурсивно переходить от самого элемента к его координатам в нашей структуре. Координатами будем называть пару (n, m) , где n – номер цикла, присоединенного $s^n(o)$, и m – его место в этом цикле.

Ясно, что функция перехода от координат к самому элементу всегда примитивно рекурсивна в отличие от обратной к ней.

Мы считаем, что функции s_e и t_e – частично вычислимые функции с соответствующими примитивно рекурсивными функциями времени τ_e [4], т. е. $s_e(x)[\tau_e(x)] \downarrow$ и $t_e(x)[\tau_e(x)] \downarrow$ для любых e и x . Определим функцию пары следующим образом: $\langle e, i \rangle = 2^e(2i+1) - 1$. Полезным свойством данной функции является то, что для каждого e последовательность $\langle e, i \rangle$ образует арифметическую прогрессию, из этого следует, что в каждом интервале длины 2^{e+1} мы сможем найти число вида $\langle e, i \rangle$.

В нашей конструкции для каждого e и i будет верно

$$f(\langle e, i \rangle) \in \{2e + 1, 2e + 2\}.$$

Выбор между $2e + 1$ и $2e + 2$ будет зависеть от перечисления пунктуальной структуры \mathcal{P}_e .

Используя в каждом требовании чередование циклов различной длины, мы сможем устанавливать границу, которая обеспечит примитивно рекурсивный переход внутри структуры.

Теперь зафиксируем e и покажем, как определить $f(\langle e, i \rangle)$ для любого $i \in \omega$.

- 1) Начнем с $x = 0 \in \mathcal{P}_e$.
- 2) Будем применять s_e к x , но не более 2^{e+1+x} раз, пока не найдем некоторый y_0 , который ассоциируется с t_e -циклом длины $2e + 1$. Если такой y_0 найден, то вычисляем $y_1 = s_e^{2^{e+1}}(y_0)$, $y_2 = s_e^{2^{e+1}}(y_1)$, \dots , $y_{x+1} = s_e^{2^{e+1}}(y_x)$ и убеждаемся в том, что хотя бы один из элементов последовательности y_1, \dots, y_{x+1} генерирует t_e -цикл длиной $2e + 1$. Предположим, что это произошло за u_x шагов. При вычислении

этих значений мы не можем задерживать $f(x)$, поэтому мы определяем $f(\langle e, i \rangle)$ как повторяющийся шаблон $2e + 1, \underbrace{2e + 2, \dots, 2e + 2}_{x \text{ раз}}, 2e + 1$ для всех $i \leq u_x$.

- Обратим внимание, что если u_x не будет определен, то мы в конечном итоге определим $f(\langle e, i \rangle)$ как повторяющийся шаблон $2e+1, \underbrace{2e + 2, \dots, 2e + 2}_{x \text{ раз}}, 2e+1$ для всех $i \in \omega$, и в этом случае $\mathcal{P}_e \not\cong \mathcal{A}_f$.
- В противном случае u_x в конце концов будет найден, и мы позаботимся о том, чтобы для всех $i > u_x$ мы никогда не встречали шаблон $2e + 1, \underbrace{2e + 2, \dots, 2e + 2}_{x \text{ раз}}, 2e + 1$. Тогда граница u_x позволяет определить координаты (n, m) элемента x в структуре \mathcal{P}_e , и, следовательно, изоморфизм $p(x)$ примитивно рекурсивно.
- Увеличиваем x на единицу и переходим в этап 2).

1.2. N^e -СТРАТЕГИЯ ВЫПОЛНЕНИЯ N -ТРЕБОВАНИЯ, НЕ НАРУШАЮЩАЯ РАБОТУ СТРАТЕГИЙ $R_i, i \leq e$. Будем строить пунктуальную копию $\mathcal{B} \cong \mathcal{A}$, последовательно нарушая каждый возможный пунктуальный изоморфизм между пунктуальными копиями \mathcal{B} и \mathcal{A} .

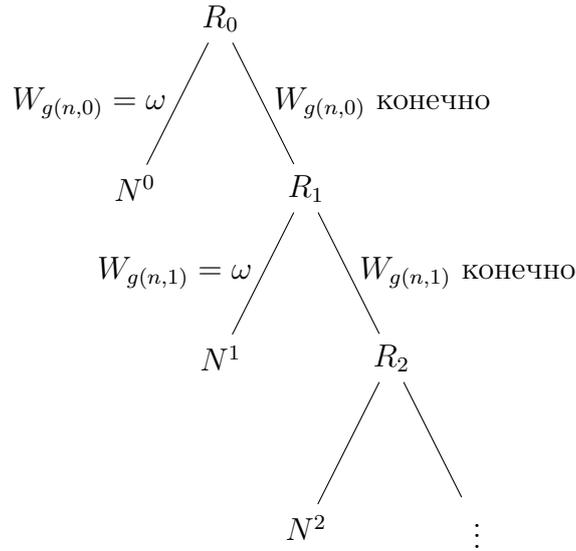
Работа стратегии будет организована по циклам m , где m – номер примитивно рекурсивной функции p_m .

- 1) Начинаем с цикла $m = 0$.
- 2) Берем новый элемент $x \in \mathcal{B}$, который в настоящий момент не имеет предшественника.
- 3) Ждем, пока сосчитается $p_m(x)$. В этот же момент начинаем строить в \mathcal{B} цепочку $s(x), s^2(x), \dots$, а также t -циклы, прикрепленные к элементам этой цепочки. При этом длина каждого такого t -цикла равна $2i + 2$, если он относится к стратегии $R_i, i \leq e$, и в данный момент еще не известно, что $\mathcal{P}_i \not\cong \mathcal{A}$. Если же $\mathcal{P}_i \not\cong \mathcal{A}$ уже установлено в ходе работы стратегии $R_i, i \leq e$, т.е. если очередное u_x не может быть найдено, то длины соответствующих t -циклов должны чередоваться: цикл длины $2i + 1$ должен появляться после каждых x последовательных циклов длины $2i + 2$. Если t -цикл относится к требованию $R_i, i > n$, то считаем, что длина каждого t -цикла равна $2i + 2$.
- 4) Как только $p_m(x) \downarrow$, ищем, где в порожденной элементом $s(p_m(x))$ подструктуре \mathcal{A} встречается построенная на данный момент последовательность t -циклов, позволяющая “приклеить” наш остров. Может оказаться, что такого места нет, поскольку в некоторой стратегии $R_i, i \leq e$, окажется неопределенным u_x ; в этом случае запускаем нашу N^e -стратегию заново с новой пунктуальной структурой \mathcal{B} (такая инициализация нашей стратегии может произойти не более $e + 1$ раз).

При этом мы предполагаем, что, пока данный этап стратегии N^e не завершится, стратегии R_i , $i > e$, не работают, а соответствующие им t -циклы в \mathcal{A} строятся равными $2i + 2$. Повторяем в \mathcal{B} структуру \mathcal{A} до нужного чередования и “приклеиваем остров”, полагая $x = s^k(o)$ для подходящего k , при этом изоморфизм между \mathcal{B} и \mathcal{A} оказывается не равным p_m .

5) Увеличиваем m на единицу и переходим в этап 2).

Чтобы нагляднее рассмотреть совместную работу требований, удобно их расположить на дереве:



Под каждым требованием R_e будет строиться своя копия \mathcal{B} для выполнения N -требования, не нарушающая стратегии R_i , $i \leq e$.

На каждом шаге s определим число $m(s)$ как наименьшее число, для которого выполнено

$$m(s) > s \vee W_{g(n,m(s)),s} \neq W_{g(n,m(s)),s+1}.$$

Тогда на шаге s нашей конструкции мы будем позволять работать лишь стратегиям R_i , $i \leq m(s)$, а также стратегии $N^{m(s)}$. При этом, если $N^{m(s)}$ находится на этапе 3), то шаг s построения заканчивается лишь тогда, когда этот этап полностью завершится (не позволяя до этого момента работать стратегиям R_i , $i > m(s)$).

Если $n \in S$, то $\lim_s m(s) = \infty$, так что истинным путем конструкции будет бесконечный путь $R_0 - R_1 - R_2 - \dots$. Каждая стратегия R_i будет инициализироваться конечное число раз (каждая инициализация подразумевает примитивно рекурсивное построение изоморфизма p заново). В этом случае будет построена пунктуально категоричная структура $\mathcal{A} = \mathcal{A}_n$.

Если же $n \notin S$, то существует $\liminf m(s) = m < \infty$. Тогда истинным путем конструкции будет конечный путь $R_0 - R_1 - \dots - R_m - N^m$. В этом случае после конечного числа инициализаций из-за стратегий R_0, R_1, \dots, R_m стратегия N^m приведет к выполнению требования N , т. е. пунктуальная структура $\mathcal{A} = \mathcal{A}_n$ не будет пунктуально категоричной. \square

Заметим, что доказанная выше теорема может быть переформулирована и доказана в терминах индексного множества конечнопорожденных полугрупп, являющихся пунктуально категоричными, при помощи техники кодирования унарных структур в полугруппы из [5].

Список литературы

- [1] I. Sh. Kalimullin, A. G. Melnikov, K. M. Ng, *Algebraic structures computable without delay*, Theoret. Comput. Sci. **674**, 73–98 (2017).
DOI: <https://doi.org/10.1016/j.tcs.2017.01.029>
- [2] П. Е. Алаев, *Полиномиально вычислимые структуры с конечным числом порождающих*, Алгебра и логика **59** (3), 385–394 (2020).
DOI: <https://doi.org/10.33048/alglog.2020.59.307>
- [3] R. I. Soare, *Recursively enumerable sets and degrees. A study of computable functions and computably generated sets*, Perspectives in math. logic. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, etc., 1987.
URL: <https://link.springer.com/book/9783540666813>
- [4] N. A. Bazhenov, R. G. Downey, A. G. Melnikov, I. Sh. Kalimullin, *Foundations of online structure theory*, Bull. Symb. Log. **25** (2), 141–181 (2019).
DOI: <https://doi.org/10.1017/bsl.2019.20>
- [5] И. Ш. Калимуллин, *О построении пунктуально категоричных полугрупп*, Алгебра и логика **59** (5), 600–605 (2020).
DOI: <https://doi.org/10.33048/alglog.2020.59.507>

Александра Алексеевна Курмачева

Казанский (Приволжский) федеральный университет,
Кафедра алгебры и математической логики,
ул. Кремлевская, д. 18, г. Казань, 420008, Россия,
e-mail: xsanca@mail.ru

On the index set of punctually categorical finitely generated structures

A.A. Kurmacheva

Abstract. The paper is devoted to an estimation of the index set of finitely generated structures which have precisely one punctual presentation up to punctual isomorphisms. It is shown that this index set is Π_3^0 -complete.

Keywords: primitive recursion, punctual categoricity, finitely generated structure.

References

- [1] I. Sh. Kalimullin, A. G. Melnikov, K. M. Ng, *Algebraic structures computable without delay*, Theoret. Comput. Sci. **674**, 73–98 (2017).
DOI: <https://doi.org/10.1016/j.tcs.2017.01.029>
- [2] P. E. Alaev, *Polynomially computable structures with finitely many generators*, Algebra and Logic **59** (3), 266–272 (2020).
DOI: <https://doi.org/10.1007/s10469-020-09598-5>
- [3] R. I. Soare, *Recursively enumerable sets and degrees. A study of computable functions and computably generated sets*, Perspectives in math. logic. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, etc., 1987.
URL: <https://link.springer.com/book/9783540666813>
- [4] N. A. Bazhenov, R. G. Downey, A. G. Melnikov, I. Sh. Kalimullin, *Foundations of online structure theory*, Bull. Symb. Log. **25** (2), 141–181 (2019).
DOI: <https://doi.org/10.1017/bsl.2019.20>
- [5] I. Sh. Kalimullin, *Constructing punctually categorical semigroups*, Algebra and Logic **59** (5), 408–411 (2020).
DOI: <https://doi.org/10.1007/s10469-020-09614-8>

Alexandra Alekseevna Kurmacheva

Kazan Federal University,
Department of Algebra and Mathematical Logic,
18 Kremlyovskaya str., Kazan 420008, Russia,
e-mail: xsanca@mail.ru

Арифметика и комбинаторика рекуррентных последовательностей

Р. В. Уразбахтин

Аннотация. Исследуются арифметические свойства целочисленных последовательностей, отвечающие за количества замощений колец, разбитых на конечное число одинаковых ячеек, с помощью двух миношек. Также изучаются рекуррентные последовательности, связанные с треугольником Паскаля.

Ключевые слова: теорема Эйлера, замощение, треугольник Паскаля, рекуррентные последовательности.

Введение

В работе изучаются целочисленные последовательности $\{L_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, где для каждого $n \in \mathbb{N}$ число L_n равно количеству замощений кольца, разбитого на n одинаковых ячеек, двумя миношками. Под n -миношкой будем подразумевать прямоугольное полимино размера $1 \times n$. Показано, что для произвольно простого числа p для этой последовательности выполнен аналог теоремы Эйлера: $L_{p^n} \equiv L_{p^{n-1}} \pmod{p^n}$.

В последнее время было замечено, что многие целочисленные последовательности, возникающие в различных математических задачах, удовлетворяют аналогу теоремы Эйлера. Так, например, Р. Апери в 1978 году показал иррациональность числа $\zeta(3)$. При доказательстве этого утверждения он воспользовался аппроксимацией числа $\zeta(3)$ рациональными числами $b_n/a_n \in \mathbb{Q}$ ($n \in \mathbb{N}$), где $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ – целочисленная последовательность, удовлетворяющая рекуррентному соотношению

$$(n+1)^3 a_{n+1} - (2n+1)(17n^2 + 17n + 5)a_n + n^3 a_{n-1} = 0,$$

при этом

$$a_n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2 \binom{n+k}{k}^2.$$

Члены последовательности $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ называются числами Апери. В [1] было показано, что для чисел Апери имеет место сравнение

Работа поддержана грантом Российского научного фонда (проект № 22-21-20024) и выполнена в рамках реализации программы развития Научно-образовательного математического центра Приволжского федерального округа (соглашение № 075-02-2022-882).

$$a_{mp^r} \equiv a_{mp^{r-1}} \pmod{p^{3r}},$$

где p – произвольное простое число ($p \geq 5$) и $m, r \geq 1$.

Также в нашей работе было получено новое, более простое комбинаторное доказательство результата из работы [2], устанавливающее связь между рекуррентными последовательностями и треугольником Паскаля.

1. Арифметические свойства рекуррентных последовательностей, связанных с задачей о количестве замощений кольца

В [3] была рассмотрена задача о количестве замощений кольца, разбитого на n одинаковых ячеек, 2-миношками и 3-миношками. Это количество обозначим через P_n . Члены последовательности $\{P_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ называются числами Перрина и эта последовательность изучалась во многих работах. Хорошо известно, что числа Перрина удовлетворяют рекуррентному соотношению $P_n = P_{n-2} + P_{n-3}$. В [3] было доказано важное арифметическое свойство этой последовательности:

Теорема 1. Для любого простого числа p имеет место сравнение $P_p \equiv 0 \pmod{p}$.

Также в этой работе было получена формула, выражающая общий член последовательности $\{P_n\}_{n \in \mathbb{N}}$.

Теорема 2. Для любого $n \in \mathbb{N}$ имеет место равенство $P_n = \alpha_1^n + \alpha_2^n + \alpha_3^n$, где $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ – корни характеристического многочлена $x^3 - x - 1$ последовательности P_n .

Рассмотрим более общую задачу о количестве замощений кольца, разбитого на n одинаковых ячеек, с помощью k -миношек и l -миношек, у которых количества цветов соответственно равны a и b . Это количество будем обозначать через $L_n(k, l, a, b)$.

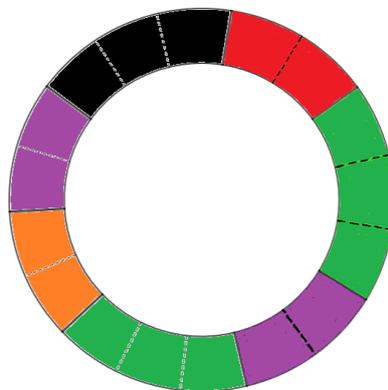


Рис. 1

Теорема 3. Пусть a, b, k, l ($k < l$) – произвольные натуральные числа. Тогда для произвольного $n \in \mathbb{N}$ имеет место равенство

$$L_n(k, l, a, b) = \alpha_1^n + \alpha_2^n + \alpha_3^n + \dots + \alpha_l^n,$$

где α_i – корни уравнения $x^l - a \cdot x^{l-k} - b = 0$.

Доказательство. Для каждого $n \in \mathbb{N}$ положим $S_n = \alpha_1^n + \alpha_2^n + \alpha_3^n + \dots + \alpha_l^n$. Покажем, что равенство $S_n = L_n(k, l, a, b)$ имеет место для произвольно натурального числа n .

Для краткости записи положим $L_n = L_n(k, l, a, b)$. Ясно, что начальные значения L_1, \dots, L_l последовательности $\{L_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ соответственно равны:

$$\begin{aligned} L_i &= 0, \text{ если } i \text{ не делится на } k \text{ и } 1 \leq i \leq l-1, \\ L_i &= k \cdot a^{\frac{i}{k}}, \text{ если } i \text{ делится на } k \text{ и } 1 \leq i \leq l-1, \\ L_l &= l \cdot b, \text{ если } l \text{ не делится на } k, \\ L_l &= k \cdot a^{\frac{l}{k}} + l \cdot b, \text{ если } l \text{ делится на } k. \end{aligned}$$

Покажем, что последовательность $\{L_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ удовлетворяет рекуррентному соотношению $L_n = aL_{n-k} + bL_{n-l}$. Для $n \geq l+1$ выберем конкретную ячейку кольца, разбитого на n одинаковых ячеек, в качестве “верхней”. Найдем миношку, которая закрывает верхнюю часть; удаляем миношку непосредственно рядом с ней (в направлении против часовой стрелки) и склеиваем полоску обратно. В результате получается кольцо с меньшим количеством ячеек.

Если удаленная фигура была k -миношкой, одного из a цветов, то в результате получается кольцо, разбитое на $(n-k)$ одинаковых ячеек; если удаленная фигура была l -миношкой, одного из b цветов, то в результате получается кольцо, разбитое на $(n-l)$ одинаковых ячеек. При каждом фиксированном выборе цветов удаляемых k - и l -миношек мы получаем биекцию между множеством замощений кольца, разбитого на n одинаковых ячеек, с фиксированными цветами k - и l -миношек, находящиеся перед “верхней” миношкой, и множеством замощений двух колец, разбитых соответственно на $n-k$ и $n-l$ одинаковых ячеек. Таким образом, $L_n = aL_{n-k} + bL_{n-l}$.

Пусть $\alpha_1, \dots, \alpha_l$ – корни уравнения $x^l - a \cdot x^{l-k} - b = 0$, $l > k$. Для каждого i ($1 \leq i \leq l$) через f_i обозначим коэффициенты многочлена $(-1)^i(x^l - a \cdot x^{l-k} - b)$ при x^{l-i} . Тогда

$$f_1 = \dots = f_{k-1} = 0, f_k = (-1)^{k+1} \cdot a, f_{k+1} = \dots = f_{l-1} = 0, f_l = (-1)^{l+1} \cdot b.$$

Вычислим первые l членов $\{S_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ последовательности, используя формулы Ньютона

$$S_i + \sum_{t=1}^{i-1} (-1)^t f_t S_{i-t} + (-1)^i f_i \cdot i = 0,$$

где $1 \leq i \leq l-1$.

Покажем, что имеет место равенство

$$S_{ik+j} = \begin{cases} 0, & \text{если } ik + j \leq l - 1 \text{ и } 1 \leq j \leq k - 1; \\ k \cdot a^i, & \text{если } ik \leq l - 1 \text{ и } j = 0; \\ l \cdot b, & \text{если } ik + j = l \text{ и } 1 \leq j \leq k - 1; \\ k \cdot a^{\frac{l}{k}} + l \cdot b, & \text{если } ik = l \text{ и } j = 0. \end{cases}$$

Рассмотрим случай, когда $ik + j \leq l - 1$ и $1 \leq j \leq k - 1$. С помощью математической индукции по $i \in [1; [l/k]]$ покажем, что $S_{ik+j} = 0$. Учитывая, что $f_1 = \dots = f_{k-1} = 0$, из формул Ньютона следуют равенства $S_1 = S_2 = \dots = S_{k-1} = 0$. Предположим, что $S_{ik+j} = 0$ верно для некоторого $1 < i < [l/k]$. Учитывая, что все f_i , за исключением $f_l = (-1)^{l+1}b$ и $f_k = (-1)^{k+1}a$, равны нулю, получаем

$$\begin{aligned} S_{(i+1)k+j} &= \sum_{m=1}^{(i+1)k+j-1} (-1)^{m+1} f_m S_{(i+1)k+j-m} + (-1)^{(i+1)k+j+1} f_{(i+1)k+j} \cdot ((i+1)k+j) = \\ &= (-1)^{k+1} \cdot f_k \cdot S_{ik+j} = 0. \end{aligned}$$

Рассмотрим второй случай, когда $ik \leq l - 1$ и $j = 0$, где $i \in [1; [l/k]]$. Покажем, что $S_{ik} = k \cdot a^i$ с помощью математической индукции по $i \in [1; [l/k]]$. Учитывая, что $f_1 = \dots = f_{k-1} = 0$, имеем

$$S_k = \sum_{i=1}^{k-1} (-1)^{i+1} f_i S_{k-i} + (-1)^{k+1} f_k \cdot k = (-1)^{k+1} f_k \cdot k = (-1)^{k+1} \cdot a \cdot (-1)^{k+1} \cdot k = k \cdot a.$$

Предположим, что $S_{ik} = k \cdot a^i$ верно для некоторого $1 < i < [l/k]$. Учитывая, что все f_i , за исключением $f_l = (-1)^{l+1}b$ и $f_k = (-1)^{k+1}a$, равны нулю, получаем

$$\begin{aligned} S_{(i+1)k} &= \sum_{m=1}^{(i+1)k-1} (-1)^{m+1} f_m S_{(i+1)k-m} + (-1)^{(i+1)k+1} f_{(i+1)k} \cdot ((i+1)k) = \\ &= (-1)^{k+1} \cdot f_k \cdot S_{ik} = (-1)^{k+1} \cdot (-1)^{k+1} \cdot a \cdot k \cdot a^i = k \cdot a^{i+1}. \end{aligned}$$

Имеют место равенства

$$S_l = \sum_{i=1}^{l-1} (-1)^{i+1} f_i S_{l-i} + (-1)^{l+1} f_l \cdot l = (-1)^{k+1} \cdot f_k \cdot S_{l-k} + (-1)^{l+1} f_l \cdot l = S_{l-k} \cdot a + l \cdot b.$$

Если l не делится на k , то $S_l = l \cdot b$. В противном случае $S_l = l \cdot b + k \cdot a^{\frac{l}{k}}$. Покажем, что последовательность $\{S_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ удовлетворяет рекуррентному соотношению $S_n = aS_{n-k} + bS_{n-l}$. Так как $f_i = 0$ ($i \neq k, i \neq l$), то по второй формуле Ньютона

([4], с. 229) имеют место равенства

$$\begin{aligned} S_n + \sum_{k=1}^n (-1)^k f_k S_{n-k} &= 0, \\ S_n + (-1)^k f_k \cdot S_{n-k} + (-1)^l f_l \cdot S_{n-l} &= 0, \\ S_n - a \cdot S_{n-k} - b \cdot S_{n-l} &= 0, \\ S_n &= a \cdot S_{n-k} + b \cdot S_{n-l}. \end{aligned}$$

Получаем необходимую рекуррентную формулу. Таким образом, последовательности $\{L_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ и $\{S_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ удовлетворяют одному и тому же рекуррентному соотношению и их значения от 1 до l совпадают, следовательно, $\{L_n\}_{n \in \mathbb{N}} = \{S_n\}_{n \in \mathbb{N}}$. \square

Для дальнейших рассуждений нам потребуется

Теорема 4 (см. [5]). *Если a_1, \dots, a_k – все корни нормированного многочлена $f \in \mathbb{Z}[x]$ степени k с учетом их кратности, то для каждого простого числа p и произвольного $n \in \mathbb{N}$ имеет место сравнение*

$$a_1^{p^n} + a_2^{p^n} + \dots + a_k^{p^n} \equiv a_1^{p^{n-1}} + \dots + a_k^{p^{n-1}} \pmod{p^n}.$$

Непосредственно следуют из теоремы 3 и теоремы 4 вытекает

Теорема 5. *Пусть p – простое число и $a, b, l, k \in \mathbb{N}$ ($k < l$). Тогда для произвольных натуральных чисел m и n выполнено сравнение*

$$L_{mp^n}(k, l, a, b) \equiv L_{mp^{n-1}}(k, l, a, b) \pmod{p^n}.$$

Обобщением теоремы 1 является

Следствие 6. Пусть p – простое число и $a, b, l, k \in \mathbb{N}$ ($k < l$). Если $k > 1$, то выполняется сравнение

$$L_p(k, l, a, b) \equiv 0 \pmod{p}.$$

Самый простой пример – это замощение кольца, разбитого на конечное число одинаковых ячеек, с помощью 1-миношек m цветов. Ему будет соответствовать целочисленная геометрическая последовательность

$$1, m, m^2, \dots, m^k, \dots$$

В этом случае теорема 5 превращается в теорему Эйлера, согласно которой для каждого целого числа m и всякого простого числа p

$$m^{p^n} \equiv m^{p^{n-1}} \pmod{p^n}.$$

2. Треугольник Паскаля и рекуррентные последовательности

Рассмотрим треугольник Паскаля, расположенный согласно рис. 2.

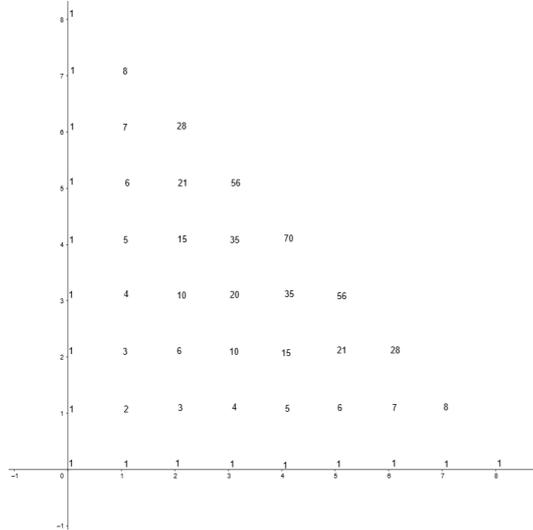


Рис. 2

Каждой точке на декартовой плоскости с неотрицательными координатами (x, y) поставим в соответствии биномиальный коэффициент $\binom{x+y}{x}$. Для произвольной прямой на декартовой плоскости, уравнение которой имеет вид $ax + by = n$, где $a, b, n \in \mathbb{N}$ ($a < b$) и $(a, b) = 1$, рассмотрим сумму биномиальных коэффициентов, соответствующих точкам с неотрицательными координатами, через которые проходит данная прямая:

$$T_n = \sum_{\substack{x=0, y=0 \\ ax+by=n}}^{\lfloor \frac{n}{a} \rfloor, \lfloor \frac{n}{b} \rfloor} \binom{x+y}{x}.$$

В работе [2] было доказано, что последовательность $\{T_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ является рекуррентной и удовлетворяет следующему рекуррентному соотношению:

$$T_n = T_{n-a} + T_{n-b}.$$

Мы докажем это утверждение и его обобщение более простым способом по сравнению с методами из [2].

Для произвольного $n \in \mathbb{N}$ рассмотрим сумму вида

$$T_n = \sum_{\substack{x=0, y=0 \\ ax+by=n}}^{\lfloor \frac{n}{a} \rfloor, \lfloor \frac{n}{b} \rfloor} \binom{x+y}{x} A^x B^y,$$

где $A, B \in \mathbb{N}$. Рассмотрим задачу о количестве замощений полосы разбитой на n одина-

ковых ячеек с помощью a -миношек и b -миношек ($a < b$), у которых количество цветов соответственно равны A и B . Количеством a - и b -миношек, которые покроют нашу полосу, будут соответствовать пары целых неотрицательных чисел, являющиеся решениями уравнения $ax + by = n$. Длиной полосы будем называть количество одинаковых ячеек, на которые она разбивается. Предположим, что в замощении полосы длины n участвуют x a -миношек и y b -миношек. Количество их размещений с учетом их раскрасок будет равно $\binom{x+y}{x} A^x B^y$. Тогда количество всевозможных замощений полосы длины n будет равно в точности T_n .

Если полоса длины n заканчивается на a -миношку, одного из A цветов, то количество замощений такой полосы равно $T_{n-a} \cdot A$. Если полоса длины n заканчивается на b -миношку, одного из B цветов, то количество замощений такой полосы равно $T_{n-b} \cdot B$. Таким образом, последовательность T_n удовлетворяет рекуррентному соотношению: $T_n = AT_{n-a} + BT_{n-b}$. Несложно заметить, что начальные значения этой последовательности имеют следующие значения: $T_m = A^{\frac{m}{a}}$, если $\frac{m}{a} \in \mathbb{N}$, ($m < b$), $T_b = B$ и $T_i = 0$ для остальных i , меньших b .

Для дальнейших рассуждений нам потребуется

Теорема 7 (Сильвестр). Пусть a и b взаимно простые натуральные числа. Тогда, если $n > (a-1)(b-1) - 1$, уравнение $ax + by = n$ имеет решение в натуральных числах.

Рассмотрим треугольник Паскаля расположенный стандартно согласно рис. 3. Каждой точке на декартовой плоскости из четвертой четверти с координатами (x, y) сопоставим в соответствие ее “массу” $\binom{-y}{x} A^{-x-y} B^x$.

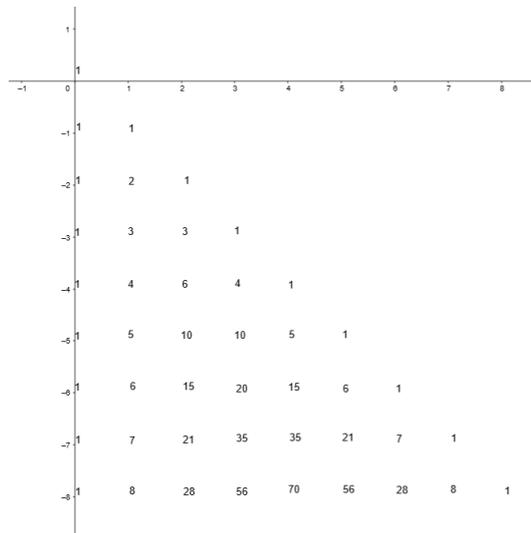


Рис. 3

Пусть k, l взаимно простые натуральные числа. Рассмотрим на декартовой плоскости из рис. 3 семейство параллельных прямых l_1, l_2, \dots , определенных следующим образом.

Прямая l_1 проходит через начало координат с тангенсом угла наклона равным $\frac{k}{l}$, а каждая следующая прямая получается из предыдущей параллельным переносом на вектор $\left(0; -\frac{1}{l}\right)$. Ясно, что для каждого $i \in \mathbb{N}$ уравнение прямой l_i имеет вид

$$y = \frac{k}{l}x - \frac{i}{l}.$$

Из изложенного выше и теоремы Сильвестра следует, что это семейство параллельных прямых при $i > (k + l - 1)(l - 1) - 1$ имеет непустое пересечение с множеством точек из треугольника Паскаля, изображенного на рис. 3.

Для каждого натурального числа n через $F_n(k, l, A, B)$ обозначим сумму “масс” точек с целочисленными координатами из четвертой четверти принадлежащих прямой l_{n+1} .

Теорема 8. *Последовательность $\{F_i(k, l, A, B)\}_{i \in \mathbb{N}}$ удовлетворяет рекуррентному соотношению:*

$$F_n(k, l, A, B) = AF_{n-l}(k, l, A, B) + BF_{n-(k+l)}(k, l, A, B),$$

начальные значения $F_1(k, l, A, B), \dots, F_{k+l}(k, l, A, B)$ определяются согласно следующим равенствам:

$$\begin{aligned} F_i(k, l, A, B) &= 0, \text{ если } i \text{ не делится на } l, \\ F_i(k, l, A, B) &= A^{\frac{i}{l}}, \text{ если } i \text{ делится на } l, \\ F_{k+l}(k, l, A, B) &= B. \end{aligned}$$

При этом для каждого n $F_n(k, l, A, B)$ совпадает с количеством замощений полосы, состоящей из n одинаковых ячеек, миношками размеров l и $k + l$, у которых количество цветов соответственно равно A и B .

Доказательство. Рассмотрим прямую $ax' + by' = n$, где $a, b, n \in \mathbb{N}$ и a и b взаимно простые, которая получается из прямой $y = \frac{k}{l}x - \frac{n}{l}$ с помощью преобразования $x' = -(x + y); y' = x$. Тогда $b - a = k, a = l$ и, следовательно, $b = l + k$. Согласно рассуждениям, приведенным в начале этого раздела, последовательность $\{F_i(k, l, A, B)\}_{i \in \mathbb{N}}$ удовлетворяет следующему рекуррентному соотношению:

$$F_n(k, l, A, B) = AF_{n-l}(k, l, A, B) + BF_{n-(k+l)}(k, l, A, B)$$

и для каждого n $F_n(k, l, A, B)$ совпадает с количеством замощения полосы, состоящей из n одинаковых ячеек, миношками размеров a и b , у которых количество цветов соответственно равны A и B . □

Далее рассмотрим примеры, иллюстрирующие предыдущую теорему. Если тангенс угла наклона семейства параллельных прямых равен $1/2$, то получаются числа, соответствующие рекуррентной последовательности $x_n = x_{n-2} + x_{n-3}$.

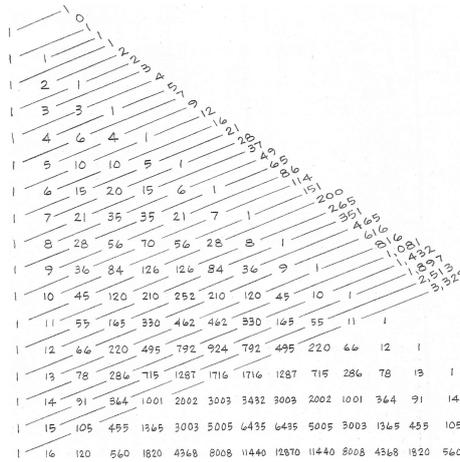


Рис. 4

Если тангенс угла наклона семейства параллельных прямых равен $1/3$, то получаются числа, соответствующие рекуррентной последовательности $x_n = x_{n-3} + x_{n-4}$.

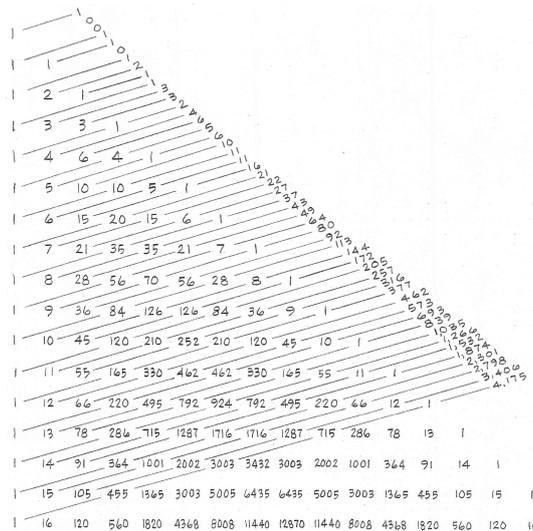


Рис. 5

Предыдущие два изображения из примеров, иллюстрирующие теорему 7, взяты из открытого источника: <https://www.anaphoria.com/wilsonmeru.html>.

Автор благодарит А.Н. Абызова за постановку задач и предложенные методы их решений. Также автор благодарит Д.Т. Тапкина за ценные советы.

Список литературы

[1] М. J. Coster, *Supercongruences*, PhD thesis, Universiteit Leiden, 1988.

- [2] T. M. Green, *Recurrent sequences and Pascal's triangle*, Math. Magazine **41** (1), 13–21 (1968).
DOI: <https://doi.org/10.1080/0025570X.1968.11975825>
- [3] G. Minton, *Three approaches to a sequence problem*, Math. Magazine **84** (1), 33–37 (2011).
DOI: <https://doi.org/10.4169/math.mag.84.1.033>
- [4] А. К. Сушкевич, *Основы высшей алгебры*, Гостехиздат, М., 1941.
- [5] C. J. Smyth, A coloring proof of a generalization of Fermat's little theorem, Amer. Math. Monthly **93** (6), 469–471 (1986).
DOI: <https://doi.org/10.1080/00029890.1986.11971858>

Рамиль Вилович Уразбахтин

Казанский (Приволжский) федеральный университет,
ул. Кремлевская, д. 18, г. Казань, 420008, Россия,
e-mail: ramilurv02@mail.ru

Arithmetic and combinatorics of recurrent sequences

R. V. Urazbahtin

Abstract. We study arithmetic properties of integer sequences counting amount of tilings of circular strips with two pieces consisting of equal cells. We also investigate recurrent sequences related to Pascal's triangle.

Keywords: Euler's theorem, tilings, Pascal's triangle, recurrent sequences.

References

- [1] M. J. Coster, *Supercongruences*, PhD thesis, Universiteit Leiden, 1988.
- [2] T. M. Green, *Recurrent sequences and Pascal's triangle*, Math. Magazine **41** (1), 13–21 (1968).
DOI: <https://doi.org/10.1080/0025570X.1968.11975825>
- [3] G. Minton, *Three approaches to a sequence problem*, Math. Magazine **84** (1), 33–37 (2011).
DOI: <https://doi.org/10.4169/math.mag.84.1.033>
- [4] A. K. Sushkevich, *An introduction to higher algebra*, Gostechizdat, M., 1941 [in Russian].
- [5] C. J. Smyth, A coloring proof of a generalization of Fermat's little theorem, Amer. Math. Monthly **93** (6), 469–471 (1986).
DOI: <https://doi.org/10.1080/00029890.1986.11971858>

Ramil Vilovich Urazbahtin

Kazan Federal University,
18 Kremlyovskaya str., Kazan 420008, Russia,
e-mail: ramilurv02@mail.ru

Конкурс 2023 года на соискание медали и премии имени Н.И. Лобачевского «За выдающиеся работы в области фундаментальной и прикладной математики»

Казанский федеральный университет объявляет очередной Конкурс на соискание медали и премии имени Н.И. Лобачевского «За выдающиеся работы в области фундаментальной и прикладной математики».

Медаль имени Н.И. Лобачевского и соответствующая денежная премия в размере 75 000 (семьдесят пять тысяч) долларов США присуждаются Казанским федеральным университетом за выдающиеся работы в области фундаментальной и прикладной математики. Медаль и премия носят имя Николая Ивановича Лобачевского (1792-1856), гениального русского математика, основателя неевклидовой геометрии, ректора Казанского университета (1827-1845).

В конкурсе на соискание медали и премии имени Н.И. Лобачевского могут участвовать российские и зарубежные ученые персонально.

Право выдвижения кандидатов на соискание медали и премии предоставляется:

- а) академикам и членам-корреспондентам Российской академии наук и Академии наук Республики Татарстан, членам зарубежных государственных академий и государственных научных сообществ;
- б) российским и зарубежным научным учреждениям, высшим учебным заведениям;
- в) государственным научным и инженерно-техническим обществам;
- г) научным советам Российской академии наук и других ведомств по важнейшим проблемам науки;
- д) научно-техническим советам министерств, ведомств, высокотехнологичных компаний.

К участию в конкурсном отборе допускаются работы, освещающие результаты научных исследований, внесших значительный вклад в развитие фундаментальной и прикладной математики.

Медаль и премия, а также диплом об их присуждении, вручаются лицу, удостоенному наградой, на торжественном заседании Ученого совета КФУ в конце ноября – начале декабря 2023 года по результатам мотивированного заключения жюри.

Выдвижение кандидатов для участия в конкурсном отборе принимаются по адресу электронной почты **medal@kpfu.ru** с момента публикации объявления о конкурсе. Интернет-адрес сайта медали и премии имени Н.И. Лобачевского:

<https://mathcenter.kpfu.ru/medal>.

Организации или отдельные лица, выдвинувшие кандидата на соискание медали и премии, представляют в секретариат Конкурса (medal@kpfu.ru следующую информацию (с пометкой «На соискание медали и премии имени Н.И. Лобачевского»):

- а) сведения об авторе (перечень основных научных работ, открытий, изобретений, место работы и занимаемая должность, домашний адрес, номера служебного и домашнего телефонов);
- б) опубликованную научную работу (серию работ) или ссылки на них, материалы научного открытия или изобретения;
- в) мотивированное представление, включающее научную характеристику работы, ее значение для развития науки и народного хозяйства.

Прием работ осуществляется до **30 июня 2023 года** включительно. Работы, представленные на конкурс, не возвращаются.

Победитель конкурса будет определен до **30 сентября 2023 года**.

Медаль, а также диплом о присуждении медали и соответствующая денежная премия в размере 75000 (семьдесят пять тысяч) долларов США вручаются лицу, удостоенному награды, по результатам мотивированного заключения Международного жюри конкурса на торжественном заседании Ученого совета КФУ в конце ноября — начале декабря 2023 года. Церемония вручения состоится в Александровском зале Казанского федерального университета. Медаль и премию вручают Председатель Попечительского совета и Председатель Ученого совета Казанского федерального университета.